

Precálculo

Matemáticas para el cálculo

Séptima edición

Stewart • Redlin • Watson

SÉPTIMA EDICIÓN

PRECÁLCULO

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

ACERCA DE LOS AUTORES

James Stewart obtuvo la maestría de la Universidad de Stanford y el doctorado de la Universidad de Toronto. Realizó una investigación en la Universidad de Londres y fue influenciado por el famoso matemático George Polya en la Universidad de Stanford. Stewart es profesor emérito de la Universidad McMaster y actualmente es profesor de matemáticas en la Universidad de Toronto. Su campo de investigación es el análisis armónico y las conexiones entre las matemáticas y la música. James Stewart es el autor de una exitosa serie de libros de texto para cálculo publicada por Cengage Learning, incluyendo *Cálculo, Cálculo: trascendentes tempranas* y *Cálculo: conceptos y contextos;* una serie de textos de precálculo; y una serie de libros de texto de matemáticas para secundaria.

Lothar Redlin creció en la isla de Vancouver, obtuvo una licenciatura en Ciencias de la Universidad de Victoria, y recibió un doctorado de la Universidad de McMaster en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación y la docencia en la Universidad de Washington, en la Universidad de Waterloo y en la Universidad Estatal de California en Long Beach. En la actualidad es profesor de matemáticas en la Universidad Estatal de Pennsylvania, en el Campus de Abington. Su campo de investigación es la topología.

Saleem Watson recibió su licenciatura en Ciencias por la Universidad Andrews, en Michigan. Realizó estudios de posgrado en la Universidad de Dalhousie y en la Universidad de McMaster, donde obtuvo su doctorado, en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Varsovia, en Polonia. También enseñó en la Universidad Estatal de Pennsylvania. Actualmente es profesor de matemáticas en la Universidad Estatal de California, Long Beach. Su campo de investigación es el análisis funcional.

Stewart, Redlin y Watson también han publicado *College Algebra, Trigonometry, Algebra and Trigonometry* y (con Phyllis Panman) *College Algebra: Concepts and Contexts.*

La obra cuenta con material adicional en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

SÉPTIMA EDICIÓN

PRECÁLCULO

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

JAMES STEWART
McMASTER UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF TORONTO

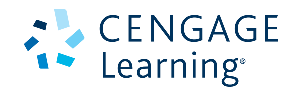
LOTHAR REDLIN
THE PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY

SALEEM WATSON
CALIFORNIA STATE UNIVERSITY, LONG BEACH

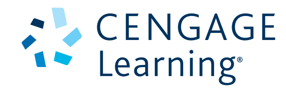
Con la ayuda de Phyllis Panman

Traducción
Mtro. Javier León Cárdenas
Formación básica ESIQIE • IPN

Revisión técnica
Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



***Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, 7a. ed.**
James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson

Director Editorial para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Antonio Mateos Martínez

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editora:
Abril Vega Orozco

Diseño de portada:
Anneli Daniela Torres Arroyo

Imagen de portada:
© zhu difeng/Shutterstock

Composición tipográfica:
Heriberto Gachuz Chavez
Humberto Nuñez Ramos

Traducido del libro *Precalculus: Mathematics for Calculus*, Seventh Edition.
James Stewart, Lothar Redlin and Saleem Watson.
Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016.
ISBN: 978-1-305-07175-9

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson.
Precálculo. Matemáticas para el cálculo, 7a. ed.
ISBN: 978-607-526-279-6

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 19 18 17 16

CONTENIDO

PREFACIO

¿Qué necesitan saber realmente los estudiantes para estar preparados para el cálculo? ¿Qué herramientas necesitan verdaderamente los profesores para ayudar a sus alumnos a prepararse para el cálculo? Estas dos preguntas han motivado la escritura de este libro.

Para estar preparado para el cálculo un estudiante necesita no sólo conocimientos técnicos, sino también una clara comprensión de conceptos. De hecho, la *comprensión conceptual* y los *conocimientos técnicos* van de la mano y se refuerzan entre sí. Un estudiante también necesita valorar el poder y la utilidad de las matemáticas para *modelar* el mundo real. Todos los temas de este libro de texto están destinados a promover dichos objetivos.

Al escribir esta séptima edición, nuestro propósito es mejorar aún más la utilidad del libro como herramienta de enseñanza para profesores y como herramienta de aprendizaje para estudiantes. Hay varios cambios importantes en esta edición, que son resultado de las sugerencias que hemos recibido de profesores y estudiantes que han usado este texto; otros son resultado de las ideas que hemos adquirido a través de nuestra propia enseñanza. Algunos capítulos se han reorganizado y se han vuelto a escribir, se han agregado nuevas secciones (como se describe a continuación), el material de repaso al final de cada capítulo se ha ampliado sustancialmente, y los conjuntos de ejercicios se han mejorado para centrarse más en los conceptos principales del precálculo. En todos estos cambios y muchos otros (pequeños y grandes) hemos mantenido las principales características que han contribuido al éxito de este libro.

Lo nuevo en la séptima edición

- **Ejercicios** Más de 20% de los ejercicios son nuevos y ahora los grupos de estos tienen títulos que identifican el tipo de cada uno. Nuevos ejercicios de *Habilidades plus* en la mayoría de las secciones contienen actividades más desafiantes que requieren que los estudiantes amplíen y sinteticen conceptos.
- **Material de repaso** El material de repaso al final de cada capítulo incluye un resumen de *Propiedades y fórmulas* y una nueva *Verificación de conceptos*. Cada *Verificación de conceptos* proporciona un repaso paso a paso de los principales conceptos y aplicaciones del capítulo. Las respuestas a las preguntas de la *Verificación de conceptos* se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.
- **Proyectos de descubrimiento** Las referencias de los *Proyectos de descubrimiento,* incluyendo breves descripciones del contenido de cada proyecto, se presentan en recuadros, en su caso, en cada capítulo. Estos recuadros resaltan las aplicaciones del precálculo en muchos contextos del mundo real. (Los proyectos se encuentran en el sitio web que acompaña el libro: **www.stewartmath.com**).*
- **Repaso de geometría** Un nuevo apéndice A contiene un repaso de los principales conceptos de la geometría utilizados en este libro, incluyendo la semejanza y el teorema de Pitágoras.
- **CAPÍTULO 1 Fundamentos** Este capítulo contiene ahora dos nuevas secciones. La sección 1.6, "Números complejos" (que antes estaba en el capítulo 3), y que ahora se ha movido aquí. Y la sección 1.12, "Modelos usando variaciones" está ahora también en este capítulo.
- **CAPÍTULO 2 Funciones** Este capítulo incluye la nueva sección 2.5, "Funciones lineales y modelos". Esta sección resalta la conexión entre la pendiente de una recta y la rapidez de cambio de una función lineal. Estas dos interpretaciones de pendiente ayudan a preparar a los estudiantes para el concepto de derivada en cálculo.

* Este material se encuentra disponible en inglés.

- **CAPÍTULO 3 Funciones polinomiales y racionales** Este capítulo ahora incluye la nueva sección 3.7, "Desigualdades polinomiales y racionales". La sección 3.6, "Funciones racionales", tiene una nueva subdivisión de funciones racionales con "agujeros". Las secciones sobre números complejos y variación se han movido al capítulo 1.
- **CAPÍTULO 4 Funciones exponenciales y logarítmicas** El capítulo ahora incluye dos secciones sobre las aplicaciones de estas funciones. La sección 4.6, "Modelado con funciones exponenciales" se enfoca en modelizar el crecimiento y el decaimiento, la ley de enfriamiento de Newton y otras aplicaciones. La sección 4.7, "Escalas logarítmicas", cubre el concepto de una escala logarítmica con aplicaciones de las escalas de pH, Richter y decibelios.
- **CAPÍTULO 5 Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria** Este capítulo incluye una nueva subsección que trata el concepto de corrimiento de fase que se usa al modelar el movimiento armónico.
- **CAPÍTULO 10 Sistemas de ecuaciones y desigualdades** El material en los sistemas de las desigualdades se ha vuelto a escribir para enfatizar los pasos utilizados en el trazo de la solución gráfica de un sistema de desigualdades.

Enseñanza con la ayuda de este libro

Estamos profundamente conscientes de que la buena enseñanza se presenta en muchas formas, y que hay numerosos métodos diferentes para enseñar los conceptos y conocimientos de precálculo. La organización de los temas de este libro está diseñada para contener diferentes estilos de enseñanza. En particular, cada tema se presenta algebraicamente, gráficamente, numéricamente y verbalmente con énfasis en las relaciones entre estas representaciones diferentes. Las siguientes son algunas características especiales que se pueden utilizar para complementar los diferentes estilos de enseñanza y aprendizaje:

Conjuntos de ejercicios La forma más importante de fomentar la comprensión conceptual y perfeccionar los conocimientos técnicos es a través de los problemas que el profesor asigna. Con este fin hemos incluido una amplia selección de ejercicios.

- **Ejercicios de concepto** Estos ejercicios le piden al estudiante que use lenguaje matemático para expresar datos fundamentales acerca de temas de cada sección.
- **Ejercicios de habilidades** Estos ejercicios refuerzan y proporcionan práctica con todos los objetivos de aprendizaje de cada sección. Comprenden el núcleo de cada conjunto de ejercicios.
- **Ejercicios de habilidades plus** Los ejercicios de *Habilidades plus* tienen problemas desafiantes que requieren a menudo de la síntesis de material previamente aprendido con los nuevos conceptos.
- **Ejercicios de aplicación** Hemos incluido problemas aplicados sustanciales de muchos contextos diferentes del mundo real. Creemos que estos ejercicios captarán el interés de los estudiantes.
- **Aprendizaje por descubrimiento, redacción y grupo de aprendizaje** Cada conjunto de ejercicios termina con un bloque de ejercicios llamado *Descubrimiento* ■ *Discusión* ■ *Demostración* ■ *Redacción.* Estos ejercicios están diseñados para estimular al estudiante a experimentar, de preferencia en grupos, con los conceptos desarrollados en la sección y luego redactar acerca de lo que ha aprendido, más que tan sólo ver la respuesta. Los nuevos ejercicios de *Demostración* destacan la importancia de deducir una fórmula.
- **Ahora intente hacer el ejercicio** Al final de cada ejemplo en el texto, el estudiante es dirigido a un ejercicio similar en la sección que ayuda a reforzar los conceptos y conocimientos desarrollados en ese ejemplo.
- **Verifique su respuesta** Los estudiantes son animados a comprobar si la respuesta obtenida es razonable. Esto se enfatiza en todo el texto en numerosas secciones de notas al margen llamadas *Verifique su respuesta*, que acompañan a los ejemplos. (Vea, por ejemplo, las páginas 54 y 71).

Un capítulo completo de repaso Hemos incluido un extenso capítulo de repaso principalmente como referencia práctica para los conceptos básicos que son preliminares a este curso.

- **CAPÍTULO 1 Fundamentos** Este es el capítulo de repaso; contiene los conceptos fundamentales de álgebra y geometría analítica que un estudiante necesita para iniciar un curso de precálculo. Es necesario que se estudie en clase todo lo que se pueda, dependiendo de la experiencia de los estudiantes.
- **EXAMEN DEL CAPÍTULO 1** El examen del capítulo 1 está diseñado como examen de diagnóstico para determinar qué partes de este capítulo de repaso tienen que enseñarse. También sirve para ayudar a los estudiantes a medir exactamente qué temas necesitan repasar.

Método flexible a la trigonometría Los capítulos de trigonometría de este texto se han escrito de modo que sirvan para enseñar en primer término ya sea el método del triángulo rectángulo o el de la circunferencia unitaria. Mencionar estos dos métodos en capítulos diferentes, cada uno con sus aplicaciones importantes, ayuda a aclarar el propósito de cada uno de estos métodos. Los capítulos que incluyen la trigonometría son los siguientes.

- **CAPÍTULO 5 Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria** Este capítulo introduce la trigonometría por el método de la circunferencia unitaria. Resalta el hecho de que las funciones trigonométricas son de números reales, igual que las funciones polinomiales y exponenciales con las que los estudiantes están más familiarizados.
- **CAPÍTULO 6 Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo** Este capítulo introduce la trigonometría a través del método del triángulo rectángulo, que tiene como base un curso convencional en trigonometría de preparatoria.

Otra forma de enseñar trigonometría es entrelazar los dos métodos. Algunos profesores imparten este material en el siguiente orden: secciones 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 6.4, 6.5 y 6.6. Nuestra organización facilita lo anterior sin ocultar el hecho de que ambos métodos contienen distintas representaciones de las mismas funciones.

Computadoras y calculadoras graficadoras Hacemos uso de computadoras y calculadoras graficadoras en ejemplos y ejercicios a lo largo de todo el libro. Nuestros ejemplos orientados a calculadoras siempre están precedidos a su vez por ejemplos donde los estudiantes deben graficar o calcular manualmente, por lo que se entiende con precisión lo que hará la calculadora cuando más adelante la usen para simplificar la rutina, parte mecánica de su trabajo. Las secciones, subsecciones, ejemplos y ejercicios referentes a calculadoras graficadoras, todos están indicados con el símbolo especial , son opcionales y se pueden omitir sin perder de continuidad.

- **Uso de una calculadora graficadora** En el sitio web que acompaña al libro, **www.stewartmath.com*** se encuentran las directrices generales sobre el uso de calculadoras gráficas y una guía de referencia rápida para el uso de la TI-83/84.
- **Gráficas, regresión, álgebra de matrices** Las funciones de la calculadora graficadora se usan en todo el texto para graficar y analizar funciones, familias de funciones y sucesiones; para calcular y graficar curvas de regresión; para realizar álgebra de matrices; para graficar desigualdades lineales y para otros poderosos usos.
- **Programas sencillos** Explotamos las funciones de programación de una calculadora graficadora para simular situaciones reales, para sumar series o para calcular los términos de una sucesión periódica (vea, por ejemplo, las páginas 628, 896 y 939).

Enfoque sobre modelado El tema de modelado se ha utilizado en todo el libro para unificar y aclarar las numerosas aplicaciones de precálculo. Hemos hecho un gran esfuerzo para aclarar los procesos esenciales de traducir problemas del español al lenguaje de matemáticas (vea las páginas 238 y 686).

* Este material se encuentra disponible en inglés.

- **Construcción de modelos** Hay numerosos problemas aplicados en todo el libro en donde al estudiante se le da un modelo a analizar (vea, por ejemplo, la página 250). Pero el material sobre modelos, en el que al estudiante se le pide *construir* modelos matemáticos, ha sido organizado en secciones y subsecciones claramente definidas (vea, por ejemplo, las páginas 370, 445 y 685).
- **Enfoque sobre modelado** Cada capítulo concluye con una sección de *Enfoque sobre modelado*. La primera de estas secciones, después del capítulo 1, introduce la idea básica del modelado de una situación real al ajustar rectas a los datos (regresión lineal). Otras secciones presentan formas en las que se usan los sistemas de desigualdades y funciones con polinomios, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para modelar fenómenos conocidos de ciencias y de la vida real (vea, por ejemplo, las páginas 325, 392 y 466).

Secciones de repaso y exámenes de capítulo Cada capítulo termina con una extensa sección de repaso que incluye lo siguiente.

- **Propiedades y fórmulas** Las *Propiedades y fórmulas* al final de cada capítulo contienen un resumen de las principales fórmulas y procedimientos del capítulo (vea, por ejemplo, las páginas 386 y 460).
- **Verificación de conceptos y respuestas de la verificación de conceptos** La *Verificación de conceptos* al final de cada capítulo está diseñada para que los estudiantes piensen y expliquen con sus propias palabras las ideas presentadas en el capítulo y para que después apliquen el concepto en un problema dado. Esto proporciona una revisión paso a paso de todos los conceptos principales de un capítulo (vea, por ejemplo, las páginas 230, 319 y 769). Las respuestas a las preguntas de *Verificación de conceptos* están en hojas desprendibles en la parte posterior del libro.
- **Ejercicios de repaso** Los *Ejercicios de repaso*, al final de cada capítulo, recapitulan los conceptos y conocimientos básicos e incluyen ejercicios que combinan las diferentes ideas aprendidas en el capítulo.
- **Examen de capítulo** Las secciones de repaso concluyen con un *Examen de capítulo* diseñado para ayudar a los estudiantes a medir su avance.
- **Exámenes acumulativos de repaso** Los *Exámenes acumulativos de repaso*, que siguen a los capítulos seleccionados, están disponibles en el sitio web del libro. Estos exámenes contienen problemas que combinan conocimientos y conceptos de los capítulos precedentes. Los problemas están diseñados para destacar las conexiones entre los temas de estos capítulos relacionados.
- **Respuestas** Al final de este libro se dan breves respuestas a los ejercicios de número impar en cada sección (incluyendo los ejercicios de repaso), y a todas las preguntas de los *Ejercicios de conceptos* y *Exámenes de capítulo*.

Viñetas matemáticas En todo el libro hacemos uso de los márgenes para presentar notas históricas, ideas importantes o aplicaciones de las matemáticas en el mundo moderno. Estas sirven para dinamizar el material y demostrar que las matemáticas son una actividad importante y vital, y que incluso a este nivel elemental son fundamentales para la vida diaria.

- **Viñetas matemáticas** Estas viñetas incluyen biografías de interesantes matemáticos y con frecuencia incluyen alguna clave importante que hayan descubierto (vea, por ejemplo, las viñetas de Viète, página 50; Salt Lake City, página 93; y datación con radiocarbono, página 367).
- **Las matemáticas en el mundo moderno** Esta es una serie de viñetas que destaca el papel central de las matemáticas en los actuales avances en tecnología y en las ciencias (vea, por ejemplo, las páginas 302, 753 y 784).

Sitio web del libro El sitio web del libro se puede ver en **www.stewartmath.com**.* El sitio incluye numerosas fuentes útiles para enseñar precálculo, incluyendo lo siguiente.

---

* Este material se encuentra disponible en inglés.

- **Proyectos de descubrimiento** Los *Proyectos de descubrimiento* para cada capítulo se encuentran en el sitio web.* Cada proyecto contiene un conjunto de actividades desafiantes pero accesibles que hace posible que los estudiantes (quizá trabajando en grupos) exploren con mayor profundidad un interesante aspecto del tema que acaban de aprender. (Vea, por ejemplo, los proyectos de descubrimiento *Visualización de una fórmula, Relaciones y funciones, ¿Sobrevivirá la especie?* y *Gráficas por computadora I* y *II*, referenciadas en las páginas 29, 163, 719, 738 y 820).
- **Enfoque en la solución de problemas** En el sitio web* se encuentran varias secciones de *Enfoque en la solución de problemas*, cada una de las cuales destaca uno de los principios para resolver problemas que se introduce en el prólogo e incluye varios problemas con grado de dificultad. (Vea, por ejemplo, *Reconocer patrones, Uso de analogías, Introducir algo extra, Tomar casos* y *Trabajar a la inversa*).
- **Exámenes acumulativos de repaso** Los *Exámenes acumulativos de repaso*, que siguen a los capítulos 4, 7, 9, 11 y 13 están disponibles en el sitio web.*
- **Apéndice B: Cálculos y cifras significativas** Este apéndice, disponible en el sitio web* del libro, contiene directrices de redondeo cuando se trabaja con valores aproximados.
- **Apéndice C: Gráficas con una calculadora graficadora** Este apéndice, disponible en el sitio web* del libro, incluye las directrices generales para graficar con una calculadora graficadora, así como las pautas sobre cómo evitar errores comunes en las gráficas.
- **Apéndice D: Uso de la calculadora graficadora TI-83/84** En este apéndice, disponible en el sitio web* del libro, ofrecemos instrucciones simples, fáciles de seguir paso a paso para usar las calculadoras graficadoras TI-83/84.

Reconocimientos

Nos sentimos afortunados de que todos los involucrados en la producción de este libro hayan trabajado con excepcional energía, intensa dedicación y entusiasmo. Es sorprendente cuántas personas son esenciales en la producción de un libro de texto de matemáticas incluyendo editores de contenidos, revisores, colegas de la facultad, editores de producción, editores de texto, editores de permisos, revisores de soluciones y de precisión, artistas, investigadores de imágenes, diseñadores de texto, tipógrafos, cajistas, correctores, impresores y muchos más. Agradecemos a todos ellos. Mencionamos especialmente a las siguientes personas.

Revisores para la sexta edición Raji Baradwaj, UMBC; Chris Herman, Lorain County Community College; Irina Kloumova, Sacramento City College; Jim McCleery, Skagit Valley College, Whidbey Island Campus; Sally S. Shao, Cleveland State University; David Slutzky, Gainesville State College; Edward Stumpf, Central Carolina Community College; Ricardo Teixeira, University of Texas en Austin; Taixi Xu, Southern Polytechnic State University; y Anna Wlodarczyk, Florida International University.

Revisores para la séptima edición Mary Ann Teel, University of North Texas; Natalia Kravtsova, The Ohio State University; Belle Sigal, Wake Technical Community College; Charity S. Turner, The Ohio State University; Yu-ing Hargett, Jefferson State Community College–Alabama; Alicia Serfaty de Markus, Miami Dade College; Cathleen Zucco-Teveloff, Rider University; Minal Vora, East Georgia State College; Sutandra Sarkar, Georgia State University; Jennifer Denson, Hillsborough Community College; Candice L. Ridlon, University of Maryland Eastern Shore; Alin Stancu, Columbus State University; Frances Tishkevich, Massachusetts Maritime Academy; Phil Veer, Johnson County Community College; Cathleen Zucco-Teveloff, Rider University; Phillip Miller, Indiana University–Southeast; Mildred Vernia, Indiana University–Southeast; Thurai Kugan, John Jay College-CUNY.

Agradecemos a nuestros colegas que continuamente comparten con nosotros sus ideas acerca de la enseñanza de las matemáticas. Agradecemos especialmente a Robert Mena de la California State University, Long Beach; nos hemos beneficiado de su gran conocimiento sobre las matemáticas y su historia. Damos las gracias a Cecilia McVoy de la Penn State Abington por sus sugerencias. Agradecemos a Andrew Bulman-Fleming por escribir el *Manual de soluciones* y a Doug Shaw de la University of Northern

* El sitio web del libro es **www.stewartmath.com**. (Este material se encuentra disponible en inglés.)

Iowa por escribir la *Guía del profesor* y la *Guía de estudio*. Estamos muy agradecidos con Frances Gulick de la University of Maryland por comprobar la precisión del manuscrito entero y realizar cada ejercicio; sus muchas sugerencias y correcciones han contribuido grandemente a la exactitud y consistencia de los contenidos de este libro.

Agradecemos a Martha Emry, nuestra editora de arte y servicio de producción; su energía, dedicación y experiencia han sido componentes esenciales en la creación de este libro. Estamos muy agradecidos por su notable capacidad para recordar al instante, cuando se requirió, cualquier detalle de todo el manuscrito, así como su extraordinaria capacidad para manejar simultáneamente varias líneas de edición interdependientes. Agradecemos a Barbara Willette, nuestra editora de texto, por su atención a cada detalle en el manuscrito y para garantizar un estilo coherente y apropiado a través del libro. Agradecemos a nuestra diseñadora, Diane Beasley, por el diseño elegante y adecuado de las páginas interiores del libro. Agradecemos a Graphic World por sus gráficos atractivos y precisos y a Precision Graphics por hacer realidad muchas de nuestras ilustraciones. Agradecemos a nuestros diagramadores de Graphic World por garantizar un aspecto equilibrado y coherente de cada página del libro.

En Cengage Learning agradecemos a Jennifer Risden, gerente de contenido del proyecto, por su gestión profesional de la producción del libro. Damos las gracias a Lynh Pham, editora de medios, por su manejo experto de muchos problemas técnicos, incluyendo la creación del sitio web del libro. Agradecemos a Vernon Boes, director de arte, por su atinada administración en el diseño del libro. Damos las gracias a Mark Linton, gerente de mercadotecnia por apoyo en dar a conocer el libro a aquellos que podrán utilizarlo en sus clases.

Agradecemos especialmente a nuestra editora de desarrollo, Stacy Green, por guiar hábilmente y facilitar todos los aspectos de la creación de este texto. Su interés en la obra, su familiaridad con el manuscrito entero y sus casi inmediatas respuestas a nuestras muchas consultas han hecho de su escritura una experiencia aún más agradable para nosotros.

Sobre todo, agradecemos a nuestro editor de adquisiciones, Gary Whalen. Su vasta experiencia editorial, su amplio conocimiento de temas actuales en la enseñanza de las matemáticas, su habilidad en el manejo de los recursos, necesaria para mejorar este libro, y su profundo interés en los libros de texto de matemáticas han sido invaluables en la creación de esta obra.

Material didáctico auxiliar

Recursos para el profesor*

Sitio web del profesor*
¡Todo lo que necesita para su curso en un solo lugar! Esta colección de libros de lectura y herramientas específicas para la clase está disponible en línea en **www.cengage.com/login**. Ingrese y descargue presentaciones en PowerPoint, imágenes, el manual del profesor y más.

Manual de soluciones completo*
El manual de soluciones completo ofrece soluciones desarrolladas a todos los problemas que aparecen en el texto. Situado en el sitio web.

Banco de exámenes*
El banco de exámenes proporciona exámenes de capítulo final junto con las claves de las respuestas. Se encuentra en el sitio web.

Guía del profesor*
La *Guía del profesor* contiene puntos importantes, sugiere el tiempo de dedicación, temas de análisis del texto, materiales importantes de clase, sugerencias para taller y análisis, ejercicios de trabajo en grupo, en un formato adecuado para su impresión, y sugerencias de problemas de tarea. Se encuentra en el sitio web.

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Planes de clase*
Los planes de clase ofrecen sugerencias de actividades y clases con notas de asignación de tiempo para garantizar la eficiencia y la puntualidad en la clase. Se encuentra en el sitio web.

Cengage Learning Testing Powered by Cognero*
(ISBN-10: 1-305-25853-3; ISBN-13: 978-1-305-25853-2)
CLT es un sistema en línea flexible que le permite a usted escribir, editar y manejar el contenido del banco de exámenes; crear distintas versiones de examen en un instante y ofrecer exámenes en su LMS, su salón de clases o donde lo desee. Está disponible en línea a través de **www.cengage.com/login**.

Enhanced WebAssign* (Tarea web mejorada)
Printed Access Card: 978-1-285-85833-3
Instant Access Code: 978-1-285-85831-9
La Enhanced WebAssign (Tarea web mejorada) combina la excepcional matemática contenida con la solución de tareas de más de grande alcance en línea, WebAssign®. Enhanced WebAssign involucra a los estudiantes con realimentación inmediata, contenido tutorial y un eBook interactivo, totalmente personalizable, *Cengage YouBook*, para ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión conceptual más profunda de su materia.

Recursos para el estudiante*

Student Solutions Manual* (Manual de soluciones para el estudiante)
(ISBN-10: 1-305-25361-2; ISBN-13: 978-1-305-25361-2)
Contiene soluciones completamente resueltas para todos los ejercicios de número impar del texto, lo que da a los estudiantes una forma de verificar sus respuestas y cerciorarse de que siguieron los pasos correctos para llegar a la respuesta.

Study Guide* (Guía de estudio)
(ISBN-10: 1-305-25363-9; ISBN-13: 978-1-305-25363-6)
La *Guía de estudio* refuerza el entendimiento del estudiante con explicaciones detalladas, ejemplos desarrollados y problemas de la práctica. También enumera ideas clave para el dominio y la construcción de habilidades para la solución de problemas. Hay una sección en la *Guía de estudio*, correspondiente a cada sección en el texto.

Note-Taking Guide* (Guía para tomar notas)
(ISBN-10: 1-305-25383-3; ISBN-13: 978-1-305-25383-4)
La guía para tomar notas es una ayuda de estudio innovador que apoya a los estudiantes para desarrollar un resumen de conceptos clave sección por sección.

Text-Specific DVDs* (ISBN-10: 1-305-25400-7; ISBN-13: 978-1-305-25400-8)
Los *Text-Specific DVDs* incluyen nuevos videos de exposición en clase basados en objetivos de aprendizaje. Estos DVD dan una cobertura completa del curso, junto con explicaciones adicionales de conceptos, problemas de muestra y aplicaciones que ayudan a los estudiantes a repasar temas esenciales.

CengageBrain.com*
Por favor visite **www.cengagebrain.com** para tener acceso a materiales adicionales para el curso. En la página inicial de CengageBrain.com, ingrese el ISBN de su título mediante la caja de búsqueda en el área superior de la página (el ISBN lo puede consultar en la tapa posterior de su libro o en la página legal) mediante la caja de búsqueda en el área superior de la página. Esto lo llevará a la página del producto en donde puede encontrar estos recursos.

Enhanced WebAssign*
Printed Access Card: 978-1-285-85833-3
Instant Access Code: 978-1-285-85831-9
La Enhanced WebAssign combina el contenido matemático excepcional con el más poderoso solucionador de tareas en línea, WebAssign. Enhanced WebAssign atrae a los estudiantes con realimentación inmediata, contenido tutorial y un eBook interactivo, totalmente personalizable, *Cengage YouBook*, que ayuda a los estudiantes a desarrollar una comprensión conceptual más profunda de la materia.

---

* Este material se encuentra disponible en inglés.

AL ESTUDIANTE

Este libro de texto ha sido escrito como una guía para que domine las matemáticas del precálculo. Veamos a continuación algunas sugerencias para ayudarle a sacar el máximo provecho de su curso.

Antes que nada, debe leer la sección de texto correspondiente antes de intentar resolver sus problemas de tarea. Leer un texto de matemáticas es muy diferente de leer una novela, un periódico o cualquier libro. Quizá tenga que leer un pasaje varias veces antes de comprenderlo. Dedique especial atención a los ejemplos y resuélvalos a mano a medida que los vaya leyendo; a continuación, haga los ejercicios relacionados que se mencionan en "Ahora intente realizar el ejercicio…" al final de cada ejemplo. Con esta clase de preparación usted podrá hacer su tarea con mucha más rapidez y mayor entendimiento.

No cometa el error de tratar de memorizar cada una de las reglas o dato que encuentre. Las matemáticas no son simplemente memorización: son el *arte de resolver problemas*, no sólo un conjunto de datos. Para dominar el tema, usted debe resolver problemas, muchos problemas. Asegúrese de escribir sus soluciones en una forma lógica, paso a paso. No se rinda ante un problema si no puede resolverlo de inmediato. Trate de entenderlo con claridad, vuelva a leerlo por completo y relaciónelo con lo que ya haya aprendido de su profesor y de los ejemplos del libro. Luche con el problema hasta resolverlo; una vez que haya hecho esto unas cuantas veces, empezará a entender de lo que se tratan en realidad las matemáticas.

Las respuestas a los ejercicios con numeración impar, así como todas las respuestas al examen de cada capítulo, aparecen al final del libro. Si su respuesta difiere de la dada, no suponga de inmediato que usted está en error. Puede tratarse de un cálculo que conecta las dos respuestas y ambas serán correctas. Por ejemplo, si usted obtiene $1/(\sqrt{2} - 1)$ pero la respuesta dada es $1 + \sqrt{2}$, la respuesta de usted es correcta porque puede multiplicar el numerador y el denominador de su respuesta por $\sqrt{2} + 1$ para cambiarla a la respuesta dada. Al redondear respuestas aproximadas siga las guías del apéndice: *Cálculos y cifras significativas.*

El icono ⊘ se usa para prevenir que cometa un error. Hemos insertado este icono al margen para indicar situaciones donde hemos encontrado que muchos de nuestros estudiantes cometen el mismo error.

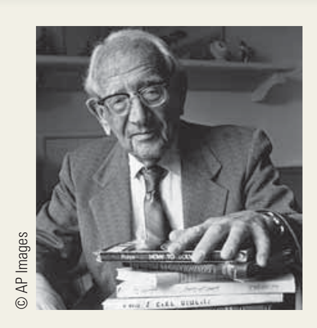
Abreviaturas

En el libro se usan las siguientes abreviaturas.

cm	centímetro	**kPa**	kilopascal	**N**	Newton
dB	decibel	**L**	litro	**qt**	cuarto
F	farad	**lb**	libra	**oz**	onza
ft	pie	**lm**	lumen	**s**	segundo
g	gramo	**M**	mol de soluto por litro de solución	**Ω**	ohm
gal	galón			**V**	volt
h	hora			**W**	*watt*
H	*henry*	**m**	metro	**yd**	yarda
Hz	*hertz*	**mg**	miligramo	**yr**	año
in.	pulgada	**MHz**	*megahertz*	**°C**	grados Celsius
J	*joule*	**mi**	milla	**°F**	grados Fahrenheit
kcal	kilocaloría	**min**	minuto	**K**	Kelvin
kg	kilogramo	**mL**	mililitro	⇒	implica
km	kilómetro	**mm**	milímetro	⇔	es equivalente a

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La capacidad para resolver problemas es una habilidad muy apreciada en muchos aspectos de la vida; sin duda es una parte importante de cualquier curso de matemáticas. No existen reglas duras y rápidas que garanticen el éxito en la solución de problemas. Sin embargo, en este prólogo delineamos algunos pasos generales en el proceso de resolución de problemas y se dan principios útiles para resolver ciertos tipos de problemas. Estos pasos y principios son únicamente sentido común explicitado, y se han adaptado del interesante libro de George Polya, *How To Solve It*.



GEORGE POLYA (1887-1985) es famoso entre los matemáticos por sus ideas sobre resolución de problemas. Sus conferencias sobre este tema en la Universidad de Stanford atraían a multitudes a las cuales llevaba al borde de sus asientos, conduciéndolos a descubrir las soluciones por sí mismos. Era capaz de hacer esto debido a su profundo conocimiento de la psicología de la resolución de problemas. Su conocido libro *How To Solve It* ha sido traducido a 15 idiomas. Polya afirmaba que Euler (vea la página 63) fue el único grande entre los matemáticos debido a que explicó cómo encontraba sus resultados. A menudo, Polya les decía a sus alumnos y colegas: "Sí, veo que la demostración es correcta, pero ¿cómo lo descubrió?". En el prefacio de *How To Solve It* señala: "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero es un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Su problema puede ser modesto, pero si desafía su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas, y si lo resuelve por sus propios medios, puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento".

1. Entender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que lo entiende. Hágase las siguientes preguntas:

¿Qué es lo que se desconoce?

¿Cuáles son las cantidades que se señalan?

¿Cuáles son las condiciones dadas?

En muchos problemas es útil

dibujar un diagrama

e identificar las cantidades que se requieren en el diagrama. Por lo general, es necesario

introducir notación adecuada

En la elección de los símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x y y, aunque en algunos casos ayuda utilizar las iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, V para el volumen o t para el tiempo.

2. Pensar en un plan

Encuentre una conexión entre la información dada y aquella que se desconoce que le permita calcular la incógnita. A menudo es útil preguntarse a sí mismo de forma explícita: "¿Cómo puedo relacionar lo conocido con lo desconocido?". Si no puede ver una conexión inmediata, las siguientes ideas pueden ser útiles en la elaboración de un plan.

■ Tratar de reconocer algo familiar

Relacione la situación dada con sus conocimientos previos. Observe la incógnita y trate de recordar un problema que le sea más familiar y tenga una incógnita similar.

■ Tratar de reconocer patrones

Ciertos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si usted puede ver la regularidad o la repetición en un problema, entonces será capaz de adivinar cuál es el patrón y luego probarlo.

■ Usar analogías

Trate de pensar en un problema análogo, es decir, un problema similar o relacionado, pero que sea más fácil que el original. Si puede resolver el problema similar, más simple, esto entonces le puede dar las pistas que necesita para resolver el original, más difícil. Por ejemplo, si un problema implica un número muy grande, usted puede primero intentar resolver un problema similar con un número menor. O, si el problema está en la geometría tridimensional, podría buscar algo similar en la geometría de dos dimensiones. O, si el problema inicial es de carácter general, podría tratar primero un caso especial.

Introducir algo adicional

A veces podría ser necesario introducir algo nuevo, una ayuda extra, para hacer la conexión entre lo conocido y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema para el cual es útil un diagrama la ayuda podría ser dibujar una línea nueva en el diagrama. En un problema más algebraico la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relacione con la incógnita original.

Tomar casos

A veces puede dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia para hacer frente a un valor absoluto.

Trabajar hacia atrás

A veces es útil imaginar que su problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Entonces usted podría ser capaz de revertir sus pasos y así construir una solución al problema original. Este procedimiento se utiliza comúnmente en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la solución de la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sume 5 a cada lado de la ecuación y luego divida ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Puesto que cada uno de estos pasos se puede revertir, hemos resuelto el problema.

Establecer metas secundarias

En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple sólo en parte). Si usted puede lograr o alcanzar estos objetivos parciales, entonces usted podría ser capaz de construir sobre ellos para alcanzar su meta final.

Razonamiento indirecto

A veces es apropiado para atacar un problema indirectamente. En el uso de la **prueba por contradicción** para probar que P implica Q se supone que P es cierta y Q es falsa, y se trata de ver por qué esto no puede suceder. De alguna manera debemos utilizar esta información y llegar a una contradicción a aquello que sabemos que es verdad absoluta.

Inducción matemática

Para probar los enunciados que implican un entero positivo n, a menudo es útil utilizar el principio de inducción matemática, que se analiza en la sección 12.5.

3. Ejecutar el plan

En el paso 2 se ideó un plan. Para ejecutarlo se debe comprobar cada etapa del plan y escribir los detalles que demuestran que cada una es la correcta.

4. Ver hacia atrás

Después de haber completado la solución, es conveniente mirar hacia atrás sobre la misma, en parte para ver si se han cometido errores y en parte para ver si se puede descubrir una manera más fácil de resolver el problema. Mirar hacia atrás también le ayudará a familiarizarse con el método de solución, que puede ser útil para resolver un problema en el futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas".

Ilustraremos algunos de estos principios de resolución de problemas con un ejemplo.

PROBLEMA ■ Rapidez promedio

Una automovilista se embarca en un viaje. Durante la primera mitad del recorrido, ella conduce al ritmo pausado de 30 mi/h, durante la segunda mitad conduce a 60 mi/h. ¿Cuál es su rapidez promedio en este viaje

PENSAR EN EL PROBLEMA

Es tentador tomar el promedio de las rapideces y decir que la rapidez promedio de todo el viaje es

$$\frac{30 + 60}{2} = 45 \text{ mi/h}$$

Sin embargo, ¿este método simple es realmente correcto?

Intente un caso especial. ▶

Veamos un caso especial fácil de calcular. Supongamos que la distancia total recorrida es de 120 millas. Las primeras 60 se recorren a 30 mi/h, lo que tarda 2 horas. Durante las siguientes 60 millas se viaja a 60 mi/h, lo que dura una hora. Por tanto, el tiempo total es 2 + 1 = 3 horas y la rapidez promedio es

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ mi/h}$$

Por tanto, nuestra estimación de 45 mi/h estaba equivocada.

SOLUCIÓN

Entender el problema. ▶

Tenemos que ver con más cuidado en el significado de la rapidez promedio. Se define como

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Introducir una notación. ▶

Identificar la información dada. ▶

Sea d la distancia recorrida en cada mitad del viaje. Sean t_1 y t_2 los tiempos para la primera y la segunda mitad del viaje. Ahora podemos escribir la información que se nos ha dado. Para la primera mitad del viaje tenemos

$$30 = \frac{d}{t_1}$$

y para la segunda mitad tenemos

$$60 = \frac{d}{t_2}$$

Identificar la incógnita. ▶

Ahora podemos identificar la cantidad que se nos pide encontrar:

$$\text{rapidez promedio del viaje completo} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$

Relacionar la información proporcionada con la incógnita. ▶

Para calcular esta cantidad necesitamos conocer t_1 y t_2, así que resolvemos las ecuaciones anteriores para estos tiempos:

$$t_1 = \frac{d}{30} \qquad t_2 = \frac{d}{60}$$

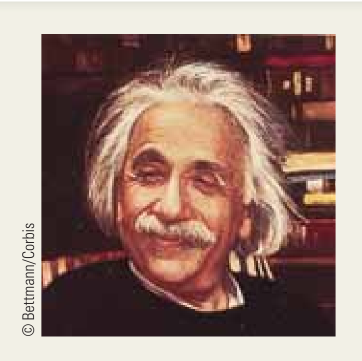
Ahora tenemos los ingredientes necesarios para calcular la cantidad deseada:

$$\text{rapidez promedio} = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}}$$

$$= \frac{60(2d)}{60\left(\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}\right)} \qquad \text{Multiplique el numerador y el denominador por 60}$$

$$= \frac{120d}{2d + d} = \frac{120d}{3d} = 40$$

Por tanto, la rapidez promedio del viaje completo es 40 mi/h. ■



No se sienta mal si usted no puede resolver estos problemas de inmediato. Los problemas 1 y 4 fueron enviados a Albert Einstein por su amigo Wertheimer. Einstein (y su amigo Bucky) disfrutaba de los problemas y le escribió a Wertheimer. Esta es parte de su respuesta:

> Su carta nos dio un montón de pruebas divertidas. La primera prueba de inteligencia nos ha engañado a ambos (a Bucky y a mí). ¡Sólo viéndolo desde fuera me di cuenta de que no se dispone de tiempo para la trayectoria descendente! Bucky también fue engañado en el segundo ejemplo, pero yo no. ¡Curiosidades como esta nos muestran lo tontos que somos!

(Vea *Mathematical Intelligencer,* primavera, 1990, página 41.)

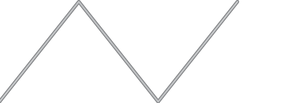
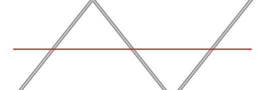
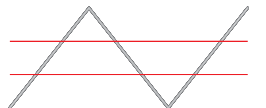


PROBLEMAS

1. **Distancia, tiempo y velocidad** Un automóvil viejo tiene que recorrer un camino de 2 millas cuesta arriba y cuesta abajo. Debido a que es tan viejo, el automóvil puede subir la primera milla no más rápido que la rapidez media de 15 km/h. ¿Qué tan rápido tiene que viajar el automóvil la segunda milla —en el descenso puede ir más rápido, por supuesto— para lograr una rapidez media de 30 km/h para el viaje?

2. **Comparando descuentos** ¿Qué precio es mejor para el comprador, un descuento de 40% o dos descuentos sucesivos de 20%?

3. **Cortar un alambre** Se dobla un alambre, como se muestra en la figura. Se puede ver que un corte a través del mismo resulta en cuatro piezas y dos cortes paralelos producen siete piezas. ¿Cuántas piezas se produjeron luego de 142 cortes paralelos? Escriba una fórmula para el número de piezas producidas por n cortes paralelos.

4. **Propagación de amibas** Una amiba se propaga por división simple y cada división toma 3 minutos para completarse. Cuando esa amiba se pone en un recipiente de vidrio con un fluido nutriente en una hora el recipiente ya está lleno de amibas. ¿Cuánto tiempo haría falta para que el contenedor se llenara si en lugar de comenzar con una amiba comenzáramos con dos?

5. **Promedios de bateo** El jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la primera mitad de la temporada de béisbol. El jugador A también tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la segunda mitad de la temporada. ¿Es necesariamente cierto que el jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para toda la temporada?

6. **Café y crema** Se toma una cucharada de crema de una jarra de crema y se vierte en una taza de café. El café se agita. Luego se sirve en la jarra de crema una cucharada de esta mezcla. Ahora ¿hay más crema en la taza de café o más café en la jarra de crema?

7. **Envolviendo el mundo** Se ata fuertemente una cinta sobre el ecuador de la Tierra. ¿Cuánta más cinta necesitará si se coloca la cinta 1 pie por encima del ecuador en todas partes? (No es necesario conocer el radio de la Tierra para resolver este problema.)

8. **Para terminar donde empezó** Una mujer parte de un punto P sobre la superficie de la Tierra y camina 1 milla al sur, luego 1 milla al este y luego 1 milla al norte, y se encuentra de vuelta en P, el punto de partida. Describa todos los puntos P para los cuales esto es posible. [*Sugerencia:* hay un número infinito de esos puntos, de los cuales todos menos uno se encuentran en la Antártida.]

Muchos más problemas y ejemplos que ponen de manifiesto diferentes principios de resolución de problemas están disponibles en el sitio web del libro: www.stewartmath.com.* Usted puede intentarlos conforme avanza en el libro.

* Este material se encuentra disponible en inglés.



1 Fundamentos

En este primer capítulo repasaremos los números reales, las ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

En el *Enfoque sobre modelado*, al final del capítulo, aprenderemos cómo hallar tendencias lineales en los datos y cómo utilizarlas para hacer predicciones sobre el futuro.

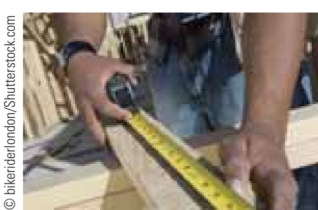
1.1 NÚMEROS REALES

■ Números reales ■ Propiedades de los números reales ■ Adición y sustracción ■ Multiplicación y división ■ La recta de números reales ■ Conjuntos e intervalos ■ Valor absoluto y distancia

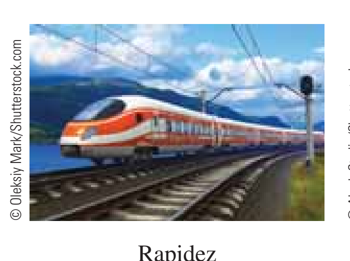
En el mundo real usamos números para medir y comparar diferentes cantidades. Por ejemplo, medimos temperatura, longitud, altura, peso, presión, distancia, velocidad, aceleración, energía, fuerza, ángulos, edad, costos, etcétera. La figura 1 ilustra algunas situaciones en las que se utilizan números. Los números también nos permiten expresar relaciones entre cantidades diferentes, por ejemplo, las relaciones entre el radio y el volumen de una pelota, entre las millas conducidas y la gasolina utilizada, o entre el nivel educativo y el salario inicial.



Contar



Longitud



Rapidez



Peso

FIGURA 1 Medidas con números reales

■ Números reales

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y el 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al tomar cocientes de enteros. Entonces, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos tenemos

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como un cociente de enteros y, por tanto, se denominan **números irracionales**. Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Los diferentes tipos de números reales se inventaron para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales son necesarios para contar, los números negativos para describir deudas o temperaturas bajo cero, los números racionales para expresar conceptos como "medio galón de leche" y los números irracionales se usan para medir ciertas distancias como la diagonal de un cuadrado.

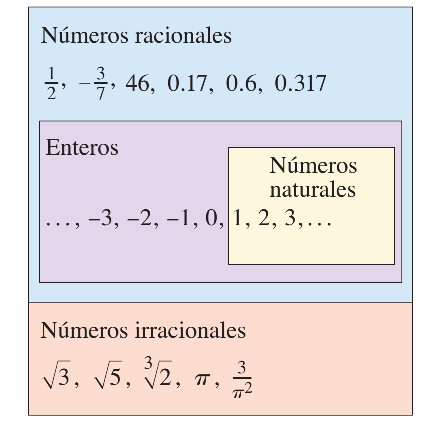


FIGURA 2 El sistema de números reales

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando se usa la palabra *número* sin más detalle, queremos decir "número real". La figura 2 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo a un cociente de dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= 35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. (La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.)

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre.) Si el número es irracional la representación decimal no es periódica:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo ≈ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualesquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una forma concisa de decir que "cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa". Este hecho se conoce como *Propiedad conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Propiedades conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Propiedades asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de estos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de estos multiplicamos primero.
Propiedad distributiva		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números obtenemos el mismo resultado que si multiplicáramos ese número por cada uno de los términos y luego sumáramos los resultados.

La propiedad distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualquier número real a, b y c.

La propiedad distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interaccionan una con otra.

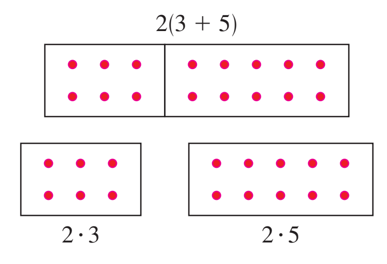


FIGURA 3 La propiedad distributiva

EJEMPLO 1 ■ Uso de la propiedad distributiva

a) $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ — Propiedad distributiva

$= 2x + 6$ — Simplifique



b) $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ — Propiedad distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ — Propiedad distributiva

$= ax + bx + ay + by$ — Propiedad asociativa de la adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la propiedad asociativa, no importa el orden de la adición.

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

■ Adición y sustracción

No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (propiedad 2), un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

La propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos entre sí. La propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

EJEMPLO 2 ■ Uso de las propiedades de los negativos

Sean x, y y z números reales.

a) $-(x + 2) = -x - 2$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ — Propiedad 2: $-(-a) = a$

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** entre a y b o como la **fracción** de a sobre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales mediante la operación de división usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Para **multiplicar fracciones** multiplique numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Para **dividir fracciones** multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Para **sumar fracciones** con el **mismo denominador** sume los numeradores.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes** encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	**Elimine** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, por tanto $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada**.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la propiedad 4. En cambio reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores) y luego usamos la propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 ■ Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

SOLUCIÓN Al factorizar cada denominador en factores primos se obtiene

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones usando la máxima potencia de cada factor. Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \qquad \text{Use el común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

La recta de números reales

Los números reales se pueden representar por puntos sobre una recta, como se muestra en la figura 4. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O, llamado **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real**. A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

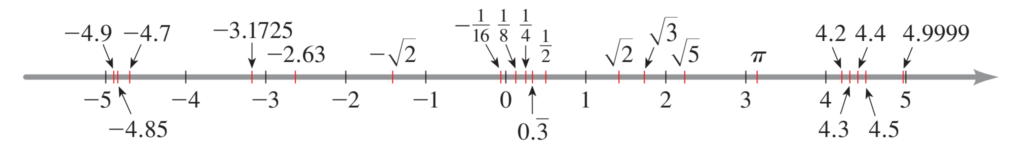


FIGURA 4 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \le b$ (o $b \ge a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "a es menor o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (véase la figura 5):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \le 2$$

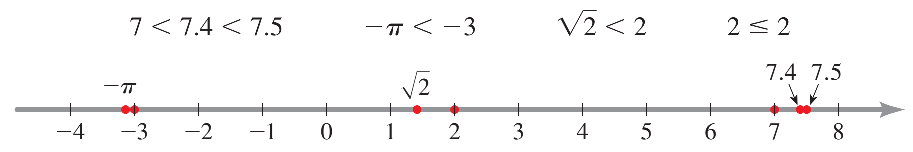


FIGURA 5

Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos se pueden describir si sus elementos se colocan dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto A, que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$".



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Números reales en el mundo real

Las medidas reales siempre implican unidades. Por ejemplo, generalmente medimos la distancia en pies, millas, centímetros o kilómetros. Algunas medidas implican diferentes tipos de unidades. Por ejemplo, la rapidez se mide en millas por hora o en metros por segundo. A menudo tenemos que convertir una medición de un tipo de unidad a otro. En este proyecto exploramos diferentes tipos de unidades utilizadas para diferentes propósitos y cómo convertir un tipo de unidad a otro. Se puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S *o en* T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$ formado por todos los elementos que están en S *y* T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

EJEMPLO 4 ■ Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$ y $V = \{6, 7, 8\}$ encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN

T: 4, 5, 6, 7
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
S: 1, 2, 3, 4, 5 V: 6, 7, 8

$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Todos los elementos en S o T

$S \cap T = \{4, 5\}$ Elementos comunes a S y T

$S \cap V = \varnothing$ S y V no tienen elementos en común


Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

Con frecuencia se presentan en cálculo ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a a b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

a b

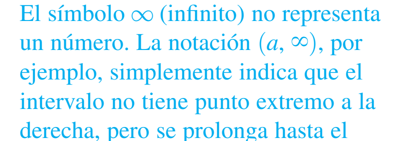
FIGURA 6 El intervalo abierto (a, b)

a b

FIGURA 7 El intervalo cerrado $[a, b]$

Observe que los paréntesis ( ) en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la figura 6 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares [ ] y los círculos sólidos de la figura 7 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo, pero no el otro; o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números)	


El símbolo ∞ (infinito) no representa un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha, pero se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.



EJEMPLO 5 ■ Trazo de la gráfica de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, después, trace la gráfica del intervalo.

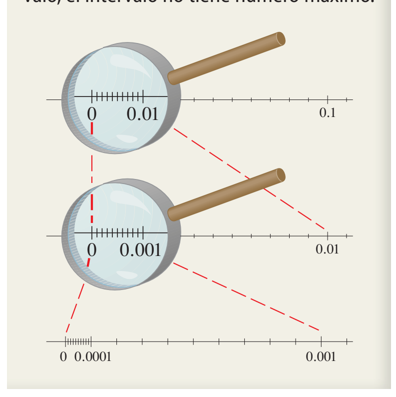
a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$ −1 0 2

b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$ 0 1.5 4

c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$ −3 0

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto
Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo ni máximo. Para ver esto observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 es más cercano, 0.0001 es todavía más cercano y así, sucesivamente. Siempre podemos encontrar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 está aún más cercano y así, sucesivamente. Dado que 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.



EJEMPLO 6 ■ Encontrar uniones e intersecciones de intervalos

Trace la gráfica de cada conjunto.

a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ ***b)*** $(1, 3) \cup [2, 7]$

SOLUCIÓN

a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por tanto

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\} \\ &= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto se muestra en la figura 8.

b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\} \\ &= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto se muestra en la figura 9.

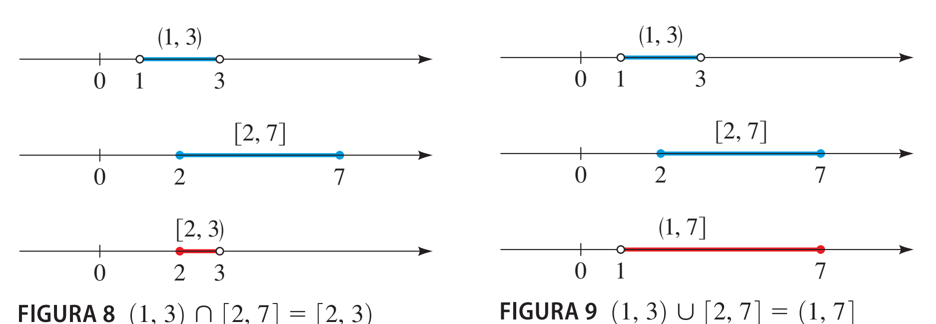


FIGURA 8 $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

FIGURA 9 $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

■ Valor absoluto y distancia

$|-3| = 3$ $|5| = 5$

-3 0 5

FIGURA 10

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (véase la figura 10). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para todo número a. Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de valores absolutos de números

a) $|3| = 3$

b) $|-3| = -(-3) = 3$

c) $|0| = 0$

d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3 \qquad (\text{como } 3 < \pi \quad \Rightarrow \quad 3 - \pi < 0)$

Ahora intente realizar el ejercicio 67 ■

Cuando trabajamos con valores absolutos utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \dfrac{12}{-3} \right\rvert = \dfrac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
5. $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	$\lvert -3 + 5 \rvert \leq \lvert -3 \rvert + \lvert 5 \rvert$	Desigualdad del triángulo.

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números -2 y 11? De la figura 11 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $\lvert 11 - (-2) \rvert = 13$ o $\lvert (-2) - 11 \rvert = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (véase la figura 12).

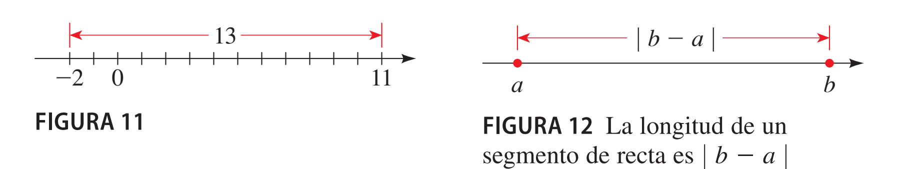


FIGURA 11

FIGURA 12 La longitud de un segmento de recta es $\lvert b - a \rvert$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = \lvert b - a \rvert$$

De la propiedad 6 de los números negativos se deduce que

$$\lvert b - a \rvert = \lvert a - b \rvert$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma distancia de b a a.

EJEMPLO 8 ■ Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = \lvert 2 - (-8) \rvert = \lvert -10 \rvert = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se muestra en la figura 13.

10
−8 0 2

FIGURA 13

Ahora intente realizar el ejercicio 75 ■

1.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Dé un ejemplo para cada uno de los siguientes enunciados:

a) Un número natural

b) Un entero que no sea número natural

c) Un número racional que no sea entero

d) Un número irracional

2. Complete cada enunciado y mencione la propiedad de los números reales que haya empleado.

a) $ab =$ ________; propiedad ________

b) $a + (b + c) =$ ________; propiedad ________

c) $a(b + c) =$ ________; propiedad ________

3. Exprese el conjunto de números como sigue, pero no incluya el 2 ni el 7:

a) En notación constructiva de conjuntos: ____________

b) En notación de intervalos: ____________

4. El símbolo $|x|$ representa el ________ del número x. Si x no es 0, entonces el signo de $|x|$ siempre es ________.

5. La distancia entre a y b en la recta real es $d(a, b) =$ ________.

Entonces la distancia entre -5 y 2 es ________.

6–8 ■ *¿Sí o no?* Si es *no*, explique. Suponga que a y b son números reales diferentes de cero.

6. *a*) ¿La suma de dos números racionales siempre es un número racional?

b) ¿La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional?

7. *a*) ¿Es $a - b$ igual a $b - a$?

b) Es $-2(a - 5)$ igual a $-2a - 10$?

8. *a*) ¿La distancia entre cualesquier dos números reales diferentes siempre es positiva?

b) ¿La distancia entre a y b es igual a la distancia entre b y a?

HABILIDADES

9–10 ■ **Números reales** Mencione los elementos del conjunto dado que sean

a) números naturales

b) números enteros

c) números racionales

d) números irracionales

9. $\{-1.5, 0, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 2.71, -\pi, 3.1\overline{4}, 100, -8\}$

10. $\{1.3, 1.3333\ldots, \sqrt{5}, 5.34, -500, 1\frac{2}{3}, \sqrt{16}, \frac{246}{579}, -\frac{20}{5}\}$

11–18 ■ **Propiedades de los números reales** Exprese la propiedad de los números reales que se esté usando.

11. $3 + 7 = 7 + 3$

12. $4(2 + 3) = (2 + 3)4$

13. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

14. $2(A + B) = 2A + 2B$

15. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

16. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

17. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

18. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

19–22 ■ **Propiedades de los números reales** Vuelva a escribir la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

19. Propiedad conmutativa de adición, $x + 3 =$ ▢

20. Propiedad asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$ ▢

21. Propiedad distributiva, $4(A + B) =$ ▢

22. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$ ▢

23–28 ■ **Propiedades de los números reales** Utilice las propiedades de los números reales al escribir la expresión sin paréntesis.

23. $3(x + y)$ **24.** $(a - b)8$

25. $4(2m)$ **26.** $\frac{4}{3}(-6y)$

27. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **28.** $(3a)(b + c - 2d)$

29–32 ■ **Operaciones aritméticas** Realice las operaciones indicadas.

29. *a*) $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ *b*) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

30. *a*) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ *b*) $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

31. *a*) $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ *b*) $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$

32. *a*) $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ *b*) $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

33–34 ■ **Desigualdades** Coloque el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

33. *a*) 3 ▢ $\frac{7}{2}$ *b*) -3 ▢ $-\frac{7}{2}$ *c*) 3.5 ▢ $\frac{7}{2}$

34. *a*) $\frac{2}{3}$ ▢ 0.67 *b*) $\frac{2}{3}$ ▢ -0.67

c) $|0.67|$ ▢ $|-0.67|$

35–38 ■ **Desigualdades** Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

35. *a*) $-3 < -4$ *b*) $3 < 4$

36. *a*) $\sqrt{3} > 1.7325$ *b*) $1.732 \geq \sqrt{3}$

37. *a*) $\frac{10}{2} \geq 5$ *b*) $\frac{6}{10} \geq \frac{5}{6}$

38. *a*) $\frac{7}{11} \geq \frac{8}{13}$ *b*) $-\frac{3}{5} > -\frac{3}{4}$

39–40 ■ **Desigualdades** Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

39. *a*) x es positivo.

b) t es menor a 4.

c) a es mayor o igual a π.

d) x es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor que -5.

e) La distancia de p a 3 es, como máximo, 5.

40. ***a***) y es negativa.
b) z es mayor que 1.
c) b es a lo más 8.
d) w es positiva y menor o igual a 17.
e) y está al menos a 2 unidades de π.

41–44 ■ Conjuntos Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

41. ***a***) $A \cup B$ ***b***) $A \cap B$
42. ***a***) $B \cup C$ ***b***) $B \cap C$
43. ***a***) $A \cup C$ ***b***) $A \cap C$
44. ***a***) $A \cup B \cup C$ ***b***) $A \cap B \cap C$

45–46 ■ Conjuntos Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

45. ***a***) $B \cup C$ ***b***) $B \cap C$
46. ***a***) $A \cap C$ ***b***) $A \cap B$

47–52 ■ Intervalos Exprese el intervalo en términos de desigualdades y luego trace la gráfica del intervalo.

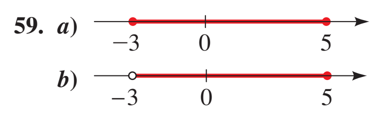
47. $(-3, 0)$ **48.** $(2, 8]$
49. $[2, 8)$ **50.** $[-6, -\frac{1}{2}]$
51. $[2, \infty)$ **52.** $(-\infty, 1)$

53–58 ■ Intervalos Exprese la desigualdad en notación de intervalos y después trace la gráfica del intervalo correspondiente.

53. $x \leq 1$ **54.** $1 \leq x \leq 2$
55. $-2 < x \leq 1$ **56.** $x \geq -5$
57. $x > -1$ **58.** $-5 < x < 2$

59–60 ■ Intervalos Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

59. ***a***) ***b***)



60. ***a***) 0 2 ***b***) −2 0

61–66 ■ Intervalos Trace la gráfica del conjunto.

61. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **62.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$
63. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **64.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$
65. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **66.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

67–72 ■ Valor absoluto Evalúe cada expresión.

67. ***a***) $|100|$ ***b***) $|-73|$
68. ***a***) $|\sqrt{5} - 5|$ ***b***) $|10 - \pi|$
69. ***a***) $||-6| - |-4||$ ***b***) $\dfrac{-1}{|-1|}$
70. ***a***) $|2 - |-12||$ ***b***) $-1 - |1 - |-1||$
71. ***a***) $|(-2) \cdot 6|$ ***b***) $|(-\frac{1}{3})(-15)|$
72. ***a***) $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ ***b***) $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

73–76 ■ Distancia Encuentre la distancia entre los números dados.

73. −3 −2 −1 0 1 2 3

74. −3 −2 −1 0 1 2 3

75. ***a***) 2 y 17 ***b***) −3 y 21 ***c***) $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$
76. ***a***) $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ ***b***) −38 y −57 ***c***) −2.6 y −1.8

HABILIDADES Plus

77–78 ■ Repetición de decimales Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Véase la nota al margen en la página 3.)

77. ***a***) $0.\overline{7}$ ***b***) $0.\overline{28}$ ***c***) $0.\overline{57}$
78. ***a***) $5.\overline{23}$ ***b***) $1.3\overline{7}$ ***c***) $2.1\overline{35}$

79–82 ■ Simplificación del valor absoluto Escriba la cantidad sin usar valor absoluto.

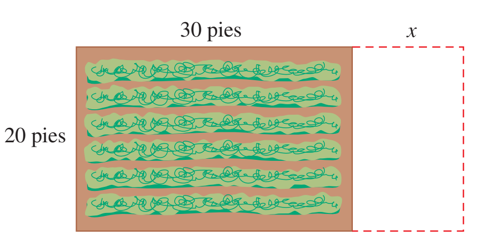
79. $|\pi - 3|$ **80.** $|1 - \sqrt{2}|$
81. $|a - b|$, donde $a < b$
82. $a + b + |a - b|$, donde $a < b$

83–84 ■ Signos de números Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

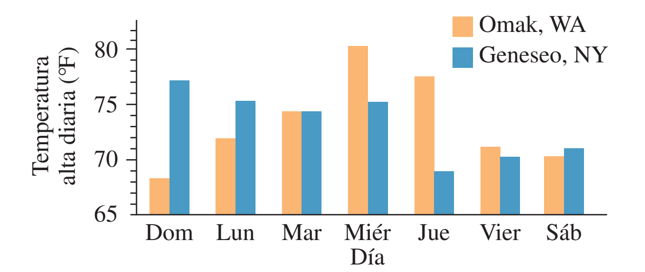
83. ***a***) $-a$ ***b***) bc ***c***) $a - b$ ***d***) $ab + ac$
84. ***a***) $-b$ ***b***) $a + bc$ ***c***) $c - a$ ***d***) ab^2

APLICACIONES

85. Área de un jardín El jardín de legumbres de Mary mide 20 por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies^2. Ella ha decidido agrandarlo como se muestra en la figura para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Qué propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?



86. Variación de temperatura La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con T_O la temperatura en Omak y T_G la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?

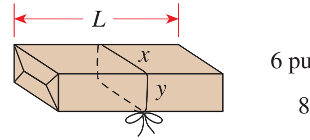


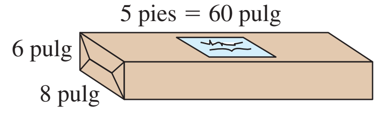
87. Envío de un paquete por correo La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea mayor de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

a) ¿Aceptará la oficina de correos un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 por 9 pulgadas?





DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

88. DISCUSIÓN: Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

89. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Combinación de números racionales con números irracionales ¿$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? Experimente con sumas y productos de otros números racionales e irracionales. Demuestre lo siguiente.

a) La suma de un número racional r y un número irracional t es irracional.

b) El producto de un número racional r y un número irracional t es irracional.

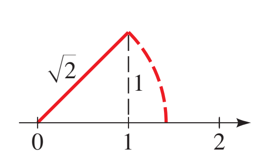
[*Sugerencia:* Para el inciso *a*), suponga que $r + t$ es un número racional q, es decir, $r + t = q$. Demuestre que esto conduce a una contradicción. Utilice un razonamiento similar para el inciso *b*).]

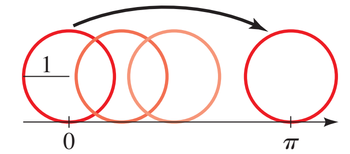
90. DESCUBRIMIENTO: Limitación del comportamiento de recíprocos Complete las tablas siguientes. ¿Qué le ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando x aumenta? ¿Y cuando x disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1 000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

91. DESCUBRIMIENTO: Ubicación de números irracionales en la recta real Usando las siguientes figuras explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Cómo puede ayudarnos el círculo que se muestra en la figura para ubicar π en una recta numérica? Haga una lista de otros números irracionales que pueda ubicar en una recta numérica.





92. DEMOSTRACIÓN: Fórmulas de máximos y mínimos Sea que $\text{máx}(a, b)$ denote el máximo y que $\text{mín}(a, b)$ denote el mínimo de los números reales a y b. Por ejemplo, $\text{máx}(2, 5) = 5$ y $\text{mín}(-1, -2) = -2$.

a) Demuestre que $\text{máx}(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

b) Demuestre que $\text{mín}(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

[*Sugerencia:* Considere casos y escriba estas expresiones sin el valor absoluto. Vea los ejercicios 81 y 82.]

93. REDACCIÓN: Números reales en el mundo real Escriba un párrafo que describa diferentes situaciones del mundo real en las que se podrían usar números naturales, enteros, números racionales y números irracionales. Dé ejemplos para cada tipo de situación.

94. DISCUSIÓN: Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

a) ¿La sustracción es conmutativa?

b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

c) ¿Son conmutativas las acciones de ponerse calcetines y zapatos?

d) ¿Son conmutativas las acciones de ponerse el sombrero y la chamarra?

e) ¿Son conmutativas las acciones de lavar y secar la ropa?

95. DEMOSTRACIÓN: Desigualdad del triángulo Demostraremos la propiedad 5 de los valores absolutos, la desigualdad del triángulo:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

a) Verifique que la desigualdad de triángulo vale para $x = 2$ y $y = 3$, para $x = -2$ y $y = -3$ y para $x = -2$ y $y = 3$.

b) Demuestre que la desigualdad del triángulo es verdadera para todos los números reales x y y. [*Sugerencia:* Considere casos.]

1.2 EXPONENTES Y RADICALES

■ Exponentes enteros ■ Reglas para trabajar con exponentes ■ Notación científica
■ Radicales ■ Exponentes racionales ■ Racionalización del denominador; forma estándar

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para hacer esto necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces n-ésimas.

■ Exponentes enteros

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general tenemos la siguiente definición.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima potencia** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.

EJEMPLO 1 ■ Notación exponencial

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

Observe la diferencia entre $(-3)^4$ y -3^4. En $(-3)^4$ el exponente se aplica al -3, pero en -3^4 el exponente se aplica sólo al 3.

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos 5^4 por 5^2:

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ factores}}\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que para *multiplicar dos potencias de la misma base sumamos sus exponentes*. En general, para cualquier número real a y cualesquier enteros positivos m y n, tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Por tanto, $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando m y n fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si $2^0 = 1$. Igualmente, deseamos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones conducen a la siguiente definición.

EXPONENTES CERO Y NEGATIVO

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO 2 ■ Exponentes cero y negativos

a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

b) $x^{-1} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x}$

c) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

■ Reglas para trabajar con exponentes

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia eleve el numerador y el denominador a la potencia.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$	$\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^5}{3^2}$	Para mover un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador cambie el signo del exponente.

Demostración de la ley 3 Si m y n son enteros positivos tenemos

$$(a^m)^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})^n$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})}_{n \text{ grupo de factores}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}$$

Los casos para los que $m \leq 0$ o $n \leq 0$ se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

Demostración de la ley 4 Si n es un entero positivo tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n \text{ factores}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n \text{ factores}} = a^n b^n$$

Aquí hemos empleado repetidamente las propiedades conmutativa y asociativa. Si $n \le 0$, la ley 4 se puede demostrar usando la definición de exponentes negativos. ■

En los ejercicios 108 y 109 se le pide al lector demostrar las leyes 2, 5, 6 y 7.

EJEMPLO 3 ■ Uso de las leyes de exponentes

a) $x^4x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1: $a^ma^n = a^{m+n}$

b) $y^4y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ Ley 1: $a^ma^n = a^{m+n}$

c) $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

d) $(b^4)^5 = b^{4\cdot 5} = b^{20}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

e) $(3x)^3 = 3^3x^3 = 27x^3$ Ley 4: $(ab)^n = a^nb^n$

f) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ Ley 5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Ahora intente realizar los ejercicios 29, 31 y 33 ■

EJEMPLO 4 ■ Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique:

a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ ***b)*** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^nb^n\\ &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}\\ &= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Se agrupan factores con la misma base}\\ &= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^ma^n = a^{m+n}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3}\,\frac{(y^2)^4x^4}{z^4} && \text{Leyes 5 y 4}\\ &= \frac{x^3}{y^3}\,\frac{y^8x^4}{z^4} && \text{Ley 3}\\ &= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4} && \text{Se agrupan factores con la misma base}\\ &= \frac{x^7y^5}{z^4} && \text{Leyes 1 y 2}\end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 35 y 39 ■

Cuando simplifique una expresión encontrará que muchos métodos diferentes conducirán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. En el ejemplo siguiente veremos cómo simplificar expresiones con exponentes negativos.

Las matemáticas en el mundo moderno

Aun cuando no notemos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la tecnología moderna las matemáticas desempeñan una función cada vez mayor en nuestras vidas. Hoy en día es probable que usted haya despertado con la alarma de un reloj digital, enviado un mensaje de *e-mail* a través de internet, visto algún programa en TV de alta definición o la transmisión de un video, escuchado música en su teléfono celular, manejado un auto con inyección controlada digitalmente y quizás luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general una propiedad, por ejemplo, la intensidad o la frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen o la temperatura de su habitación son transformados en sucesiones de números por refinados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos y reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de las computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos.

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y algunos de los más emocionantes se dieron tan sólo en la década pasada.

En otro libro, llamado *Mathematics in the Modern World,* se describe con más detalle el modo en que las matemáticas influyen en nuestras actividades diarias.

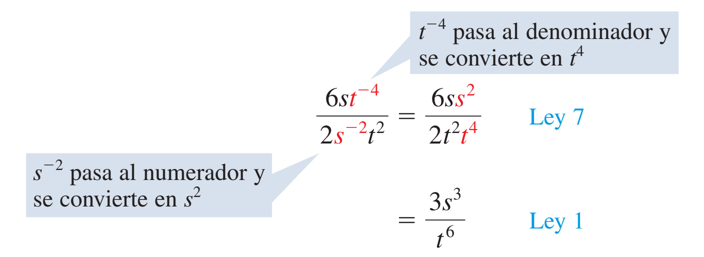
EJEMPLO 5 ■ Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

a) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ ***b)*** $\left(\dfrac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

SOLUCIÓN

a) Usamos la ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.



$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \quad \text{Ley 7}$$

$$= \frac{3s^3}{t^6} \quad \text{Ley 1}$$

b) Usamos la ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \quad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \quad \text{Leyes 5 y 4}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

■ Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana, además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40 000 000 000 000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si se expresa como sigue:

$$x = a \times 10^n \quad \text{donde} \quad 1 \le a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal se debe recorrer 13 lugares a la *derecha*:

$$4 \times 10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g el exponente -24 indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la *izquierda*:

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda

EJEMPLO 6 ■ Cambio de notación decimal a científica

Escriba en notación científica cada uno de los números siguientes.

a) 56 920 *b*) 0.000093

SOLUCIÓN

a) $\underbrace{56\,920}_{\text{4 lugares}} = 5.692 \times 10^4$ *b*) $0.\underbrace{00009}_{\text{5 lugares}}3 = 9.3 \times 10^{-5}$

Ahora intente realizar el ejercicio 83 ■

EJEMPLO 7 ■ Cambio de notación científica a notación decimal

Escriba cada número en notación decimal.

a) 6.97×10^9 *b*) 4.6271×10^{-6}

SOLUCIÓN

a) $6.97 \times 10^9 = 6\underbrace{970\,000\,000}_{\text{9 lugares}}$ Se mueve 9 lugares decimales hacia la derecha

b) $4.6271 \times 10^{-6} = 0.\underbrace{000004}_{\text{6 lugares}}6271$ Se mueve 6 lugares decimales hacia la derecha

Ahora intente realizar el ejercicio 85 ■

Para usar notación científica en una calculadora presione la tecla marcada EE o EXP o EEX para ingresar el exponente. Por ejemplo, para ingresar el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-83 o TI-84 ingresamos

3.629 2ND EE 15

y en la pantalla se lee

3.629E15

Con frecuencia se usa notación científica en una calculadora para ver un número muy grande o uno muy pequeño. Por ejemplo, si usamos calculadora para elevar al cuadrado el número 1 111 111, la pantalla puede mostrar (dependiendo del modelo de calculadora) la aproximación

1.234568 12 o 1.234568 E12

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10 e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

EJEMPLO 8 ■ Cálculo con notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$ y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use la calculadora para aproximar el cociente ab/c.

SOLUCIÓN Podríamos ingresar los datos usando notación científica, o bien, podríamos usar leyes de exponentes como sigue:

$$\frac{ab}{c} \approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}}$$

$$= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18}$$

$$\approx 2.7 \times 10^{36}$$

Expresamos la respuesta redondeada a dos cifras significativas porque el menos preciso de los números dados se expresa a dos cifras significativas.

Ahora intente realizar los ejercicios 89 y 91 ■

En el apéndice B,* *Cálculo de cifras significativas* véanse las guías para trabajar con cifras significativas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

■ Radicales

Sabemos lo que 2^n significa siempre que n sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional necesitamos estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la raíz positiva de". Entonces

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada positiva de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3.

$$\sqrt{a} = b \qquad \text{significa que} \qquad b^2 = a \qquad \text{y} \qquad b \ge 0$$

Dado que $a = b^2 \ge 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \ge 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \text{ya que} \qquad 3^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad 3 \ge 0$$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n-ésimas. La raíz n-ésima de x es el número que, cuando se eleva a la n-ésima potencia, da x.

DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ *n*-ésima

Si n es cualquier entero positivo, entonces la ***n*-ésima raíz principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa} \qquad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \ge 0$ y $b \ge 0$.

Por ejemplo,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{ya que} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \ge 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{ya que} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Observe que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \ge 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. En el recuadro siguiente se citan esta y otras reglas empleadas para trabajar con las raíces n-ésimas. En cada propiedad suponemos que existen todas las raíces dadas.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES *n*-ésimas

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, $\sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

EJEMPLO 9 ■ Simplificación de expresiones que tienen raíces *n*-ésimas

a) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3 x}$ Factorice el cubo más grande

$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x}$ Propiedad 1: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

$= x\sqrt[3]{x}$ Propiedad 4: $\sqrt[3]{a^3} = a$

b) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4}$ Propiedad 1: $\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c}$

$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}\,|\,y\,|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |\,a\,|$

$= 3x^2\,|\,y\,|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |\,a\,|, |\,x^2\,| = x^2$

Ahora intente realizar los ejercicios 45 y 47 ■

Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, tal como $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se puede hacer usando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos que $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9 + 16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{¡Error!}$$

EJEMPLO 10 ■ Combinación de radicales

a) $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$ Factorice los cuadrados más grandes

$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ Propiedad distributiva

b) Si $b > 0$, entonces

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ Propiedad 5, $b > 0$

$= (5 - b)\sqrt{b}$ Propiedad distributiva

c) $\sqrt{49x^2 + 49} = \sqrt{49(x^2 + 1)}$ Factorice el 49

$= 7\sqrt{x^2 + 1}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Ahora intente realizar los ejercicios 49, 51 y 53 ■

Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, de manera equivalente, un *exponente fraccionario*, por ejemplo $a^{1/3}$, necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de forma que sea consistente con las leyes de exponentes deberíamos tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz n-ésima,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$ definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o en forma equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que *las leyes de exponentes también se cumplen para exponentes racionales*.

DIOFANTO Vivió en Alejandría hacia el año 250 d.C. Su libro *Arithmetica* es considerado el primer libro de álgebra. En este se presentan métodos para encontrar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Arithmetica* fue leído y estudiado durante más de mil años. Fermat (véase página 117) hizo algunos de sus más importantes descubrimientos cuando estudiaba este libro. La mayor aportación de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aun cuando su simbolismo no es tan sencillo como el que usamos ahora fue un avance considerable para escribir todo en palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

ΔK^γ αςη⫛Δ^γ ζ M̊ ει^σ κδ

Nuestra moderna notación algebraica no entró en uso común sino hasta el siglo XVII.

EJEMPLO 11 ■ Uso de la definición de exponentes racionales

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$

Ahora intente realizar los ejercicios 55 y 57 ■

EJEMPLO 12 ■ Uso de las leyes de los exponentes con exponentes racionales

a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 \left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} \cdot (y^4 x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y} \cdot y^4 x^{1/2}$ Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ Leyes 1 y 2

Ahora intente realizar los ejercicios 61, 63, 67 y 69 ■

EJEMPLO 13 ■ Uso de las leyes de los exponentes con exponentes racionales

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$ Definición de exponentes racionales y negativos

b) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ Ley 1

c) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ Ley 1

$= x^{3/4}$ Ley 3

Ahora intente realizar los ejercicios 73 y 77 ■

■ Racionalización del denominador; forma estándar

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador**. Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Observe que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma con $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Se dice que una expresión fraccionaria está en su **forma estándar** si su denominador no contiene radicales.

EJEMPLO 14 ■ Racionalizar denominadores

Escriba cada expresión fraccionaria en su forma estándar al racionalizar el denominador.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ***b***) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ ***c***) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}}$

SOLUCIÓN

Esto es igual a 1

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ Multiplique por $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$ Multiplique por $\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$ $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}$ Propiedad 2: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}}$ Multiplique por $\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}}$

$= \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$ $\sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[7]{a^5} = a$

Ahora intente realizar los ejercicios 79 y 81

1.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. ***a***) Usando notación exponencial podemos escribir el producto $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ como ________.

b) En la expresión 3^4 el número 3 se denomina ________ y el número 4 se llama ________.

2. ***a***) Cuando multiplicamos dos potencias con la misma base ________ los exponentes. Por tanto $3^4 \cdot 3^5 =$ ________.

b) Cuando dividimos dos potencias con la misma base ________ los exponentes. Por tanto $\dfrac{3^5}{3^2} =$ ________.

3. ***a***) Usando notación exponencial, podemos escribir $\sqrt[3]{5}$ como ________.

b) Usando radicales podemos escribir $5^{1/2}$ como ________.

c) ¿Hay diferencia entre $\sqrt{5^2}$ y $(\sqrt{5})^2$? Explique.

4. Explique qué significa $4^{3/2}$ y, a continuación, calcule $4^{3/2}$ en dos formas diferentes:

$(4^{1/2})^{\square} =$ ________ o $(4^3)^{\square} =$ ________

5. Explique cómo racionalizar un denominador y luego complete los siguientes pasos para racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

6. Encuentre la potencia faltante en el siguiente cálculo: $5^{1/3} \cdot 5^{\square} = 5$.

7–8 ■ *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.

7. ***a***) ¿La expresión $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ es igual a $\frac{3}{4}$?

b) ¿Hay alguna diferencia entre $(-5)^4$ y -5^4?

8. ***a***) ¿La expresión $(x^2)^3$ es igual a x^5?

b) ¿La expresión $(2x^4)^3$ es igual a $2x^{12}$?

c) ¿La expresión $\sqrt{4a^2}$ es igual a $2a$?

d) ¿La expresión $\sqrt{a^2 + 4}$ es igual a $a + 2$?

HABILIDADES

9–16 ■ Radicales y exponentes Escriba cada expresión radical usando exponentes y cada expresión exponencial usando radicales.

	Expresión radical	Expresión exponencial
9.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
10.	$\sqrt[3]{7^2}$	
11.		$4^{2/3}$
12.		$10^{-3/2}$
13.	$\sqrt[5]{5^3}$	
14.		$2^{-1.5}$
15.		$a^{2/5}$
16.	$\frac{1}{\sqrt{x^2}}$	

17–28 ■ Radicales y exponentes Evalúe cada expresión.

17. *a)* -2^6 *b)* $(-2)^6$ *c)* $(\frac{1}{5})^2 \cdot (-3)^3$

18. *a)* $(-5)^3$ *b)* -5^3 *c)* $(-5)^2 \cdot (\frac{2}{5})^2$

19. *a)* $(\frac{5}{3})^0 \cdot 2^{-1}$ *b)* $\frac{2^{-3}}{3^0}$ *c)* $(\frac{2}{3})^{-2}$

20. *a)* $-2^3 \cdot (-2)^0$ *b)* $-2^{-3} \cdot (-2)^0$ *c)* $(\frac{-3}{5})^{-3}$

21. *a)* $5^3 \cdot 5$ *b)* $5^4 \cdot 5^{-2}$ *c)* $(2^2)^3$

22. *a)* $3^8 \cdot 3^5$ *b)* $\frac{10^7}{10^4}$ *c)* $(3^5)^4$

23. *a)* $3\sqrt[3]{16}$ *b)* $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{81}}$ *c)* $\sqrt{\frac{27}{4}}$

24. *a)* $2\sqrt[3]{81}$ *b)* $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}}$ *c)* $\sqrt{\frac{12}{49}}$

25. *a)* $\sqrt{3}\sqrt{15}$ *b)* $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ *c)* $\sqrt[3]{24}\,\sqrt[3]{18}$

26. *a)* $\sqrt{10}\sqrt{32}$ *b)* $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$ *c)* $\sqrt[3]{15}\,\sqrt[3]{75}$

27. *a)* $\frac{\sqrt{132}}{\sqrt{3}}$ *b)* $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{32}$ *c)* $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{\frac{1}{64}}$

28. *a)* $\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$ *b)* $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\sqrt[6]{128}$ *c)* $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{108}}$

29–34 ■ Exponentes Simplifique cada expresión y elimine cualquier exponente negativo.

29. *a)* $x^3 \cdot x^4$ *b)* $(2y^2)^3$ *c)* $y^{-2}y^7$

30. *a)* $y^5 \cdot y^2$ *b)* $(8x)^2$ *c)* x^4x^{-3}

31. *a)* $x^{-5} \cdot x^3$ *b)* $w^{-2}w^{-4}w^5$ *c)* $\frac{x^{16}}{x^{10}}$

32. *a)* $y^2 \cdot y^{-5}$ *b)* $z^5z^{-3}z^{-4}$ *c)* $\frac{y^7y^0}{y^{10}}$

33. *a)* $\frac{a^9a^{-2}}{a}$ *b)* $(a^2a^4)^3$ *c)* $\left(\frac{x}{2}\right)^3(5x^6)$

34. *a)* $\frac{z^2z^4}{z^3z^{-1}}$ *b)* $(2a^3a^2)^4$ *c)* $(-3z^2)^3(2z^3)$

35–44 ■ Exponentes Simplifique cada expresión y elimine cualquier exponente negativo.

35. *a)* $(3x^3y^2)(2y^3)$ *b)* $(5w^2z^{-2})^2(z^3)$

36. *a)* $(8m^{-2}n^4)(\frac{1}{2}n^{-2})$ *b)* $(3a^4b^{-2})^3(a^2b^{-1})$

37. *a)* $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-5}}$ *b)* $\left(\frac{a^3}{2b^2}\right)^3$

38. *a)* $\frac{y^{-2}z^{-3}}{y^{-1}}$ *b)* $\left(\frac{x^3y^{-2}}{x^{-3}y^2}\right)^{-2}$

39. *a)* $\left(\frac{a^2}{b}\right)^5\left(\frac{a^3b^2}{c^3}\right)^3$ *b)* $\frac{(u^{-1}v^2)^2}{(u^3v^{-2})^3}$

40. *a)* $\left(\frac{x^4z^2}{4y^5}\right)\left(\frac{2x^3y^2}{z^3}\right)^2$ *b)* $\frac{(rs^2)^3}{(r^{-3}s^2)^2}$

41. *a)* $\frac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$ *b)* $\left(\frac{y}{5x^{-2}}\right)^{-3}$

42. *a)* $\frac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}}$ *b)* $\left(\frac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}$

43. *a)* $\left(\frac{3a}{b^3}\right)^{-1}$ *b)* $\left(\frac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

44. *a)* $\left(\frac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)^{-2}$ *b)* $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

45–48 ■ Radicales Simplifique cada expresión. Suponga que las literales representan números reales positivos.

45. *a)* $\sqrt[4]{x^4}$ *b)* $\sqrt[4]{16x^8}$

46. *a)* $\sqrt[5]{x^{10}}$ *b)* $\sqrt[3]{x^3y^6}$

47. *a)* $\sqrt[3]{64a^6b^7}$ *b)* $\sqrt[3]{a^2b}\,\sqrt[3]{64a^4b}$

48. *a)* $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$ *b)* $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$

49–54 ■ Expresiones con radicales Simplifique la expresión.

49. *a)* $\sqrt{32} + \sqrt{18}$ *b)* $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

50. *a)* $\sqrt{125} + \sqrt{45}$ *b)* $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

51. *a)* $\sqrt{9a^3} + \sqrt{a}$ *b)* $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$

52. *a)* $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{8x}$ *b)* $4\sqrt{18rt^3} + 5\sqrt{32r^3t^5}$

53. *a)* $\sqrt{81x^2 + 81}$ *b)* $\sqrt{36x^2 + 36y^2}$

54. *a)* $\sqrt{27a^2 + 63a}$ *b)* $\sqrt{75t + 100t^2}$

55–60 ■ Exponentes racionales Evalúe cada expresión.

55. *a)* $16^{1/4}$ *b)* $-8^{1/3}$ *c)* $9^{-1/2}$

56. *a)* $27^{1/3}$ *b)* $(-8)^{1/3}$ *c)* $-(\frac{1}{8})^{1/3}$

57. *a)* $32^{2/5}$ *b)* $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ *c)* $(\frac{16}{81})^{3/4}$

58. *a)* $125^{2/3}$ *b)* $(\frac{25}{64})^{3/2}$ *c)* $27^{-4/3}$

59. ***a***) $5^{2/3} \cdot 5^{1/3}$ ***b***) $\dfrac{3^{3/5}}{3^{2/5}}$ ***c***) $(\sqrt[3]{4})^3$

60. ***a***) $3^{2/7} \cdot 3^{12/7}$ ***b***) $\dfrac{7^{2/3}}{7^{5/3}}$ ***c***) $(\sqrt[5]{6})^{-10}$

61–70 ■ Exponentes racionales Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente negativo. Suponga que todas las literales denotan números positivos.

61. ***a***) $x^{3/4}x^{5/4}$ ***b***) $y^{2/3}y^{4/3}$

62. ***a***) $(4b)^{1/2}(8b^{1/4})$ ***b***) $(3a^{3/4})^2(5a^{1/2})$

63. ***a***) $\dfrac{w^{4/3}w^{2/3}}{w^{1/3}}$ ***b***) $\dfrac{a^{5/4}(2a^{3/4})^3}{a^{1/4}}$

64. ***a***) $(8y^3)^{-2/3}$ ***b***) $(u^4v^6)^{-1/3}$

65. ***a***) $(8a^6b^{3/2})^{2/3}$ ***b***) $(4a^6b^8)^{3/2}$

66. ***a***) $(x^{-5}y^{1/3})^{-3/5}$ ***b***) $(4r^8s^{-1/2})^{1/2}(32s^{-5/4})^{-1/5}$

67. ***a***) $\dfrac{(8s^3t^3)^{2/3}}{(s^4t^{-8})^{1/4}}$ ***b***) $\dfrac{(32x^5y^{-3/2})^{2/5}}{(x^{5/3}y^{2/3})^{3/5}}$

68. ***a***) $\left(\dfrac{x^8y^{-4}}{16y^{4/3}}\right)^{-1/4}$ ***b***) $\left(\dfrac{4s^3t^4}{s^2t^{9/2}}\right)^{-1/2}$

69. ***a***) $\left(\dfrac{x^{3/2}}{y^{-1/2}}\right)^4\left(\dfrac{x^{-2}}{y^3}\right)$ ***b***) $\left(\dfrac{4y^3z^{2/3}}{x^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{x^{-3}y^6}{8z^4}\right)^{1/3}$

70. ***a***) $\left(\dfrac{a^{1/6}b^{-3}}{x^{-1}y}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$ ***b***) $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}\left(\dfrac{3s^{-2}}{4t^{1/3}}\right)^{-1}$

71–78 ■ Radicales Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente negativo. Suponga que todas las literales denotan números positivos.

71. ***a***) $\sqrt{x^3}$ ***b***) $\sqrt[5]{x^6}$

72. ***a***) $\sqrt{x^5}$ ***b***) $\sqrt[4]{x^6}$

73. ***a***) $\sqrt[6]{y^5}\,\sqrt[3]{y^2}$ ***b***) $(5\sqrt[3]{x})(2\sqrt[4]{x})$

74. ***a***) $\sqrt[4]{b^3}\,\sqrt{b}$ ***b***) $(2\sqrt{a})(\sqrt[3]{a^2})$

75. ***a***) $\sqrt{4st^3}\,\sqrt[6]{s^3t^2}$ ***b***) $\dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[4]{x^3}}$

76. ***a***) $\sqrt[5]{x^3y^2}\,\sqrt[10]{x^4y^{16}}$ ***b***) $\dfrac{\sqrt[3]{8x^2}}{\sqrt{x}}$

77. ***a***) $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$ ***b***) $\sqrt{\dfrac{16u^3v}{uv^5}}$

78. ***a***) $\sqrt{s\sqrt{s^3}}$ ***b***) $\sqrt[3]{\dfrac{54x^2y^4}{2x^5y}}$

79–82 ■ Racionalización Escriba cada expresión fraccionaria en forma estándar racionalizando el denominador.

79. ***a***) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ ***b***) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ***c***) $\dfrac{9}{\sqrt[4]{2}}$

80. ***a***) $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ ***b***) $\sqrt{\frac{12}{5}}$ ***c***) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5^2}}$

81. ***a***) $\dfrac{1}{\sqrt{5x}}$ ***b***) $\sqrt{\dfrac{x}{5}}$ ***c***) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3}}$

82. ***a***) $\sqrt{\dfrac{s}{3t}}$ ***b***) $\dfrac{a}{\sqrt[6]{b^2}}$ ***c***) $\dfrac{1}{c^{3/5}}$

83–84 ■ Notación científica Escriba cada número en notación científica.

83. ***a***) 69 300 000 ***b***) 7 200 000 000 000
c) 0.000028536 ***d***) 0.0001213

84. ***a***) 129 540 000 ***b***) 7 259 000 000
c) 0.0000000014 ***d***) 0.0007029

85–86 ■ Notación decimal Escriba cada número en notación decimal.

85. ***a***) 3.19×10^5 ***b***) 2.721×10^8
c) 2.670×10^{-8} ***d***) 9.999×10^{-9}

86. ***a***) 7.1×10^{14} ***b***) 6×10^{12}
c) 8.55×10^{-3} ***d***) 6.257×10^{-10}

87–88 ■ Notación científica Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado.

87. ***a***) Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es alrededor de 5 900 000 000 000 millas.
b) El diámetro de un electrón es alrededor de 0.0000000000004 cm.
c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

88. ***a***) La distancia de la Tierra al Sol es de unos 93 millones de millas.
b) La masa de una molécula de oxígeno es de unos 0.000000000000000000000053 g.
c) La masa de la Tierra es de unos 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg.

89–94 ■ Notación científica Use notación científica, las leyes de exponentes y una calculadora para ejecutar las operaciones indicadas. Exprese su respuesta, redondeada al número de cifras significativas indicadas por la información dada.

89. $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

90. $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

91. $\dfrac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

92. $\dfrac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

93. $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594\,621\,000)(0.0058)}$ **94.** $\dfrac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

HABILIDADES Plus

95. Sean a, b y c números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

a) b^5 ***b***) b^{10} ***c***) ab^2c^3

d) $(b - a)^3$ ***e***) $(b - a)^4$ ***f***) $\dfrac{a^3c^3}{b^6c^6}$

96. Comparación de raíces Sin usar la calculadora determine cuál número es mayor en cada par.

a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ ***b***) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$
c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ ***d***) $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

APLICACIONES

97. Distancia a la estrella más cercana Proxima Centauri, la estrella más cercana a nuestro sistema solar, está a 4.3 años luz de distancia. Use la información del ejercicio 87*a*) para expresar esta distancia en millas.

98. Velocidad de la luz La velocidad de la luz es de unas 186 000 mi/s. Use la información del ejercicio 88*a*) para encontrar cuánto tarda un rayo de luz del Sol en llegar a la Tierra.

99. Volumen de los océanos El promedio de profundidad de los océanos es 3.7×10^3 m y el área de los océanos es 3.6×10^{14} m^2. Cuál es el volumen total del océano en litros? (Un metro cúbico contiene 1 000 litros.)



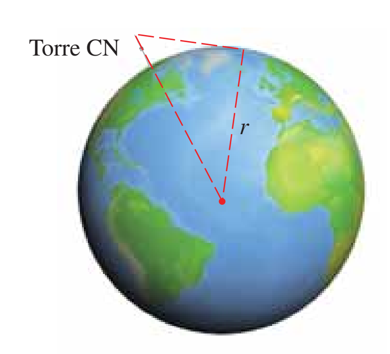
100. Deuda nacional Al mes de julio de 2013 la población de Estados Unidos era de 3.164×10^8 y la deuda nacional era de 1.674×10^{13} dólares. ¿Cuánto era la parte de deuda que le correspondía a cada persona?
[*Fuente:* Oficina del Censo y Departamento del Tesoro de Estados Unidos]

101. Número de moléculas Una sala sellada de un hospital, con medidas de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1 000 L; y 22.4 L de cualquier gas contienen 6.02×10^{23} moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

102. ¿A qué distancia puede usted ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D a la que se puede ver desde lo alto de un edificio de altura h se calcula con la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3\,960$ millas es el radio de la Tierra y D y h también se miden en millas. ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, que está a 1 135 pies sobre el suelo?



103. Rapidez de un auto que patina La policía usa la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para calcular la rapidez s (en mi/h) a la que un auto se desplaza si patina d pies después de aplicar repentinamente los frenos. El número f es el coeficiente de fricción del pavimento, que es una medida de lo “resbaloso” de la carretera. La tabla siguiente da algunos cálculos comunes para f.

	Asfalto	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Mojado	0.5	0.4	0.1

a) Si un auto patina 65 pies en concreto mojado, ¿cuál era su velocidad cuando se le aplicaron los frenos?

b) Si un auto corre a 50 mi/h, ¿cuánto patinará en asfalto mojado?



104. Distancia de la Tierra al Sol Se deduce de la **Tercera ley de Kepler** del movimiento planetario, que el promedio de distancia de un planeta al Sol (en metros) es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^3}\right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2 es la constante gravitacional y T es el periodo de la órbita del planeta (en segundos). Use el dato de que el periodo de la órbita de la Tierra es alrededor de 365.25 días para determinar la distancia de la Tierra al Sol.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

105. DISCUSIÓN: ¿Cuánto es mil millones? Si usted tuviera un millón (10^6) de dólares en una maleta y gastara mil dólares (10^3) al día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Gastando al mismo ritmo, ¿cuántos años tardaría en vaciar la maleta llena con *mil millones* (10^9) de dólares?

106. DISCUSIÓN: Potencias fáciles que se ven difíciles Calcule mentalmente estas expresiones. Use la ley de exponentes como ayuda.

a) $\dfrac{18^5}{9^5}$ ***b***) $20^6 \cdot (0.5)^6$

107. DISCUSIÓN: Límite del comportamiento de potencias Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre con la raíz n-ésima de 2 cuando n se hace grande? ¿Qué se puede decir acerca de la raíz n-ésima de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué ocurre con la raíz n-ésima de n cuando n se hace grande?

108. DEMOSTRACIÓN: Leyes de exponentes Demuestre las siguientes leyes de exponentes para el caso en que m y n son enteros positivos y $m > n$.

a) Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ***b)*** Ley 5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

109. DEMOSTRACIÓN: Leyes de exponentes Demuestre las siguientes leyes de exponentes.

a) Ley 6: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$ ***b)*** Ley 7: $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

■ Suma y resta de polinomios ■ Multiplicación de expresiones algebraicas ■ Fórmulas de productos notables ■ Factorización de factores comunes ■ Factorización de trinomios ■ Fórmulas especiales de factorización ■ Factorización por agrupación de términos

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo x, y y z, y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una **expresión algebraica**. Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas arriba es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n**. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$8 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomio	$9x^5$	5
6	monomio	6	0

Suma y resta de polinomios

Sumamos y **restamos** polinomios usando las propiedades de los números reales que vimos en la sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevadas a las mismas potencias) usando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

Propiedad distributiva

$ac + bc = (a + b)c$

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Para restar polinomios, tenemos que recordar que, si un signo menos precede a una expresión entre paréntesis, entonces cuando quitemos el paréntesis se debe cambiar el signo de cada término dentro del paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Este es simplemente el caso de la propiedad distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 ■ Suma y resta de polinomios

***a*)** Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

***b*)** Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

SOLUCIÓN

***a*)** $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ — Agrupe términos semejantes

$= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ — Combine términos semejantes

***b*)** $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ — Propiedad distributiva

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ — Agrupe términos semejantes

$= -11x^2 + 9x + 4$ — Combine términos semejantes

Ahora intente realizar los ejercicios 17 y 19 ■

Multiplicación de expresiones algebraicas

Para encontrar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas es necesario usar repetidamente la propiedad distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

El acrónimo **FOIL** nos ayuda a recordar que el producto de dos binomios es la suma de los productos de los primeros (**F**irst) términos, los términos externos (**O**uter), los términos internos (**I**nner) y los últimos (**L**ast).

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto señala que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b^2)(c + d) = \underset{\mathbf{F}}{ac} + \underset{\mathbf{O}}{ad} + \underset{\mathbf{I}}{bc} + \underset{\mathbf{L}}{bd}$$

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la propiedad distributiva y las leyes de exponentes.

EJEMPLO 2 ■ Multiplicación de binomios usando FOIL

$(2x + 1)(3x - 5) = \underset{\mathbf{F}}{6x^2} - \underset{\mathbf{O}}{10x} + \underset{\mathbf{I}}{3x} - \underset{\mathbf{L}}{5}$ — Propiedad distributiva

$= 6x^2 - 7x - 5$ — Combine términos semejantes

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

Cuando multiplicamos trinomios u otros polinomios con más términos usamos la propiedad distributiva. También es útil ordenar nuestro trabajo en forma de tabla. El siguiente ejemplo ilustra ambos métodos.

EJEMPLO 3 ■ Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN 1: Usando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de exponentes}\\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes}\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2: En forma de tabla

$$\begin{array}{rrrrl} & x^2 & - 5x & + 4 & \\ & & 2x & + 3 & \\ \hline & 3x^2 & - 15x & + 12 & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 3\\ 2x^3 & - 10x^2 & + 8x & & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 2x\\ \hline 2x^3 & - 7x^2 & - 7x & + 12 & \text{Sume términos semejantes}\end{array}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprendérselos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son cualesquier números reales o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ — Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ — Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ — Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ — Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ — Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **principio de sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para encontrar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la fórmula 2 de productos, sustituyendo x^2 por A y y^3 por B, para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

EJEMPLO 4 ■ Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para encontrar cada producto.

a) $(3x + 5)^2$ ***b***) $(x^2 - 2)^3$

SOLUCIÓN

a) Sustituyendo $A = 3x$ y $B = 5$ en la fórmula 2 de productos obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

b) Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la fórmula 5 de productos obtenemos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3\\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 31 y 43 ■

EJEMPLO 5 ■ Uso de las fórmulas de productos notales

Encuentre cada producto.

a) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ ***b***) $(x + y - 1)(x + y + 1)$

SOLUCIÓN

a) Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la fórmula 1 de productos obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

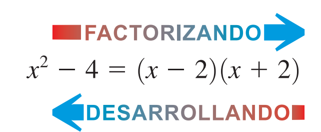
b) Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la fórmula 1 de productos con $A = x + y$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1]\\ &= (x + y)^2 - 1^2 &&\text{Fórmula de producto 1}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 &&\text{Fórmula de producto 2}\end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 57 y 61 ■

■ Factorización de factores comunes

Usamos la propiedad distributiva para desarrollar expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la propiedad distributiva) al **factorizar** una expresión como el producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir



$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 6 ■ Factorización de factores comunes

Factorice cada una de las siguientes expresiones.

a) $3x^2 - 6x$ ***b***) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$ ***c***) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

SOLUCIÓN

a) El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Las matemáticas en el mundo moderno

Cambio de palabras, sonido e imágenes en números

Imágenes, sonido y texto se transmiten rutinariamente de un lugar a otro a través de internet, fax o módems. ¿Cómo pueden estas cosas transmitirse mediante cables telefónicos? La clave para hacer esto es cambiarlas a números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo cambiar texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia A = 00000001, B = 00000010, C = 00000011, D = 00000100, E = 00000101 y así, sucesivamente. La palabra “BED” (CAMA) se convierte entonces en 000000100000010100000100. Al leer los dígitos en grupos de ocho, es posible transformar este número de nuevo a la palabra “BED”.

Cambiar sonidos a bits es más complicado. Una onda de sonido puede ser graficada en un osciloscopio o en computadora. La gráfica se descompone a continuación matemáticamente en componentes más sencillos correspondientes a las diferentes frecuencias del sonido original. (Aquí se usa una rama de las matemáticas de nombre Análisis de Fourier.) La intensidad de cada componente es un número, y el sonido original se puede reconstruir a partir de estos números. Por ejemplo, se almacena música en un CD como una sucesión de bits; puede verse como 101010001010010100101010 1000001011110101000101011… (Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits.) El reproductor de CD reconstruye la música a partir de los números presentes en el CD.

Cambiar imágenes a números comprende expresar el color y brillantez de cada punto (o pixel) en un número. Esto se hace en forma muy eficiente usando una rama de las matemáticas llamada teoría ondulatoria. El FBI emplea trenes de ondas como una forma de compactar y almacenar en archivos millones de huellas dactilares que necesitan.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \quad ✓$$

b) Observamos que

$$8, 6 \text{ y } -2 \text{ tienen el máximo factor común } 2$$
$$x^4, x^3 \text{ y } x \text{ tienen el máximo factor común } x$$
$$y^2, y^3 \text{ y } y^4 \text{ tienen el máximo factor común } y^2$$

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$\begin{aligned} 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \checkmark$$

c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned} (2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 63, 65 y 67 ■

Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

EJEMPLO 7 ■ Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN Necesitamos encontrar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

factores de 12

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12 \checkmark$$

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

factores de a

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$$

factores de c

Por tanto, tratamos de encontrar números p, q, r y s tales que $pq = a$, $rs = c$, $ps + qr = b$. Si todos estos números son enteros, entonces tendremos un limitado número de posibilidades de intentar encontrar p, q, r y s.

b | ab | b^2
a | a^2 | ab
a | b

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Visualización de una fórmula

Muchas de las fórmulas de productos especiales en esta sección pueden ser "vistas" como hechos geométricos acerca de la longitud, el área y el volumen. Por ejemplo, la fórmula del cuadrado de una suma puede interpretarse en referencia a áreas de cuadrados y rectángulos. Los antiguos griegos siempre interpretaban las fórmulas algebraicas en términos de figuras geométricas. Esas figuras nos dan una vista especial de cómo funcionan estas fórmulas. Puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

EJEMPLO 8 ■ Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

SOLUCIÓN Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y -5 como $-5 \cdot 1$ o (-1). Al tratar estas posibilidades llegamos a la factorización

factores de 6

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

factores de -5

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5$ ✓

Ahora intente realizar el ejercicio 71 ■

EJEMPLO 9 ■ Reconocer la forma de una expresión

Factorice lo siguiente.

a) $x^2 - 2x - 3$ ***b***) $(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$

SOLUCIÓN

a) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ Ensayo y error

b) Esta expresión es de la forma

$$\square^2 - 2\square - 3$$

donde $\square$ representa $5a + 1$. Esta es la misma forma que la expresión del inciso *a*), de modo que se factoriza como $(\square - 3)(\square + 1)$.

$$(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3 = [(5a + 1) - 3][(5a + 1) + 1]$$
$$= (5a - 2)(5a + 2)$$

Ahora intente realizar el ejercicio 75 ■

Fórmulas especiales de factorización

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas siguientes. Las tres primeras son simplemente fórmulas de productos notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

EJEMPLO 10 ■ Factorizar diferencias de cuadrados

Factorice cada expresión.

a) $4x^2 - 25$ ***b***) $(x + y)^2 - z^2$

Términos y factores
Cuando multiplicamos dos números juntos, cada uno de los números se llama **factor** del producto. Cuando sumamos dos números juntos, cada número se llama **término** de la suma.

2×3 — Factores

$2 + 3$ — Términos

Si un factor es común a cada término de una expresión podemos sacar el factor. La siguiente expresión tiene dos términos.

$ax + 2ay$

a es un factor de cada término

Cada término contiene el factor *a*, entonces sacando el factor *a* de la expresión se escribe como

$$ax + 2ay = a(x + 2y)$$

SOLUCIÓN

a) Usando la fórmula de diferencia de cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 \quad - \quad B^2 \quad = \quad (A \; - \; B)(A \; + \; B)$$

b) Usamos la fórmula de diferencia de cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

Ahora intente realizar los ejercicios 77 y 111 ■

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{o} \qquad A^2 - 2AB + B^2$$

Por tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o $-2AB$) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

EJEMPLO 11 ■ Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

a) $x^2 + 6x + 9$ ***b***) $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

a) Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Dado que el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

b) Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Puesto que el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$


Ahora intente realizar los ejercicios 107 y 109 ■

EJEMPLO 12 ■ Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

a) $27x^3 - 1$ ***b***) $x^6 + 8$

SOLUCIÓN

a) Usando la fórmula de la diferencia de cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 27x^3 - 1 &= (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

b) Usando la fórmula de suma de cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

Ahora intente realizar los ejercicios 79 y 81 ■

Cuando factorizamos una expresión, a veces el resultado se puede factorizar aún más. En general, *primero factorizamos factores comunes* y luego inspeccionamos el resultado para ver si puede ser factorizado por cualquiera de los otros métodos de esta sección. Repetimos este proceso hasta que hayamos factorizado completamente la expresión.

EJEMPLO 13 ■ Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

a) $2x^4 - 8x^2$ ***b***) $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN

a) Primero factorizamos la potencia de x que tenga el exponente más pequeño.

$$2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) \quad \text{El factor común es } 2x^2$$
$$= 2x^2(x - 2)(x + 2) \quad \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$

b) Primero factorizamos las potencias de x y de y que tengan los exponentes más pequeños.

$$x^5y^2 - xy^6 = xy^2(x^4 - y^4) \quad \text{El factor común es } xy^2$$
$$= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y)^2 \quad \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$
$$= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) \quad \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 117 y 119 ■

En el siguiente ejemplo factorizamos variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se presenta en cálculo.

EJEMPLO 14 ■ Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice cada una de las siguientes expresiones.

a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ***b***) $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

SOLUCIÓN

a) Factorice la potencia de x que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, x^{-12}.

$$3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} = 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) \quad \text{Factorice } 3x^{-1/2}$$
$$= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) \quad \text{Factorice la ecuación de segundo grado } x^2 - 3x + 2$$

Para factorizar $x^{-1/2}$ de $x^{3/2}$, *restamos* los exponentes:

$$x^{3/2} = x^{-1/2}(x^{3/2-(-1/2)})$$
$$= x^{-1/2}(x^{3/2+1/2})$$
$$= x^{-1/2}(x^2)$$

b) Factorice la potencia de $2 + x$ que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $(2 + x)^{-2/3}$.

$$(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} = (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] \quad \text{Factorice } (2 + x)^{-2/3}$$
$$= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) \quad \text{Simplifique}$$
$$= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) \quad \text{Factorice 2}$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

Para ver que haya factorizado correctamente multiplique usando las leyes de exponentes.

a) $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$
$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✓

b) $(2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)]$
$= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$ ✓

Ahora intente realizar los ejercicios 93 y 95 ■

■ Factorización por agrupación de términos

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO 15 ■ Factorización por agrupación

Factorice cada polinomio.

a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ ***b***) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

SOLUCIÓN

a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$ — Agrupe términos

$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$ — Factorice factores comunes

$= (x^2 + 4)(x + 1)$ — Factorice $x + 1$ de cada término

b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x^3 - 2x^2) - (9x - 18)$ — Agrupe términos

$= x^2(x - 2) - 9(x - 2)$ — Factorice factores comunes

$= (x^2 - 9)(x - 2)$ — Factorice $(x - 2)$ de cada término

$= (x - 3)(x + 3)(x - 2)$ — Factorice por completo

Ahora intente realizar los ejercicios 85 y 121 ■

1.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Considere el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^3$.

a) ¿Cuántos términos tiene este polinomio? ________

Enliste los términos: ________________.

b) ¿Cuál factor es común a cada término? ________

Factorice el polinomio: $2x^5 + 6x^4 + 4x^3 =$ ________.

2. Para factorizar el trinomio $x^2 + 7x + 10$ buscamos dos enteros cuyo producto sea ________ y cuya suma sea ________. Estos enteros son ________ y ________, de modo que el trinomio se factoriza como ________________.

3. El máximo común divisor de la expresión $3x^3 + x^2$ es ______, y la expresión se factoriza como ☐(☐ + ☐).

4. La fórmula de productos notables para la "suma de un cuadrado" es $(A + B)^2 =$ ________________.

Por tanto $(2x + 3)^2 =$ ________________.

5. La fórmula de productos notables para la "suma y diferencia de los mismos términos" es $(A + B)(A - B) =$ ____________.

Entonces $(5 + x)(5 - x) =$ ________________.

6. La fórmula de factorización especial para "la diferencia de cuadrados" es $A^2 - B^2 =$ ________________. Entonces $4x^2 - 25$ se factoriza como ________________.

7. La fórmula de factorización especial para un "cuadrado perfecto" es $A^2 + 2AB + B^2 =$ ______________. Entonces $x^2 + 10x + 25$ se factoriza como ________________.

8. *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.

a) ¿Es la expresión $(x + 5)^2$ igual a $x^2 + 25$?

b) ¿Cuando se desarrolla $(x + a)^2$, donde $a \neq 0$, se obtienen tres términos?

c) ¿La expresión $(x + 5)(x - 5)$ es igual a $x^2 - 25$?

d) ¿Cuando se desarrolla $(x + a)(x - a)$, donde $a \neq 0$, se obtienen dos términos?

HABILIDADES

9–14 ■ Polinomios Complete la tabla siguiente señalando si el polinomio es un monomio, un binomio o un trinomio; a continuación, haga una lista de sus términos y exprese su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
9. $5x^3 + 6$			
10. $-2x^2 + 5x - 3$			
11. -8			
12. $\frac{1}{2}x^7$			
13. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
14. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

15–24 ■ Polinomios Determine la suma, la diferencia o el producto.

15. $(12x - 7) - (5x - 12)$

16. $(5 - 3x) + (2x - 8)$

17. $(-2x^2 - 3x + 1) + (3x^2 + 5x - 4)$

18. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

19. $(5x^3 + 4x^2 - 3x) - (x^2 + 7x + 2)$

20. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

21. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

22. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

23. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

24. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

25–30 ■ Uso de FOIL Multiplique las expresiones algebraicas usando el método FOIL y simplifique.

25. $(3t - 2)(7t - 4)$

26. $(4s - 1)(2s + 5)$

27. $(3x + 5)(2x - 1)$

28. $(7y - 3)(2y - 1)$

29. $(x + 3y)(2x - y)$

30. $(4x - 5y)(3x - y)$

31–46 ■ Uso de las fórmulas de productos notables Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de productos notables y simplifique.

31. $(5x+1)^2$ **32.** $(2-7y)^2$

33. $(2u+v)^2$ **34.** $(x-3y)^2$

35. $(2x+3y)^2$ **36.** $(r-2s)^2$

37. $(x+6)(x-6)$ **38.** $(5-y)(5+y)$

39. $(3x-4)(3x+4)$ **40.** $(2y+5)(2y-5)$

41. $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$ **42.** $(\sqrt{y}+\sqrt{2})(\sqrt{y}-\sqrt{2})$

43. $(y+2)^3$ **44.** $(x-3)^3$

45. $(1-2r)^3$ **46.** $(3+2y)^3$

47–62 ■ Multiplicación de expresiones algebraicas Realice las operaciones indicadas y simplifique.

47. $(x+2)(x^2+2x+3)$ **48.** $(x+1)(2x^2-x+1)$

49. $(2x-5)(x^2-x+1)$ **50.** $(1+2x)(x^2-3x+1)$

51. $\sqrt{x}(x-\sqrt{x})$ **52.** $x^{3/2}(\sqrt{x}-1/\sqrt{x})$

53. $y^{1/3}(y^{2/3}+y^{5/3})$ **54.** $x^{1/4}(2x^{3/4}-x^{1/4})$

55. $(x^2-a^2)(x^2+a^2)$

56. $(x^{1/2}+y^{1/2})(x^{1/2}-y^{1/2})$

57. $(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)$

58. $(\sqrt{h^2+1}+1)(\sqrt{h^2+1}-1)$

59. $((x-1)+x^2)((x-1)-x^2)$

60. $(x+(2+x^2))(x-(2+x^2))$

61. $(2x+y-3)(2x+y+3)$

62. $(x+y+z)(x-y-z)$

63–68 ■ Factorice el factor común Saque el factor común.

63. $-2x^3+x$ **64.** $3x^4-6x^3-x^2$

65. $y(y-6)+9(y-6)$ **66.** $(z+2)^2-5(z+2)$

67. $2x^2y-6xy^2+3xy$ **68.** $-7x^4y^2+14xy^3+21xy^4$

69–76 ■ Factorización de trinomios Factorice el trinomio.

69. x^2+8x+7 **70.** x^2+4x-5

71. $8x^2-14x-15$ **72.** $6y^2+11y-21$

73. $3x^2-16x+5$ **74.** $5x^2-7x-6$

75. $(3x+2)^2+8(3x+2)+12$

76. $2(a+b)^2+5(a+b)-3$

77–84 ■ Uso de fórmulas especiales de factorización Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

77. $9a^2-16$ **78.** $(x+3)^2-4$

79. $27x^3+y^3$ **80.** a^3-b^6

81. $8s^3-125t^3$ **82.** $1+1000y^3$

83. $x^2+12x+36$ **84.** $16z^2-24z+9$

85–90 ■ Factorización por agrupamiento Factorice la expresión agrupando términos.

85. x^3+4x^2+x+4 **86.** $3x^3-x^2+6x-2$

87. $5x^3+x^2+5x+1$ **88.** $18x^3+9x^2+2x+1$

89. x^3+x^2+x+1 **90.** x^5+x^4+x+1

91–96 ■ Exponentes fraccionarios Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

91. $x^{5/2}-x^{1/2}$ **92.** $3x^{-1/2}+4x^{1/2}+x^{3/2}$

93. $x^{-3/2}+2x^{-1/2}+x^{1/2}$ **94.** $(x-1)^{7/2}-(x-1)^{3/2}$

95. $(x^2+1)^{1/2}+2(x^2+1)^{-1/2}$

96. $x^{-1/2}(x+1)^{1/2}+x^{1/2}(x+1)^{-1/2}$

97–126 ■ Factorización completa Factorice por completo la expresión.

97. $12x^3+18x$ **98.** $30x^3+15x^4$

99. x^2-2x-8 **100.** $x^2-14x+48$

101. $2x^2+5x+3$ **102.** $2x^2+7x-4$

103. $9x^2-36x-45$ **104.** $8x^2+10x+3$

105. $49-4y^2$ **106.** $4t^2-9s^2$

107. t^2-6t+9 **108.** $x^2+10x+25$

109. $4x^2+4xy+y^2$ **110.** $r^2-6rs+9s^2$

111. $(a+b)^2-(a-b)^2$ **112.** $\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$

113. $x^2(x^2-1)-9(x^2-1)$ **114.** $(a^2-1)b^2-4(a^2-1)$

115. $8x^3-125$ **116.** x^6+64

117. x^3+2x^2+x **118.** $3x^3-27x$

119. $x^4y^3-x^2y^5$ **120.** $18y^3x^2-2xy^4$

121. $3x^3-x^2-12x+4$ **122.** $9x^3+18x^2-x-2$

123. $(x-1)(x+2)^2-(x-1)^2(x+2)$

124. $y^4(y+2)^3+y^5(y+2)^4$

125. $(a^2+1)^2-7(a^2+1)+10$

126. $(a^2+2a)^2-2(a^2+2a)-3$

127–130 ■ Factorización completa Factorice por completo la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "regla del producto".)

127. $5(x^2+4)^4(2x)(x-2)^4+(x^2+4)^5(4)(x-2)^3$

128. $3(2x-1)^2(2)(x+3)^{1/2}+(2x-1)^3(\frac{1}{2})(x+3)^{-1/2}$

129. $(x^2+3)^{-1/3}-\frac{2}{3}x^2(x^2+3)^{-4/3}$

130. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x+4)^{1/2}-\frac{3}{2}x^{1/2}(3x+4)^{-1/2}$

HABILIDADES Plus

131–132 ■ Verificar identidades Demuestre que las siguientes identidades son válidas.

131. ***a)*** $ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]$

b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=4a^2b^2$

132. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

133. Factorización completa Factorice por completo la expresión siguiente: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

134. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$ A veces un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$ se puede factorizar fácilmente. Por ejemplo,

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$$

Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar de esta manera. En cambio, podemos utilizar el siguiente método.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 && \text{Sume y reste } x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - x^2 && \text{Factorice el cuadrado perfecto} \\ &= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x] && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

Factorice las siguientes expresiones, usando cualquier método que sea apropiado.

a) $x^4 + x^2 - 2$ ***b)*** $x^4 + 2x^2 + 9$

c) $x^4 + 4x^2 + 16$ ***d)*** $x^4 + 2x^2 + 1$

APLICACIONES

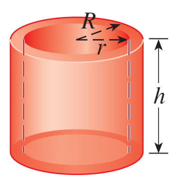
135. Volumen de concreto Se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas de concreto como se muestra en la figura. Mediante la fórmula para el volumen de un cilindro dada al final de este libro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

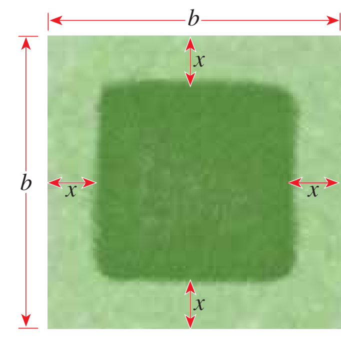
$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{grosor}$$

Use el diagrama "desenrollado" para explicar por qué esto tiene sentido, geométricamente hablando.





136. Podar un campo Cada semana un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y pequeños animales (véase la figura). El campo mide b pies por b pies, y la franja podada es de x pies de ancho.



a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.

b) Factorice la expresión del inciso *a*) para demostrar que el área de la parte podada también es $4x(b - x)$.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

137. DESCUBRIMIENTO: Grados de sumas y productos de polinomios Forme varios pares de polinomios y después calcule la suma y el producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, conteste las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo está relacionado el grado del producto con los grados de los polinomios originales?

b) ¿Cómo está relacionado el grado de la suma con los grados de los polinomios originales?

138. DISCUSIÓN: El poder de las fórmulas algebraicas Use la fórmula de una diferencia de cuadrados $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ para evaluar las siguientes diferencias mentalmente. Forme más expresiones que pueda formular mentalmente.

a) $528^2 - 527^2$

b) $122^2 - 120^2$

c) $1\,020^2 - 1\,010^2$

139. DISCUSIÓN: El poder de las fórmulas algebraicas Use la fórmula de productos notables $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ para evaluar los siguientes productos mentalmente. Forme más de estos productos que pueda formular mentalmente.

a) $501 \cdot 499$

b) $79 \cdot 61$

c) $2\,007 \cdot 1\,993$

140. DESCUBRIMIENTO: Diferencias de potencias pares

a) Factorice por completo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.

b) Verifique que $18\,335 = 12^4 - 7^4$ y que $2\,868\,335 = 12^6 - 7^6$.

c) Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) para factorizar los enteros 18 335 y 2 868 335. Después demuestre que en estas dos factorizaciones todos los factores son números primos.

141. DESCUBRIMIENTO: Factorización de $A^n - 1$

a) Verifique estas fórmulas al desarrollar y simplificar el lado derecho.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$
$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$
$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

b) Con base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa usted que será posible factorizar $A^5 - 1$? Verifique su conjetura. Ahora generalice el patrón que haya observado para obtener una fórmula de factorización para $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

142. DEMOSTRACIÓN: Fórmulas de factorización especiales Demuestre las siguientes fórmulas desarrollando el lado derecho.

a) Diferencia de cubos:
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

b) Suma de cubos:
$A^3 - B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

1.4 EXPRESIONES RACIONALES

■ Dominio de una expresión algebraica ■ Simplificación de expresiones racionales ■ Multiplicación y división de expresiones racionales ■ Suma y resta de expresiones racionales ■ Fracciones compuestas ■ Racionalizar el denominador o el numerador ■ Evitar errores comunes

El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria**. Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{y-2}{y^2+4} \qquad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6} \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios. Por ejemplo, las primeras tres expresiones de la lista anterior son expresiones racionales, pero la cuarta no lo es, ya que su denominador tiene un radical. En esta sección aprenderemos cómo realizar operaciones algebraicas con expresiones racionales.

■ Dominio de una expresión algebraica

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite que tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

EJEMPLO 1 ■ Encontrar el dominio de una expresión

Encuentre los dominios de las siguientes expresiones.

a) $2x^2 + 3x - 1$ ***b***) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ ***c***) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

SOLUCIÓN

a) Este polinomio está definido para toda x. Entonces, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El denominador será 0 si $x = 2$ o $x = 3$

Dado que el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3, la expresión no está definida para estos números. El dominio $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

c) Para que el numerador esté definido debemos tener $x \geq 0$. Tampoco podemos dividir entre 0, de modo que $x \neq 5$.

Asegúrese de tener $x \geq 0$ para tomar la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador sería 0 si $x = 5$

Entonces, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales** factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto nos permite **eliminar** factores comunes del numerador y el denominador.

EJEMPLO 2 ■ Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

SOLUCIÓN

No podemos eliminar las x^2 en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ porque x^2 no es un factor.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x + 1}{x + 2} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto indica que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

EJEMPLO 3 ■ Multiplicación de expresiones racionales

Realice la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{3(x - 1)(x + 3)\,(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2} \qquad \text{Propiedad de fracciones}$$

$$= \frac{3(x + 3)}{x + 4} \qquad \text{Elimine factores comunes}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

Para **dividir expresiones racionales** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto indica que para **dividir una fracción** entre otra fracción invertimos el divisor y multiplicamos.

EJEMPLO 4 ■ División de expresiones racionales

Realice la división indicada y simplifique: $\dfrac{x-4}{x^2-4} \div \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4} \qquad \text{Invierta y multiplique}$$

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{Elimine factores comunes}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

■ Suma y resta de expresiones racionales

Para **sumar o restar expresiones racionales** primero encontramos un denominador común y luego usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD) como se explica en la sección 1.1. El MCD se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

Evite cometer el siguiente error:

$$\frac{A}{B+C} \cancel{=} \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si hacemos que $A = 2$, $B = 1$ y $C = 1$, entonces vemos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \qquad \text{¡Error!}$$

EJEMPLO 5 ■ Sumar y restar expresiones racionales

Realice las operaciones indicadas y simplifique:

a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ ***b)*** $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

SOLUCIÓN

a) Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Escriba fracciones usando el MCD}$$

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Sume fracciones}$$

$$= \frac{x^2+2x^2+6}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Combine los términos del numerador}$$

b) El MCD de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ y $(x + 1)^2$ es $(x - 1)(x + 1)^2$.

$$\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{2}{(x + 1)^2} \quad \text{Factorice}$$

$$= \frac{(x + 1) - 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)^2} \quad \text{Combine fracciones usando el MCD}$$

$$= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x - 1)(x + 1)^2} \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{3 - x}{(x - 1)(x + 1)^2} \quad \text{Combine los términos del numerador}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 43 y 45 ■

Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador o ambos son expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 6 ■ Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}}$

SOLUCIÓN 1 Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. Luego invertimos y multiplicamos.

$$\frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{x + y}{y}}{\dfrac{x - y}{x}} = \frac{x + y}{y} \cdot \frac{x}{x - y}$$

$$= \frac{x(x + y)}{y(x - y)}$$

Las matemáticas en el mundo moderno



Cortesía de la NASA

Códigos para corregir errores

Las imágenes enviadas por la nave *Pathfinder* (*Explorador*) desde la superficie de Marte, el 4 de julio de 1997, eran asombrosamente claras. Pero pocas personas de las que vieron estas imágenes estaban conscientes de las complejas matemáticas utilizadas para lograr esta hazaña. La distancia a Marte es enorme y el ruido de fondo (o estática) es muchas veces más fuerte que la señal original que emite la nave espacial. Entonces, cuando los científicos reciben la señal, está llena de errores. Para obtener una imagen clara los errores deben encontrarse y corregirse. Este mismo problema de errores se encuentra cotidianamente durante la transmisión de registros bancarios cuando una persona usa un cajero automático, o durante la transmisión de voz cuando se habla por teléfono.

Para entender la forma en que los errores se localizan y corrigen primero debemos entender que para transmitir imágenes o texto los transformamos en bits (los dígitos 0 o 1; véase la página 28). Para ayudar al receptor a reconocer errores, el mensaje se "codifica" al insertar bits adicionales. Por ejemplo, suponga que se desea transmitir el mensaje "10100". Un código muy sencillo es como sigue: envía cada digito un millón de veces. La persona que recibe el mensaje lo lee en bloques de un millón de dígitos. Si el primer bloque es principalmente de números 1 concluye que es probable que usted esté tratando de transmitir un 1 y así, sucesivamente. Decir que este código no es eficiente es un poco modesto; requiere enviar un millón de veces más datos que el mensaje original. Otro método inserta "dígitos de comprobación". Por ejemplo, cada bloque de ocho dígitos inserta un noveno dígito; el dígito insertado es 0 si hay un número par de números 1 en el bloque y 1 si hay un número impar. Por tanto, si un sólo dígito está mal (un 0 cambiado a un 1, o viceversa), los dígitos de prueba nos permiten reconocer que ha ocurrido un error. Este método no nos dice dónde está el error, de modo que no podemos corregirlo. Los modernos códigos que corrigen errores usan interesantes algoritmos matemáticos que requieren insertar relativamente pocos dígitos, pero le permiten al receptor no sólo reconocer errores, sino también corregirlos. El primer código corrector de errores fue inventado en la década de 1940 por Richard Hamming en el MIT. Es interesante observar que el idioma inglés tiene un mecanismo corrector de errores ya integrado; para probarlo, trate de leer esta oración cargada de errores: Gve mo libty ox biv ne deth.

SOLUCIÓN 2 Encontramos el MCD de todas las fracciones en la expresión y, a continuación, lo multiplicamos por el numerador y el denominador. En este ejemplo el MCD de todas las fracciones es xy. Por tanto

$$\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} = \frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} \cdot \frac{xy}{xy}$$ Multiplique numerador y denominador por xy

$$= \frac{x^2+xy}{xy-y^2}$$ Simplifique

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$ Factorice

Ahora intente realizar los ejercicios 59 y 65 ■

Los siguientes dos ejemplos muestran situaciones de cálculo que requieren la capacidad para trabajar con expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 7 ■ Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$

SOLUCIÓN Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

También podemos simplificar multiplicando el numerador y el denominador por $a(a+h)$.

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}$$ Combine fracciones del numerador

$$= \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h}$$ Propiedad 2 de fracciones (invertir divisor y multiplicar)

$$= \frac{a-a-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h}$$ Propiedad distributiva

$$= \frac{-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h}$$ Simplifique

$$= \frac{-1}{a(a+h)}$$ Propiedad 5 de fracciones (elimine factores comunes)

Ahora intente realizar el ejercicio 73 ■

EJEMPLO 8 ■ Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$

SOLUCIÓN 1 Factorice $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

Factorice la potencia de $1+x^2$ con el exponente *más pequeño*, en este caso $(1+x^2)^{-1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2)-x^2]}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

SOLUCIÓN 2 Dado que $(1+x^2)^{-1/2} = 1/(1+x^2)^{1/2}$ es una fracción podemos eliminar todas las fracciones al multiplicar el numerador y el denominador por $(1+x^2)^{1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 81 ■

Racionalizar el denominador o el numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador al multiplicar el numerador y el denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto funciona porque, debido a la fórmula 1 de productos notables de la sección 1.3, el producto del denominador y su radical conjugado no contienen radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

EJEMPLO 9 ■ Racionalizar el denominador

Racionalice el denominador: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

SOLUCIÓN Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado de $1+\sqrt{2}$, que es $1-\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$ Multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$ Fórmula 1 de productos notables

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$

La fórmula 1 de productos notables es $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Ahora intente realizar el ejercicio 85 ■

EJEMPLO 10 ■ Racionalización del numerador

Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

SOLUCIÓN Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado $\sqrt{4+h}+2$.

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$ Multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado

$$= \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$ Fórmula 1 de productos notables

$$= \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$ Propiedad 5 de fracciones (elimine factores comunes)

La fórmula 1 de productos notables es $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Ahora intente realizar el ejercicio 91 ■

Evitar errores comunes



No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta causa. La tabla siguiente indica diversas propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 \not= a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} \not= \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \not= a + b$
$\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \cdot b}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \not= \dfrac{1}{a + b}$
$\dfrac{ab}{a} = b$	$\dfrac{a + b}{a} \not= b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \not= (a + b)^{-1}$

Para verificar que las ecuaciones de la columna derecha están en error, simplemente sustituya los números a y b y calcule cada lado. Por ejemplo, si tomamos $a = 2$ y $b = 2$ en el cuarto error, encontramos que los lados izquierdo y derecho son:

$$\underbrace{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}_{\text{Lado izquierdo}} \qquad \underbrace{\frac{1}{a + b} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}}_{\text{Lado derecho}}$$

Dado que $1 \neq \frac{1}{4}$, la ecuación indicada está equivocada. Del mismo modo, el lector debe convencerse del error en cada una de las otras ecuaciones. (Véanse los ejercicios 101 y 102.)

1.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. ¿Cuáles de las expresiones siguientes son racionales?

a) $\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ ***b)*** $\dfrac{\sqrt{x + 1}}{2x + 3}$ ***c)*** $\dfrac{x(x^2 - 1)}{x + 3}$

2. Para simplificar una expresión racional eliminamos *factores* que son comunes al ________ y ________. Por tanto, la expresión

$$\frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 2)}$$

se simplifica a ________.

3. Para multiplicar dos expresiones racionales multiplicamos sus ________ y multiplicamos sus ________.

Por tanto $\dfrac{2}{x + 1} \cdot \dfrac{x}{x + 3}$ es lo mismo que ________.

4. Considere la expresión $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{x}{(x + 1)^2}$.

a) ¿Cuántos términos tiene esta expresión?

b) Encuentre el mínimo común denominador de todos los términos.

c) Realice la adición y simplifique.

5–6 ■ *¿Sí o no?* Si es *no* explique. (No considere ningún valor que haga un denominador igual a cero.)

5. ***a)*** ¿La expresión $\dfrac{x(x + 1)}{(x + 1)^2}$ es igual a $\dfrac{x}{x + 1}$?

b) ¿La expresión $\sqrt{x^2 + 25}$ es igual a $x + 5$?

6. ***a)*** ¿La expresión $\dfrac{3 + a}{3}$ es igual a $1 + \dfrac{a}{3}$?

b) ¿La expresión $\dfrac{2}{4 + x}$ es igual a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x}$?

HABILIDADES

7–14 ■ **Dominio** Encuentre el dominio de la expresión.

7. $4x^2 - 10x + 3$

8. $-x^4 + x^3 + 9x$

9. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 3}$

10. $\dfrac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

11. $\sqrt{x + 3}$

12. $\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

13. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$

14. $\dfrac{\sqrt{2x}}{x + 1}$

15–24 ■ Simplificar Simplifique la expresión racional.

15. $\dfrac{5(x-3)(2x+1)}{10(x-3)^2}$

16. $\dfrac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$

17. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

18. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

19. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+8x+15}$

20. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

21. $\dfrac{y^2+y}{y^2-1}$

22. $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+7y+3}$

23. $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$

24. $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

25–38 ■ Multiplicar o dividir Realice la multiplicación o división y simplifique.

25. $\dfrac{4x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{16x}$

26. $\dfrac{x^2-25}{x^2-16}\cdot\dfrac{x+4}{x+5}$

27. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-25}\cdot\dfrac{x-5}{x+2}$

28. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{3-x}{3+x}$

29. $\dfrac{t-3}{t^2+9}\cdot\dfrac{t+3}{t^2-9}$

30. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$

31. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

32. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

33. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}\div\dfrac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$

34. $\dfrac{2x+1}{2x^2+x-15}\div\dfrac{6x^2-x-2}{x+3}$

35. $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2+2x+1}}$

36. $=\dfrac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$

37. $\dfrac{x/y}{z}$

38. $\dfrac{x}{y/z}$

39–58 ■ Sumar o restar Realice la adición o sustracción y simplifique.

39. $1+\dfrac{1}{x+3}$

40. $\dfrac{3x-2}{x+1}-2$

41. $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$

42. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}$

43. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

44. $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{3}{x+6}$

45. $\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{3}{(2x-3)^2}$

46. $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$

47. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$

48. $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

49. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$

50. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

51. $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}$

52. $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}$

53. $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

54. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-5x+4}$

55. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-x}$

56. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

57. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

58. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{x^2-1}$

59–72 ■ Fracciones compuestas Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

59. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-2}$

60. $\dfrac{1-\dfrac{2}{y}}{\dfrac{3}{y}-1}$

61. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x+2}}$

62. $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

63. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}}{x+1}$

64. $\dfrac{\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x+2}{x+1}}{x+3}$

65. $\dfrac{x-\dfrac{x}{y}}{y-\dfrac{y}{x}}$

66. $\dfrac{x+\dfrac{y}{x}}{y+\dfrac{x}{y}}$

67. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$

68. $x-\dfrac{y}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

69. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

70. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

71. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$

72. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

73–78 ■ Expresiones encontradas en cálculo Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como estas aparecen en cálculo.)

73. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x+h}-\dfrac{1}{1+x}}{h}$

74. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

75. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

76. $\dfrac{(x+h)^3 - 7(x+h) - (x^3 - 7x)}{h}$

77. $\sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$ **78.** $\sqrt{1 + \left(x^3 - \dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$

79–84 ■ Expresiones encontradas en cálculo Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "regla del cociente".)

79. $\dfrac{3(x+2)^2(x-3)^2 - (x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$

80. $\dfrac{2x(x+6)^4 - x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$

81. $\dfrac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

82. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$

83. $\dfrac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

84. $\dfrac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$

85–90 ■ Racionalizar el denominador Racionalice el denominador.

85. $\dfrac{1}{5-\sqrt{3}}$ **86.** $\dfrac{3}{2-\sqrt{5}}$

87. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ **88.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

89. $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$ **90.** $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

91–96 ■ Racionalizar el denominador Racionalice el denominador.

91. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$ **92.** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

93. $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$ **94.** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

95. $\sqrt{x^2+1} - x$ **96.** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

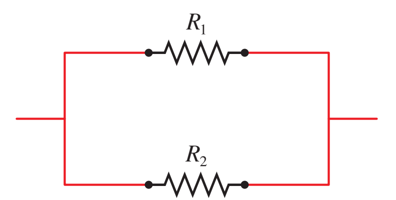
APLICACIONES

97. Resistencia eléctrica Si dos resistores eléctricos con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (véase la figura), entonces la resistencia total R está dada por

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

a) Simplifique la expresión R.

b) Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia R?



98. Costo promedio Un fabricante de ropa encuentra que el costo de producir x camisas es $500 + 6x + 0.01x^2$ dólares.

a) Explique por qué el costo promedio por camisa está dado por la expresión racional

$$A = \frac{500 + 6x + 0.01x^2}{x}$$

b) Llene la tabla al calcular el costo promedio por camisa para los valores dados de x.

x	Costo promedio
10	
20	
50	
100	
200	
500	
1 000	

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

99. DISCUSIÓN: Comportamiento límite de una expresión racional La expresión racional

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

no está definida para $x = 3$. Llene las tablas y determine a qué valor se aproxima la expresión cuando x se acerca más y más a 3. ¿Por qué es esto razonable? Factorice el numerador de la expresión y simplifique para ver por qué.

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
2.80	
2.90	
2.95	
2.99	
2.999	

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
3.20	
3.10	
3.05	
3.01	
3.001	

100. DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN: ¿Es esto racionalización? En la expresión $2/\sqrt{x}$ eliminaríamos el radical si fuéramos a elevar al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Es esto lo mismo que racionalizar el denominador? Explique.

101. **DISCUSIÓN: Errores algebraicos** La columna de la izquierda en la tabla de la página siguiente es una lista de algunos errores algebraicos comunes. En cada caso, de un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este tipo, que muestra que un enunciado es falso, se llama *contraejemplo*.

Error algebraico	Contraejemplo
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$	
$\sqrt{a^2+b^2} \neq a + b$	
$\frac{a+b}{a} \neq b$	
$\frac{a}{a+b} \neq \frac{1}{b}$	
$\frac{a^m}{a^n} \neq a^{m/n}$	

102. **DISCUSIÓN: Errores algebraicos** Determine si la ecuación dada es verdadera para todos los valores de las variables. Si no, dé un contraejemplo. (No considere ningún valor que haga un denominador igual a cero.)

a) $\dfrac{5+a}{5} = 1 + \dfrac{a}{5}$ ***b***) $\dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{x}{y}$

c) $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{1}{1+y}$ ***d***) $2\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{2a}{2b}$

e) $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$ ***f***) $\dfrac{1+x+x^2}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 + x$

103. **DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Valores de una expresión racional** Considere la expresión

$$x + \frac{1}{x}$$

para $x > 0$.

a) Llene la tabla y pruebe con otros valores de x. ¿Cuál cree que es el menor valor posible de esta expresión?

x	1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{99}{100}$	
$x + \frac{1}{x}$						

b) Demuestre que para $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

[*Sugerencia:* Multiplique por x, mueva términos a un lado y luego factorice para obtener un enunciado verdadero. Observe que cada paso que hace es reversible.]

1.5 ECUACIONES

■ Solución de ecuaciones lineales ■ Solución de ecuaciones cuadráticas ■ Otros tipos de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

$x = 3$ es una solución de la ecuación $4x + 7 = 19$, porque sustituir $x = 3$ hace verdadera la ecuación:

$x = 3$

$4(3) + 7 = 19$ ✓

la letra x es la variable. Consideramos x como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es encontrar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de encontrar las soluciones se llama **resolver la ecuación**.

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación tratamos de encontrar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está solo en un lado del signo "igual". A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A, B y C representan cualquier expresión algebraica, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a").

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A = B \Leftrightarrow CA = CB \quad (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que, al resolverla, el estudiante *realice la misma operación en ambos lados de una ecuación*. Entonces, si decimos "*sume* -7" al resolver una ecuación, es una forma breve de decir "*sume* -7 a cada lado de la ecuación".

Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	Ecuaciones no lineales	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \dfrac{x}{3}$	$\dfrac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal; contiene el recíproco de la variable

EJEMPLO 1 ■ Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

SOLUCIÓN Resolvemos esta ecuación al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constantes en el otro.

$7x - 4 = 3x + 8$	Ecuación dada
$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$	Sume 4
$7x = 3x + 12$	Simplifique
$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$	Reste $3x$
$4x = 12$	Simplifique
$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$	Multiplique por $\frac{1}{4}$
$x = 3$	Simplifique

Debido a que es importante VERIFICAR SU RESPUESTA hacemos esto en muchos de nuestros ejemplos. En estas pruebas, LI quiere decir "lado izquierdo" y LD es "lado derecho" de la ecuación original.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3$:

$x = 3$ → $\text{LI} = 7(3) - 4 = 17$

$x = 3$ → $\text{LD} = 3(3) + 8 = 17$

LI = LD ✓

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

En las ciencias muchas fórmulas involucran varias variables, por lo que es necesario expresar una en términos de otras. En el siguiente ejemplo resolvemos la ley gravitacional de Newton para una variable.

EJEMPLO 2 ■ Solución para una variable en términos de otras

Esta es la ley de Newton de gravitación universal. Da la fuerza gravitacional F entre dos masas m y M que están a una distancia r entre sí. La constante G es la constante universal de gravitación.

Despeje M de la ecuación

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al despejar M en un lado tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplifique}$$

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$.


Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

EJEMPLO 3 ■ Despejar una variable en términos de otras

El área superficial A del rectángulo cerrado que se muestra en la figura 1 puede calcularse a partir de la longitud l, el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje w en términos de las otras variables de esta ecuación.

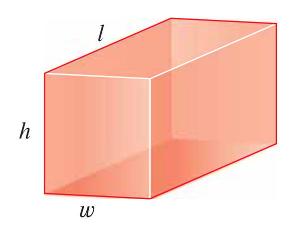


FIGURA 1 Una caja rectangular cerrada

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable la resolvemos como es usual al despejar w en un lado y tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

Ecuaciones cuadráticas

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$3x + 10 = 4x^2$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

EJEMPLO 4 ■ Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Encuentre las raíces reales de la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

SOLUCIÓN Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Propiedad de producto cero}$$

$$x = 3 \qquad x = -8 \qquad \text{Resuelva}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$ ✓

$x = -8$:

$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24$ ✓

Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

¿Se da cuenta de por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el ejemplo 4? Factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no nos ayuda a encontrar soluciones porque 24 se puede factorizar en un número infinito de formas, por ejemplo $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva y se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, de modo que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

EJEMPLO 5 ■ Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 5$ ***b)*** $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

a) Del principio expuesto en el recuadro anterior obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

b) También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

Ahora intente realizar los ejercicios 53 y 55 ■

Véase en la página 31 cómo reconocer cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

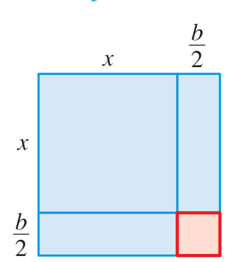
Como vimos en el ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces podemos resolverla al tomar la raíz cuadrada de cada lado. En una ecuación de esta forma el lado izquierdo es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en x. Por tanto, si una ecuación cuadrática no se factoriza fácilmente, entonces podemos resolverla usando la técnica de **completar el cuadrado**. Esto significa que sumamos una constante a una expresión para hacerla cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer que $x^2 - 6x$ sea cuadrado perfecto debemos sumar 9 porque $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Completar el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un pequeño cuadrado de área $(b/2)^2$ para "completar" el cuadrado.



COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, el cuadrado de la mitad el coeficiente de x. Con esto se obtiene el cuadrado perfecto

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 6 ■ Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Determine todas las soluciones reales de cada ecuación.

a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ ***b)*** $3x^2 - 12x + 6 = 0$

SOLUCIÓN

a)

$$x^2 - 8x + 13 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x^2 - 8x = -13 \qquad \text{Reste 13}$$

$$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16 \qquad \text{Complete el cuadrado perfecto: sume } \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$$

$$(x - 4)^2 = 3 \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{3} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{3} \qquad \text{Sume 4}$$

Cuando complete el cuadrado, asegúrese de que el coeficiente de x^2 sea 1. Si no lo es, se debe factorizar este coeficiente de ambos términos que contengan x:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

Luego complete el cuadrado dentro de los paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro de los paréntesis se multiplica por a.

b) Después de restar 6 de cada lado de la ecuación debemos factorizar el coeficiente de x^2 (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$$3x^2 - 12x + 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$3x^2 - 12x = -6 \qquad \text{Reste 6}$$

$$3(x^2 - 4x) = -6 \qquad \text{Factorice 3 del lado izquierdo}$$

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ *dentro* de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3 significa que en reali-

dad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

$$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume 4}$$
$$3(x - 2)^2 = 6 \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$
$$(x - 2)^2 = 2 \qquad \text{Divida entre 3}$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$
$$x = 2 \pm \sqrt{2} \qquad \text{Sume 2}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 57 y 61 ■

Podemos usar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración Primero dividimos entre a cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Divida entre } a$$

Luego completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

■

La fórmula cuadrática podría usarse para resolver las ecuaciones de los ejemplos 4 y 6. El lector debe realizar los detalles de estos cálculos.



© Biblioteca del Congreso, División de grabados y fotografías [LC-USZ62-62123]

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) tuvo una exitosa carrera política antes de dedicarse a las matemáticas en los últimos años de su vida. Fue uno de los más afamados matemáticos franceses del siglo XVI. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra al usar letras para representar cantidades *conocidas* en una ecuación. Antes de la época de Viète' se resolvía cada una de las ecuaciones. Por ejemplo, para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$
$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

se completaba el cuadrado para encontrar su solución. La idea de Viète fue considerar a la vez todas las ecuaciones cuadráticas al escribir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son cantidades conocidas. De este modo, él hizo posible escribir una *fórmula* (en este caso, la fórmula cuadrática) incluyendo a, b y c, que pueden usarse para resolver todas esas ecuaciones de una sola vez.

El genio matemático de Viète resultó ser sumamente valioso durante una guerra entre Francia y España. Para comunicarse con sus tropas, los españoles utilizaban un complicado código que Viète logró descifrar.

Sin saber el logro de Viète el rey español Felipe II protestó ante el papa, diciendo que los franceses estaban usando brujería para leer los mensajes de los españoles.

EJEMPLO 7 ■ Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones reales de las ecuaciones siguientes.

a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ ***b***) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ ***c***) $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$\underbrace{3}_{a\,=\,3}x^2 \overbrace{-\,5}^{b\,=\,-5}x \underbrace{-\,1}_{c\,=\,-1} = 0$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$



Otro método

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$
$$(2x + 3)^2 = 0$$
$$2x + 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2}$$

b) Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

c) Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ se obtiene

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Dado que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definida en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

Ahora intente realizar los ejercicios 67, 73 y 77 ■

En la siguiente sección estudiamos el sistema de números complejos, en el cual existen las raíces cuadradas de los números negativos. La ecuación del ejemplo 7*c*) tiene soluciones en el sistema de números complejos.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y está dada por el símbolo D. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real como en el ejemplo 7*c*). Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real como en el ejemplo 7*b*). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas como en el ejemplo 7*a*). El recuadro siguiente resume estas observaciones.

EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 8 ■ Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ ***b***) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ ***c***) $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4 = 0$

SOLUCIÓN

a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene exactamente una solución real.

c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.



Ahora consideremos una situación real que puede ser modelada por una ecuación cuadrática.

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración debida a la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. Aquí despreciamos el efecto de la resistencia del aire.

EJEMPLO 9 ■ Trayectoria de un proyectil

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial v_0 pies/s alcanzará una altura de h pies después de t segundos, donde h y t están relacionadas por la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Suponga que un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se ilustra en la figura 2.

a) ¿Cuándo cae el proyectil al nivel del suelo?

b) ¿Cuándo alcanza una altura de 6 400 pies?

c) ¿Cuándo alcanza una altura de 2 millas?

d) ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega el proyectil?

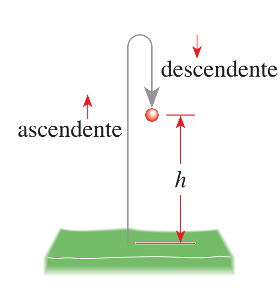
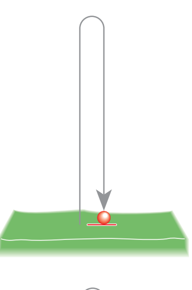
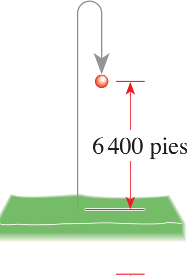
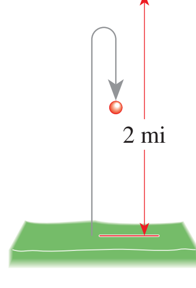


FIGURA 2







SOLUCIÓN Dado que la velocidad inicial en este caso es $v_0 = 800$ pies/s, la fórmula es

$$h = -16t^2 + 800t$$

a) El nivel del suelo corresponde a $h = 0$, de modo que debemos resolver la ecuación

$$0 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga que } h = 0$$
$$0 = -16t(t - 50) \quad \text{Factorice}$$

Por tanto, $t = 0$ o $t = 50$. Esto significa que el proyectil arranca ($t = 0$) al nivel del suelo y regresa a este después de 50 segundos.

b) Haciendo que $h = 6400$ da la ecuación

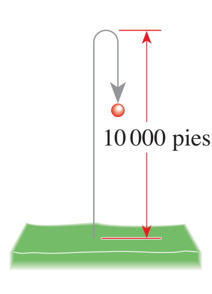
$$6400 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga que } h = 6400$$
$$16t^2 - 800t + 6400 = 0 \quad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$
$$t^2 - 50t + 400 = 0 \quad \text{Divida entre 16}$$
$$(t - 10)(t - 40) = 0 \quad \text{Factorice}$$
$$t = 10 \quad \text{o} \quad t = 40 \quad \text{Resuelva}$$

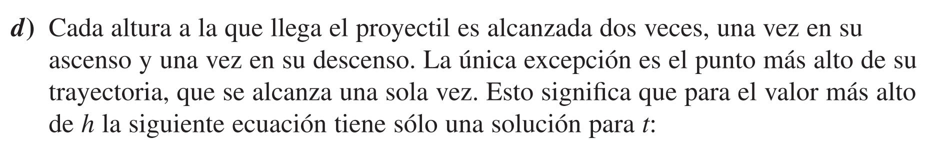
El proyectil llega a 6 400 pies después de 10 s (en su ascenso) y otra vez después de 40 s (en su descenso a tierra).

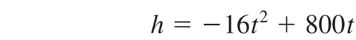
c) Dos millas es $2 \times 5280 = 10560$ pies.

$$10560 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga que } h = 10560$$
$$16t^2 - 800t + 10560 = 0 \quad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$
$$t^2 - 50t + 660 = 0 \quad \text{Divida entre 16}$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$, que es negativo. Entonces, la ecuación no tiene solución real. El proyectil nunca llega a una altura de 2 millas.




***d*)** Cada altura a la que llega el proyectil es alcanzada dos veces, una vez en su ascenso y una vez en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que se alcanza una sola vez. Esto significa que para el valor más alto de h la siguiente ecuación tiene sólo una solución para t:


$$h = -16t^2 + 800t$$

$$16t^2 - 800t + h = 0$$ Todos los términos al lado izquierdo

Esto a su vez significa que el discriminante D de la ecuación es 0, de modo que

$$D = (-800)^2 - 4(16)h = 0$$

$$640\,000 - 64h = 0$$

$$h = 10\,000$$

La máxima altura alcanzada es 10 000 pies.


Ahora intente realizar el ejercicio 129 ■

■ Otros tipos de ecuaciones

Hasta aquí hemos aprendido a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. A continuación estudiaremos otros tipos de ecuaciones, incluyendo las que contienen potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

Cuando se resuelve una ecuación que involucra expresiones fraccionarias o radicales, hay que tener especial cuidado para comprobar nuestras respuestas finales. Los siguientes dos ejemplos demuestran por qué.

EJEMPLO 10 ■ Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x-3} = \dfrac{-12}{x^2-9}$.

SOLUCIÓN Eliminamos los denominadores al multiplicar cada lado por el mínimo común denominador.

$$\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3}\right)x(x^2-9) = \frac{-12}{x^2-9}x(x^2-9)$$ Multiplique por el MCD, $x(x^2 - 9)$

$$3(x^2 - 9) - 2x(x + 3) = -12x$$ Desarrolle

$$3x^2 - 27 - 2x^2 - 6x = -12x$$ Desarrolle el lado izquierdo

$$x^2 - 6x - 27 = -12x$$ Sume términos semejantes en el lado izquierdo

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$ Sume $12x$

$$(x - 3)(x + 9) = 0$$ Factorice

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 9 = 0$$ Propiedad de producto cero

$$x = 3 \qquad x = -9$$ Resuelva

Debemos verificar nuestras respuestas porque multiplicar por una expresión que contenga la variable puede introducir soluciones extrañas. De *Verifique sus respuestas* vemos que la única solución es $x = -9$.


Ahora intente realizar el ejercicio 89 ■

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$$\text{LI} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3-3} \text{ indefinido}$$

$$\text{LD} = \frac{-12}{3^2 - 9} \text{ indefinido} \quad ✗$$

$x = -9$:

$$\text{LI} = \frac{3}{-9} - \frac{2}{-9-3} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{LD} = \frac{-12}{(-9)^2 - 9} = -\frac{1}{6}$$

LI = LD ✓

EJEMPLO 11 ■ Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

SOLUCIÓN Para eliminar la raíz cuadrada, primero la despejamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado.

$$2x - 1 = -\sqrt{2 - x} \quad \text{Reste 1}$$

$$(2x - 1)^2 = 2 - x \quad \text{Eleve al cuadrado cada lado}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \quad \text{Desarrolle el lado izquierdo}$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \text{Sume } -2 + x$$

$$(4x + 1)(x - 1) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$4x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{Propiedad de producto cero}$$

$$x = -\tfrac{1}{4} \qquad x = 1 \quad \text{Resuelva}$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución, pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{1}{4}$:

$\text{LI} = 2(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$

$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - (-\frac{1}{4})}$

$= 1 - \sqrt{\frac{9}{4}}$

$= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

LI = LD ✓

$x = 1$:

$\text{LI} = 2(1) = 2$

$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - 1}$

$= 1 - 1 = 0$

$\text{LI} \neq \text{LD}$ ✗

Ahora intente realizar el ejercicio 97 ■

Cuando resolvamos una ecuación podemos terminar con una o más **soluciones extrañas**, es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original. En el ejemplo 10 el valor $x = 3$ es una solución extraña, y en el ejemplo 11 el valor $x = 1$ es una solución extraña. En el caso de ecuaciones con fracciones, las posibles soluciones pueden estar indefinidas en la ecuación original y, por tanto, se convierten en soluciones extrañas. En el caso de ecuaciones con radicales las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original. Esta es la razón por la que siempre deben verificarse las respuestas para asegurarse de que cada una de ellas satisface la ecuación original.

Una ecuación de la forma $aW^2 + bW + c = 0$, donde W es una expresión algebraica, es una ecuación de **tipo cuadrático**. Resolvemos ecuaciones de tipo cuadrático al sustituir por la expresión algebraica, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 12 ■ Una ecuación de cuarto grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

SOLUCIÓN Si hacemos que $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación cuadrática con la nueva variable W.

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 8 = 0 \quad \text{Escriba } x^4 \text{ como } (x^2)^2$$

$$W^2 - 8W + 8 = 0 \quad \text{Sea } W = x^2$$

$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \quad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \quad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \quad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Por tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \qquad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \qquad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usando una calculadora obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$.

Ahora intente realizar el ejercicio 103 ■

EJEMPLO 13 ■ Una ecuación con potencias fraccionarias

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos que $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$$

$$W^2 + W - 2 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^{1/6}$$

$$(W - 1)(W + 2) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$W - 1 = 0 \quad \text{o} \quad W + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad de producto cero}$$

$$W = 1 \qquad W = -2 \qquad \text{Resuelva}$$

$$x^{1/6} = 1 \qquad x^{1/6} = -2 \qquad W = x^{1/6}$$

$$x = 1^6 = 1 \qquad x = (-2)^6 = 64 \qquad \text{Tome la 6a. potencia}$$

De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = 1$ es una solución, pero $x = 64$ no lo es. La única solución es $x = 1$.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 1$:

$\text{LI} = 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$

$\text{LD} = 0$

$\text{LI} = \text{LD}$ ✓

$x = 64$:

$\text{LI} = 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2$

$= 4 + 2 - 2 = 4$ $\qquad = 4 + 2 - 2 = 4$

$\text{LD} = 0$

$\text{LI} \neq \text{LD}$ ✗

Ahora intente realizar el ejercicio 107 ■

Cuando se resuelve una ecuación de valor absoluto usamos la siguiente propiedad

$$|X| = C \quad \text{es equivalente a} \quad X = C \quad \text{o} \quad X = -C$$

donde X es cualquier expresión algebraica. Esta propiedad dos indica que para resolver una ecuación con valor absoluto debemos resolver dos ecuaciones separadas.

EJEMPLO 14 ■ Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Por la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$2x - 5 = 3 \quad \text{o} \quad 2x - 5 = -3$$

$$2x = 8 \qquad 2x = 2$$

$$x = 4 \qquad x = 1$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$.

Ahora intente realizar el ejercicio 113 ■

1.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.

a) ¿Cuando suma el mismo número a cada lado de una ecuación, se obtiene siempre una ecuación equivalente?

b) ¿Cuando multiplica cada lado de una ecuación por el mismo número, se obtiene siempre una ecuación equivalente?

c) ¿Cuando se eleva al cuadrado cada lado de una ecuación, se obtiene siempre una ecuación equivalente?

2. ¿Cuál es el primer paso lógico en la solución de la ecuación?

a) $(x+5)^2 = 64$ ***b)*** $(x+5)^2 + 5 = 64$

c) $x^2 + x = 2$

3. Explique cómo usaría cada método para resolver la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$.

a) Mediante factorización: ________

b) Completando el cuadrado: ________

c) Usando la fórmula cuadrática: ________

4. ***a)*** Las soluciones de la ecuación $x^2(x-4) = 0$ son ________.

b) Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 = 0$, ________ el lado izquierdo.

5. Resuelva la ecuación $\sqrt{2x} + x = 0$ con los siguientes pasos.

a) Despejar el radical: ________________.

b) Elevar al cuadrado ambos lados: ________________.

c) Las soluciones de la ecuación cuadrática resultante son ________.

d) Las soluciones que satisfacen la ecuación original son ________.

6. La ecuación $(x+1)^2 - 5(x+1) + 6 = 0$ es del tipo ________ . Para resolver la ecuación, hacemos que $W =$ ________. La ecuación cuadrática resultante es ________.

7. Para eliminar los denominadores en la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$, multiplicamos cada lado por el mínimo común denominador ________________ para obtener la ecuación equivalente ________________.

8. Para eliminar la raíz cuadrada en la ecuación $2x + 1 = \sqrt{x+1}$, ________________ cada lado para obtener la ecuación ________________.

HABILIDADES

9–12 ■ ¿Solución? Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

9. $4x + 7 = 9x - 3$

a) $x = -2$ ***b)*** $x = 2$

10. $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$

a) $x = 2$ ***b)*** $x = 4$

11. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} = 1$

a) $x = 2$ ***b)*** $x = 4$

12. $\dfrac{x^{3/2}}{x-6} = x - 8$

a) $x = 4$ ***b)*** $x = 8$

13–30 ■ Ecuaciones lineales La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

13. $5x - 6 = 14$ **14.** $3x + 4 = 7$

15. $\frac{1}{2}x - 8 = 1$ **16.** $3 + \frac{1}{3}x = 5$

17. $-x + 3 = 4x$ **18.** $2x + 3 = 7 - 3x$

19. $\dfrac{x}{3} - 2 = \dfrac{5}{3}x + 7$ **20.** $\frac{2}{5}x - 1 = \frac{3}{10}x + 3$

21. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

22. $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y+1}{4}$

23. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$ **24.** $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x+1}{4} = 6x$

25. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$ **26.** $\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{4}{5}$

27. $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3x+3}$ **28.** $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{35}{x^2-1}$

29. $(t-4)^2 = (t+4)^2 + 32$ **30.** $\sqrt{3}x + \sqrt{12} + \dfrac{x+5}{\sqrt{3}}$

31–44 ■ Despejar una variable Resuelva la ecuación para la variable indicada.

31. $PV = nRT$; despeje R **32.** $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje m

33. $P = 2l + 2w$; despeje w **34.** $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; despeje R_1

35. $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 2$; despeje x

36. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; despeje x

37. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; despeje x

38. $\dfrac{a+1}{b} = \dfrac{a-1}{b} + \dfrac{b+1}{a}$; despeje a

39. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; despeje r **40.** $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje r

41. $a^2 + b^2 = c^2$; despeje b **42.** $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; despeje i

43. $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; despeje t **44.** $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$; despeje n

45–56 ■ Resolver por factorización Resuelva la ecuación por factorización.

45. $x^2 + x - 12 = 0$ **46.** $x^2 + 3x - 4 = 0$

47. $x^2 - 7x + 12 = 0$ **48.** $x^2 + 8x + 12 = 0$

49. $4x^2 - 4x - 15 = 0$ **50.** $2y^2 + 7y + 3 = 0$

51. $3x^2 + 5x = 2$ **52.** $6x(x - 1) = 21 - x$

53. $2x^2 = 8$ **54.** $3x^2 - 27 = 0$

55. $(2x - 5)^2 = 81$ **56.** $(5x + 1)^2 + 3 = 10$

57–64 ■ Completar el cuadrado Determine todas las soluciones reales de la ecuación completando el cuadrado.

57. $x^2 + 2x - 5 = 0$ **58.** $x^2 - 4x + 2 = 0$

59. $x^2 - 6x - 11 = 0$ **60.** $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

61. $2x^2 + 8x + 1 = 0$ **62.** $3x^2 - 6x - 1 = 0$

63. $4x^2 - x = 0$ **64.** $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

65–80 ■ Ecuaciones cuadráticas Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

65. $x^2 - 2x - 15 = 0$

66. $x^2 + 5x - 6 = 0$

67. $x^2 - 13x + 42 = 0$

68. $x^2 + 10x - 600 = 0$

69. $2x^2 + x - 3 = 0$

70. $3x^2 + 7x + 4 = 0$

71. $3x^2 + 6x - 5 = 0$

72. $x^2 - 6x + 1 = 0$

73. $9x^2 + 12x + 4 = 0$

74. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

75. $4x^2 + 16x - 9 = 0$

76. $0 = x^2 - 4x + 1$

77. $7x^2 - 2x + 4 = 0$

78. $w^2 = 3(w - 1)$

79. $10y^2 - 16y + 5 = 0$

80. $25x^2 + 70x + 49 = 0$

81–86 ■ Discriminante Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

81. $x^2 - 6x + 1 = 0$

82. $3x^2 = 6x - 9$

83. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

84. $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

85. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

86. $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

87–116 ■ Otras ecuaciones Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

87. $\dfrac{x^2}{x + 100} = 50$

88. $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

89. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{5}{4}$

90. $\dfrac{x + 5}{x - 2} = \dfrac{5}{x + 2} + \dfrac{28}{x^2 - 4}$

91. $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x - 3} + 4 = 0$

92. $\dfrac{x}{2x + 7} - \dfrac{x + 1}{x + 3} = 1$

93. $5 = \sqrt{4x - 3}$

94. $\sqrt{8x - 1} = 3$

95. $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x - 5}$

96. $\sqrt{3 + x} = \sqrt{x^2 + 1}$

97. $\sqrt{2x + 1} + 1 = x$

98. $\sqrt{5 - x} + 1 = x - 2$

99. $2x + \sqrt{x + 1} = 8$

100. $x - \sqrt{9 - 3x} = 0$

101. $\sqrt{3x + 1} = 2 + \sqrt{x + 1}$

102. $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} = 2$

103. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

104. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

105. $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

106. $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

107. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

108. $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

109. $4(x + 1)^{1/2} - 5(x + 1)^{3/2} + (x + 1)^{5/2} = 0$

110. $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

111. $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$

112. $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

113. $|3x + 5| = 1$

114. $|2x| = 3$

115. $|x - 4| = 0.01$

116. $|x - 6| = -1$

HABILIDADES Plus

117–122 ■ Más de la solución de ecuaciones Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

117. $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4}{x} = 0$

118. $4x^{-4} - 16x^{-2} + 4 = 0$

119. $\sqrt{\sqrt{x + 5} + x} = 5$

120. $\sqrt[3]{4x^2 - 4x} = x$

121. $x^2\sqrt{x + 3} = (x + 3)^{3/2}$

122. $\sqrt{11 - x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{11 - x^2}} = 1$

123–126 ■ Más de la solución de ecuaciones Resuelva la ecuación para la variable x. Las constantes a y b representan números reales positivos.

123. $x^4 - 5ax^2 + 4a^2 = 0$

124. $a^3x^3 + b^3 = 0$

125. $\sqrt{x + a} + \sqrt{x - a} = \sqrt{2}\sqrt{x + 6}$

126. $\sqrt{x} - a\sqrt[3]{x} + b\sqrt[6]{x} - ab = 0$

APLICACIONES

127–128 ■ Problemas de cuerpos en caída Suponga que deja caer un cuerpo desde una altura h_0 sobre el suelo. Entonces su altura después de t segundos está dada por $h = -16t^2 + h_0$, donde h se mide en pies. Use esta información para resolver el problema.

127. Si una pelota se deja caer desde 288 pies sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

128. Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.

a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar la mitad de la distancia al nivel del suelo?

b) ¿Cuánto tardará en caer el suelo?

129–130 ■ Problemas de cuerpos en caída Use la fórmula $h = -16t^2 + v_0t$ que se estudia en el ejemplo 9.

129. Una pelota se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 40$ pies/s.

a) ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 pies?

b) ¿Cuándo llega a una altura de 48 pies?

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

d) ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?

e) ¿Cuándo cae al suelo?

130. ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota para que alcance una altura máxima de 100 pies? [*Sugerencia:* Use el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0t + h = 0$.]

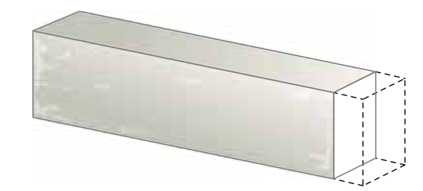
131. Contracción en vigas de concreto A medida que el concreto se seca se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de w kg/m^3, entonces se contraerá con un factor

$$S = \frac{0.032w - 2.5}{10\,000}$$

donde S es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.

a) Una viga de 12.025 m de largo es vaciada en concreto que contiene 250 kg/m^3 de agua. ¿Cuál es el factor de contracción S? ¿Qué largo tendrá la viga cuando se haya secado?

b) Una viga mide 10.014 m de largo cuando está húmeda. Deseamos que se contraiga a 10.009 m, de modo que el factor de contracción sea $S = 0.00050$. ¿Qué contenido de agua dará esta cantidad de contracción?



132. La ecuación de lentes Si F es la longitud focal de un lente convexo y un objeto se coloca a una distancia x desde el lente, entonces su imagen estará a una distancia y del lente, donde F, x y y están relacionadas por la *ecuación de lentes*.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que un lente tiene una longitud focal de 4.8 cm y que la imagen de un objeto esta 4 cm más cerca del lente que el objeto mismo. ¿A qué distancia del lente está el objeto?

133. Población de peces La población de peces de cierto lago aumenta y disminuye de acuerdo con la fórmula

$$F = 1\,000(30 + 17t - t^2)$$

Aquí F es el número de peces en el tiempo t, donde t se mide en años desde el 1° de enero de 2002, cuando por primera vez se estimó la población de peces.

a) ¿En qué fecha la población de peces será otra vez la misma que era el 1° de enero de 2002?

b) ¿Antes de qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

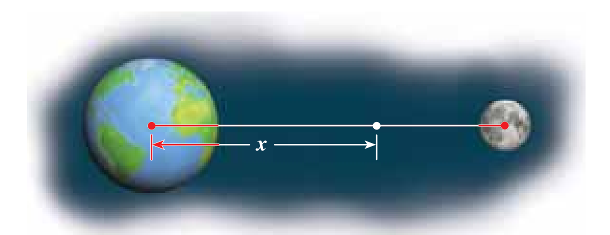
134. Población de peces Un gran estanque es abastecido de peces. La población P de peces está modelada con la fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, donde t es el número de días desde que los peces fueron introducidos en el estanque. ¿Cuántos días tardará la población de peces en llegar a 500?

135. Utilidades Un fabricante de aparatos pequeños encuentra que la utilidad P (en dólares) generada por producir x hornos de microondas por semana está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$, siempre que $0 \le x \le 200$. ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana determinada para generar una utilidad de 1 250 dólares?

136. Gravedad Si un segmento de recta imaginario se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza F gravitacional neta que actúa sobre un objeto situado sobre este segmento de recta es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

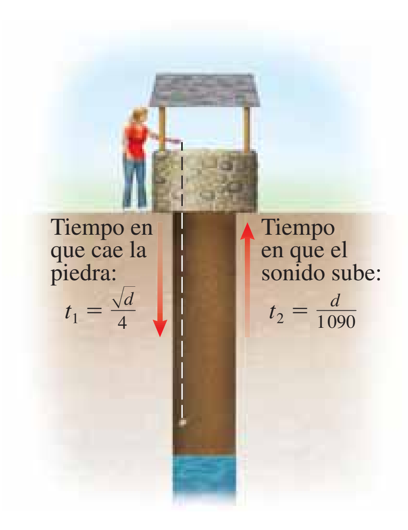
donde $K > 0$ es una constante y x es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medida en miles de millas. ¿A qué distancia del centro de la Tierra está el "punto muerto" donde no hay fuerza gravitacional neta que actúe sobre el objeto? (Exprese su respuesta a las mil millas más cercanas.)



137. Profundidad de un pozo Un método para determinar la profundidad de un pozo es dejar caer en él una piedra y luego medir el tiempo que tarda la caída hasta que se escucha el ruido de la piedra al tocar el agua. Si d es la profundidad del pozo (en pies) y t_1 es el tiempo (en segundos) que tarda la piedra en caer, entonces $d = 16t_1^2$, de modo que $t_1 = \sqrt{d}/4$. Ahora, si t_2 es el tiempo que tarda el sonido en regresar, entonces $d = 1\,090t_2$ porque la velocidad del sonido es 1 090 pies/s. Por tanto, $t_2 = d/1\,090$. Así, el tiempo total transcurrido entre dejar caer la piedra y escuchar el ruido cuando cae es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1\,090}$$

¿Cuál es la profundidad del pozo si su tiempo total es 3 s?



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

138. DISCUSIÓN: Una familia de ecuaciones La ecuación

$$3x + k - 5 = kx - k + 1$$

es en realidad una **familia de ecuaciones** porque para cada valor de k, obtenemos una ecuación diferente con la incógnita x. La letra k se llama **parámetro** para esta familia. ¿Qué valor debemos escoger para k para hacer que el valor determinado de x sea una solución de la ecuación resultante?

a) $x = 0$ ***b)*** $x = 1$ ***c)*** $x = 2$

139. DISCUSIÓN: Demostración de que ¿0 = 1? Los siguientes pasos parecen dar ecuaciones equivalentes que parecen demostrar que $1 = 0$. Encuentre el error.

$x = 1$	Dada
$x^2 = x$	Multiplique por x
$x^2 - x = 0$	Reste x
$x(x - 1) = 0$	Factorice
$\frac{x(x-1)}{x-1} = \frac{0}{x-1}$	Divida entre $x - 1$
$x = 0$	Simplifique
$1 = 0$	Dado que $x = 1$

140. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Relación entre las soluciones y los coeficientes La fórmula cuadrática nos da

las soluciones de una ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes. También podemos obtener los coeficientes a partir de las soluciones.

***d*)** Encuentre las soluciones de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$, y demuestre que el producto de las soluciones es el término constante 20 y que la suma de las soluciones es 9, el negativo del coeficiente de x.

***b*)** Demuestre que se cumple la misma relación entre coeficientes y soluciones para las siguientes ecuaciones:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

***c*)** Utilice la fórmula cuadrática para demostrar que, en general, si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones r_1 y r_2, entonces $c = r_1 r_2$ y $b = -(r_1 + r_2)$.

141. DISCUSIÓN: Resuelva una ecuación de diferentes maneras En esta sección hemos aprendido distintas formas de resolver una ecuación. Algunas ecuaciones se pueden resolver a través de más de un método. Por ejemplo, la ecuación $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ es del tipo cuadrático. La podemos resolver haciendo que $\sqrt{x} = u$ y $x = u^2$, y factorizando. O podríamos despejar $\sqrt{x}$, elevar al cuadrado cada lado y luego resolver la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando ambos métodos indicados y demuestre que se obtienen las mismas respuestas finales.

a) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ tipo cuadrática; se despeja el radical y se eleva al cuadrado

b) $\dfrac{12}{(x-3)^2} + \dfrac{10}{x-3} + 1 = 0$ tipo cuadrática; multiplique por el MCD

1.6 NÚMEROS COMPLEJOS

■ Operaciones aritméticas con números complejos ■ Raíces cuadradas de números negativos ■ Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

En la sección 1.5 vimos que si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo la ecuación no tiene solución real. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

no tiene ninguna solución real. Si intentamos resolver esta ecuación obtenemos $x^2 = -4$, por lo que

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Pero esto es imposible puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo. [Por ejemplo, $(-2)^2 = 4$, un número positivo.] Así los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Véase la nota acerca de Cardano (página 292) en torno a un ejemplo de cómo se usan los números complejos para encontrar soluciones reales de ecuaciones con polinomios.

Para que sea posible resolver *todas* las ecuaciones cuadráticas, los matemáticos inventaron un sistema numérico ampliado llamado *sistema de números complejos*. Primero definieron el nuevo número

$$i = \sqrt{-1}$$

Esto significa que $i^2 = -1$. Un número complejo es un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

DEFINICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La **parte real** de este número complejo es a y la **parte imaginaria** es b. Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son también iguales.

Observe que las partes reales e imaginarias de un número complejo son números reales.

EJEMPLO 1 ■ Números complejos

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

$3 + 4i$	Parte real 3, parte imaginaria 4
$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$	Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$
$6i$	Parte real 0, parte imaginaria 6
-7	Parte real -7, parte imaginaria 0



Un número tal como $6i$, que tiene parte real 0, se llama **número imaginario puro**. Un número real como -7 se puede considerar número complejo con parte imaginaria 0.

En el sistema de números complejos toda ecuación cuadrática tiene soluciones. Los números $2i$ y $-2i$ son soluciones de $x^2 = -4$ porque

$$(2i)^2 = 2^2i^2 = 4(-1) = -4 \qquad \text{y} \qquad (-2i)^2 = (-2)^2i^2 = 4(-1) = -4$$

Aun cuando usamos el término *imaginario* en este contexto, los números imaginarios no se deben considerar menos "reales" (en el sentido más bien ordinario que matemático de la palabra) que los números negativos o los números irracionales. Todos los números (excepto posiblemente los enteros positivos) son creaciones de la mente humana, los números -1 y $\sqrt{2}$ así como el número i. Estudiamos números complejos porque completan, en una forma útil y elegante, nuestro estudio de las soluciones de ecuaciones. De hecho, los números imaginarios son útiles no sólo en álgebra y matemáticas, sino también en las otras ciencias. Para dar sólo un ejemplo, en teoría eléctrica la *reactancia* de un circuito es una cantidad cuya medida es un número imaginario.

■ Operaciones aritméticas con números complejos

Los números complejos se suman, restan, multiplican y dividen exactamente igual que con cualquier número de la forma $a + b\sqrt{c}$. La única diferencia que necesitamos recordar es que $i^2 = -1$. Entonces, los siguientes cálculos son válidos.

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + (ad + bc)i + bdi^2 && \text{Multiplique y reúna términos semejantes}\\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) && i^2 = -1\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i && \text{Combine partes reales e imaginarias}\end{aligned}$$

Por tanto, definimos la suma, la diferencia y el producto de números complejos como sigue.

SUMAR, RESTAR Y MULTIPLICAR NÚMEROS COMPLEJOS

Definición	Descripción
Suma $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	Para sumar números complejos sumamos las partes reales y las partes imaginarias.
Resta $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	Para restar números complejos restamos las partes reales y las partes imaginarias.
Multiplicación $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$	Multiplicamos números complejos como binomios usando $i^2 = -1$.

EJEMPLO 2 ■ Sumar, restar y multiplicar números complejos

Las calculadoras graficadoras pueden realizar operaciones aritméticas con números complejos.

```
(3+5i)+(4-2i)
             7+3i
(3+5i)*(4-2i)
           22+14i
```

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

***a*)** $(3 + 5i) + (4 - 2i)$ ***b*)** $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

***c*)** $(3 + 5i)(4 - 2i)$ ***d*)** i^{23}

SOLUCIÓN

***a*)** De acuerdo con la definición sumamos las partes reales y sumamos las partes imaginarias:

$$(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$$

***b*)** $(3 + 5i) - (4 - 2i) = (3 - 4) + [5 - (-2)]i = -1 + 7i$

***c*)** $(3 + 5i)(4 - 2i) = [3 \cdot 4 - 5(-2)] + [3(-2) + 5 \cdot 4]i = 22 + 14i$

***d*)** $i^{23} = i^{22+1} = (i^2)^{11}i = (-1)^{11}i = (-1)i = -i$

Ahora intente realizar los ejercicios 19, 23, 29 y 47 ■

Complejos conjugados

Número	Conjugado
$3 + 2i$	$3 - 2i$
$1 - i$	$1 + i$
$4i$	$-4i$
5	5

La división de números complejos es muy semejante a racionalizar el denominador de una expresión radical, que se consideró en la sección 1.2. Para el número complejo $z = a + bi$ definimos a su **conjugado complejo** como $\overline{z} = a - bi$. Observe que

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

De modo que el producto de un número complejo y su conjugado es siempre un número real no negativo. Usamos esta propiedad para dividir números complejos.

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para simplificar el cociente $\dfrac{a + bi}{c + di}$, multiplicamos el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di}\right)\left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Más que memorizar toda esta fórmula es más fácil recordar el primer paso y luego multiplicar el numerador y el denominador, como de costumbre.

EJEMPLO 3 ■ Dividir números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

***a*)** $\dfrac{3 + 5i}{1 - 2i}$ ***b*)** $\dfrac{7 + 3i}{4i}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador para hacer que el nuevo denominador sea un número real.

***a*)** El complejo conjugado de $1 - 2i$ es $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$. Por tanto

$$\frac{3 + 5i}{1 - 2i} = \left(\frac{3 + 5i}{1 - 2i}\right)\left(\frac{1 + 2i}{1 + 2i}\right) = \frac{-7 + 11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

***b*)** El complejo conjugado de $4i$ es $-4i$. Por tanto

$$\frac{7 + 3i}{4i} = \left(\frac{7 + 3i}{4i}\right)\left(\frac{-4i}{-4i}\right) = \frac{12 - 28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$

Ahora intente realizar los ejercicios 39 y 43 ■

Raíces cuadradas de números negativos

Así como todo número real positivo r tiene dos raíces cuadradas ($\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$), todo número negativo también tiene dos raíces cuadradas. Si $-r$ es un número negativo, entonces sus raíces cuadradas son $\pm i\sqrt{r}$, porque $(i\sqrt{r})^2 = i^2 r = -r$ y $(-i\sqrt{r})^2 = (-1)^2 i^2 r = -r$.

RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Si $-r$ es negativo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-r$ es

$$\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$$

Las dos raíces cuadradas de $-r$ son y $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$.

Por lo general escribimos $i\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt{b}\,i$ para evitar confusión con $\sqrt{bi}$.

EJEMPLO 4 ■ Raíces cuadradas de números negativos

a) $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$ *b)* $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$ *c)* $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$

Ahora intente realizar los ejercicios 53 y 55 ■

Se debe tener especial cuidado al realizar cálculos que comprendan raíces cuadradas de números negativos. Aun cuando $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ cuando a y b son positivas, esto *no* es verdadero cuando ambas son negativas. Por ejemplo,

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} = i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

pero $$\sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{6}$$

entonces $$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-2)(-3)}$$



Al multiplicar radicales de números negativos, expréselos primero en la forma $i\sqrt{r}$ (donde $r > 0$) para evitar posibles errores de este tipo.

EJEMPLO 5 ■ Usar raíces cuadradas de números negativos

Evalúe $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$, y expréselos en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3}) = (3 + i\sqrt{4}) \\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i) \\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2\cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3}\end{aligned}$$

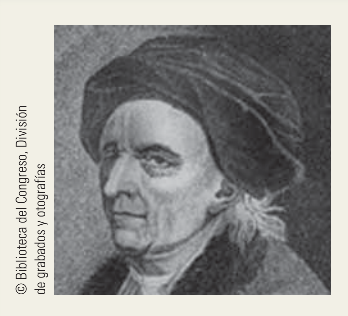
Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Ya hemos visto que si $a \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. Pero en el sistema de números complejos, esta ecuación siempre tendrá soluciones porque los números negativos tienen raíces cuadradas en esta situación ampliada.



LEONHARD EULER (1707–1783) nació en Basilea, Suiza, hijo de un pastor. Cuando Euler tenía 13 años su padre lo envió a la universidad en Basilea a estudiar teología, pero Euler pronto decidió dedicarse a las ciencias. Además de teología estudió matemáticas, medicina, astronomía, física e idiomas de Asia. Se dice que Euler podía calcular sin esfuerzo así como "los hombres respiran o las águilas vuelan". Cien años antes de Euler, Fermat (véase página 117) había conjeturado que $2^{2^n} + 1$ es un número primo para toda n. Los primeros cinco de estos números son 5, 17, 257, 65 537 y 4 294 967 297. Es fácil demostrar que los primeros cuatro son primos. El quinto también fue considerado primo hasta que Euler, con su fenomenal capacidad de cálculo, demostró que es el producto 641 × 6 700 417 por tanto, no es primo. Euler publicó más obras que cualquier otro matemático en la historia cuya compilación comprende 75 grandes volúmenes. Aun cuando ya estaba ciego hacia los últimos 17 años de su vida, Euler continuó trabajando y publicando sus obras. En estas popularizó el uso de los símbolos π, e e i, que el lector encontrará en este libro; una de las aportaciones más duraderas de Euler es su desarrollo de los números complejos.

EJEMPLO 6 ■ Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas

Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 + 9 = 0$ ***b***) $x^2 + 4x + 5 = 0$

SOLUCIÓN

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ significa $x^2 = -9$, por tanto,

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

Las soluciones son por tanto $3i$ y $-3i$.

b) Mediante la fórmula cuadrática tenemos

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Entonces las soluciones son $-2 + i$ y $-2 - i$.

Ahora intente realizar los ejercicios 61 y 63 ■

Vemos del ejemplo 6 que si una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene soluciones complejas, entonces estas soluciones son complejas conjugadas entre sí. Por tanto, si $a + bi$ es una solución, entonces $a - bi$ también es una solución.

EJEMPLO 7 ■ Complejos conjugados como soluciones de una cuadrática

Demuestre que las soluciones de la ecuación

$$4x^2 - 24x + 37 = 0$$

son conjugados complejos entre sí.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula cuadrática para obtener

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(4)(37)}}{2(4)} = \frac{24 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{24 \pm 4i}{8} = 3 \pm \frac{1}{2}i$$

Por tanto, las soluciones son $3 + \frac{1}{2}i$ y $3 - \frac{1}{2}i$, y estos son complejos conjugados.

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

1.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El número imaginario i tiene la propiedad de que $i^2 =$ ________.

2. Para el número complejo $3 + 4i$ la parte real es ________, y la parte imaginaria es ________.

3. ***a***) El complejo conjugado de $3 + 4i$ es $\overline{3 + 4i} =$ ________.

b) $(3 + 4i)(\overline{3 + 4i}) =$ ________.

4. Si $3 + 4i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales, entonces ________ también es una solución de la ecuación.

5–6 ■ *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.

5. ¿Todo número real es también un número complejo?

6. La suma de un número complejo y su conjugado, ¿es complejo de un número real?

HABILIDADES

7–16 ■ Partes real e imaginaria Encuentre las partes real e imaginaria del número complejo.

7. $5 - 7i$
8. $-6 + 4i$
9. $\dfrac{-2 - 5i}{3}$
10. $\dfrac{4 + 7i}{2}$
11. 3
12. $-\frac{1}{2}$
13. $-\frac{2}{3}i$
14. $i\sqrt{3}$
15. $\sqrt{3} + \sqrt{-4}$
16. $2 - \sqrt{-5}$

17–26 ■ Sumas y diferencias Evalúe la suma o diferencia y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

17. $(3 + 2i) + 5i$
18. $3i - (2 - 3i)$
19. $(5 - 3i) + (-4 - 7i)$
20. $(-3 + 4i) - (2 - 5i)$
21. $(-6 + 6i) + (9 - i)$
22. $(3 - 2i) + (-5 - \frac{1}{3}i)$
23. $(7 - \frac{1}{2}i) - (5 + \frac{3}{2}i)$
24. $(-4 + i) - (2 - 5i)$
25. $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$
26. $6i - (4 - i)$

27–36 ■ Productos Evalúe la expresión radical y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

27. $4(-1 + 2i)$
28. $-2(3 - 4i)$
29. $(7 - i)(4 + 2i)$
30. $(5 - 3i)(1 + i)$
31. $(6 + 5i)(2 - 3i)$
32. $(-2 + i)(3 - 7i)$
33. $(2 + 5i)(2 - 5i)$
34. $(3 - 7i)(3 + 7i)$
35. $(2 + 5i)^2$
36. $(3 - 7i)^2$

37–46 ■ Cocientes Evalúe el cociente y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

37. $\dfrac{1}{i}$
38. $\dfrac{1}{1 + i}$
39. $\dfrac{2 - 3i}{1 - 2i}$
40. $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$
41. $\dfrac{10i}{1 - 2i}$
42. $(2 - 3i)^{-1}$
43. $\dfrac{4 + 6i}{3i}$
44. $\dfrac{-3 + 5i}{15i}$
45. $\dfrac{1}{1 + i} - \dfrac{1}{1 - i}$
46. $\dfrac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$

47–52 ■ Potencia Evalúe la potencia y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

47. i^3
48. i^{10}
49. $(3i)^5$
50. $(2i)^4$
51. i^{1000}
52. i^{1002}

53–60 ■ Expresiones radicales Evalúe la expresión radical y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

53. $\sqrt{-49}$
54. $\sqrt{\dfrac{-81}{16}}$
55. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$
56. $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-27}$
57. $(3 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-1})$
58. $(\sqrt{3} - \sqrt{-4})(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$
59. $\dfrac{2 + \sqrt{-8}}{1 + \sqrt{-2}}$
60. $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-2}\sqrt{-9}}$

61–72 ■ Ecuaciones cuadráticas Encuentre todas las soluciones de la ecuación y exprésela en la forma $a + bi$.

61. $x^2 + 49 = 0$
62. $3x^2 + 1 = 0$
63. $x^2 - x + 2 = 0$
64. $x^2 + 2x + 2 = 0$
65. $x^2 + 3x + 7 = 0$
66. $x^2 - 6x + 10 = 0$
67. $x^2 + x + 1 = 0$
68. $x^2 - 3x + 3 = 0$
69. $2x^2 - 2x + 1 = 0$
70. $t + 3 + \dfrac{3}{t} = 0$
71. $6x^2 + 12x + 7 = 0$
72. $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$

HABILIDADES Plus

73–76 ■ Conjugados Evalúe la expresión dada para $z = 3 - 4i$ y $w = 5 + 2i$.

73. $\overline{z} + \overline{w}$
74. $\overline{z + w}$
75. $z \cdot \overline{z}$
76. $\overline{z} \cdot \overline{w}$

77–84 ■ Conjugados Recuerde que el símbolo $\overline{z}$ representa el conjugado complejo de z. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, demuestre que cada uno de los siguientes enunciados es verdadero.

77. $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$
78. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
79. $(\overline{z})^2 = \overline{z^2}$
80. $\overline{\overline{z}} = z$
81. $z + \overline{z}$ es un número real.
82. $z - \overline{z}$ es un número imaginario puro.
83. $z \cdot \overline{z}$ es un número real.
84. $z = \overline{z}$ si y sólo si z es real.

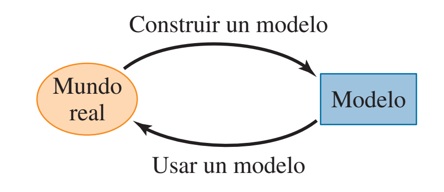
DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

85. DEMOSTRACIÓN: Raíces complejas conjugadas Suponga que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene coeficientes reales y raíces complejas. ¿Por qué deben las raíces ser complejas conjugadas entre sí? [*Sugerencia:* Piense en cómo encontraría las raíces usando la fórmula cuadrática.]

86. DISCUSIÓN: Potencias de *i* Calcule las primeras 12 potencias de i, es decir, $i, i^2, i^3, \ldots, i^{12}$. ¿Se observa un patrón? Explique cómo calcularía cualquier potencia entera de i, usando el patrón que haya descubierto. Use este procedimiento para calcular i^{4446}.

1.7 MODELADO CON ECUACIONES

■ Construcción y uso de modelos ■ Problemas acerca del interés ■ Problemas de área o longitud ■ Problemas de mezclas ■ Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo ■ Problemas de distancia, rapidez y tiempo



En esta sección un **modelo matemático** es una ecuación que describe un objeto o un proceso del mundo real. El modelado es el proceso de determinar estas ecuaciones. Una vez que se ha encontrado el modelo o ecuación se utiliza entonces para obtener información acerca de aquello que se está modelando. El proceso se describe en el diagrama al margen. En esta sección aprendemos cómo hacer y usar modelos para resolver problemas reales.

■ Construcción y uso de modelos

Usaremos las siguientes guías para ayudarnos a formular ecuaciones que modelen situaciones descritas en palabras. Considérelas al trabajar cada ejemplo de esta sección para demostrar la forma en que pueden ayudar a formular ecuaciones.

GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

1. **Identifique la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide determinar. En general, esta cantidad se puede determinar con una cuidadosa lectura de la pregunta que se formula al final del problema. Después **introduzca la notación** para la variable (llámela x o alguna otra letra).
2. **Transforme palabras en álgebra.** De nuevo lea cada oración del problema y exprese, en términos de la variable que haya definido en el paso 1, todas las cantidades mencionadas en el problema. Para organizar esta información a veces es útil **trazar un diagrama** o **hacer una tabla**.
3. **Formule el modelo.** Encuentre en el problema el dato de importancia decisiva que dé una relación entre las expresiones que haya citado en el paso 2. **Formule una ecuación** (o **modelo**) que exprese esta relación.
4. **Resolver la ecuación y verificar su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique su respuesta y exprésela como una oración que responda la pregunta planteada en el problema.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se usa esta guía para convertir un "problema de palabras" en lenguaje de álgebra.

EJEMPLO 1 ■ Rentar un auto

Una compañía de renta de autos cobra 30 dólares al día y 15 centavos por milla para rentar un auto. Helen renta un auto durante dos días y su cuenta llega a 108 dólares. ¿Cuantas millas recorrió?

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** Nos piden encontrar el número de millas que Helen ha recorrido. Por tanto, hacemos que

$$x = \text{número de millas recorridas}$$

Convierta las palabras en álgebra. Ahora convertimos toda la información dada en el problema a un lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Numero de millas recorridas	x
Costo del recorrido (a 0.15 dólares por milla)	$0.15x$
Costo diario (a 30 dólares por día)	$2(30)$

Formule el modelo. Ahora proponemos el modelo.

costo del recorrido + costo diario = costo total

$$0.15x + 2(30) = 108$$

Resuelva. Ahora despejamos x.

$$0.15x = 48 \quad \text{Reste 60}$$

$$x = \frac{48}{0.15} \quad \text{Divida entre 0.15}$$

$$x = 320 \quad \text{Con calculadora}$$

Helen manejó su auto rentado 320 millas.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

costo total = costo del recorrido + costo diario

$= 0.15(320) + 2(30)$

$= 108$ ✓

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

En los ejemplos y ejercicios que siguen construimos ecuaciones que modelan problemas en muchas situaciones reales diferentes.

■ Problemas acerca de interés

Cuando usted pide un préstamo en un banco o cuando un banco le "pide prestado" a usted al mantener el dinero en una cuenta de ahorros, quien pide el préstamo en este caso debe pagar por el privilegio de usar el dinero. La cuota que se paga se llama **interés**. El tipo más básico de interés es el **interés simple**, que es precisamente un porcentaje anual de la cantidad total solicitada en préstamo o depositada. La cantidad de un préstamo o depósito se llama **principal** P. El porcentaje anual pagado por el uso de este dinero es la **tasa de interés** r. Usaremos la variable t para representar el número de años que el dinero está en depósito y la variable I para representar el interés total ganado. La siguiente **fórmula de interés simple** da la cantidad de interés I ganado cuando un principal P es depositado durante t años a una tasa de interés r.

$$I = Prt$$

Cuando use esta fórmula recuerde convertir el porcentaje r a decimal. Por ejemplo, en forma decimal, 5% es 0.05. Entonces, a una tasa de interés de 5%, el interés pagado sobre un depósito de 1 000 dólares en un periodo de 3 años es $I = Prt = 1\,000(0.05)(3) = 150$ dólares.

EJEMPLO 2 ■ Interés sobre una inversión

María hereda 100 000 dólares y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga 6% y el otro $4\frac{1}{2}$% de interés simple al año. Si el interés total de María es 5 025 dólares al año, ¿cuánto dinero se invierte a cada una de las tasas de interés?



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Ecuaciones a través del tiempo

Las ecuaciones siempre han sido importantes en la solución de problemas del mundo real. Manuscritos muy antiguos de Babilonia, Egipto, India y China muestran que los pueblos antiguos usaban ecuaciones para resolver los problemas del mundo real. En este proyecto descubrimos que también se pueden resolver ecuaciones sólo por practicar o por diversión. El lector puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** El problema pide la cantidad que María ha invertido a cada una de las tasas. Por tanto, hacemos que

$$x = \text{la cantidad invertida al } 6\%$$

Convierta las palabras en álgebra. Dado que la herencia total que recibió María es de 100 000 dólares, se deduce que ella invirtió $100\,000 - x$ al $4\frac{1}{2}\%$. Convertimos toda la información dada en lenguaje algebraico.

En palabras	En álgebra
Cantidad invertida al 6%	x
Cantidad invertida al $4\frac{1}{2}\%$	$100\,000 - x$
Cantidad ganada al 6%	$0.06x$
Cantidad ganada al $4\frac{1}{2}\%$	$0.045(100\,000 - x)$

Formule el modelo. Usamos el dato de que el interés total de María es 5 025 dólares para proponer el modelo.

$$\boxed{\text{interés al } 6\%} + \boxed{\text{interés al } 4\tfrac{1}{2}\%} = \boxed{\text{interés total}}$$

$$0.06x + 0.045(100\,000 - x) = 5\,025$$

Resuelva. Ahora se despeja la x.

$$0.06x + 4500 - 0.045x = 5\,025 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$0.015x + 4500 = 5\,025 \qquad \text{Combine términos en } x$$

$$0.015x = 525 \qquad \text{Reste } 4\,500$$

$$x = \frac{525}{0.015} = 35\,000 \qquad \text{Divida entre } 0.015$$

Entonces María ha invertido 35 000 dólares al 6% y los restantes 65 000 al $4\frac{1}{2}\%$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$$\text{interés total} = 6\% \text{ de } \$35\,000 + 4\tfrac{1}{2}\% \text{ de } \$65\,000$$

$$= \$2100 + \$2925 = \$5\,025 \quad ✓$$

Ahora trate de realizar el ejercicio 25 ■

Problemas de área o longitud

Cuando usamos álgebra para modelar una situación física, a veces debemos usar fórmulas básicas de geometría. Por ejemplo, es posible que necesitemos una fórmula para un área o un perímetro, o la fórmula que relaciona los lados de triángulos semejantes, o el teorema de Pitágoras. Casi todas estas fórmulas aparecen al final de este libro. En los dos ejemplos que siguen se usan estas fórmulas geométricas para resolver algunos problemas prácticos.

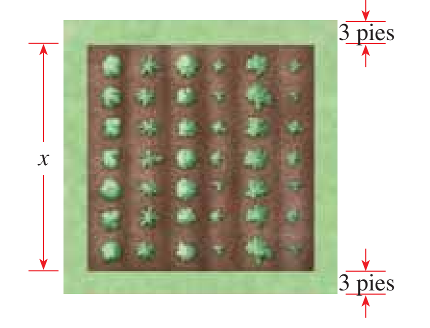


FIGURA 1

EJEMPLO 3 ■ Dimensiones de un jardín

Un jardín cuadrado tiene un andador de 3 pies de ancho alrededor de su borde exterior, como se muestra en la figura 1. Si el área de todo el jardín, incluyendo los andadores, es de 18 000 pies^2, ¿cuáles son las dimensiones del área plantada?

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** Nos piden encontrar la longitud y el ancho del área plantada. Por tanto, hacemos que

$$x = \text{longitud del área plantada}$$

Convierta las palabras en álgebra. Convierta la información de la figura 1 en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Longitud del área plantada	x
Longitud de todo el jardín	$x + 6$
Área de todo el jardín	$(x + 6)^2$

Formule el modelo. Ahora proponemos el modelo.

$$\boxed{\text{área de todo el jardín}} = \boxed{18\,000 \text{ pies}^2}$$

$$(x + 6)^2 = 18\,000$$

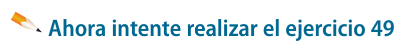
Resuelva. Ahora despejamos x.

$x + 6 = \sqrt{18\,000}$ Tome raíces cuadradas

$x = \sqrt{18\,000} - 6$ Reste 6

$x \approx 128$

El área plantada del jardín es de unos 128 por 128 pies.


Ahora intente realizar el ejercicio 49 ■

EJEMPLO 4 ■ Dimensiones de un lote para construcción

Un lote rectangular para construcción mide 8 pies más de largo de lo que mide de ancho y tiene un área de 2 900 pies². Encuentre las dimensiones del lote.

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** Nos piden encontrar el ancho y el largo del lote. Entonces, hacemos que

$$w = \text{ancho del lote}$$

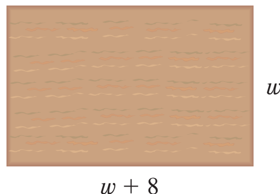


FIGURA 2

Convierta las palabras en lenguaje de álgebra. Ahora convertimos la información dada en el problema en el lenguaje de álgebra (véase la figura 2).

En palabras	En álgebra
Ancho del lote	w
Longitud del lote	$w + 8$

Formule el modelo. Ahora formulamos el modelo.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ancho}\\\text{del lote}\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{c}\text{longitud}\\\text{del lote}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{área}\\\text{del lote}\end{array}}$$

$$w(w + 8) = 2900$$

Resuelva. Entonces despejamos w.

$w^2 + 8w = 2900$ Desarrolle

$w^2 + 8w - 2900 = 0$ Reste 2 900

$(w - 50)(w + 58) = 0$ Factorice

$w = 50$ o $w = -58$ Propiedad de producto cero

Dado que el ancho del lote debe ser un número positivo concluimos que $w = 50$ pies. La longitud del lote es $w + 8 = 50 + 8 = 58$ pies.


Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

EJEMPLO 5 ■ Determinar la altura de un edificio usando triángulos semejantes

Un hombre que mide 6 pies de estatura desea determinar la altura de cierto edificio de cuatro pisos. Mide la sombra de la construcción y encuentra que es de 28 pies de largo, mientras que su propia sombra es de $3\frac{1}{2}$ pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** El problema pide la altura del edificio. Por tanto, sea que

$$h = \text{la altura del edificio}$$

Convierta las palabras en lenguaje de álgebra. Usamos el dato de que los triángulos de la figura 3 son semejantes. Recuerde que para cualquier par de triángulos semejantes las relaciones entre lados correspondientes son iguales. Ahora convierta estas observaciones en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Altura del edificio	h
Cociente entre altura y base en el triángulo grande	$\frac{h}{28}$
Cociente entre altura y base en el triángulo pequeño	$\frac{6}{3.5}$

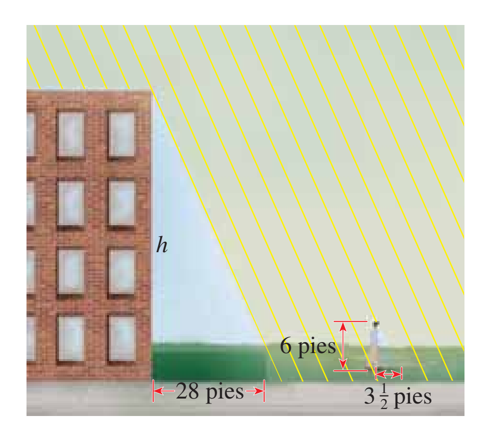


FIGURA 3

Formule el modelo. Dado que los triángulos grande y pequeño son semejantes obtenemos la ecuación

$$\boxed{\text{cociente entre altura y base en triángulo grande}} = \boxed{\text{cociente entre altura y base en triángulo pequeño}}$$

$$\frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}$$

Resuelva. A continuación, despeje h.

$$h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = 48 \qquad \text{Multiplique por 28}$$

Entonces el edificio mide 48 pies de altura.

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

■ Problemas de mezclas

Numerosos problemas reales se refieren a la mezcla de diferentes tipos de sustancias. Por ejemplo, los trabajadores de la construcción deben mezclar cemento, grava y arena; el jugo de fruta de un concentrado puede tener mezcla de diferentes tipos de

jugos. Los problemas de mezclas y concentraciones hacen uso del hecho de que, si una cantidad x de una sustancia se disuelve en una solución con volumen V, entonces la concentración C de la sustancia está dada por

$$C = \frac{x}{V}$$

Por tanto, si 10 g de azúcar se disuelven en 5 L de agua, entonces la concentración de azúcar es $C = 10/5 = 2$ g/L. Resolver un problema de mezclas por lo general nos pide analizar la cantidad x de la sustancia que está en la solución. Cuando despejamos x de esta ecuación, vemos que $x = CV$. Observe que en muchos problemas de mezcla la concentración C se expresa como porcentaje, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 ■ Mezclas y concentración

Un fabricante de bebidas gaseosas anuncia su refresco de naranja como "con sabor natural", aun cuando contiene solo 5% de jugo de naranja. Un nuevo reglamento federal establece que para ser llamada "natural", una bebida debe contener al menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja puro debe agregar este fabricante a 900 galones de refresco de naranja para apegarse al nuevo reglamento?

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** El problema pide la cantidad de jugo de naranja puro que debe ser agregado. Por tanto, hacemos que

x = la cantidad (en galones) de jugo de naranja puro a agregar

Convierta las palabras en álgebra. En cualquier problema de este tipo, en el que se mezclan dos sustancias diferentes, trazar un diagrama nos ayuda a organizar la información dada (véase la figura 4).

La información de la figura se puede convertir en lenguaje algebraico, como sigue.

En palabras	En álgebra
Cantidad de jugo de naranja a agregar	x
Cantidad de la mezcla	$900 + x$
Cantidad de jugo de naranja en la primera tina	$0.05(900) = 45$
Cantidad de jugo de naranja en la segunda tina	$1 \cdot x = x$
Cantidad de jugo de naranja en la mezcla	$0.10(900 + x)$

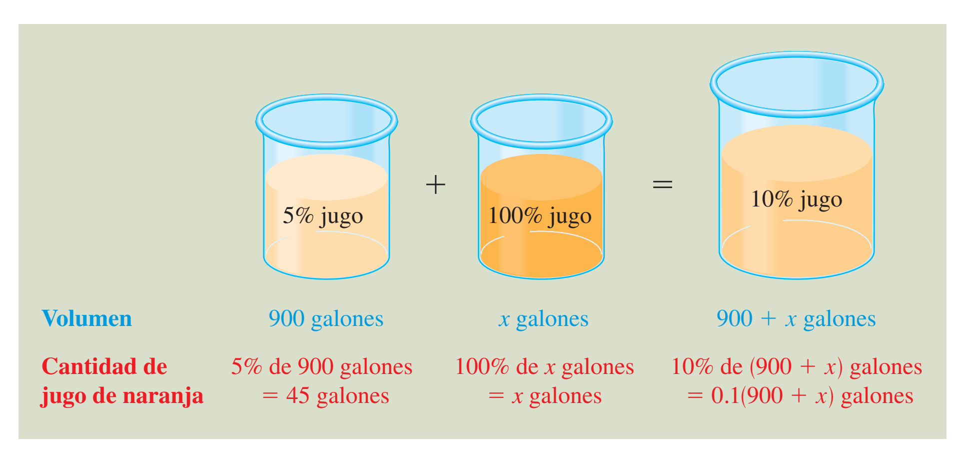


FIGURA 4

Formule el modelo. Para formular el modelo usamos el dato de que la cantidad total de jugo de naranja en la mezcla es igual al jugo de naranja de las dos primeras tinas.

cantidad de jugo de naranja en la primera tina	+	cantidad de jugo de naranja en la segunda tina	=	cantidad de jugo de naranja en la mezcla

$$45 + x = 0.1(900 + x)$$ De la figura 4

Resuelva. Ahora, despeje la x.

$$45 + x = 90 + 0.1x$$ Propiedad distributiva

$$0.9x = 45$$ Reste $0.1x$ y 45

$$x = \frac{45}{0.9} = 50$$ Divida entre 0.9

El fabricante debe agregar 50 galones de jugo de naranja puro al refresco.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

cantidad de jugo antes de mezclar = 5% de 900 galones + 50 galones de jugo puro
= 45 galones + 50 galones = 95 galones

cantidad de jugo después de mezclar = 10% de 950 galones = 95 galones

Las cantidades son iguales. ✓

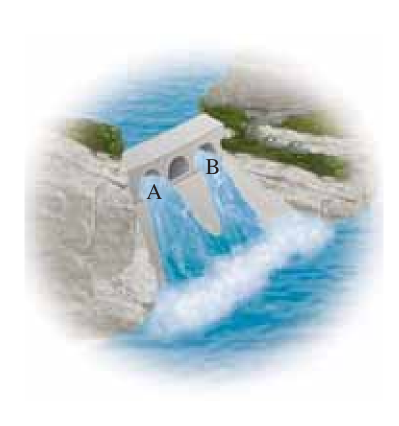
Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo

Cuando se resuelve un problema que trata de determinar el tiempo que tardan varios trabajadores en terminar un trabajo usamos el dato de que si una persona o máquina tarda H unidades de tiempo para terminar el trabajo, entonces en una unidad de tiempo la parte del trabajo que se ha terminado es $1/H$. Por ejemplo, si un trabajador tarda 5 horas para podar el césped, entonces en 1 hora el trabajador podará $1/5$ del césped.

EJEMPLO 7 ■ Tiempo necesario para realizar un trabajo

Debido a una fuerte tormenta anticipada el nivel del agua en un estanque debe descender 1 pie. Abrir el vertedero A hace que el nivel descienda en 4 horas, mientras que abrir el vertedero más pequeño B hace que el nivel del agua descienda en 6 horas. ¿Cuánto tardará en bajar 1 pie el nivel del agua con ambos vertederos abiertos?



SOLUCIÓN **Identifique la variable.** Nos piden encontrar el tiempo necesario para bajar 1 pie el nivel del agua si ambos vertederos están abiertos. Por tanto, hacemos que

x = tiempo (en horas) necesario para bajar el nivel de agua 1 pie si ambos vertederos están abiertos

Convierta las palabras en lenguaje de álgebra. No es fácil encontrar una ecuación que relacione x a las otras cantidades de este problema. Ciertamente x no es sólo $4 + 6$, porque eso significaría que los dos vertederos juntos necesitarían más tiempo para

bajar el nivel del agua que cualquiera de ellos solo. En cambio, *vemos la parte del trabajo que puede realizar en 1 hora cada uno de los vertederos*.

En palabras	En álgebra
Tiempo que tarda en bajar el nivel 1 pie con A y B juntos	x h
Distancia que A baja el nivel en 1 h	$\frac{1}{4}$ pie
Distancia que B baja el nivel en 1 h	$\frac{1}{6}$ pie
Distancia que A y B juntas bajan niveles en 1 h	$\frac{1}{x}$ pie

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

fracción ejecutada por A + fracción ejecutada por B = fracción ejecutada por ambos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

Resuelva. Ahora, despejamos x.

$$3x + 2x = 12 \quad \text{Multiplique por el MCD, } 12x$$

$$5x = 12 \quad \text{Sume}$$

$$x = \frac{12}{5} \quad \text{Divida entre 5}$$

Tardará $2\frac{2}{5}$ horas, o 2 h 24 min, para bajar 1 pie el nivel del agua si ambos vertederos están abiertos.



■ Problemas de distancia, rapidez y tiempo

El siguiente ejemplo trata sobre distancia, tasa (rapidez) y tiempo. La fórmula a recordar en estos casos es

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}$$

donde la rapidez es, ya sea la rapidez constante o el promedio de rapidez de un cuerpo en movimiento. Por ejemplo, al conducir un auto a 60 mi/h durante 4 horas se recorre una distancia de $60 \cdot 4 = 240$ millas.

EJEMPLO 8 ■ Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Un *jet* voló de Nueva York a Los Ángeles una distancia de 4200 kilómetros. La rapidez para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la rapidez en el vuelo de ida. Si el viaje total duró 13 horas, ¿cuál fue la rapidez del *jet* de Nueva York a Los Ángeles?

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** Nos piden la rapidez del *jet* de Nueva York a Los Ángeles. Aquí hacemos que

$$s = \text{rapidez de Nueva York a Los Ángeles}$$

Entonces $s + 100$ = rapidez de Los Ángeles a Nueva York

Convierta las palabras en lenguaje de álgebra. Organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna "Distancia" porque sabemos que las ciudades están separadas por 4200 km. Luego, llenamos la columna "Rapidez" porque hemos

expresado ambas magnitudes de rapidez en términos de la variable s. Por último calculamos las entradas para la columna "Tiempo" usando

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

	Distancia (km)	Rapidez (km/h)	Tiempo (h)
N.Y. a L.A.	4200	s	$\frac{4200}{s}$
L.A. a N.Y.	4200	$s + 100$	$\frac{4200}{s+100}$

Formule el modelo. El viaje total tomó 13 horas, de modo que tenemos el modelo

$$\text{tiempo de N.Y. a L.A.} + \text{tiempo de L.A. a N.Y.} = \text{tiempo total}$$

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$$

Resuelva. Multiplicando por el común denominador, $s(s + 100)$, tenemos

$$4200(s + 100) + 4200s = 13s(s + 100)$$

$$8400s + 420000 = 13s^2 + 1300s$$

$$0 = 13s^2 - 7100s - 420000$$

Aun cuando esta ecuación se factoriza, con números tan grandes es probable que sea más rápido usar la fórmula cuadrática y una calculadora.

$$s = \frac{7100 \pm \sqrt{(-7100)^2 - 4(13)(-420000)}}{2(13)}$$

$$= \frac{7100 \pm 8500}{26}$$

$$s = 600 \qquad \text{o} \qquad s = \frac{-1400}{26} \approx -53.8$$

Dado que s representa la rapidez rechazamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del *jet* de Nueva York a Los Ángeles fue de 600 km/h.

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

EJEMPLO 9 ■ Energía consumida durante el vuelo de un ave

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes cuerpos de agua durante ciertas horas del día porque generalmente durante el día el aire se eleva sobre el suelo y cae sobre el agua, de modo que volar sobre el agua requiere más energía. Se libera un ave desde el punto A en una isla, a 5 millas de B, que es el punto más cercano a la playa en línea recta. El ave vuela al punto C en la playa y luego vuela a lo largo de la playa al lugar para anidar D, como se muestra en la figura 5. Suponga que el ave tiene 170 kcal en reservas de energía. Consume 10 kcal/milla volando sobre el suelo y 14 kcal/milla volando sobre el agua.

a) ¿En dónde debe estar ubicado el punto C para que el ave use exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo?

b) ¿Tiene el ave suficientes reservas de energía para volar directamente de A a D?

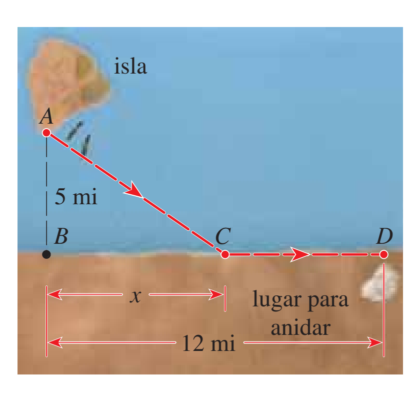


FIGURA 5

BHASKARA (nacido en 1114) fue un matemático, astrónomo y astrólogo de la India. Entre sus muchos logros está una ingeniosa demostración del teorema de Pitágoras. (Véase *Focus on Problem Solving 5*, (*Enfoque en la solución de problemas* 5), problema 12, en el sitio web **www.stewartmath.com*** que acompaña este libro.) Su importante libro matemático *Lilavati* (La hermosa) contiene problemas de álgebra planteados en forma de cuentos para su hija *Lilavati*. Muchos de los problemas empiezan así: "Oh, bella doncella, supón que...". El relato se desarrolla a través de la astrología. Bhaskara había determinado que grandes desgracias le ocurrirían a su hija si se casaba en cualquier momento que no fuera cierta hora de cierto día. El día de su boda, cuando ella estaba mirando con ansiedad un reloj de agua, una perla de su tocado cayó inadvertidamente y paró el flujo de agua del reloj, haciendo que ella perdiera el momento oportuno para su boda. El libro *Lilavati* de Bhaskara fue escrito para su consuelo.

* Este material se encuentra disponible en inglés.

SOLUCIÓN

***a*)** **Identifique la variable.** Nos piden encontrar la ubicación de C. Hacemos que

$$x = \text{distancia de } B \text{ a } C$$

Convierta las palabras en lenguaje de álgebra. De la figura y del hecho de que

$$\text{energía consumida} = \text{energía por milla} \times \text{millas recorridas}$$

determinamos lo siguiente:

En palabras	En álgebra	
Distancia de B a C	x	
Distancia del vuelo sobre el agua (de A a C)	$\sqrt{x^2 + 25}$	Teorema de Pitágoras
Distancia del vuelo sobre el suelo (de C a D)	$12 - x$	
Energía consumida sobre el agua	$14\sqrt{x^2 + 25}$	
Energía consumida sobre el suelo	$10(12 - x)$	

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\boxed{\text{total de energía consumida}} = \boxed{\text{energía consumida sobre el agua}} + \boxed{\text{energía consumida sobre el suelo}}$$

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

Resuelva. Para resolver esta ecuación eliminamos la raíz cuadrada moviendo primero todos los otros términos a la izquierda del signo de igual y luego elevamos al cuadrado ambos lados.

$$170 - 10(12 - x) = 14\sqrt{x^2 + 25}$$ Despeje a la derecha el término de raíz cuadrada

$$50 + 10x = 14\sqrt{x^2 + 25}$$ Simplifique el lado izquierdo

$$(50 + 10x)^2 = (14)^2(x^2 + 25)$$ Eleve al cuadrado ambos lados

$$2\,500 + 1\,000x + 100x^2 = 196x^2 + 4\,900$$ Desarrolle

$$0 = 96x^2 - 1\,000x + 2\,400$$ Mueva todos los términos al lado derecho

Esta ecuación podría factorizarse, pero debido a que los números son tan grandes es más fácil usar la fórmula cuadrática y una calculadora:

$$x = \frac{1\,000 \pm \sqrt{(-1\,000)^2 - 4(96)(2\,400)}}{2(96)}$$

$$= \frac{1\,000 \pm 280}{192} = 6\tfrac{2}{3} \quad \text{o} \quad 3\tfrac{3}{4}$$

El punto C debe ser, ya sea $6\frac{2}{3}$ o $3\frac{3}{4}$ millas desde B para que el ave consuma exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo.

***b*)** Por el teorema de Pitágoras la longitud de la ruta directamente de A a D es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ mi, de modo que la energía que el ave requiere para esa ruta es $14 \times 13 = 182$ kcal. Esto es más energía de la que dispone el ave, de modo que no puede continuar por esa ruta.

Véase el apéndice A,* *Repaso de geometría* para estudiar el teorema de Pitágoras.

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

Ahora intente realizar el ejercicio 85 ■

1.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Explique verbalmente qué significa que una ecuación modele una situación real y dé un ejemplo.

2. En la fórmula $I = Prt$ para interés simple, P representa

________, r es ________ y t es ________.

3. Dé una fórmula para el área de la figura geométrica.

a) Un cuadrado de lado x: $A =$ ________.

b) Un rectángulo de longitud l y ancho w: $A =$ ________.

c) Un círculo de radio r: $A =$ ________.

4. El vinagre balsámico contiene 5% de ácido acético, de modo que una botella de 32 onzas de vinagre balsámico contiene ________ onzas de ácido acético.

5. Un pintor pinta una pared en x horas, por lo que la fracción de la pared que pinta en 1 hora es ________.

6. La fórmula $d = rt$ modela la distancia d recorrida por un objeto que se mueve a una rapidez r constante en el tiempo t. Encuentre fórmulas para las siguientes cantidades.

$r =$ ________ $t =$ ________

HABILIDADES

7–20 ■ Usando variables Exprese en términos de la variable indicada la cantidad dada.

7. La suma de tres enteros consecutivos; $n =$ primer entero de los tres

8. La suma de tres enteros consecutivos; $n =$ entero intermedio de los tres

9. La suma de tres enteros pares consecutivos; $n =$ primer entero de los tres

10. La suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos; $n =$ primer entero de los dos

11. El promedio de tres calificaciones de un examen si las dos primeras calificaciones son 78 y 82; $s =$ tercera calificación del examen

12. El promedio de cuatro calificaciones del examen si cada una de las primeras tres calificaciones es 8; $q =$ cuarta calificación del examen

13. El interés obtenido sobre una inversión luego de un año al $2\frac{1}{2}$% de interés simple por año; $x =$ número de dólares invertidos

14. La renta total pagada por un apartamento si la renta es 795 dólares al mes; $n =$ número de meses

15. El área (en pies^2) de un rectángulo que mide cuatro veces más de largo que de ancho; $w =$ ancho del rectángulo (en pies)

16. El perímetro (en cm) de un rectángulo que es 6 cm más largo que su ancho; $w =$ ancho del rectángulo (en cm)

17. El tiempo (en horas) que toma recorrer una distancia determinada a 55 mi/h; $d =$ distancia dada (en millas)

18. La distancia (en millas) que un auto recorre en 45 minutos; $s =$ rapidez del auto (en mi/h)

19. La concentración (en oz/gal) de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera que contiene 25 onzas de sal a la que se le ha agregado agua pura; $x =$ volumen de agua pura agregada (en galones)

20. El valor (en centavos) del cambio en un monedero que contiene el doble de monedas de 5 centavos que, de 1 centavo, cuatro veces más monedas de 10 centavos que de 5 centavos, y tantas monedas de 25 centavos como de 10 y de 5 centavos combinadas; $p =$ número de monedas de 1 centavo

APLICACIONES

21. Renta de un camión Una compañía que renta vehículos cobra 65 dólares al día y 20 centavos por milla por rentar un camión. Miguel rentó un camión durante 3 días y su cuenta fue de 275 dólares. ¿Cuantas millas recorrió?

22. Costos de teléfono celular Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de 10 dólares por los primeros 1 000 mensajes de texto y 10 centavos por cada mensaje adicional de texto. La cuenta de Miriam por mensajes de texto para el mes de junio es de 38.50 dólares. ¿Cuántos mensajes de texto envió dicho mes?

23. Promedio Linh ha obtenido calificaciones de 82, 75 y 71 en sus exámenes de álgebra de mitad de periodo. Si el examen final cuenta el doble que el de la mitad del periodo, ¿qué calificación debe tener en su examen final para obtener una calificación promedio de 80? (Suponga que la máxima calificación posible en cada prueba es de 100.)

24. Promedio En una clase de 25 alumnos la calificación promedio es 84. Seis estudiantes de la clase obtuvieron una calificación máxima de 100, y tres estudiantes recibieron una calificación de 60. ¿Cuál es el promedio de calificaciones del resto de los estudiantes?

25. Inversiones Phyllis invirtió 12 000 dólares, una parte de los cuales gana una tasa de interés simple de $4\frac{1}{2}$% al año y el resto gana una tasa de 4% al año. Después de 1 año, el interés total ganado sobre estas inversiones fue de 525 dólares. ¿Cuánto dinero invirtió a cada una de las tasas?

26. Inversiones Si Ben invierte 4 000 dólares al 4% de interés al año, ¿cuánto dinero adicional debe invertir al $5\frac{1}{2}$% de interés anual para garantizar que el interés que reciba cada año sea $4\frac{1}{2}$% de la cantidad total invertida??

27. Inversiones ¿Qué tasa anual de interés debe ganar una persona, sobre una inversión de 3 500 dólares, para garantizar que recibirá 262.50 dólares de interés después de 1 año?

28. Inversiones Jack invierte 1 000 dólares a cierta tasa de interés anual, e invierte otros 2 000 dólares a una tasa anual, que es un medio por ciento más alta. Si recibe un total de 190 dólares de interés en 1 año, ¿a qué tasa se invierten los 1 000 dólares?

29. Salarios Una ejecutiva de una compañía de ingeniería gana un salario mensual más un bono de Navidad de 8 500 dólares. Si ella gana un total de 97 300 dólares por año, ¿cuál es su salario mensual?

30. Salarios Una mujer gana 15% más que su esposo. Juntos ganan 69 875 dólares al año. ¿Cuál es el salario anual del esposo?

31. Pago de tiempo extra Helen gana 7.50 dólares por hora en su trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana le pagan $1\frac{1}{2}$ veces su salario regular por las horas de tiempo extra trabajadas. En una semana ella gana un salario bruto de 352.50 dólares. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó dicha semana?

32. Costos de mano de obra Un plomero y su ayudante trabajan juntos para cambiar las tuberías de una casa vieja. El plomero cobra 45 dólares por hora por su propio trabajo y 25 dólares por hora por el trabajo del ayudante. El plomero trabaja el doble de tiempo que su ayudante y el cobro por mano de obra en la factura final es de 4 025 dólares. ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante para realizar este trabajo?

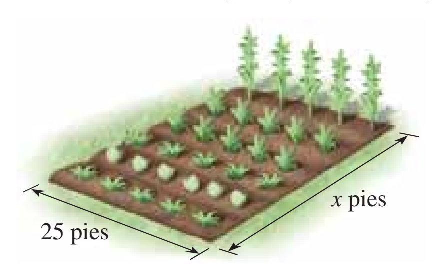
33. Un acertijo Un actor de cine, que no está dispuesto a decir su edad, le plantea el siguiente acertijo a un columnista de chismes. "Hace siete años yo tenía 11 veces la edad de mi hija; ahora tengo cuatro veces su edad." ¿Cuál es la edad del actor?

34. Cuadrangulares en su carrera Durante su carrera en las Ligas Mayores, Hank Aaron conectó 41 cuadrangulares más de los que conectó Babe Ruth en su carrera. Juntos conectaron 1 469 cuadrangulares. ¿Cuántos conectó Babe Ruth?

35. Valor de monedas Un monedero contiene igual número de monedas de 1 centavo, de 5 centavos y de 10 centavos. El valor total de las monedas es 1.44 dólares. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene el monedero?

36. Valor de monedas Mary tiene 3 dólares en monedas de 5, de 10 y de 25 centavos. Si ella tiene el doble de monedas de 10 que de 25 y cinco más de monedas de 5 que de 10 centavos, ¿cuántas monedas tiene de cada tipo?

37. Longitud de un jardín Un jardín rectangular mide 25 pies de ancho. Si su área es de 1 125 pies^2, ¿cuál es la longitud?



38. Ancho de un pastizal Un pastizal mide el doble de largo que su ancho. Su área es de 115 200 pies^2. ¿Cuál es el ancho del pastizal?

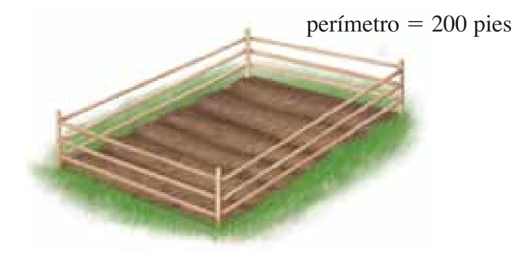
39. Dimensiones de un lote Un terreno cuadrado tiene una construcción de 60 pies de largo por 40 de ancho. El resto del terreno es una bahía de estacionamiento. Si la zona de aparcamiento mide 12 000 m^2, ¿cuáles son las dimensiones de todo el terreno?

40. Dimensiones de un lote Un lote de medio acre para construcción mide 5 veces más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones? [*Nota:* 1 acre = 43 560 pies^2.]

41. Dimensiones de un jardín Un jardín rectangular mide 10 pies más de largo que de ancho. Su área es 875 pies^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

42. Dimensiones de un cuarto Una habitación rectangular mide 7 pies más de largo que su ancho. Su área es de 228 pies^2. ¿Cuál es el ancho de la habitación?

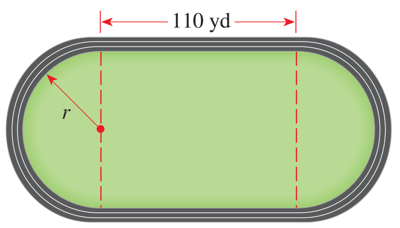
43. Dimensiones de un jardín Un agricultor tiene un lote rectangular de jardín rodeado por una cerca de 200 pies. Encuentre la longitud y ancho si su área es de 2 400 pies^2.



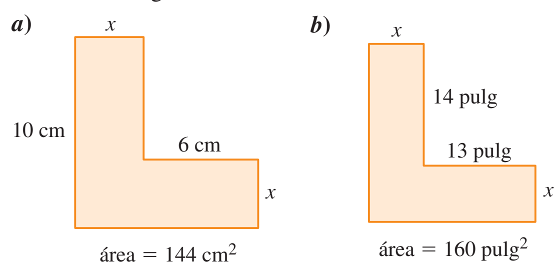
44. Dimensiones de un lote Una parcela de tierra es 6 pies más larga que ancha. Cada diagonal de una esquina a la esquina opuesta tiene una longitud de 174 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

45. Dimensiones de un lote Una parcela rectangular tiene 50 pies de ancho. La longitud de una diagonal entre las esquinas opuestas es 10 pies más que la longitud de la parcela. ¿Cuál es la longitud de la parcela?

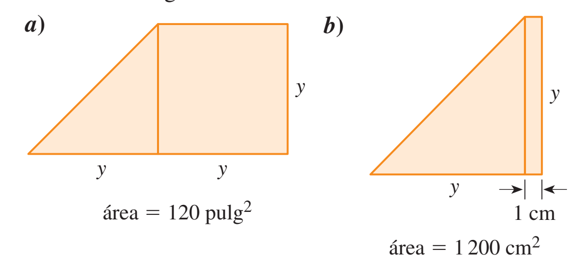
46. Dimensiones de una pista Una pista de carreras tiene la forma que se muestra en la figura, con costados rectos y extremos semicirculares. Si la longitud de la pista es de 440 yardas y las dos partes rectas miden 110 yardas de largo cada una, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares (a la yarda más cercana)?



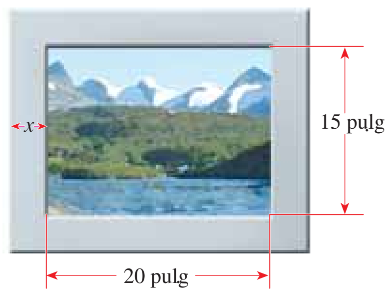
47. Longitud y área Encuentre la longitud x de la figura. Se da el área de la región sombreada.



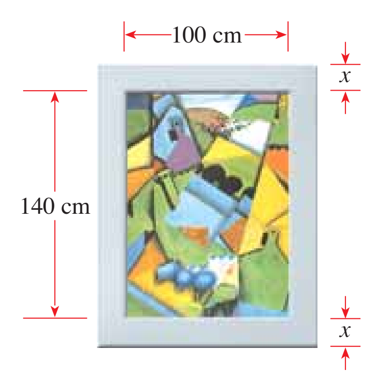
48. Longitud y área Encuentre la longitud y de la figura. Se da el área de la región sombreada.



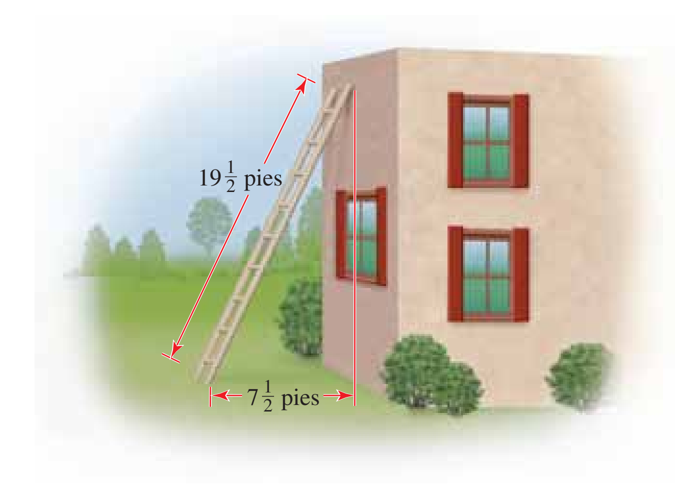
49. Enmarcar una pintura Ali pinta con acuarela en una hoja de papel de 20 pulgadas de ancho por 15 pulgadas de alto. Luego le coloca a esta hoja un marco de cartón de modo que alrededor de la pintura queda una franja de cartón de ancho uniforme. El perímetro del marco de cartón es de 102 pulgadas. ¿Cuál es el ancho de la franja del marco de cartón que se ve alrededor de la pintura?



50. Dimensiones de un cartel Un cartel rectangular tiene una superficie impresa de 100 por 140 cm y una franja sin dibujo de ancho uniforme en los bordes. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro de la superficie impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja sin dibujo?



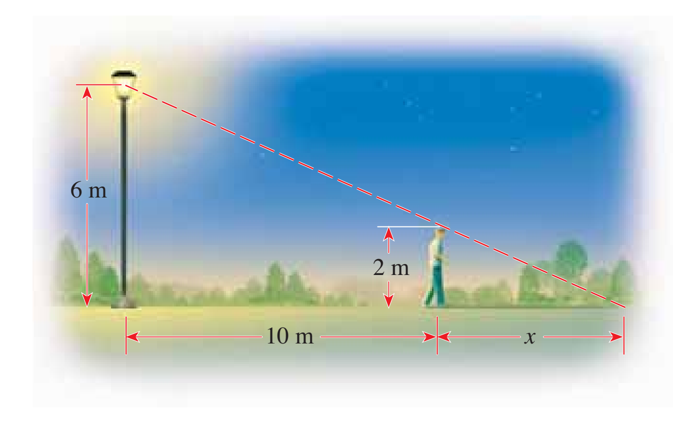
51. Alcance de una escalera Una escalera de $19\frac{1}{2}$ pies se apoya contra un edificio. La base de la escalera está a $7\frac{1}{2}$ pies del edificio. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?



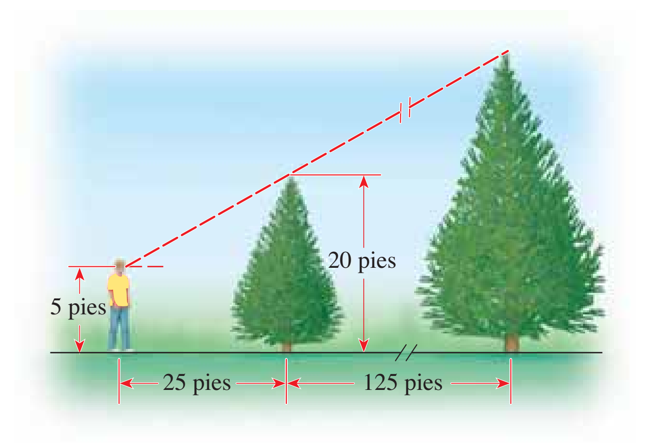
52. Altura del asta de una bandera El asta de una bandera está sostenida en lados opuestos por medio de dos alambres (llamados "vientos"), cada uno de los cuales mide 5 pies más que el asta. La distancia entre los puntos donde los alambres se fijan al suelo es igual a la longitud de un alambre "viento". ¿Cuál es la altura del asta (a la pulgada más cercana)?



53. Longitud de una sombra Un hombre se aleja de un poste de alumbrado cuya fuente de luz está a 6 m sobre el suelo. El hombre mide 2 m de alto. ¿Cuál es la longitud de la sombra del hombre cuando este se halla a 10 m del poste? [*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.]



54. Altura de un árbol Un maderero determina la altura de un árbol al medir otro más pequeño que está a 125 pies de distancia del primero, y luego moviéndose y manteniendo la línea de visión a lo largo de los picos de los árboles y midiendo la distancia a la que él mismo se encuentra del árbol pequeño (véase la figura). Suponga que el árbol pequeño mide 20 pies de alto, el hombre está a 25 pies del árbol pequeño y el nivel de sus ojos está a 5 pies sobre el suelo. ¿Cuál es la altura del árbol más alto?



55. Problema de mezclas ¿Qué cantidad de una solución ácida al 60% debe mezclarse con una solución al 30% para producir 300 mL de una solución al 50%?

56. Problema de mezclas ¿Qué cantidad de ácido puro debe agregarse a 300 mL de una solución al 50% para producir una solución ácida al 60%?

57. Problema de mezclas Una joyera tiene cinco anillos, cada uno de los cuales pesa 18 g, hechos de una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Ella decide fundir los anillos y agregar suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75%. ¿Cuánta plata debe agregar?

58. Problema de mezclas Una olla tiene 6 L de salmuera a una concentración de 120 g/L. ¿Cuánta agua debe hervirse para aumentar la concentración a 200 g/L?

59. Problema de mezclas El radiador de un auto está lleno de una solución al 60% de anticongelante y 40% de agua. El fabricante del anticongelante sugiere que, para operar el auto en verano, el enfriamiento óptimo del auto se obtiene con sólo 50% de anticongelante. Si la capacidad del radiador es 3.6 L, ¿cuánto líquido de enfriamiento debe drenarse y para sustituirlo con agua para reducir la concentración de anticongelante al nivel recomendado?

60. Problema de mezclas Una clínica utiliza una solución de blanqueador para esterilizar cajas de Petri en las que crecen cultivos. El tanque de esterilización contiene 100 galones de solución de blanqueador doméstico común al 2%, mezclado con agua destilada pura. Nuevas investigaciones indican que la concentración de blanqueador debe ser al 5% para completar la esterilización. ¿Cuánto de la solución debe drenarse y sustituirse con blanqueador para aumentar el contenido de blanqueador al nivel recomendado?

61. Problema de mezclas Una botella contiene 750 mL de ponche con una concentración de 50% de jugo de frutas puro. Jill bebe 100 mL del ponche y luego vuelve a llenar la botella con una cantidad igual de ponche pero de una marca más barata. Si la concentración de jugo en la botella se reduce ahora al 48%, ¿cuál era la concentración del ponche que agregó Jill?

62. Problema de mezclas Un comerciante mezcla té que vende en 3.00 dólares por libra con té que vende en 2.75 dólares por libra para producir 80 lb de una mezcla que vende en 2.90 dólares por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en la mezcla?

63. Compartir un trabajo Candy y Tim comparten una ruta para vender periódicos. Candy tarda 70 minutos en entregar todos los periódicos; Tim tarda 80 minutos. ¿Cuánto tiempo les toma a los dos cuando trabajan juntos?

64. Compartir un trabajo Stan e Hilda pueden podar el césped en 40 minutos si trabajan juntos. Si Hilda trabaja el doble de rápido que Stan, ¿cuánto tiempo le toma a Stan podar el césped él solo?

65. Compartir un trabajo Betty y Karen han sido contratadas para pintar las casas en un nuevo fraccionamiento habitacional. Trabajando juntas pueden pintar una casa en dos tercios del tiempo que tarda Karen si trabaja sola. Betty tarda 6 horas en pintar una casa ella sola. ¿Cuánto tarda Karen en pintar una casa si trabaja sola?

66. Compartir un trabajo Bob y Jim son vecinos y viven en sendas casas contiguas, usan las mangueras de ambas casas para llenar la piscina de Bob. Saben que usando ambas mangueras tardan 18 horas. También saben que si se usa sólo la manguera de Bob, toma 20% menos tiempo que si se usa sólo la manguera de Jim. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar la piscina con cada una de las mangueras?

67. Compartir un trabajo Irene y Henry, trabajando juntos, pueden lavar todas las ventanas de su casa en 1 hora 48 minutos. Trabajando solo, Henry tarda $1\frac{1}{2}$ h más que Irene para hacer el trabajo. ¿Cuánto tarda cada uno en lavar todas las ventanas?

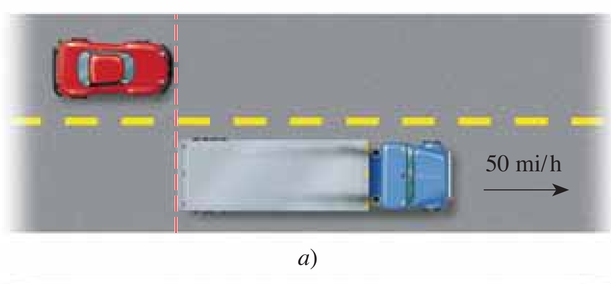
68. Compartir un trabajo Jack, Kay y Lynn reparten volantes de publicidad en una pequeña población. Si cada uno trabaja por su cuenta, Jack tarda 4 h en repartir todos los volantes y Lynn tarda 1 h más de lo que tarda Kay. Trabajando juntos pueden repartir todos los volantes en 40% del tiempo que tarda Kay trabajando ella sola. ¿Cuánto le toma a Kay repartir todos los volantes?

69. Distancia, rapidez y tiempo Wendy hizo un viaje de Davenport a Omaha, una distancia de 300 millas. Parte del trayecto lo hizo en autobús, que llegó a la estación de ferrocarril justo a tiempo para que completara su viaje en tren. El autobús promedió 40 mi/h y el tren promedió 60 mi/h. Todo el viaje tomó 5½ h. ¿Cuánto tiempo viajó Wendy en tren?

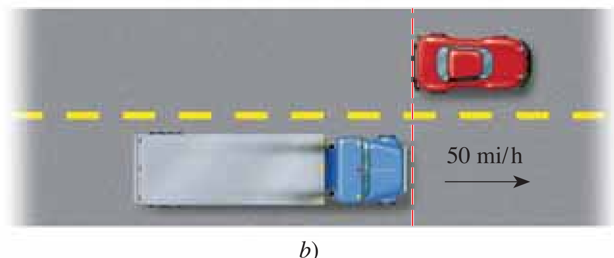
70. Distancia, rapidez y tiempo Dos ciclistas están a 90 millas uno del otro. Arrancan en sus bicicletas al mismo tiempo para encontrarse. Uno de ellos pedalea el doble de rápido que el otro. Si se encuentran 2 h más tarde, ¿a qué velocidad promedio está viajando cada uno de ellos?

71. Distancia, rapidez y tiempo Un piloto voló en jet de Montreal a Los Ángeles, una distancia de 2 500 millas. En el viaje de regreso, el promedio de velocidad fue 20% más rápido que en el de ida. El viaje redondo tardó 9 horas 10 minutos. ¿Cuál fue la velocidad de Montreal a Los Ángeles?

72. Distancia, rapidez y tiempo Una mujer que conduce un auto de 14 pies de largo está rebasando a un camión de 30 pies de largo. El camión está corriendo a 50 mi/h. ¿Con qué rapidez debe ir el auto de la mujer para que pueda pasar por completo al camión en 6 s, desde la posición que se muestra en la figura *a*) hasta la posición de la figura *b*)? [*Sugerencia:* Use pies y segundos en lugar de millas y horas.]



a)



b)

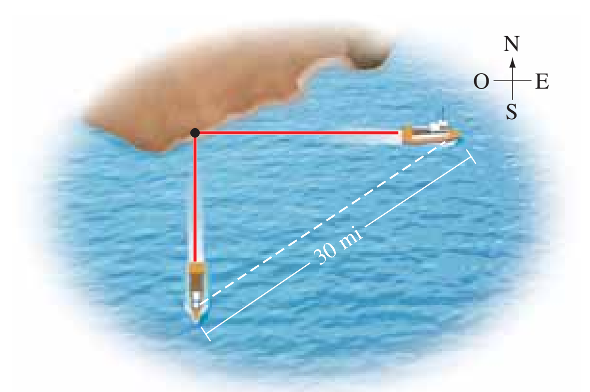
73. Distancia, rapidez y tiempo Un vendedor viaja en auto de Ajax a Barrington, una distancia de 120 millas a una velocidad constante. Luego aumenta su velocidad en 10 mi/h para recorrer las 150 millas de Barrington a Collins. Si el segundo tramo de su viaje tomó 6 minutos más que el primero, ¿con que rapidez manejaba entre Ajax y Barrington?

74. Distancia, rapidez y tiempo Kiran viajó de Tortula a Cactus, una distancia de 250 millas. Aumento la velocidad en 10 mi/h para el viaje de 360 millas de Cactus a Dry Junction. Si el viaje total tomó 11 horas, ¿cuál fue su velocidad de Tortula a Cactus?

75. Distancia, rapidez y tiempo A una tripulación le tomó 2 h 40 min remar 6 km corriente arriba y regresar. Si la rapidez

de la corriente era de 3 km/h, ¿a qué velocidad remó la tripulación en aguas tranquilas?

76. Velocidad de un bote Dos botes pesqueros salen al mismo tiempo de un puerto, uno de ellos con dirección al este y el otro hacia el sur. El primero viaja 3 mi/h más rápido que el segundo. Después de 2 horas los botes están a 30 millas entre sí. Encuentre la rapidez del bote que se dirige al sur

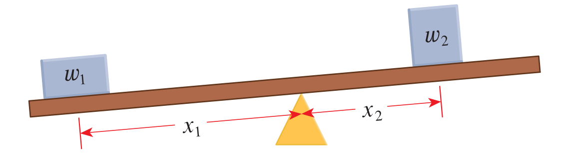


77. Ley de la palanca La figura muestra un sistema de palancas semejante a un subibaja (balancín) que se puede encontrar en un parque de juegos infantiles. Para que el sistema esté en equilibrio, el producto del peso y su distancia desde el fulcro debe ser iguales en cada lado; esto es,

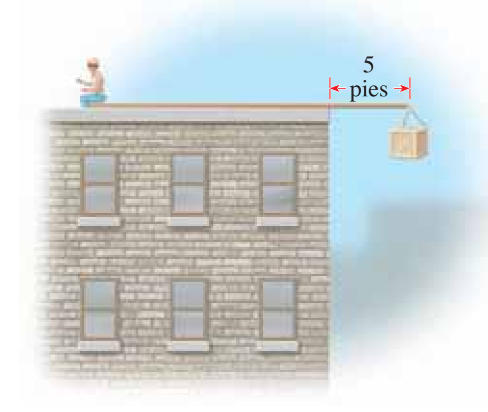
$$w_1x_1 = w_2x_2$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ley de la palanca** y fue descubierta por Arquímedes (véase la página 787).

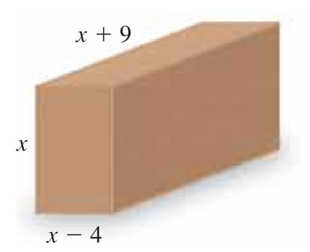
Una mujer y su hijo están jugando en un subibaja. El niño está en un extremo, a 8 pies del fulcro. Si él pesa 100 lb y la madre pesa 125 lb, ¿dónde debe sentarse ella para que el subibaja esté balanceado?



78. Ley de la palanca Una tabla de 30 pies de largo está apoyada en lo alto de un edificio de techo plano, con 5 pies de la tabla sobresaliendo del borde como se muestra en la figura. Un trabajador que pesa 240 lb se sienta en un extremo de la tabla. ¿Cuál es el peso máximo que puede ser colgado del extremo de la tabla que sobresale, si debe estar en equilibrio? (Use la ley de la palanca expresada en el ejercicio 77.)

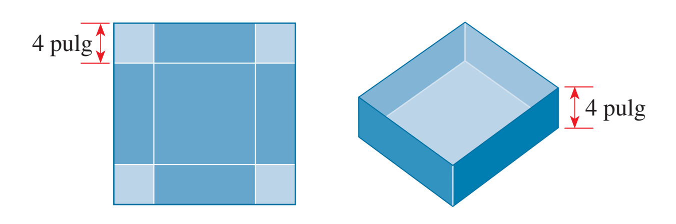


79. Dimensiones de una caja Una caja grande de madera terciada tiene un volumen de 180 pies^3. Su longitud es 9 pies más que su ancho, y su ancho es 4 pies menor que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

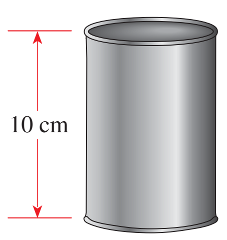


80. Radio de una esfera Un joyero tiene tres pequeñas esferas de oro macizo, con 2, 3 y 4 mm de radio, respectivamente. Él decide fundirlas y hacer con ellas una sola esfera. ¿Cuál será el radio de dicha esfera?

81. Dimensiones de una caja Una caja con una base cuadrada y sin tapa ha de hacerse de una pieza cuadrada de cartón al cortarle cuadros de 4 pulgadas de cada esquina y doblar los lados como se muestra en la figura. La caja ha de contener 100 pulg^3. ¿De qué dimensión se necesita la pieza de cartón?



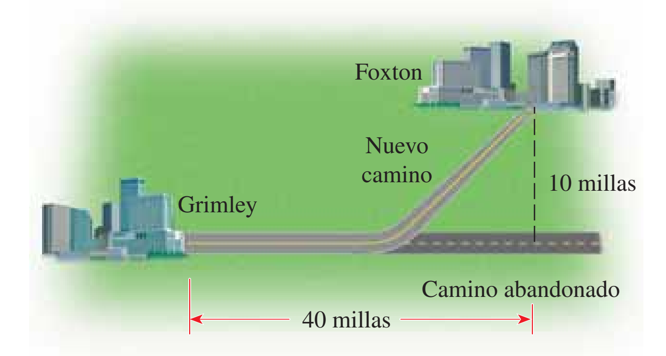
82. Dimensiones de una lata Una lata cilíndrica tiene un volumen de 40π cm^3 y mide 10 cm de alto. ¿Cuál es su diámetro? [*Sugerencia:* Use la fórmula de volumen que aparece al final del libro.]



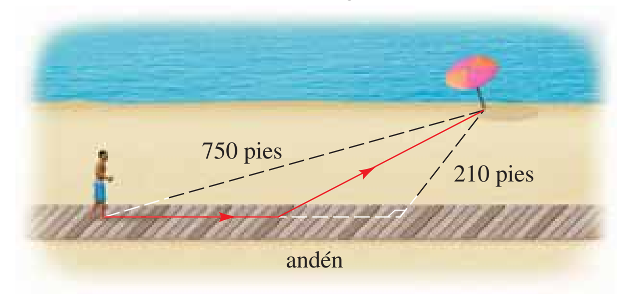
83. Radio de un tanque Un tanque esférico tiene una capacidad de 750 galones. Usando el dato de que un galón es 0.1337 pies^3, aproximadamente, encuentre el radio del tanque (al centésimo de pie más cercano).

84. Dimensiones de un lote Un lote urbano tiene la forma de un triángulo recto cuya hipotenusa es 7 pies más larga que uno de los otros lados. El perímetro del lote es de 392 pies. ¿Cuál es la longitud de cada lado del lote?

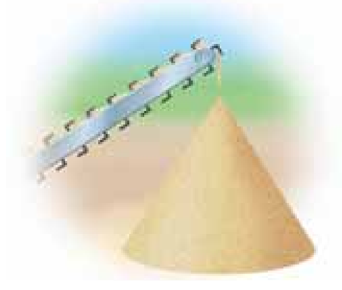
85. Costos de construcción La ciudad de Foxton está a 10 millas al norte de un camino abandonado de dirección este-oeste que pasa por Grimley, como se muestra en la figura. El punto del camino abandonado más cercano a Foxton está a 40 millas de Grimley. Oficiales del condado están por construir un nuevo camino que comunica las dos ciudades. Se ha determinado que restaurar el camino antiguo costaría 100 000 dólares por milla, mientras que construir un nuevo camino costaría 200 000 dólares por milla. ¿Cuánto del camino abandonado debe aprovecharse (como se indica en la figura) si los oficiales tienen intención de gastar exactamente 6.8 millones de dólares? ¿Costaría menos que esto la construcción de un nuevo camino que conectara las ciudades directamente?



86. Distancia, rapidez y tiempo Un entablado o andén de madera está paralelo y a 210 pies tierra adentro del borde de una playa recta. Hay una playa arenosa entre el andén y el borde de la playa. Un hombre está de pie en el andén, exactamente a 750 pies de su sombrilla que está justo en el borde de la playa. El hombre camina a 4 pies/s sobre el andén y a 2 pies/s sobre la arena. ¿Qué distancia debe caminar sobre el andén antes de entrar a la arena si desea llegar a su sombrilla en exactamente 4 minutos 45 segundos?



87. Volumen de grano De un canal están cayendo granos al suelo y están formando una pila cónica cuyo diámetro es siempre el triple de su altura. ¿De qué altura es la pila (al centésimo de pie más cercano) cuando contiene 1 000 pies^3 de grano?

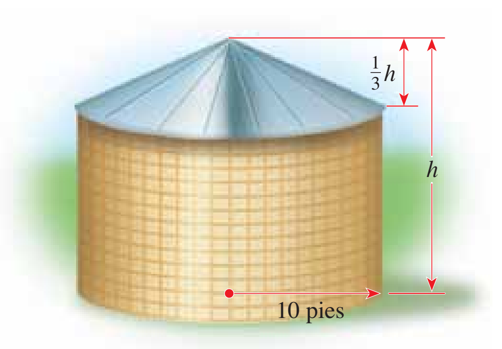


88. Monitores de computadora Dos monitores de computadora, colocados uno al lado del otro en un estante de una tienda de aparatos eléctricos, tienen pantallas de la misma altura. Uno de ellos tiene una pantalla convencional, que es 7 pulgadas más ancha que su altura; el otro tiene una pantalla más ancha, que es 1.8 veces más ancha que su altura. La medida diagonal de la pantalla más ancha es 3 pulgadas más que la medida diagonal de la pantalla más pequeña. ¿Cuál es la altura correcta de cada pantalla al 0.1 de pulgada más cercano?

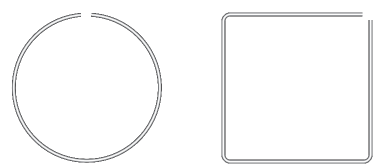


89. Dimensiones de una estructura Un silo de almacenamiento para maíz está formado de una sección cilíndrica hecha de malla de alambre, rematada por un techo cónico de estaño, como se muestra en la figura. La altura del techo es un tercio de la altura de toda la estructura. Si el volumen total de la estructura es $1\,400\pi$ pies^3 y su radio es 10 pies, ¿cuál es su altura? [*Sugerencia:* Use las fórmulas de volumen que aparecen al final del libro.*]

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.



90. Comparación de áreas Un alambre de 360 pulgadas de largo se corta en dos piezas. A una se le da forma de cuadrado y a la otra de círculo. Si las dos figuras tienen la misma área, ¿cuáles son las longitudes de las dos piezas de alambre (al décimo de pulgada más cercano)?

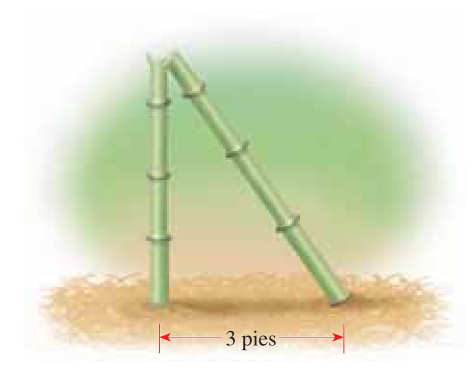


91. Un antiguo problema chino Este problema ha sido tomado de un libro de texto chino llamado *Chui-chang suan-shu*, o *Nueve capítulos del arte matemático*, que fue escrito hacia el año 250 a.C.

Un tallo de bambú de 10 pies de largo se rompe en forma tal que su punta toca el suelo a 3 pies de la base

del tallo, como se muestra en la figura. ¿A qué altura se rompió?

[*Sugerencia:* Use el teorema de Pitágoras.]



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

92. REDACCIÓN: Investigación histórica Lea las notas biográficas acerca de Pitágoras (página 241), Euclides (página 542) y Arquímedes (página 787). Elija a uno de estos matemáticos e investigue más sobre él en la biblioteca o en internet. Escriba un breve ensayo al respecto. Incluya información biográfica y una descripción de la matemática por la cual se hizo famoso.

93. REDACCIÓN: Ecuaciones prácticas En esta sección hemos aprendido a traducir palabras en lenguaje de álgebra. En este ejercicio tratamos de encontrar situaciones reales que podrían corresponder a una ecuación algebraica. Por ejemplo, la ecuación $A = (x + y)/2$ podría modelar la cantidad promedio de dinero en dos cuentas bancarias, donde x representa la cantidad en una cuenta y y la cantidad en la otra. Redacte una historia que pudiera corresponder a la ecuación dada, indicando lo que representan las variables.

a) $C = 20000 + 4.50x$

b) $A = w(w + 10)$

c) $C = 10.50x + 11.75y$

94. DISCUSIÓN: Una ecuación cuadrática de Babilonia Los antiguos babilonios sabían cómo resolver ecuaciones cuadráticas. A continuación veamos un problema de una tablilla cuneiforme encontrada en una escuela de Babilonia, la cual data del año 2000 a.C.

> Tengo un junco, conozco su longitud. Trocé un codo que cabe 60 veces a lo largo de mi campo. Lo devuelvo al junco que he dividido, y este cabe 30 veces a lo ancho de mi campo. El área de mi campo es de 375 nindas cuadradas. ¿Cuál era la longitud original del junco?

Resuelva este problema. Use este dato: 1 ninda = 12 codos ≈ 6 m.

1.8 DESIGUALDADES

■ Resolución de desigualdades lineales ■ Resolución de desigualdades no lineales ■ Desigualdades con valor absoluto ■ Modelado con desigualdades

Algunos problemas en álgebra conducen a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo de igual hay uno de los símbolos, $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \leq 19$$

x	$4x + 7 \leq 19$
1	$11 \leq 19$ ✓
2	$15 \leq 19$ ✓
3	$19 \leq 19$ ✓
4	$23 \leq 19$ ✗
5	$27 \leq 19$ ✗

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no lo hacen.

Resolver una desigualdad que contenga una variable significa encontrar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinidad de soluciones que forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta real. La siguiente ilustración muestra el modo en que una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

		Solución	**Gráfica**
Ecuación:	$4x + 7 = 19$	$x = 3$	0 3
Desigualdad:	$4x + 7 \leq 19$	$x \leq 3$	0 3

Para resolver desigualdades usamos las reglas siguientes para despejar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuando dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo ⇔ significa "es equivalente a"). En estas reglas los símbolos A, B y C representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación, expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

REGLAS PARA DESIGUALDADES

Regla	**Descripción**
1. $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \le B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \le B - C$	**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad CA \le CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad CA \ge CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \ge \dfrac{1}{B}$	**Tomar recíprocos** de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \le B$ y $C \le D$, entonces $A + C \le B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.
7. Si $A \le B$ y $B \le C$, entonces $A \le C$	La desigualdad es transitiva.

Ponga especial atención a las reglas 3 y 4. La regla 3 dice que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número *positivo*, pero la regla 4 dice que



si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número negativo, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, obtenemos

$$-6 > -10$$

Resolución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal despejamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

EJEMPLO 1 ■ Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.

SOLUCIÓN

$3x < 9x + 4$	Desigualdad dada
$3x - 9x < 9x + 4 - 9x$	Reste $9x$
$-6x < 4$	Simplifique
$(-\frac{1}{6})(-6x) > (-\frac{1}{6})(4)$	Multiplique por $-\frac{1}{6}$ e invierta la desigualdad
$x > -\frac{2}{3}$	Simplifique

Multiplicar por el número negativo $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

El conjunto de solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$. El intervalo está graficado en la figura 1.



FIGURA 1

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

EJEMPLO 2 ■ Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

SOLUCIÓN El conjunto de solución está formado por todos los valores de x que satisfacen las desigualdades $4 \leq 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Usando las reglas 1 y 3 vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$4 \leq 3x - 2 < 13 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$6 \leq 3x < 15 \qquad \text{Sume 2}$$

$$2 \leq x < 5 \qquad \text{Divida entre 3}$$

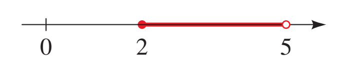


FIGURA 2

Por tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$, como se muestra en la figura 2.

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

Resolución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable usamos la factorización junto con el principio siguiente.

EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

- Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.
- Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad $x^2 - 5x \leq -6$ primero movemos todos los términos al lado izquierdo y factorizamos para obtener

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Esta forma de la desigualdad nos dice que el producto $(x - 2)(x - 3)$ debe ser negativo o cero, de modo que para resolver la desigualdad debemos determinar en dónde es negativo o positivo cada factor (porque el signo de un producto depende del signo de los factores). Los detalles se explican en el ejemplo 3, en el que usamos la guía siguiente.

GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

1. **Mueva todos los términos a un lado.** Si es necesario, vuelva a escribir la desigualdad, de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. **Haga una tabla o diagrama.** Use **valores de prueba** para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.)



La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen de un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la volvemos a escribir, como se indica en el paso 1.

EJEMPLO 3 ■ Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 \leq 5x - 6$.

SOLUCIÓN Seguiremos la guía dada líneas arriba.

Mueva todos los términos a un lado. Movemos todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 \leq 5x - 6 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \qquad \text{Reste } 5x\text{, sume 6}$$

Factorice. Factorizando el lado izquierdo de la desigualdad obtenemos

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0 \qquad \text{Factorice}$$

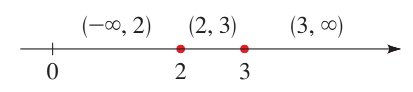


FIGURA 3

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $x - 2$ y $x - 3$. Estos factores son cero cuando x es 2 y 3, respectivamente, como se muestra en la figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos

$$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y 3, respectivamente. Por tanto, estos factores mantienen su signo en cada uno de estos tres intervalos.

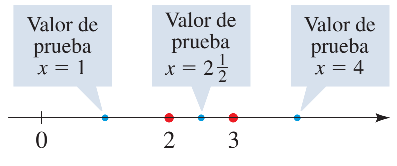


FIGURA 4

Haga una tabla o diagrama. Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos usamos valores de prueba. Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en dicho número. Para el intervalo $(-\infty, 2)$, escojamos el valor de prueba 1 (véase la figura 4). Sustituyendo 1 por x en los factores $x - 2$ y $x - 3$, obtenemos

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

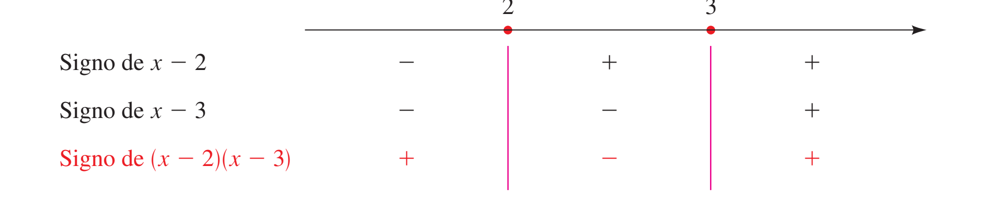
$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Por tanto, ambos factores son negativos en este intervalo. Observe que necesitamos verificar sólo un valor de prueba por cada intervalo porque los factores $x - 2$ y $x - 3$ no cambian de signo en ninguno de los tres intervalos que encontramos.

Usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (véase la figura 4), respectivamente, construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del dato de que la expresión del último renglón es el producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$ Signo de $x - 3$	− −	+ −	+ +
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	+	−	+

Si el lector así lo prefiere puede representar esta información en una recta real, como en el siguiente diagrama de signos. Las rectas verticales indican los puntos en los que la recta real está dividida en intervalos:



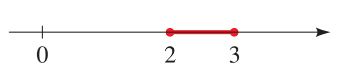


FIGURA 5

Resuelva. Leemos de la tabla o del diagrama que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Se puede verificar que los puntos extremos 2 y 3 satisfacen la desigualdad, por lo que la solución de la desigualdad es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

En la figura 5 se ilustra la solución.

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

EJEMPLO 4 ■ Resolver una desigualdad con factores repetidos

Resuelva la desigualdad $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$.

SOLUCIÓN Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por tanto, empezamos por encontrar los intervalos para esta desigualdad.

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son x, $(x - 1)^2$ y $x - 3$. Estos son cero cuando $x = 0, 1, 3$. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 3), (3, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de x	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x - 3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x(x - 1)^2(x - 3)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Resuelva. Del diagrama vemos que la desigualdad se satisface en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 3)$. Puesto que esta desigualdad implica $<$, los puntos extremos de los intervalos no satisfacen la desigualdad. Por tanto, el conjunto de solución es la unión de estos dos intervalos:

$$(0, 1) \cup (1, 3)$$

El conjunto de solución está graficado en la figura 6.

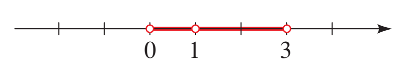


FIGURA 6

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

EJEMPLO 5 ■ Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1 + x}{1 - x} \geq 1$.

SOLUCIÓN **Mueva todos los términos a un lado.** Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1 + x}{1 - x} \geq 1 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$\frac{1 + x}{1 - x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1 - x}{1 - x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1 - x$$

$$\frac{1 + x - 1 + x}{1 - x} \geq 0 \qquad \text{Combine las fracciones}$$

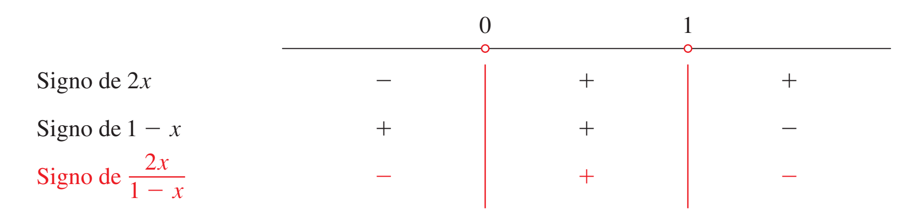
$$\frac{2x}{1 - x} \geq 0 \qquad \text{Simplifique}$$

Es tentador simplemente multiplicar ambos lados de la desigualdad por $1 - x$ (como se haría si fuera una *ecuación*.) Pero esto no funciona porque no sabemos si $1 - x$ es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Véase el ejercicio 127.)

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $2x$ y $1 - x$. Estos son cero cuando x es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.



Resuelva. Del diagrama vemos que la desigualdad se satisface en el intervalo $(0, 1)$. Al verificar los puntos extremos vemos que 0 satisface la desigualdad, pero 1 no (ya que el cociente no está definido en 1). Por tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$[0, 1)$$

En la figura 7 se muestra la gráfica del conjunto de solución.

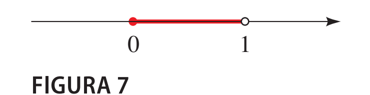


FIGURA 7

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

El ejemplo 5 muestra que siempre debemos comprobar los puntos extremos del conjunto de solución para ver si satisfacen la desigualdad original.

Desigualdades con valor absoluto

Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$	$-c$ 0 c
2. $\lvert x \rvert \le c$	$-c \le x \le c$	$-c$ 0 c
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$	$-c$ 0 c
4. $\lvert x \rvert \ge c$	$x \le -c$ o $c \le x$	$-c$ 0 c

Estas propiedades se cumplen cuando x se sustituye por cualquier expresión algebraica. (En las gráficas supusimos que $c > 0$.)

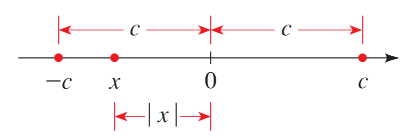


FIGURA 8

Estas propiedades se pueden demostrar mediante la definición de valor absoluto. Para demostrar la propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad $\lvert x \rvert < c$ dice que la distancia de x a 0 es menor que c, y de la figura 8 vemos que esto es verdadero si y sólo si x está entre $-c$ y c.

EJEMPLO 6 ■ Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$.

SOLUCIÓN 1 La desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Sume 5}$$

El conjunto de solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

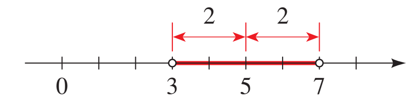


FIGURA 9

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números x cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la figura 9 vemos que este es el intervalo $(3, 7)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 81 ■

EJEMPLO 7 ■ Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$.

SOLUCIÓN Por la propiedad 4, la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \leq -4$$

$$3x \geq 2 \qquad 3x \leq -6 \qquad \text{Reste 2}$$

$$x \geq \tfrac{2}{3} \qquad x \leq -2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Entonces el conjunto de solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en la figura 10.

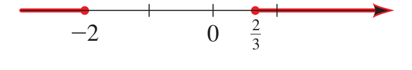


FIGURA 10

Ahora intente realizar el ejercicio 83 ■

■ Modelado con desigualdades

Modelar problemas prácticos conduce a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra.

EJEMPLO 8 ■ Boletos para el carnaval

Un carnaval tiene dos planes de venta de boletos.

Plan A: Cuota de 5 dólares la entrada y 0.25 dólares cada juego mecánico

Plan B: Cuota de 2 dólares la entrada y 0.50 dólares cada juego mecánico

¿Cuántas veces tendría que subirse a un juego mecánico para que el plan A fuera menos costoso que el plan B?

SOLUCIÓN **Identifique la variable.** Nos piden el número de veces que debemos subir a un juego mecánico para el que plan A resulte menos costoso que el plan B. Por tanto, hacemos que

$$x = \text{número de veces que nos subimos a un juego mecánico}$$

Convierta las palabras en lenguaje de álgebra. La información del problema puede organizarse como sigue.

En palabras	En álgebra
Número de veces	x
Costo con plan A	$5 + 0.25x$
Costo con plan B	$2 + 0.50x$

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\text{costo con plan A} < \text{costo con plan B}$$

$$5 + 0.25x < 2 + 0.50x$$

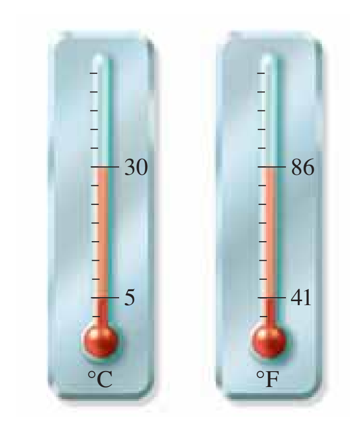
Resuelva. Ahora despejamos x.

$$3 + 0.25x < 0.50x \quad \text{Reste 2}$$
$$3 < 0.25x \quad \text{Reste } 0.25x$$
$$12 < x \quad \text{Divida entre 0.25}$$

Entonces, si usted piensa subir *más de* 12 veces a los juegos mecánicos, el plan A es menos costoso.



EJEMPLO 9 ■ Relación entre escalas Fahrenheit y Celsius



Las instrucciones en un frasco de medicamento indican que debe conservarse a una temperatura entre 5 y 30 °C. ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Fahrenheit?

SOLUCIÓN La relación entre grados Celsius (C) y Fahrenheit (F) está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Expresando el enunciado del frasco en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

Entonces las temperaturas correspondientes en Fahrenheit satisfacen las desigualdades

$$5 < \tfrac{5}{9}(F - 32) < 30 \quad \text{Sustituya } C = \tfrac{5}{9}(F - 32)$$
$$\tfrac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \tfrac{9}{5} \cdot 30 \quad \text{Multiplique por } \tfrac{9}{5}$$
$$9 < F - 32 < 54 \quad \text{Simplifique}$$
$$9 + 32 < F < 54 + 32 \quad \text{Sume 32}$$
$$41 < F < 86 \quad \text{Simplifique}$$

El medicamento debe conservarse a una temperatura entre 41 y 86 °F.

Ahora intente realizar el ejercicio 109 ■

1.8 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Llene el espacio en blanco con el signo de desigualdad apropiado.

a) Si $x < 5$, entonces $x - 3$ _____ 2.

b) Si $x \leq 5$, entonces $3x$ _____ 15.

c) Si $x \geq 2$, entonces $-3x$ _____ -6.

d) Si $x < -2$, entonces $-x$ _____ 2.

2. Para resolver la desigualdad no lineal $\dfrac{x+1}{x-2} \leq 0$, primero observamos que los números ____ y ____ hacen cero al numerador y al denominador. Estos números dividen la recta real en tres intervalos. Llene la tabla.

Intervalo			
Signo de $x + 1$ **Signo de $x - 2$**			
Signo de $(x + 1)/(x - 2)$			

¿Alguno de los puntos extremos no satisface la desigualdad? Si es así, ¿cuál o cuáles? _______. La solución de la desigualdad es _____________.

3. ***a)*** La solución de la desigualdad $|x| \leq 3$ es el intervalo _______.

b) La solución de la desigualdad $|x| \geq 3$ es una unión de dos intervalos _______ $\cup$ _______.

4. ***a)*** El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es menor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$ _______.

b) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es mayor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$ _______.

5. *¿Sí o no?* Si es *no*, dé un ejemplo.

a) Si $x(x + 1) > 0$, ¿se tiene, entonces, que x es positiva?

b) Si $x(x + 1) > 5$, ¿se tiene, entonces, que $x > 5$?

6. ¿Cuál es un primer paso lógico en la solución de la desigualdad?

a) $3x \leq 7$ ***b)*** $5x - 2 \geq 1$ ***c)*** $|3x + 2| \leq 8$

HABILIDADES

7–12 ■ ¿Soluciones? Sea $S = \{-5, -1, 0, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \sqrt{5}, 3, 5\}$. Determine qué elementos de S satisfacen la desigualdad.

7. $-2 + 3x \geq \frac{1}{3}$
8. $1 - 2x \geq 5x$
9. $1 < 2x - 4 \leq 7$
10. $-2 \leq 3 - x < 2$
11. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$
12. $x^2 + 2 < 4$

13–36 ■ Desigualdades lineales Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y trace la gráfica del conjunto solución.

13. $2x \leq 7$
14. $-4x \geq 10$
15. $2x - 5 > 3$
16. $3x + 11 < 5$
17. $7 - x \geq 5$
18. $5 - 3x \leq -16$
19. $2x + 1 < 0$
20. $0 < 5 - 2x$
21. $4x - 7 < 8 + 9x$
22. $5 - 3x \geq 8x - 7$
23. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$
24. $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$
25. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$
26. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$
27. $4 - 3x \leq -(1 + 8x)$
28. $2(7x - 3) \leq 12x + 16$
29. $2 \leq x + 5 < 4$
30. $5 \leq 3x - 4 \leq 14$
31. $-1 < 2x - 5 < 7$
32. $1 < 3x + 4 \leq 16$
33. $-2 < 8 - 2x \leq -1$
34. $-3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$
35. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x - 13}{12} \leq \dfrac{2}{3}$
36. $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{4 - 3x}{5} \leq \dfrac{1}{4}$

37–58 ■ Desigualdad no lineal Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y trace la gráfica del conjunto solución.

37. $(x + 2)(x - 3) < 0$
38. $(x - 5)(x + 4) \geq 0$
39. $x(2x + 7) \geq 0$
40. $x(2 - 3x) \leq 0$
41. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$
42. $x^2 + 5x + 6 > 0$
43. $2x^2 + x \geq 1$
44. $x^2 < x + 2$
45. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$
46. $5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$
47. $x^2 > 3(x + 6)$
48. $x^2 + 2x > 3$
49. $x^2 < 4$
50. $x^2 \geq 9$
51. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leq 0$
52. $(x - 5)(x - 2)(x + 1) > 0$
53. $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$
54. $(x + 3)^2(x + 1) > 0$
55. $(x + 3)^2(x - 2)(x + 5) \geq 0$
56. $4x^2(x^2 - 9) \leq 0$
57. $x^3 - 4x > 0$
58. $16x \leq x^3$

59–74 ■ Desigualdades que implican cocientes Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y trace la gráfica del conjunto solución.

59. $\dfrac{x - 3}{x + 1} \geq 0$
60. $\dfrac{2x + 6}{x - 2} < 0$
61. $\dfrac{x}{x + 1} > 3$
62. $\dfrac{x - 4}{2x + 1} < 5$
63. $\dfrac{2x + 1}{x - 5} \leq 3$
64. $\dfrac{3 + x}{3 - x} \geq 1$
65. $\dfrac{4}{x} < x$
66. $\dfrac{x}{x + 1} > 3x$
67. $1 + \dfrac{2}{x + 1} \leq \dfrac{2}{x}$
68. $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{4}{x} \geq 1$
69. $\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{6}{x} \geq 1$
70. $\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{5}{x + 1} + 4$
71. $\dfrac{x + 2}{x + 3} < \dfrac{x - 1}{x - 2}$
72. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} \leq 0$
73. $x^4 > x^2$
74. $x^5 > x^2$

75–90 ■ Desigualdades con valor absoluto Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando notación de intervalos y trace la gráfica del conjunto solución.

75. $|5x| < 20$
76. $|16x| \leq 8$
77. $|2x| > 7$
78. $\frac{1}{2}|x| \geq 1$
79. $|x - 5| \leq 3$
80. $|x + 1| \geq 1$
81. $|3x + 2| < 4$
82. $|5x - 2| < 8$
83. $|3x - 2| \geq 5$
84. $|8x + 3| > 12$
85. $\left|\dfrac{x - 2}{3}\right| < 2$
86. $\left|\dfrac{x + 1}{2}\right| \geq 4$
87. $|x + 6| < 0.001$
88. $3 - |2x + 4| \leq 1$
89. $8 - |2x - 1| \geq 6$
90. $7|x + 2| + 5 > 4$

91–94 ■ Desigualdades con valor absoluto Se proporciona una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contenga un valor absoluto.

91. Todos los números reales x menores de 3 unidades desde 0
92. Todos los números reales x mayores de 2 unidades desde 0
93. Todos los números reales x menores de 5 unidades desde 7
94. Todos los números reales x que están a lo más a 4 unidades desde 2

95–100 ■ Desigualdades con valor absoluto Se grafica un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.

95. −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
96. −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
97. −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
98. −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
99. −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
100. −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5

101–104 ■ Dominio Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como número real.

101. $\sqrt{x^2 - 9}$
102. $\sqrt{x^2 - 5x - 50}$

103. $\left(\dfrac{1}{x^2 - 3x - 10}\right)^{1/2}$ **104.** $\sqrt[4]{\dfrac{1 - x}{2 + x}}$

HABILIDADES Plus

105–108 ■ Desigualdades Resuelva la desigualdad para x. Suponga que a, b y c son constantes positivas.

105. $a(bx - c) \geq bc$ **106.** $a \leq bx + c < 2a$

107. $a\,|\,bx - c\,| + d \geq 4a$ **108.** $\left|\dfrac{bx + c}{a}\right| > 5a$

APLICACIONES

109. Escalas de temperatura Use la relación dada en el ejemplo 9 entre C y F para encontrar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al intervalo de temperatura $20 \leq C \leq 30$.

110. Escalas de temperatura ¿Cuál intervalo en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura $50 \leq F \leq 95$?

111. Costo de la renta de un auto Una compañía de renta de autos ofrece dos planes para la renta de un auto.

Plan A: 30 dólares por día y 10 centavos por milla
Plan B: 50 dólares por día con kilometraje ilimitado

¿Para qué intervalo de millas es más económico el plan B?

112. Planes de llamadas internacionales Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas internacionales.

Plan A: 25 dólares por mes y 5 centavos por minuto
Plan B: 5 dólares por mes y 12 centavos por minuto

¿Para qué intervalo de minutos de llamadas internacionales será financieramente más ventajoso el plan B?

113. Costo de manejar un auto Se estima que el costo anual de manejar un determinado auto nuevo está dado por la fórmula

$$C = 0.35m + 2\,200$$

donde m representa el número de millas recorridas por año y C es el costo en dólares. Jane compró un auto y decidió presupuestar entre 6 400 y 7 100 dólares para costos de manejo del año siguiente. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas en el que Jane puede manejar su nuevo auto?

114. Temperatura del aire Cuando el aire asciende se dilata y al dilatarse se enfría a razón alrededor de 1°C por cada 100 metros de ascenso hasta unos 12 km.

a) Si la temperatura del suelo es de 20°C escriba una fórmula para la temperatura a una altura h.

b) ¿Qué intervalo de temperaturas puede esperarse si un avión despega y alcanza una altitud máxima de 5 km?

115. Precio del boleto en una aerolínea Una aerolínea que realiza vuelos especiales encuentra que para los vuelos de los sábados, de Filadelfia a Londres, los 120 asientos se venderán si el precio es de 200 dólares. No obstante, por cada aumento de 3 dólares en el precio del boleto, el número de asientos disminuye en uno.

a) Encuentre una fórmula para el número de asientos vendidos si el precio del boleto es de P dólares.

b) Durante cierto periodo el número de asientos vendidos para este vuelo variaba entre 90 y 115. ¿Cuál era el intervalo correspondiente de precios de los boletos?

116. Precisión de una báscula Un comerciante de café le vende 3 lb de café Hawaiian Kona a un cliente a 6.50 dólares la libra. La báscula del comerciante es precisa con una variación no mayor de ±0.03 lb. ¿Cuánto podría habérsele cobrado de más o de menos al cliente por la posible imprecisión de la báscula?

117. Gravedad La fuerza gravitacional F ejercida por la Tierra sobre un cuerpo que tiene una masa de 100 kg está dada por la ecuación

$$F = \frac{4\,000\,000}{d^2}$$

donde d es la distancia (en km) del objeto desde el centro de la Tierra y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para cuáles distancias estará entre 0.0004 N y 0.01 N la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre este cuerpo?

118. Temperatura de una fogata En la cercanía de una fogata, la temperatura T en °C a una distancia de x metros del centro de la fogata está dada por

$$T = \frac{600\,000}{x^2 + 300}$$

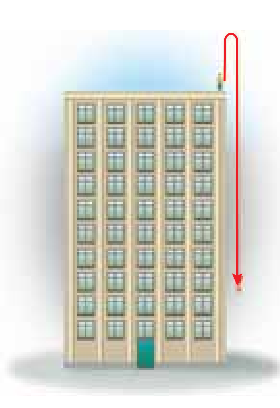
¿Para qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata era la temperatura menor a 50°C?



119. Una pelota en caída Usando calculo se puede demostrar que, si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 16 pies/s desde lo alto de un edificio de 128 pies de alto, entonces su altura h sobre el suelo t segundos después será

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota al menos a 32 pies sobre el suelo?

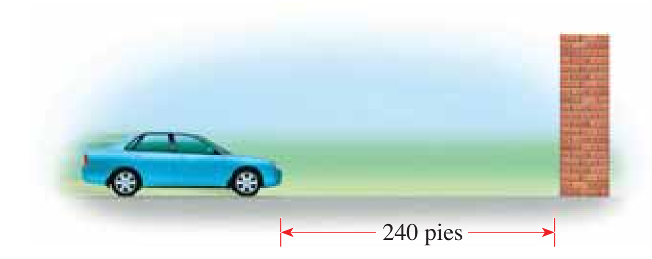


120. Rendimiento de gasolina El rendimiento de gasolina g (medido en millas/gal) para un auto en particular, manejado a v mi/h, está dado por la fórmula $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$, mientras v se halle entre 10 y 75 mi/h. ¿Para qué intervalo de velocidades el rendimiento del vehículo será de 30 mi/gal o mejor?

121. Distancia de frenado Para cierto modelo de auto la distancia d requerida para detener el vehículo, si está corriendo a v mi/h está dada por la fórmula

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

donde d se mide en pies. Kerry desea que su distancia de frenado no rebase los 240 pies. ¿En qué intervalo de velocidades puede manejar?



122. Utilidades de un fabricante Si un fabricante vende x unidades de cierto producto, el ingreso R y el costo C (en dólares) están dados por

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Utilice el hecho de que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo}$$

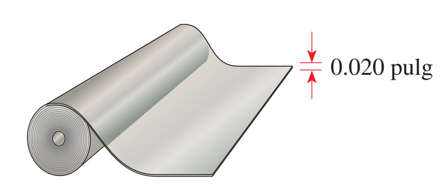
para determinar cuántas unidades debe vender el fabricante para disfrutar de una utilidad de al menos 2400 dólares.

123. Cercar un jardín Una jardinera tiene 120 pies de cerca resistente a los venados. Ella desea cercar un huerto en su jardín trasero, y que el área del huerto sea al menos de 800 pies^2. ¿Qué intervalo de valores es posible para la longitud de su huerto?

124. Grueso de un laminado Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con base de nylon) de 0.020 pulgadas de grosor con una tolerancia de 0.003 pulgadas.

a) Encuentre una desigualdad que contenga valores absolutos que describa el intervalo del posible grueso para el laminado.

b) Resuelva la desigualdad que haya encontrado en el inciso *a*).



125. Intervalo de estatura El promedio de estatura de los varones adultos es de 68.2 pulgadas y 95% de ellos tiene una estatura h que satisface la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \leq 2$$

Resuelva la desigualdad para encontrar el intervalo de estaturas.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

126. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: ¿Las potencias preservan el orden? ¿Si $a < b$, es $a^2 < b^2$? (Verifique valores positivos y negativos para a y b.) ¿Si $a < b$, es $a^3 < b^3$? Con base en sus observaciones exprese una regla general acerca de la relación entre a^n y b^n cuando $a < b$ y n es un entero positivo.

127. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: ¿Qué está mal aquí? Es tentador tratar de resolver una desigualdad como si fuera una ecuación. Por ejemplo, podríamos tratar de resolver $1 < 3/x$ multiplicando ambos lados por x, para obtener $x < 3$, de modo que la solución sería $(-\infty, 3)$. Pero eso está mal; por ejemplo, $x = -1$ está en el intervalo, pero no satisface la desigualdad original. Explique por qué este método no funciona (piense en el *signo* de x). Después resuelva correctamente la desigualdad.

128. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Uso de distancias para resolver desigualdades de valor absoluto Recuerde que $|a - b|$ es la distancia entre a y b en la recta numérica. Para cualquier número x, ¿qué representan $|x - 1|$ y $|x - 3|$? Use esta interpretación para resolver la desigualdad $|x - 1| < |x - 3|$ geométricamente. En general, si $a < b$, ¿cuál es la solución de la desigualdad $|x - a| < |x - b|$?

129–130 ■ DEMOSTRACIÓN: Desigualdades Utilice las propiedades de las desigualdades para demostrar las desigualdades siguientes.

129. Regla 6 para desigualdades: Si a, b, c y d son números reales cualesquiera tal que $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$. [*Sugerencia:* Use la regla 1 para demostrar que $a + c < b + c$ y $b + c < b + d$. Use la regla 7.]

130. Si a, b, c y d son números positivos tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$. [*Sugerencia:* Demuestre que $\frac{ad}{b} + a < c + a$ y $a + c < \frac{cb}{d} + c$.]

131. DEMOSTRACIÓN: Desigualdad media aritmética-geométrica Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos, entonces su media aritmética es $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, y su media geométrica es $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. La desigualdad media aritmética-geométrica establece que la media geométrica siempre es menor o igual que la media aritmética. En este problema demostramos lo anterior para el caso de dos números x y y.

a) Si x y y son positivos y $x \leq y$, entonces $x^2 \leq y^2$. [*Sugerencia:* Primero utilice la regla 3 de desigualdades para demostrar que $x^2 \leq xy$ y $xy \leq y^2$.]

b) Demuestre la desigualdad media aritmética-geométrica

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

1.9 EL PLANO COORDENADO; GRÁFICAS DE ECUACIONES; CIRCUNFERENCIAS

■ El plano coordenado ■ Las fórmulas para distancia y punto medio ■ Gráficas de ecuaciones con dos variables ■ Puntos de intersección ■ Circunferencias ■ Simetría

El *plano coordenado* es el vínculo entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos trazar graficas de ecuaciones algebraicas. Las gráficas, a su vez, nos permiten "ver" la relación entre las variables de la ecuación. En esta sección estudiamos el plano coordenado.

■ El plano coordenado

El plano cartesiano recibe ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650) aun cuando otro francés, Pierre Fermat (1601-1665), inventó los principios de la geometría de coordenadas al mismo tiempo. (Veánse sus biografías en las páginas 201 y 117.)

En la misma forma en que los puntos sobre una recta pueden ser identificados con números reales para formar la recta coordenada, los puntos en un plano se pueden identificar con pares ordenados de números para formar el **plano coordenado** o **plano cartesiano**. Para hacer esto trazamos dos rectas reales perpendiculares que se cruzan en 0 en cada recta. Por lo general, una recta es horizontal con dirección positiva a la derecha y se llama **eje *x***; la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba y se denomina **eje *y***. El punto de intersección del eje x y el eje y es el **origen *O***, y los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**, marcados I, II, III y IV en la figura 1. (Los puntos sobre los ejes coordenados no se asignan a ningún cuadrante.)

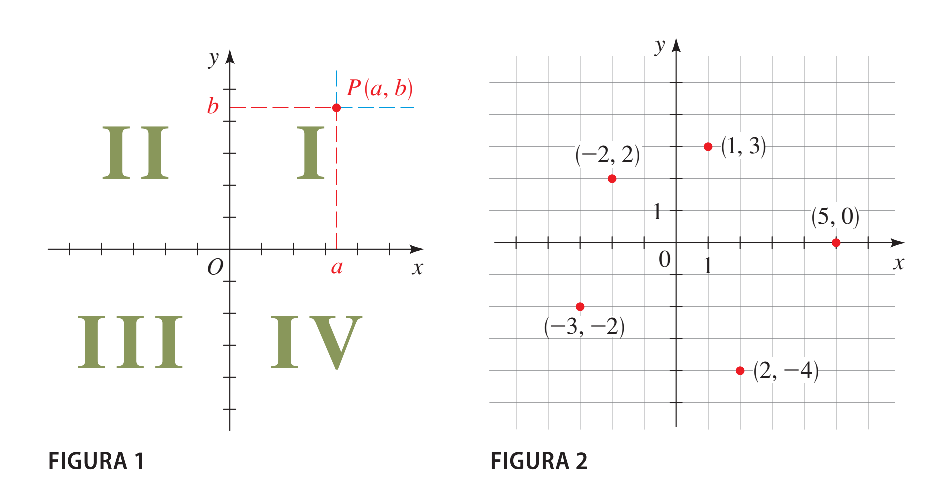


FIGURA 1

FIGURA 2

Aun cuando la notación para un punto (a, b) es la misma que la notación para un intervalo abierto (a, b), el contexto debe dejar claro qué significado se persigue.

Cualquier punto P del plano coordenado puede ser localizado por un **par ordenado** de números (a, b), como se muestra en la figura 1. El primer número a se llama **coordenada *x*** de P; el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Podemos considerar las coordenadas de P como su "dirección", porque especifican su ubicación en el plano. En la figura 2 están marcados varios puntos.

EJEMPLO 1 ■ Trazo de la gráfica de regiones en el plano coordenado

Describa y trace las regiones dadas por cada conjunto.

a) $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$ ***b)*** $\{(x, y) \mid y = 1\}$ ***c)*** $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUCIÓN

a) Los puntos cuyas coordenadas x son 0 o positivos se encuentran sobre el eje y o a la derecha del mismo, como se muestra en la figura 3*a*).

b) El conjunto de todos los puntos con coordenada $y = 1$ es una recta horizontal que está una unidad arriba del eje x, como se muestra en la figura 3*b*).

Coordenadas como direcciones

Las coordenadas de un punto en el plano xy determinan de manera única su ubicación. Podemos considerar las coordenadas como la "dirección" del punto. En Salt Lake City, Utah, las direcciones de casi todos los edificios están de hecho expresadas como coordenadas. La ciudad está dividida en cuadrantes con la Calle Main como eje vertical (norte-sur) y la Calle S. Temple como eje horizontal (oriente-poniente). Una dirección como

1760 W   2100 S

indica una ubicación a 17.6 manzanas al poniente de la Calle Main y 21 manzanas al sur de la Calle S. Temple. (Esta es la dirección de la oficina principal de correos en Salt Lake City.) Con este sistema lógico es posible que alguien no familiarizado con la ciudad pueda localizar de inmediato cualquier dirección, tan fácil como se localiza un punto en el plano coordenado.



c) Recuerde de la sección 1.8 que

$$|y| < 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad -1 < y < 1$$

Entonces la región dada está formada por los puntos del plano cuyos ejes coordenados y están entre -1 y 1. Por tanto, la región dada consta de todos los puntos que están entre (pero no sobre) las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$. Estas rectas se muestran como rectas interrumpidas en la figura 3*c*) para indicar que los puntos sobre estas rectas no están en el conjunto.

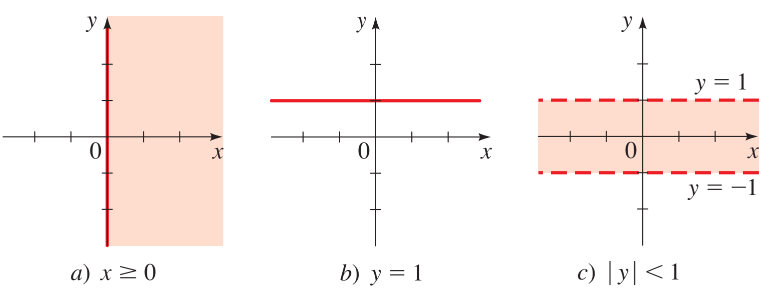


FIGURA 3

Ahora intente realizar los ejercicios 15 y 17 ■

Las fórmulas para distancia y punto medio

Ahora encontramos una fórmula para la distancia $d(A, B)$ entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del plano. Recuerde de la sección 1.1 que la distancia entre los puntos a y b en una recta numérica es $d(a, b) = |b - a|$. Entonces, de la figura 4, vemos que la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$, y la distancia entre $B(x_2, y_2)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta vertical debe ser $|y_2 - y_1|$.

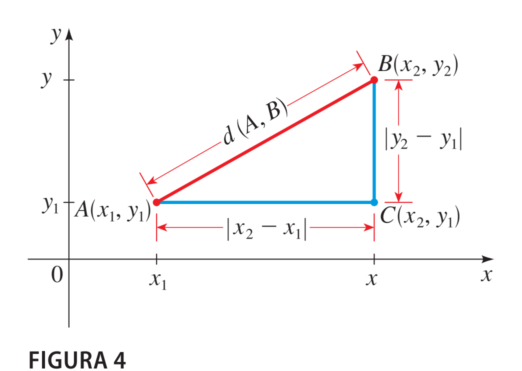


FIGURA 4

Como el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras da

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

FÓRMULA DE DISTANCIA

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

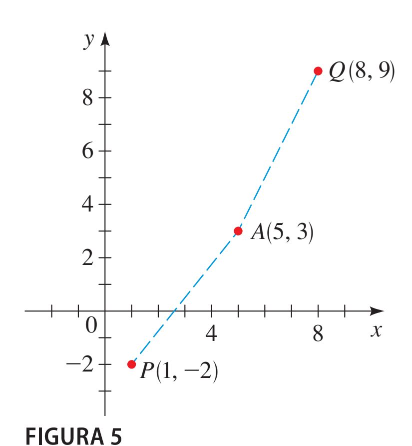


FIGURA 5

EJEMPLO 2 ■ Aplicar la fórmula para distancias

¿Cuál de los puntos $P(1, -2)$ o $Q(8, 9)$ está más cercano al punto $A(5, 3)$?

SOLUCIÓN Por la fórmula de distancia tenemos

$$d(P, A) = \sqrt{(5-1)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$
$$d(Q, A) = \sqrt{(5-8)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

Esto demuestra que $d(P, A) < d(Q, A)$, de modo que P está más cercano a (véase la figura 5).

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

Ahora encontremos las coordenadas (x, y) del punto medio M del segmento de recta que une al punto $A(x_1, y_1)$ al punto $B(x_2, y_2)$. En la figura 6 observe que los triángulos APM y MQB son congruentes porque $d(A, M) = d(M, B)$ y los ángulos correspondientes son iguales. Se deduce que $d(A, P) = d(M, Q)$, por lo que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Despejando x, de esta ecuación obtendremos $2x = x_1 + x_2$, por lo que $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Del mismo modo, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

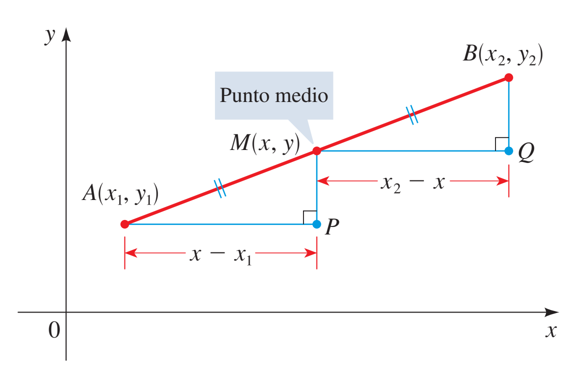


FIGURA 6

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

El punto medio del segmento de recta de $A(x_1, y_1)$ al punto $B(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 3 ■ Aplicar la fórmula del punto medio

Demuestre que el cuadrilátero con vértices $P(1, 2)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 9)$ y $S(2, 7)$ es un paralelogramo al probar que sus diagonales se bisecan entre sí.

SOLUCIÓN Si las dos diagonales tienen el mismo punto medio, entonces deben bisecarse entre sí. El punto medio de la diagonal PR es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

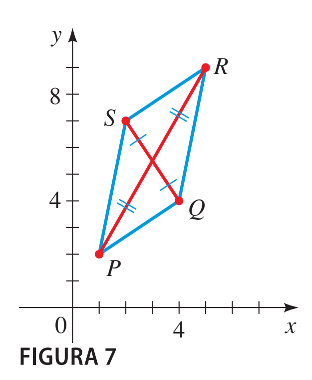


FIGURA 7

y el punto medio de la diagonal QS es

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

de modo que cada diagonal biseca a la otra, como se muestra en la figura 7. (Un teorema de geometría elemental establece que el cuadrilátero es, por tanto, un paralelogramo.)

Ahora intente realizar el ejercicio 49 ■

■ Gráficas de ecuaciones con dos variables

Principio fundamental de la geometría analítica
Un punto (x, y) está sobre la gráfica de una ecuación si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Una **ecuación con dos variables**, por ejemplo $y = x^2 + 1$, expresa una relación entre dos cantidades. Un punto (x, y) **satisface** la ecuación si hace verdadera a la ecuación cuando los valores para x y y son sustituidos en la ecuación. Por ejemplo, el punto $(3, 10)$ satisface la ecuación $y = x^2 + 1$ porque $10 = 3^2 + 1$, pero el punto $(1, 3)$ no la satisface porque $3 \neq 1^2 + 1$.

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN

La **gráfica** de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano de coordenadas que satisface la ecuación.

La gráfica de una ecuación es una curva, de manera que para trazar la gráfica de una ecuación trazamos tantos puntos como podamos y luego los unimos con una curva sin cambios bruscos de dirección.

EJEMPLO 4 ■ Dibujar una gráfica trazando puntos

Trace la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$.

SOLUCIÓN Primero despejamos y de la ecuación dada para obtener

$$y = 2x - 3$$

Esto nos ayuda a calcular las coordenadas y en la tabla siguiente.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-1	$(1, -1)$
2	1	$(2, 1)$
3	3	$(3, 3)$
4	5	$(4, 5)$

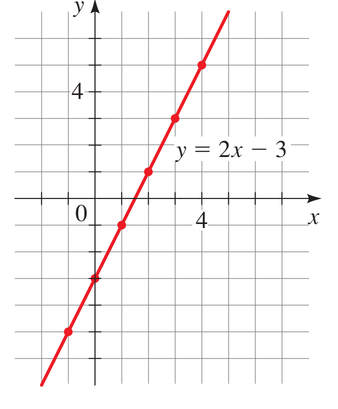


FIGURA 8

Desde luego que hay un infinito de puntos y es imposible colocarlos todos, pero mientras más puntos coloquemos mejor podremos imaginar el aspecto de la gráfica que representa la ecuación. Trazamos los puntos ubicados en la figura 8; parecen encontrarse sobre una recta por lo cual completamos la gráfica al unir los puntos con una recta. (En la sección 1.10 verificamos que la gráfica de esta ecuación sea en verdad una recta.)

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

En las secciones 3.1 y 11.1, se presenta un detallado análisis de las parábolas y sus propiedades geométricas.

EJEMPLO 5 ■ Dibujar una gráfica al trazar puntos

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$.

SOLUCIÓN En la tabla siguiente encontramos algunos de los puntos que satisfacen la ecuación. En la figura 9 colocamos estos puntos y luego los conectamos mediante una curva sin cambios bruscos de dirección. Una curva con esta forma recibe el nombre de *parábola*.

x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	2	$(2, 2)$
3	7	$(3, 7)$

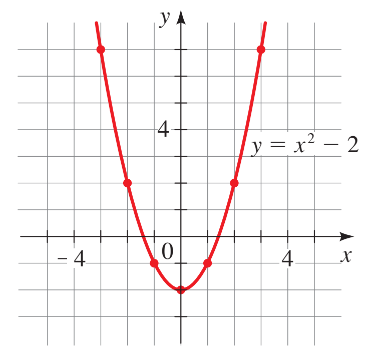


FIGURA 9

Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

EJEMPLO 6 ■ Gráfica de una ecuación con valor absoluto

Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.

SOLUCIÓN Hacemos una tabla de valores:

x	$y = \|x\|$	(x, y)
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$
3	3	$(3, 3)$

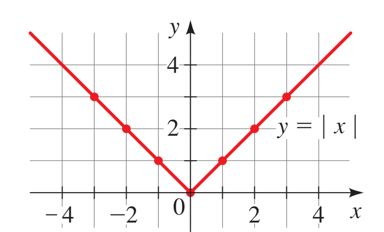


FIGURA 10

En la figura 10 trazamos estos puntos y los usamos para trazar la gráfica de la ecuación.

Ahora intente realizar el ejercicio 59 ■

Véase en el apéndice C,* *Gráficas con una calculadora graficadora*, las directrices generales del uso de una calculadora graficadora. Véase el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para instrucciones específicas para trazar la gráfica. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

Podemos usar una calculadora graficadora para trazar las gráficas de las ecuaciones. Una calculadora graficadora dibuja la gráfica de una ecuación trazando puntos, igual que si lo hiciéramos a mano.

EJEMPLO 7 ■ Gráfica de una ecuación con una calculadora graficadora

Utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la siguiente ecuación en el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-1, 2]$.

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

SOLUCIÓN En la figura 11 se muestra la gráfica.

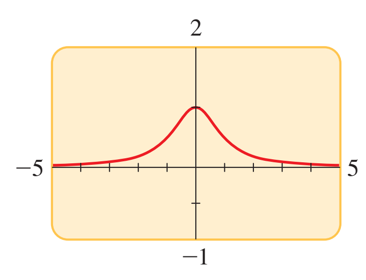


FIGURA 11 Gráfica de $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

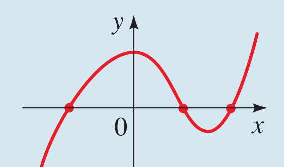
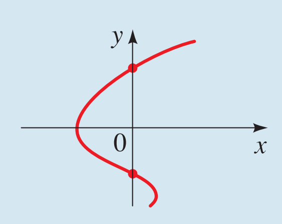
Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■

■ Puntos de intersección

Las coordenadas x de los puntos donde una gráfica interseca al eje x reciben el nombre de puntos de **intersección x** de la gráfica y se obtienen al hacer que $y = 0$ en la ecuación de la gráfica. Las coordenadas y de los puntos donde una gráfica interseca al eje y

se denominan puntos de **intersección *y*** de la gráfica y se obtienen al hacer que $x = 0$ en la ecuación de la gráfica.

DEFINICION DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN

Puntos de intersección	Cómo encontrarlos	En dónde están sobre la gráfica
Puntos de intersección *x*: Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje x	Haga que $y = 0$ y despeje x	
Puntos de intersección *y*: Las coordenadas y de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje y	Haga que $x = 0$ y despeje y	

EJEMPLO 8 ■ Determinar puntos de intersección

Encuentre los puntos de intersección x y y de la ecuación $y = x^2 - 2$.

SOLUCIÓN Para encontrar los puntos de intersección x hacemos que $y = 0$ y despejamos x. Así

$$0 = x^2 - 2 \qquad \text{Haga que } y = 0$$

$$x^2 = 2 \qquad \text{Sume 2 a cada lado}$$

$$= \pm\sqrt{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

Los puntos de intersección x son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para determinar los puntos de intersección y hacemos que $x = 0$ y despejamos y. Así

$$y = 0^2 - 2 \qquad \text{Haga que } x = 0$$

$$y = -2$$

El punto de intersección y es -2.

La gráfica de esta ecuación se trazó en el ejemplo 5. Se repite en la figura 12 con los puntos de intersección x y y marcados.

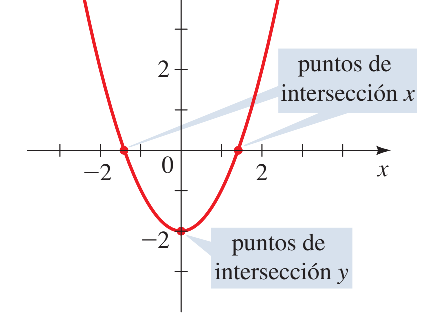


FIGURA 12

Ahora intente realizar el ejercicio 71 ■

■ Circunferencias

Hasta este punto hemos estudiado cómo encontrar la gráfica de una ecuación en x y y. El problema inverso es determinar una ecuación de una gráfica, es decir, una ecuación que represente una curva determinada en el plano xy. Esa ecuación queda satisfecha por las coordenadas de los puntos sobre la curva y por ningún otro punto. Esto es la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica formulado por Descartes y Fermat. La idea es que, si una curva geométrica se puede representar por una ecuación algebraica, entonces las reglas de álgebra se pueden usar para analizar la curva.

Como ejemplo de este tipo de problema encontremos la ecuación de una circunferencia con radio r y centro (h, k). Por definición, la circunferencia es el conjunto de

FIGURA 13

todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia desde el centro $C(h, k)$ es r (véase la figura 13). Por tanto P está sobre la circunferencia si y sólo si $d(P, C) = r$. De la fórmula de distancia tenemos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

Esta es la ecuación deseada.

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Una ecuación de la circunferencia con centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta se llama **forma ordinaria** para la ecuación de la circunferencia. Si el centro de la circunferencia es el origen $(0, 0)$, entonces la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLO 9 ■ Gráfica de una circunferencia

Trace la gráfica de cada ecuación.

a) $x^2 + y^2 = 25$ ***b***) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

SOLUCIÓN

a) Al volver a escribir la ecuación como $x^2 + y^2 = 5^2$ vemos que esta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Su gráfica se muestra en la figura 14.

b) Al volver a escribir la ecuación como $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$, vemos que esta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en $(2, -1)$. Su gráfica se muestra en la figura 15.

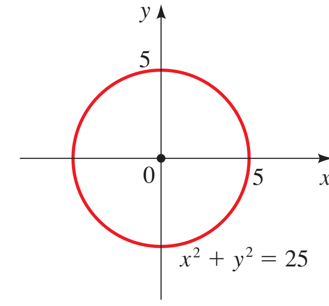


FIGURA 14

FIGURA 15

Ahora intente realizar los ejercicios 83 y 85

EJEMPLO 10 ■ Encontrar una ecuación de una circunferencia

a) Determine la ecuación de la circunferencia con radio 3 y centro $(2, -5)$.

b) Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene los puntos $P(1, 8)$ y $Q(5, -6)$ como los puntos extremos de un diámetro.

SOLUCIÓN

a) Usando la ecuación de la circunferencia con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$, obtenemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

En la figura 16 se muestra la gráfica.

FIGURA 16

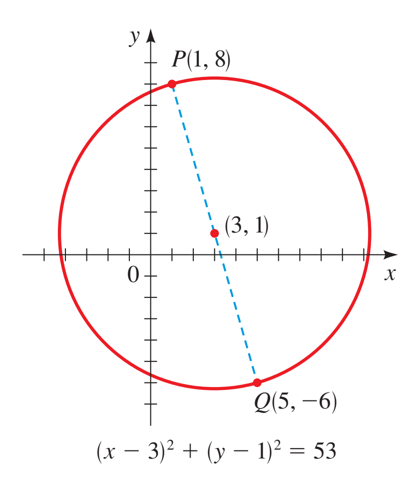


FIGURA 17

b) Primero observamos que el centro es el punto medio del diámetro PQ de modo que, por la fórmula del punto medio, el centro es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{8-6}{2}\right) = (3, 1)$$

El radio r es la distancia de P al centro y por la fórmula de distancia

$$r^2 = (3-1)^2 + (1-8)^2 = 2^2 + (-7)^2 = 53$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 53$$

La gráfica se muestra en la figura 17.

Ahora intente realizar los ejercicios 89 y 93 ■

Desarrollemos la ecuación de la circunferencia del ejemplo precedente.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 53 \qquad \text{Forma ordinaria}$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 53 \qquad \text{Desarrolle los cuadrados}$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y = 43 \qquad \text{Reste 10 para obtener la forma desarrollada}$$

En muchos contextos en álgebra se usa completar el cuadrado. En la sección 1.5 usamos completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas.

Suponga que nos dan la ecuación de una circunferencia en forma desarrollada. Entonces para determinar su centro y radio debemos regresar la ecuación a su forma ordinaria. Esto significa que debemos invertir los pasos del cálculo precedente, y para hacerlo necesitamos saber qué sumar a una expresión como $x^2 - 6x$ para volverla un cuadrado perfecto, es decir, necesitamos completar el cuadrado como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 11 ■ Identificar una ecuación de una circunferencia

Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ representa una circunferencia y encuentre su centro y su radio.

SOLUCIÓN Primero agrupamos los términos en x y en y. A continuación completamos el cuadrado para $x^2 + 2x$ al sumar $(\frac{1}{2}\cdot 2)^2 = 1$, y completamos el cuadrado para $y^2 - 6y$ al sumar $\left[\frac{1}{2}\cdot(-6)\right]^2 = 9$.

Debemos sumar los mismos números *a cada lado* para mantener la igualdad.

$$(x^2 + 2x \quad) + (y^2 - 6y \quad) = -7 \qquad \text{Agrupe términos}$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9 \qquad \text{Complete el cuadrado al sumar 1 y 9 a cada lado}$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3 \qquad \text{Factorice y simplifique}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación ordinaria de una circunferencia vemos que $h = -1$, $k = 3$ y $r = \sqrt{3}$, de modo que la ecuación dada representa una circunferencia con centro $(-1, 3)$ y radio $\sqrt{3}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 99 ■

■ Simetría

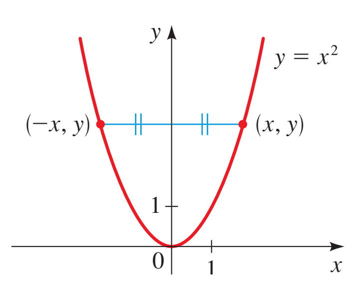


FIGURA 18

La figura 18 muestra la gráfica de $y = x^2$. Observe que la parte de la gráfica a la izquierda del eje y es la imagen espejo de la parte a la derecha del eje y. La razón es que si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces también está $(-x, y)$, y estos puntos son reflexiones uno del otro respecto del eje y. En este caso decimos que la gráfica es **simétrica respecto al eje *y***. Del mismo modo decimos que una gráfica es **simétrica respecto al eje *x*** si siempre que el punto (x, y) esté en la gráfica, entonces también lo estará $(x, -y)$. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si siempre que (x, y) esté en la gráfica, también lo estará $(-x, -y)$. (A menudo decimos simétrico "alrededor de" en lugar de "respecto a".)

TIPOS DE SIMETRÍA

Simetría	Prueba	Gráfica	Propiedad de la gráfica
Respecto al eje *x*	Remplace y por $-y$. La ecuación resultante es equivalente a la original.		La gráfica no cambia cuando se refleja respecto al eje x. Vea las figuras 14 y 19.
Respecto al eje *y*	Reemplace x por $-x$. La ecuación resultante es equivalente a la original.		La gráfica no cambia cuando se refleja respecto al eje y. Vea las figuras 9, 10, 11, 12, 14 y 18.
Respecto al origen	Remplace x por $-x$ y y por $-y$. La ecuación resultante es equivalente a la original.		La gráfica no cambia cuando se gira 180° respecto al origen. Vea las figuras 14 y 20.

Los demás ejemplos de esta sección muestran cómo la simetría nos ayuda a trazar las gráficas de ecuaciones.

EJEMPLO 12 ■ Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación $x = y^2$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Si y es sustituida por $-y$ en la ecuación $x = y^2$, obtenemos

$$x = (-y^2) \qquad \text{Sustituya } y \text{ por } -y$$

$$x = y^2 \qquad \text{Simplifique}$$

por tanto, la ecuación no cambia. En consecuencia, la gráfica es simétrica respecto al eje x. Pero cambiar x por $-x$ da la ecuación $-x = y^2$, que no es la misma que la ecuación original, de modo que la gráfica no es simétrica alrededor del eje y.

Usamos la simetría respecto al eje x para trazar la gráfica al localizar primero los puntos justo para $y > 0$ y luego reflejar la gráfica en el eje x, como se muestra en la figura 19.

y	$x = y^2$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(4, 2)
3	9	(9, 3)

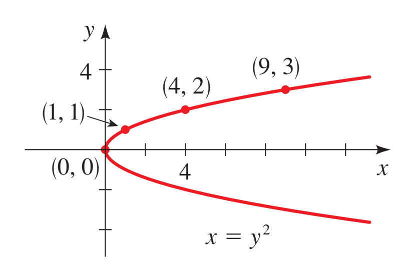


FIGURA 19

Ahora intente realizar los ejercicios 105 y 111 ■

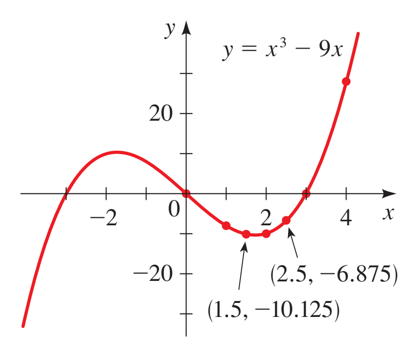


FIGURA 20

EJEMPLO 13 ■ Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación $y = x^3 - 9x$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Si sustituimos x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación obtenemos

$$-y = (-x)^3 - 9(-x) \quad \text{Sustituya } x \text{ por } -x \text{ y } y \text{ por } -y$$

$$-y = -x^3 + 9x \quad \text{Simplifique}$$

$$y = x^3 - 9x \quad \text{Multiplique por } -1$$

y así la ecuación no cambia. Esto significa que la gráfica es simétrica respecto al origen como se muestra en la figura 20.

Ahora intente realizar el ejercicio 107 ■

1.9 EJERCICIOS

CONCEPTOS

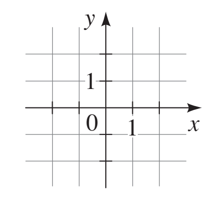
1. El punto que está 3 unidades a la derecha del eje y y 5 unidades abajo del eje x tiene coordenadas (____, ____).

2. La distancia entre los puntos (a, b) y (c, d) es ________________. Por tanto, la distancia entre $(1, 2)$ y $(7, 10)$ es ________.

3. El punto medio entre (a, b) y (c, d) es ________. Así que el punto medio entre $(1, 2)$ y $(7, 10)$ es ________.

4. Si el punto $(2, 3)$ está sobre la gráfica de una ecuación con x y y, entonces la ecuación se satisface cuando se sustituye x por ________ y y por ________. El punto $(2, 3)$ ¿está sobre la gráfica de la ecuación $2y = x + 1$? Llene la tabla y dibuje la gráfica.

x	y	(x, y)
−2		
−1		
0		
1		
2		



5. ***a***) Para determinar el punto o los puntos de intersección x de la gráfica de una ecuación igualamos ________ a cero y despejamos ________. Entonces, el punto de intersección x de $2y = x + 1$ es ________.

b) Para encontrar el punto o los puntos de intersección y de la gráfica de una ecuación igualamos ________ a 0 y despejamos ________. Por lo que el punto de intersección $2y = x + 1$ es ________.

6. La gráfica de la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ es una circunferencia con centro (____, ____) y radio ________.

7. ***a***) Si una gráfica es simétrica respecto al eje x y (a, b) está en la gráfica, entonces (____, ____) también está en la gráfica.

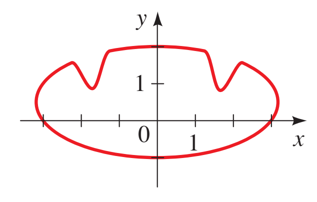
b) Si una gráfica es simétrica respecto al eje y y (a, b) está en la gráfica, entonces (____, ____) también está en la gráfica.

c) Si una gráfica es simétrica respecto al origen y (a, b) está en la gráfica, entonces (____, ____) también está en la gráfica.

8. A continuación se muestra la gráfica de una ecuación.

a) El punto o los puntos de intersección x son ________, y el punto o los puntos de intersección y son ________.

b) La gráfica es simétrica alrededor de ________ (eje x/eje y/origen).



9–10 ■ *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.

9. Si la gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje x y al eje y, ¿será necesariamente simétrica respecto del origen?

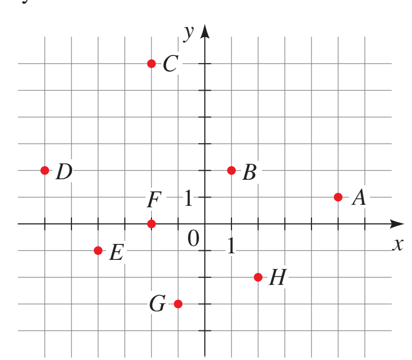
10. Si la gráfica de una ecuación es simétrica respecto al origen, ¿será necesariamente simétrica respecto al eje x o al eje y?

HABILIDADES

11–12 ■ Puntos en un plano coordenado En referencia a la figura que se muestra a continuación.

11. Determine las coordenadas de los puntos que se muestran.

12. Haga una lista de los puntos que se encuentran en los cuadrantes I y III.



13–14 ■ Puntos en un plano coordenado Trace los puntos dados en un plano de coordenadas.

13. $(0, 5), (-1, 0), (-1, -2), (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$,

14. $(-5, 0), (2, 0), (2.6, -1.3), (-2.5, 3.5)$,

15–20 ■ Represente las regiones Dibuje la región dada por el conjunto.

15. ***a)*** $\{(x, y) \mid x \geq 2\}$ ***b)*** $\{(x, y) \mid y = 2\}$

16. ***a)*** $\{(x, y) \mid y < 3\}$ ***b)*** $\{(x, y) \mid x = -4\}$

17. ***a)*** $\{(x, y) \mid -3 < x < 3\}$ ***b)*** $\{(x, y) \mid |x| \leq 2\}$

18. ***a)*** $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2\}$ ***b)*** $\{(x, y) \mid |y| > 2\}$

19. ***a)*** $\{(x, y) \mid -2 < x < 2 \text{ y } y \geq 1\}$

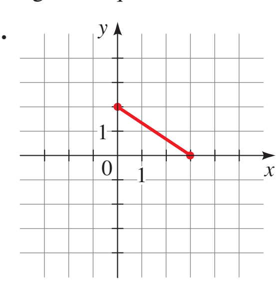
b) $\{(x, y) \mid xy < 0\}$

20. ***a)*** $\{(x, y) \mid |x| \leq 1 \text{ y } |y| \leq 3\}$

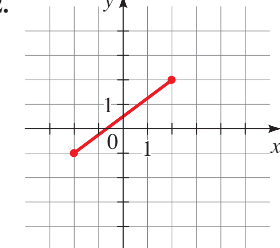
b) $\{(x, y) \mid xy > 0\}$

21–24 ■ Distancia y punto medio Se grafica un par de puntos. ***a)*** Encuentre la distancia entre ellos. ***b)*** Encuentre el punto medio del segmento que los une.

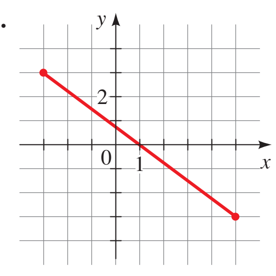
21.



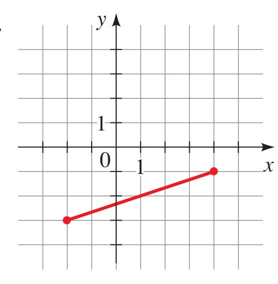
22.



23.



24.



25–30 ■ Distancia y punto medio Se da un par de puntos. ***a)*** Trace los puntos en un plano coordenado. ***b)*** Encuentre la distancia entre ellos. ***c)*** Encuentre el punto medio del segmento que los une.

25. $(0, 8), (6, 16)$

26. $(-2, 5), (10, 0)$

27. $(3, -2), (-4, 5)$

28. $(-1, 1), (-6, -3)$

29. $(6, -2), (-6, 2)$

30. $(0, -6), (5, 0)$

31–34 ■ Área En estos ejercicios encuentre las áreas de las figuras planas.

31. Trace el rectángulo con vértices $A(1, 3)$, $B(5, 3)$, $C(1, -3)$ y $D(5, -3)$ en un plano de coordenadas. Encuentre el área del rectángulo.

32. Trace el paralelogramo con vértices $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(3, 6)$ y $D(7, 6)$ en un plano de coordenadas. Encuentre el área del paralelogramo.

33. Trace los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 3)$ en un plano de coordenadas. Dibuje los segmentos AB, BC, CD y DA. ¿Qué clase de cuadrilátero es $ABCD$ y cuál es su área?

34. Trace los puntos $P(5, 1)$, $Q(0, 6)$ y $R(-5, 1)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde se debe colocar el punto S de tal forma que el cuadrilátero $PQRS$ sea un cuadrado? Determine el área de este cuadrado.

35–39 ■ Fórmula de distancia En estos ejercicios usamos la fórmula de distancia.

35. ¿Cuál de los puntos $A(6, 7)$ o $B(-5, 8)$ está más cercano al origen?

36. ¿Cuál de los puntos $C(-6, 3)$ o $D(3, 0)$ está más cercano al punto $E(-2, 1)$?

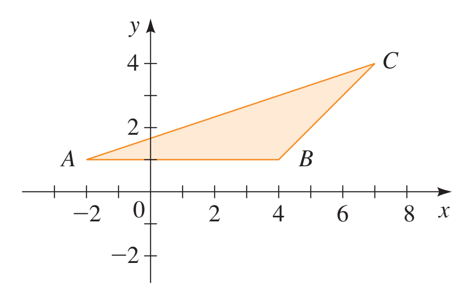
37. ¿Cuál de los puntos $P(3, 1)$ o $Q(-1, 3)$ está más cercano al punto $R(-1, -1)$?

38. ***a)*** Demuestre que los puntos $(7, 3)$ y $(3, 7)$ están a la misma distancia del origen.

b) Demuestre que los puntos (a, b) y (b, a) están a la misma distancia del origen.

39. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ y $C(-4, 3)$ es isósceles.

40. Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo que se ve en la figura.



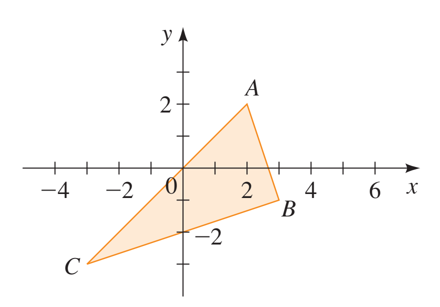
41–42 ■ Teorema de Pitágoras En estos ejercicios use el inverso del teorema de Pitágoras (apéndice A)* para demostrar que el triángulo dado es un triángulo rectángulo.

41. Consulte el triángulo ABC de la figura siguiente.

a) Demuestre que el triángulo ABC es rectángulo usando para ello el inverso del teorema de Pitágoras.

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

b) Encuentre el área del triángulo ABC.



42. Demuestre que el triángulo con vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ y $C(2, -2)$ es rectángulo usando el inverso del teorema de Pitágoras. Encuentre el área del triángulo.

43–45 ■ Fórmula de distancia En estos ejercicios use la fórmula de distancia.

43. Demuestre que los puntos $A(-2, 9)$, $B(4, 6)$, $C(1, 0)$ y $D(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

44. Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ y $C(5, 15)$ son colineales, demostrando para ello que $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

45. Encuentre el punto sobre el eje y que es equidistante de los puntos $(5, -5)$ y $(1, 1)$.

46–50 ■ Fórmulas de distancia y de punto medio En estos ejercicios use las fórmulas de distancia y de punto medio.

46. Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ y $C(8, 2)$. (Una *mediana* es un segmento de recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.)

47. Coloque los puntos $P(-1, -4)$, $Q(1, 1)$ y $R(4, 2)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar situado el punto S de modo que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo?

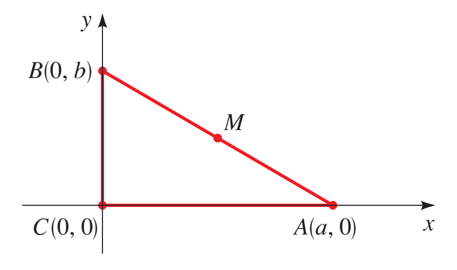
48. Si $M(6, 8)$ es el punto medio del segmento de recta AB y si A tiene coordenadas $(2, 3)$, encuentre las coordenadas de B.

49. ***a***) Trace el paralelogramo con vértices $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(7, 7)$ y $D(1, 4)$.

b) Encuentre los puntos medios de las diagonales de este paralelogramo.

c) Del inciso *b*) demuestre que las diagonales se bisecan entre sí.

50. El punto M en la figura siguiente es el punto medio del segmento de recta AB. Demuestre que M es equidistante de los vértices del triángulo ABC.



51–54 ■ ¿Puntos en una gráfica? Determine si los puntos dados están sobre la gráfica de la ecuación.

51. $x - 2y - 1 = 0$; $(0, 0), (1, 0), (-1, -1)$

52. $y(x^2 + 1) = 1$; $(1, 1), (1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$

53. $x^2 + xy + y^2 = 4$; $(0, -2), (1, -2), (2, -2)$

54. $x^2 + y^2 = 1$; $(0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

55–60 ■ Trazar gráficas de ecuaciones Haga una tabla de valores y trace la gráfica de la ecuación.

55. $4x + 5y = 40$ **56.** $3x - 5y = 30$

57. $y = x^2 + 4$ **58.** $y = 3 - x^2$

59. $y = |x| - 1$ **60.** $y = |x + 1|$

61–64 ■ Trazar gráficas de ecuaciones Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la ecuación en el rectángulo de vista dado.

61. $y = 0.01x^3 - x^2 + 5$; $[-100, 150]$ por $[-2000, 2000]$

62. $y = \sqrt{12x - 17}$; $[0, 10]$ por $[0, 20]$

63. $y = \dfrac{x}{x^2 + 25}$; $[-50, 50]$ por $[-0.2, 0.2]$

64. $y = x^4 - 4x^3$; $[-4, 6]$ por $[-50, 100]$

65–70 ■ Trazar gráficas de ecuaciones Haga una tabla de valores, y trace la gráfica de la ecuación. Determine los puntos de intersección x y y, y pruebe las simetrías.

65. ***a***) $2x - y = 6$ ***b***) $y = -(x + 1)^2$

66. ***a***) $x - 4y = 8$ ***b***) $y = -x^2 + 3$

67. ***a***) $y = \sqrt{x + 1}$ ***b***) $y = -|x|$

68. ***a***) $y = 3 - \sqrt{x}$ ***b***) $x = |y|$

69. ***a***) $y = \sqrt{4 - x^2}$ ***b***) $x = y^3 + 2y$

70. ***a***) $y = -\sqrt{4 - x^2}$ ***b***) $x = y^3$

71–74 ■ Puntos de intersección Encuentre los puntos de intersección x y y de la gráfica de la ecuación.

71. ***a***) $y = x + 6$ ***b***) $y = x^2 - 5$

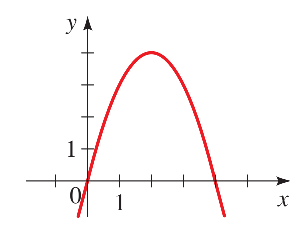
72. ***a***) $4x^2 + 25y^2 = 100$ ***b***) $x^2 - xy + 3y = 1$

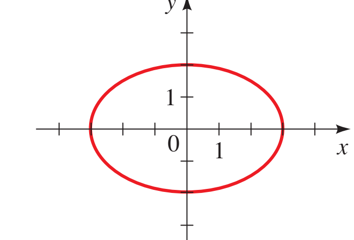
73. ***a***) $9x^2 - 4y^2 = 36$ ***b***) $y - 2xy + 4x = 1$

74. ***a***) $y = \sqrt{x^2 - 16}$ ***b***) $y = \sqrt{64 - x^3}$

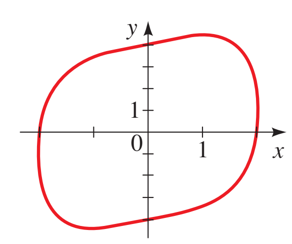
75–78 ■ Puntos de intersección Se dan una ecuación y su gráfica. Encuentre los puntos de intersección x y y.

75. $y = 4x - x^2$ **76.** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

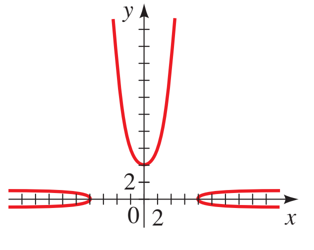




77. $x^4 + y^2 - xy = 16$



78. $x^2 + y^3 - x^2y^2 = 64$





79–82 ■ Trazar gráficas de ecuaciones Se da una ecuación: *a*) Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la ecuación en el rectángulo de vista dado. *b*) Encuentre los puntos de intersección x y y de la gráfica. *c*) Verifique sus respuestas del inciso *b*) algebraicamente (usando la ecuación).

79. $y = x^3 - x^2$; $[-2, 2]$ por $[-1, 1]$

80. $y = x^4 - 2x^3$; $[-2, 3]$ por $[-3, 3]$

81. $y = -\dfrac{2}{x^2 + 2}$; $[-5, 5]$ por $[-3, 1]$

82. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$; $[-5, 5]$ por $[-5, 3]$

83–88 ■ Trazo de gráfica de circunferencias Determine el centro y el radio de la circunferencia y trace su gráfica.

83. $x^2 + y^2 = 9$

84. $x^2 + y^2 = 5$

85. $x^2 + (y - 4)^2 = 1$

86. $(x + 1)^2 + y^2 = 9$

87. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

88. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$

89–96 ■ Ecuaciones de circunferencias Encuentre una ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

89. Centro $(2, -1)$; radio 3

90. Centro $(-1, -4)$; radio 8

91. Centro en el origen; pasa por $(4, 7)$

92. Centro $(-1, 5)$; pasa por $(-4, -6)$

93. Los puntos extremos de un diámetro son $P(-1, 1)$ y $Q(5, 9)$

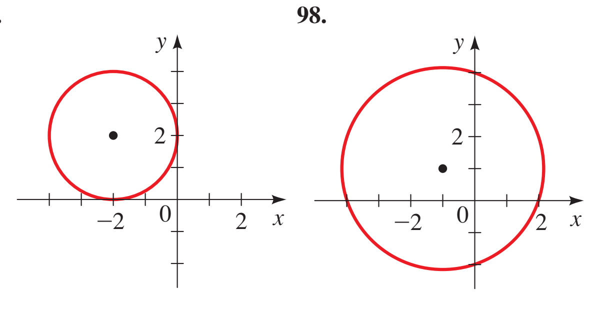
94. Los puntos extremos de un diámetro son $P(-1, 3)$ y $Q(7, -5)$

95. Centro $(7, -3)$; tangente al eje x

96. La circunferencia está en el primer cuadrante, tangente a los ejes x y y; radio 5

97–98 ■ Ecuaciones de circunferencias Encuentre la ecuación de la circunferencia que se muestra en la figura.

97. **98.**



99–104 ■ Ecuaciones de circunferencias Demuestre que la ecuación representa una circunferencia y encuentre su centro y su radio.

99. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

100. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

101. $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}$

102. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$

103. $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$

104. $3x^2 + 3y^2 + 6x - y = 0$

105–110 ■ Simetría Pruebe si hay simetría en cada ecuación.

105. $y = x^4 + x^2$

106. $x = y^4 - y^2$

107. $x^2y^2 + xy = 1$

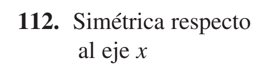
108. $x^4y^4 + x^2y^2 = 1$

109. $y = x^3 + 10x$

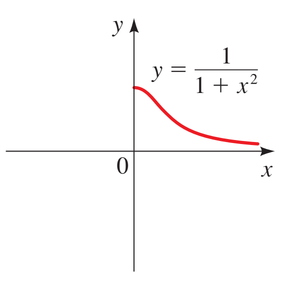
110. $y = x^2 + |x|$

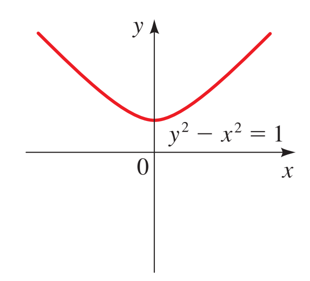
111–114 ■ Simetría Complete la gráfica usando la propiedad de simetría dada.

111. Simétrica respecto al eje y



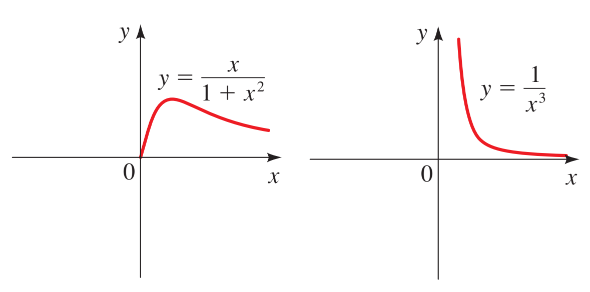
112. Simétrica respecto al eje x





113. Simétrica respecto al origen

114. Simétrica respecto al origen



HABILIDADES Plus

115–116 ■ Dibujar regiones Trace la región dada por el conjunto.

115. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

116. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

117. Área de una región Encuentre el área de la región que está fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ pero dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

118. Área de una región Trace la región del plano coordenado que satisface las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 9$ y $y \geq |x|$. ¿Cuál es el área de esta región?

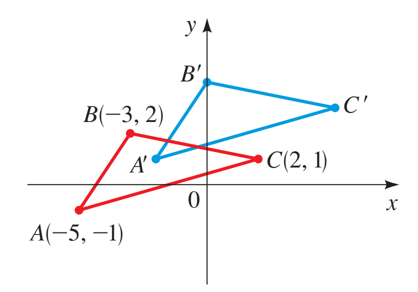
119. Desplazar el plano de coordenadas Suponga que cada uno de los puntos del plano de coordenadas se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

a) ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto $(5, 3)$?

b) ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto (a, b)?

c) ¿Qué punto se desplaza a $(3, 4)$?

d) El triángulo ABC de la figura ha sido desplazado al triángulo $A'B'C'$. Encuentre las coordenadas de los puntos A', B' y C'.



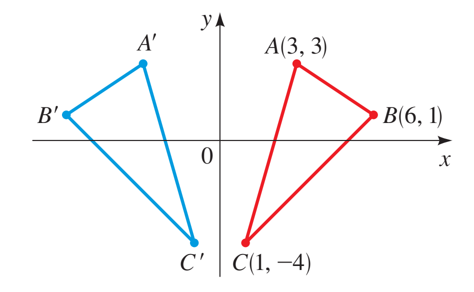
120. Reflejo en el plano de coordenadas Suponga que el eje y actúa como espejo que refleja cada punto a la derecha del mismo hacia un punto a su izquierda.

a) ¿A qué punto se refleja el punto $(3, 7)$?

b) ¿A qué punto se refleja el punto (a, b)?

c) ¿Cuál punto se refleja a $(-4, -1)$?

d) El triángulo ABC de la figura se refleja al triángulo $A'B'C'$. Encuentre las coordenadas de los puntos A', B' y C'.

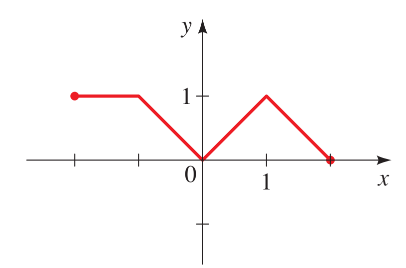


121. Hacer una gráfica simétrica La gráfica que se muestra en la figura no es simétrica alrededor del eje x, el eje y o el origen. Agregue más segmentos de recta a la gráfica para que muestre la simetría indicada. En cada caso agregue lo menos posible.

a) Simetría alrededor del eje x

b) Simetría alrededor del eje y

c) Simetría alrededor del origen



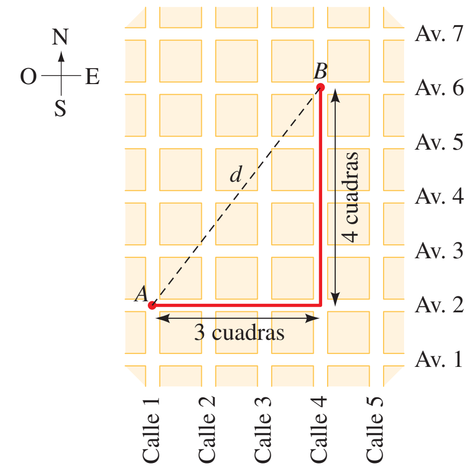
APLICACIONES

122. Distancias en una ciudad Una ciudad tiene calles que corren de norte a sur y avenidas que corren de oriente a poniente, todas igualmente espaciadas. Las calles y avenidas están numeradas en forma secuencial como se muestra en la figura siguiente. La distancia *a pie* entre los puntos A y B es de 7 cuadras, es decir, 3 cuadras al oriente y 4 cuadras al norte. Para determinar la distancia d en *línea recta* debemos usar la fórmula para distancias.

a) Encuentre la distancia en línea recta (en cuadras) entre A y B.

b) Encuentre la distancia a pie y la distancia en línea recta entre la esquina que forman la Calle 4 y la Avenida 2 y la que forman la Calle 11 y la Avenida 26.

c) ¿Qué debe ser cierto en relación con los puntos P y Q si la distancia a pie entre P y Q es igual a la distancia en línea recta entre P y Q?



123. Punto a medio camino Dos amigos viven en la ciudad descrita en el ejercicio 122, uno en la esquina que forman la Calle 3 y la Avenida 7, el otro en la esquina de la Calle 27 y la Avenida 17. Con frecuencia se citan en una cafetería que está a la mitad de la distancia entre sus casas.

a) ¿En qué crucero está ubicada la cafetería?

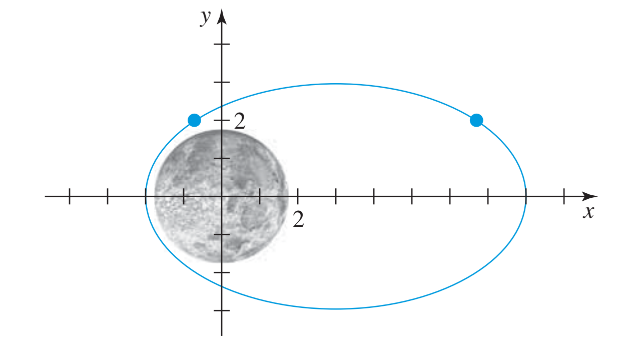
b) ¿Cuánto debe caminar cada uno para llegar a la cafetería?

124. Órbita de un satélite Un satélite está en órbita alrededor de la Luna. Se elabora un plano de coordenadas que contiene la órbita con el centro de la Luna en el origen, como se muestra en la gráfica, con distancias medidas en megametros (Mm). La ecuación de la órbita del satélite es

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

a) De la gráfica determine el punto más cercano y el más lejano del centro de la Luna a los cuales llega el satélite.

b) Hay dos puntos en la órbita con coordenadas $y = 2$. Encuentre las coordenadas x de estos puntos y determine sus distancias al centro de la Luna.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

125. REDACCIÓN: Completar un paralelogramo Trace los puntos $M(6, 8)$ y $A(2, 3)$ en un plano de coordenadas. Si M es el punto medio del segmento de recta AB, encuentre las coordenadas de B. Redacte una breve descripción de los pasos que tomó para encontrarlos así como sus razones para tomarlos.

126. REDACCIÓN: Completar un paralelogramo Coloque los puntos $P(0, 3)$, $Q(2, 2)$ y $R(5, 3)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar ubicado el punto S para que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo? Redacte una breve descripción de los pasos que tomó para encontrarlos, así como sus razones para tomarlos.

127. DESCUBRIMIENTO: ¿Circunferencia, punto o conjunto vacío? Complete los cuadrados en la ecuación general $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ y simplifique el resultado cuanto sea posible. ¿Bajo qué condiciones esta ecuación representa una circunferencia en los coeficientes a, b y c? ¿Un solo punto? ¿El conjunto vacío? En el caso en que la ecuación represente una circunferencia encuentre su centro y su radio.

1.10 RECTAS

■ Pendiente de una recta ■ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ■ Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta ■ Rectas verticales y horizontales ■ Ecuación general de una recta ■ Rectas paralelas y perpendiculares

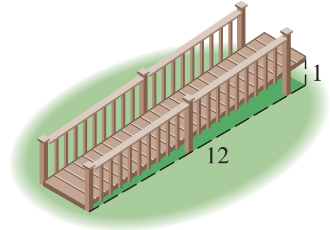
En esta sección encontramos ecuaciones para rectas que se encuentran en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté inclinada la recta, por lo que empezamos por estudiar el concepto de pendiente.

■ Pendiente de una recta

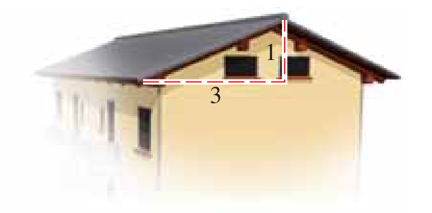
Primero necesitamos una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Llamamos *recorrido* a la distancia que nos movemos a la derecha; y definimos como *elevación* la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La *pendiente* de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$$

La figura 1 muestra situaciones en las que la pendiente es importante. Los carpinteros usan el término *inclinación* para la pendiente de un techo o una escalera; el término *desnivel* se usa para la pendiente de una carretera.



Pendiente de una rampa
Pendiente $= \frac{1}{12}$



Inclinación de un techo
Pendiente $= \frac{1}{3}$



Desnivel de una carretera
Pendiente $= \frac{8}{100}$

FIGURA 1

Si una recta está en un plano de coordenadas, entonces el **recorrido** es el cambio en la coordenada x y la **elevación** es el cambio correspondiente en la coordenada y entre cualesquier dos puntos sobre la recta (véase la figura 2). Esto nos da la siguiente definición de pendiente.

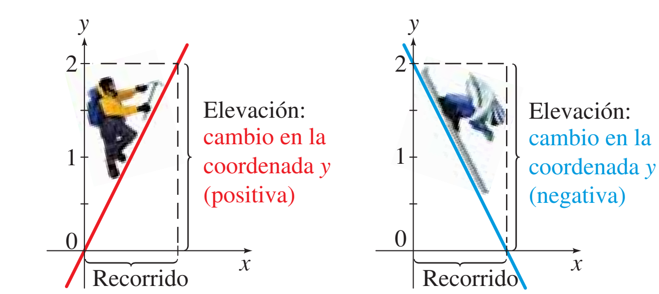


FIGURA 2

PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de los dos puntos que se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la figura 3.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

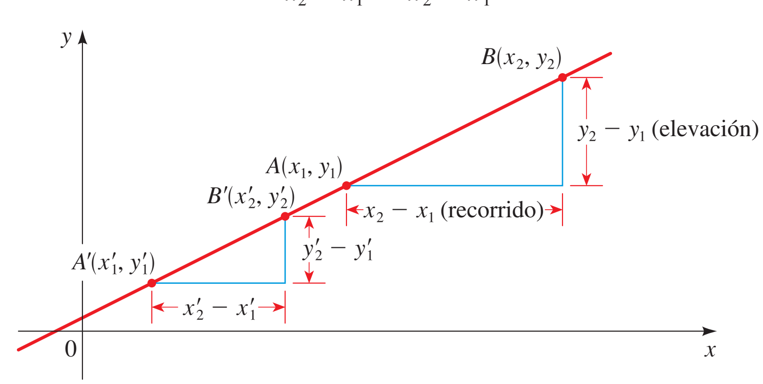
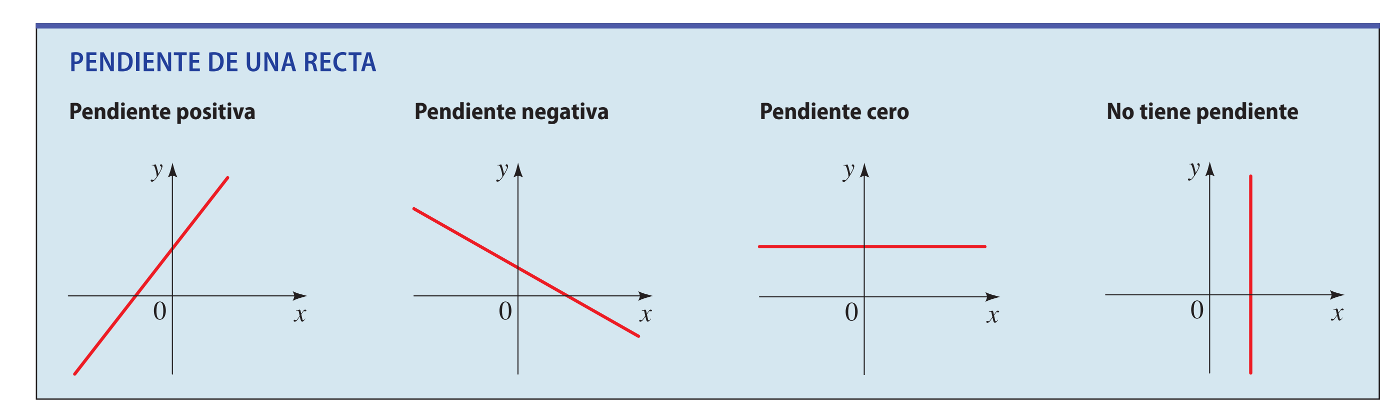


FIGURA 3

Las figuras en el cuadro muestran varias rectas marcadas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es muy grande; una recta horizontal tiene pendiente cero. La pendiente de una recta vertical está indefinida (tiene un denominador 0), por lo que se dice que una recta vertical no tiene pendiente.

PENDIENTE DE UNA RECTA



EJEMPLO 1 ■ Determinar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

SOLUCIÓN Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. Por la definición la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la figura 4.

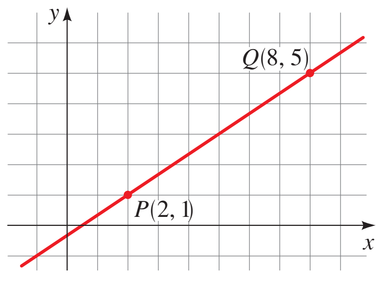


FIGURA 4

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

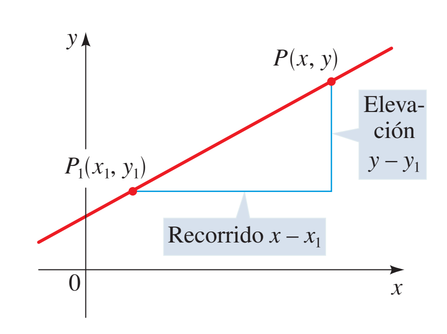


FIGURA 5

Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (véase la figura 5), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede volver a escribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; observe que la ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por tanto, es una ecuación de la recta dada.

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 ■ Determinar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ pendiente $-\frac{1}{2}$.

b) Trace la recta.

SOLUCIÓN

a) Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{1}{2}, \text{ punto } (1, -3)$$

$$2y + 6 = -x + 1 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \qquad \text{Reordene}$$

b) El hecho de que la pendiente sea $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la figura 6.

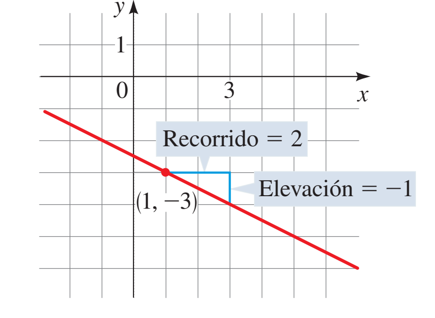


FIGURA 6

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

EJEMPLO 3 ■ Determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar *ya sea* el punto $(-1, 2)$ *o* el punto $(3, -4)$, en la ecuación punto-pendiente. Terminaremos con la misma respuesta final.

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$ se obtiene

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{3}{2}\text{, punto } (-1, 2)$$

$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reordene}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

■ Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m y punto de intersección b (con el eje y (véase la figura 7). Esto significa que la recta cruza el eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = b$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica $y = mx + b$, que se denomina **forma pendiente-intersección** de la ecuación de una recta.

y, $(0, b)$, $y = mx + b$, 0, x

FIGURA 7



FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es

$$y = mx + b$$

EJEMPLO 4 ■ Rectas en forma de pendiente-intersección

a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

b) Encuentre la pendiente y la intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

SOLUCIÓN

a) Dado que $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$.

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Sume } 2x$$

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Pendiente Intersección y

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje y es $b = \frac{1}{3}$.

Ahora intente realizar los ejercicios 23 y 61 ■

FIGURA 8

Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y (véase la figura 8). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

- Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.
- Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

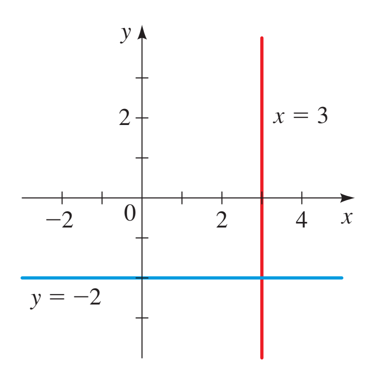


FIGURA 9

EJEMPLO 5 ■ Rectas verticales y horizontales

a) Una ecuación para la recta vertical que pasa por $(3, 5)$ es $x = 3$.

b) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje x.

c) Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.

d) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección -2 en el eje y.

Las rectas están graficadas en la figura 9.

Ahora intente realizar los ejercicios 35, 37, 63 y 65 ■

Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** en las variables x y y es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes y ni A ni B son 0. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

  A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.
- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{Divida entre } B$$

  y esta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).
- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

$$Ax + C = 0 \qquad \text{Hagamos que } B = 0$$

  o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son cero})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

EJEMPLO 6 ■ Trazo de la gráfica de una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la ecuación es lineal su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica es suficiente encontrar dos puntos cualesquiera en la recta. Los puntos de intersección son los más fáciles de encontrar.

Punto de intersección x: sustituya $y = 0$, para obtener $2x - 12 = 0$, por lo que $x = 6$

Punto de intersección y: sustituya $x = 0$, para obtener $-3y - 12 = 0$, por lo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica de la figura 10.

SOLUCIÓN 2 Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección.

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 12 &= 0 \\ 2x - 3y &= 12 && \text{Sume 12} \\ -3y &= -2x + 12 && \text{Reste } 2x \\ y &= \tfrac{2}{3}x - 4 && \text{Divida entre } -3 \end{aligned}$$

Esta ecuación es de la forma $y = mx + b$, por lo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección y es $b = -4$. Para trazar la gráfica colocamos el punto de intersección con el eje y y nos movemos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, como se muestra en la figura 11.

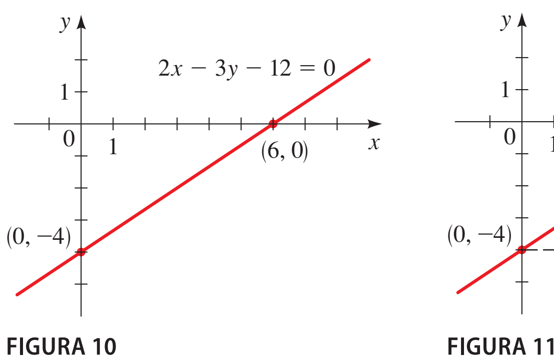


FIGURA 10

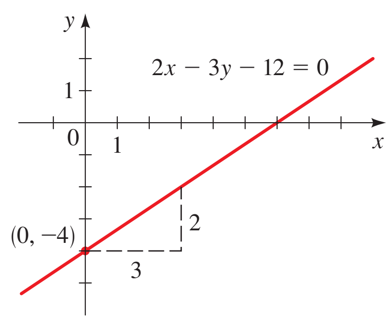


FIGURA 11

Ahora intente realizar el ejercicio 67 ■

■ Rectas paralelas y perpendiculares

Puesto que la pendiente mide la inclinación de una recta parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

> **RECTAS PARALELAS**
>
> Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

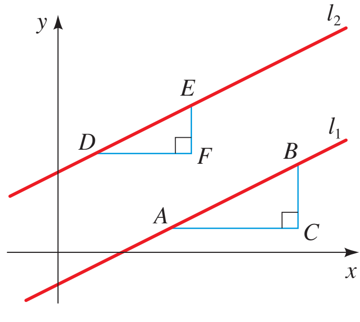


FIGURA 12

Demostración Consideremos que las rectas l_1 y l_2 de la figura 12 tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectángulos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

A la inversa, si las pendientes son iguales entonces los triángulos serán semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas. ■

EJEMPLO 7 ■ Encontrar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$4x + 6y + 5 = 0$$

$$6y = -4x - 5 \qquad \text{Reste } 4x + 5$$

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} \qquad \text{Divida entre 6}$$

Por tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Puesto que la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2)$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \qquad \text{Multiplique por 3}$$

$$2x + 3y - 16 = 0 \qquad \text{Reordene}$$

Por tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como la de las rectas paralelas.

> **RECTAS PERPENDICULARES**
>
> Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:
>
> $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$
>
> También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

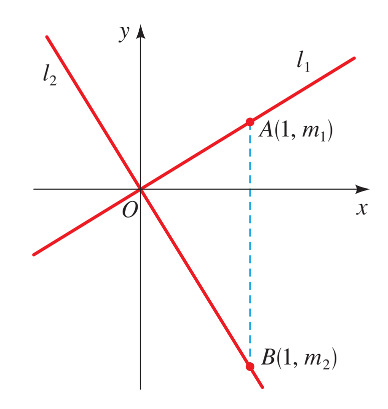


FIGURA 13

Demostración En la figura 13 mostramos dos rectas que se cruzan en el origen. (Si las rectas se cruzan en algún otro punto consideraremos rectas paralelas a estas que se crucen en el origen. Estas nuevas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.)

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Observe que $A(1, m_1)$ está sobre l_1 y $B(1, m_2)$ está sobre l_2. Por el teorema de Pitágoras y su inverso (véase el apéndice A)* $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

Por la fórmula de distancia, esta ecuación se convierte en

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

$$2 = -2m_1m_2$$

$$m_1m_2 = -1$$

■



EJEMPLO 8 ■ Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

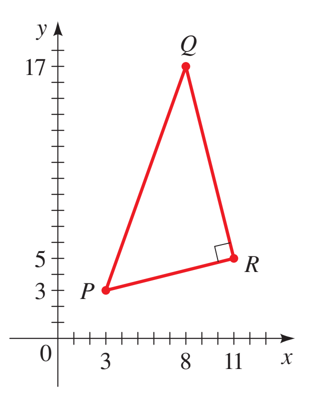


FIGURA 14

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son, respectivamente,



$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4$$

Dado que $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares de modo que PQR es un triángulo rectángulo que aparece en la figura 14.

Ahora intente realizar el ejercicio 81 ■

EJEMPLO 9 ■ Encontrar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

SOLUCIÓN En el ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Puesto que la recta que se requiere pasa por $(0, 0)$, la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0) \qquad \text{Pendiente } m = \tfrac{3}{2}, \text{ punto } (0, 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x \qquad \text{Simplifique}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

EJEMPLO 10 ■ Trazar la gráfica de una familia de rectas

Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

SOLUCIÓN Las rectas están graficadas en la figura 15 en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Todas las rectas tienen la misma pendiente, por tanto, son paralelas.

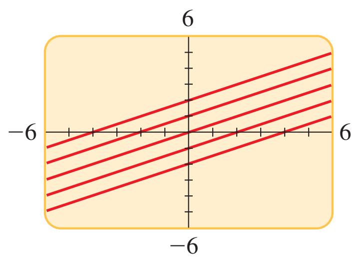


FIGURA 15 $y = 0.5x + b$

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

EJEMPLO 11 ■ Aplicación: interpretación de la pendiente

Una piscina está siendo llenada con una manguera. La profundidad del agua y (en pies) en la piscina t horas después de activar la manguera está dada por

$$y = 1.5t + 2$$

a) Encuentre la pendiente y la intersección y de la gráfica de esta ecuación.

b) ¿Qué representan la pendiente y la intersección?

SOLUCIÓN

a) Esta es la ecuación de una recta con pendiente 1.5 e intersección y 2.

b) La pendiente representa un aumento de 1.5 pies de profundidad del agua por cada hora. La intersección y indica que la profundidad del agua era de 2 pies en el momento en que se abrió la llave de la manguera.

Ahora intente realizar el ejercicio 87 ■

1.10 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Encontramos la "inclinación" o pendiente de una recta que pasa por dos puntos al dividir la diferencia en las coordenadas _____ de estos puntos entre la diferencia en las coordenadas _____. Entonces, la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (2, 5) tiene pendiente _________.

2. Una recta tiene la ecuación $y = 3x + 2$.
   a) Esta recta tiene pendiente _________.
   b) Cualquier recta paralela a esta recta tiene pendiente _________.
   c) Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente _________.

3. La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, 2) es _________.

4. Para la ecuación lineal $2x + 3y - 12 = 0$, la intersección x es _________ y la intersección y es _________. La ecuación en la forma pendiente-intersección es $y =$ _______________. La pendiente de la gráfica de esta ecuación es _________.

5. La pendiente de una recta horizontal es _________. La ecuación de la recta horizontal que pasa por (2, 3) es _________.

6. La pendiente de una recta vertical es _________. La ecuación de la recta vertical que pasa por (2, 3) es _________.

7. *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.
   a) ¿Es la gráfica de $y = -3$ una recta horizontal?
   b) ¿Es la gráfica de $x = -3$ una recta vertical?
   c) ¿Tendrá pendiente 0 una recta perpendicular a una recta horizontal?
   d) ¿Tendrá pendiente 0 una recta perpendicular a una recta vertical?

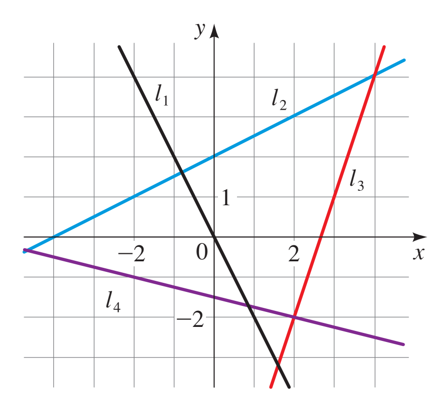
8. Trace una gráfica de las rectas $y = -3$ y $x = -3$. ¿Son rectas perpendiculares?

HABILIDADES

9–16 ■ Pendiente Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

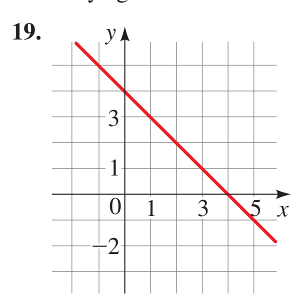
9. $P(-1, 2), Q(0, 0)$
10. $P(0, 0), Q(3, -1)$
11. $P(2, -2), Q(7, -1)$
12. $P(-5, 1), Q(3, -2)$
13. $P(5, 4), Q(0, 4)$
14. $P(4, 3), Q(1, -1)$
15. $P(10, -2), Q(6, -5)$
16. $P(3, -2), Q(6, -2)$

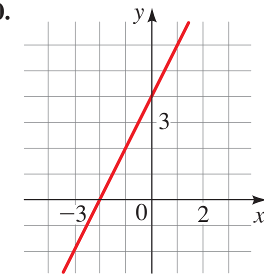
17. **Pendiente** Encuentre las pendientes de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 en la figura siguiente.

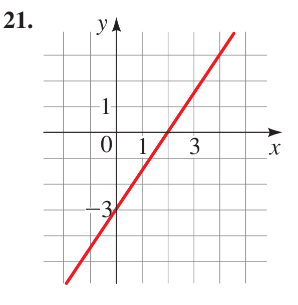


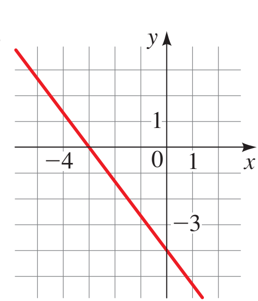
18. **Pendiente**
   a) Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes 1, 0, $\frac{1}{2}$, 2 y -1.
   b) Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y 3.

19–22 ■ Ecuaciones de rectas Encuentre la ecuación para la recta cuya gráfica está trazada.

19.


20.


21.


22.


23–50 ■ Encontrar ecuaciones de rectas Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

23. Pendiente 3; intersección y -2
24. Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección y 4
25. Pasa por (2, 3); pendiente 5
26. Pasa por $(-2, 4)$; pendiente -1
27. Pasa por (1, 7); pendiente $\frac{2}{3}$
28. Pasa por $(-3, -5)$; pendiente $-\frac{7}{2}$
29. Pasa por (2, 1) y (1, 6)

30. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$

31. Pasa por $(-2, 5)$ y $(-1, -3)$

32. Pasa por $(1, 7)$ y $(4, 7)$

33. Intersección en x es 1; intersección en y es -3

34. Intersección en x es -8; intersección en y es 6

35. Pasa por $(1, 3)$; pendiente 0

36. Pasa por $(-1, 4)$; pendiente indefinida

37. Pasa por $(2, -1)$; pendiente indefinida

38. Pasa por $(5, 1)$; pendiente 0

39. Pasa por $(1, 2)$; paralela a la recta $y = 3x - 5$

40. Pasa por $(-3, 2)$; perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{2}x + 7$

41. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje x

42. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje y

43. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$

44. Intersección y de 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

45. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$

46. Pasa por $(2, 6)$; perpendicular a la recta $y = 1$

47. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

48. Pasa por $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

49. Pasa por $(1, 7)$; paralela a la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(-2, 1)$

50. Pasa por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$

51. Encontrar ecuaciones de rectas y trazar sus gráficas

a) Trace la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$.

b) Encuentre la ecuación de esta recta.

52. Encontrar ecuaciones de rectas y trazar sus gráficas

a) Trace la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$.

b) Encuentre la ecuación para esta recta.

53–56 ■ Familia de rectas Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de la familia de rectas dada en el mismo rectángulo de vista. ¿Qué tienen en común las rectas?

53. $y = -2x + b$ para $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

54. $y = mx - 3$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

55. $y = m(x - 3)$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

56. $y = 2 + m(x + 3)$ para $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm 6$

57–66 ■ Uso de pendientes e intersecciones *y* para trazar gráficas de rectas Encuentre la pendiente y el punto de intersección y de la recta y trace su gráfica.

57. $y = 3 - x$

58. $y = \frac{2}{3}x - 2$

59. $-2x + y = 7$

60. $2x - 5y = 0$

61. $4x + 5y = 10$

62. $3x - 4y = 12$

63. $y = 4$

64. $x = -5$

65. $x = 3$

66. $y = -2$

67–72 ■ Uso de intersecciones *x* y *y* para trazar gráficas de rectas Encuentre las intersecciones x y y de la recta y dibuje su gráfica.

67. $5x + 2y - 10 = 0$

68. $6x - 7y - 42 = 0$

69. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

70. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y - 2 = 0$

71. $y = 6x + 4$

72. $y = -4x - 10$

73–78 ■ Rectas paralelas y perpendiculares Se dan las ecuaciones de dos rectas. Determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ni una ni otra.

73. $y = 2x + 3$; $2y - 4x - 5 = 0$

74. $y = \frac{1}{2}x + 4$; $2x + 4y = 1$

75. $-3x + 4y = 4$; $4x + 3y = 5$

76. $2x - 3y = 10$; $3y - 2x - 7 = 0$

77. $7x - 3y = 2$; $9y + 21x = 1$

78. $6y - 2x = 5$; $2y + 6x = 1$

HABILIDADES Plus

79–82 ■ Uso de pendientes Verifique la propiedad geométrica dada.

79. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

80. Use pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

81. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

82. Use pendientes para determinar si los puntos dados son colineales (están sobre una recta).

a) $(1, 1)$, $(3, 9)$, $(6, 21)$

b) $(-1, 3)$, $(1, 7)$, $(4, 15)$

83. Bisector perpendicular Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$.

84. Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

$$2y + 3x - 6 = 0$$

85. Forma simétrica

a) Demuestre que si los puntos de intersección x y y de una recta son números diferentes de cero a y b entonces la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

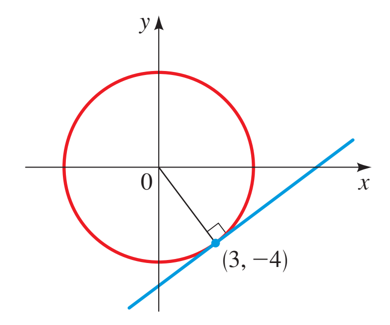
Esta se llama **forma simétrica** de la ecuación de una recta.

b) Use el inciso *a)* para encontrar la ecuación de la recta cuyo punto de intersección x es 6 y cuyo punto de intersección y es -8.

86. Recta tangente a una circunferencia

a) Encuentre la ecuación para la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Vea la figura.)

b) ¿En qué otro punto sobre la circunferencia es que una recta tangente será paralela a la recta tangente del inciso *a*)?



APLICACIONES

87. Calentamiento global Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado aumentando constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde T es la temperatura en °C y t son años desde 1950.

a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección T?

b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

88. Dosis de medicamentos Si la dosis de un medicamento recomendada para un adulto es D (en mg), entonces para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

a) Encuentre la pendiente. ¿Qué representa?

b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

89. Mercado de segunda mano La gerente de un mercado de segunda mano de fines de semana sabe, por experiencia, que si cobra x dólares por la renta de un espacio, el número y de espacios que rente está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el cargo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas.)

b) ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección y y el punto de intersección x de la gráfica?

90. Costo de producción Un pequeño fabricante de enseres electrodomésticos encuentra que, si produce x hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

(donde y se mide en dólares).

a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

91. Escalas de temperatura La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.

b) Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [*Sugerencia:* Suponga que a es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga que $F = a$ y $C = a$ y luego despeje a.]

C	*F*
−30°	
−20°	
−10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

92. Grillos y temperatura Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70°F y 168 chirridos por minuto a 80°F.

a) Encuentre la ecuación lineal que relacione la temperatura t y el número de chirridos por minuto n.

b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

93. Depreciación Un pequeño negocio compra una computadora en 4000 dólares. Después de 4 años el valor de la computadora se espera que sea de 200 dólares. Para fines contables el negocio usa *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo determinado. Esto significa que, si V es el valor de la computadora en el tiempo t, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar V y t.

a) Encuentre una ecuación lineal que relacione V y t.

b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección V de la gráfica?

d) Encuentre el valor depreciado de la computadora 3 años a partir de la fecha de compra.

94. Presión y profundidad En la superficie del océano la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre esta, 15 lb/pulg². Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg² por cada 10 pies de descenso.

a) Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano.

b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

d) ¿A qué profundidad la presión es de 100 lb/pulg²?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

95. DISCUSIÓN: ¿Qué significa la pendiente? Suponga que la gráfica de la temperatura exterior en cierto tiempo es una recta. ¿Cómo está cambiando el clima si la pendiente de la recta es positiva? ¿Si es negativa? ¿Si es cero?

96. DISCUSIÓN: Puntos colineales Suponga que nos dan las coordenadas de tres puntos en el plano y se desea ver si están en la misma recta. ¿Cómo se puede hacer esto usando pendientes? ¿Usando la fórmula de distancia? ¿Pensaría usted en otro método?

1.11 SOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

■ Resolver ecuaciones gráficamente ■ Resolver desigualdades gráficamente

"El álgebra es una ciencia divertida", diría el tío Jakob. "Estamos a la caza de un animalito cuyo nombre se ignora, así que lo llamamos x. Cuando cae en la trampa lo agarramos y le ponemos el nombre correcto."

ALBERT EINSTEIN

En la sección 1.5 aprendimos a resolver ecuaciones y desigualdades con el **método algebraico**. En este método vimos que x es una *incógnita* y luego usamos las reglas del álgebra para "cazarla" al despejarla a un lado de la ecuación. En la sección 1.8 resolvimos desigualdades usando este mismo método.

A veces puede ser difícil o imposible de resolver algebraicamente una ecuación o una desigualdad. En ese caso utilizamos el **método gráfico**. En dicho método vemos a x como una *variable* y trazamos una gráfica adecuada. Entonces podemos obtener una solución aproximada de la gráfica.

■ Resolver ecuaciones gráficamente

Para resolver gráficamente una ecuación de una variable como $3x - 5 = 0$ primero dibujamos la gráfica de la ecuación de dos variables $y = 3x - 5$ que se obtiene al hacer el lado distinto de cero de la ecuación igual a una variable y. Las soluciones de la ecuación dada son los valores de x para los que y es igual a cero. Es decir, las soluciones son las intersecciones x de la gráfica. A continuación se describe el método.

RESOLVER UNA ECUACIÓN

Método algebraico

Use las reglas del álgebra para despejar la incógnita x en un lado de la ecuación.

Ejemplo: $3x - 4 = 1$

$3x = 5$ Sume 4

$x = \frac{5}{3}$ Divida entre 3

La solución es $x = \frac{5}{3}$.

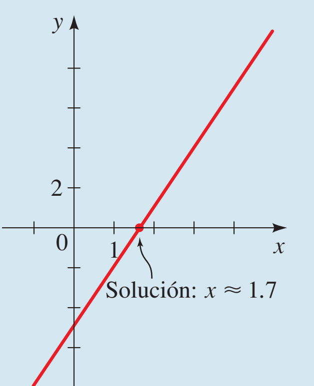
Método gráfico

Mueva todos los términos a un lado y haga que $y = 0$. Trace la gráfica y encuentre la intersección x.

Ejemplo: $3x - 4 = 1$

$3x - 5 = 0$

Haga que $y = 3x - 5$ y trace su gráfica. En la gráfica se ve que la solución es $x \approx 1.7$



La ventaja del método algebraico es que da respuestas exactas. También, el proceso de desenredar la ecuación para obtener la respuesta nos ayuda a entender la estructura algebraica de la ecuación. Por otra parte, para muchas ecuaciones es difícil o imposible despejar x.



© Bettmann/Corbis

PIERRE DE FERMAT (1601-1665) fue un matemático francés que se interesó en las matemáticas a la edad de 30 años. Debido a su trabajo como magistrado, Fermat tenía poco tiempo para escribir demostraciones completas de sus descubrimientos y con frecuencia las escribía en el margen de cualquier libro que estuviera leyendo. Después de su muerte se encontró que su ejemplar del libro *Arithmetica* de Diofanto (véase la página 20) contenía un comentario particularmente tentador. Donde Diofanto analiza las soluciones de $x^2 + y^2 = z^2$ (por ejemplo, $x = 3$, $y = 4$ y $z = 5$), Fermat anota al margen que para $n \geq 3$ no hay soluciones numéricas naturales a la ecuación $x^n + y^n = z^n$. En otras palabras, es imposible que un cubo sea igual a la suma de dos cubos, que una cuarta potencia sea igual a la suma de dos potencias a la cuarta, y así sucesivamente. Fermat escribe, "he descubierto una demostración en verdad maravillosa de esto, pero el margen es demasiado pequeño para contenerla". Todos los otros comentarios de Fermat al margen del ejemplar de *Arithmetica* han sido demostrados. Este, sin embargo, quedó sin demostración y pasó a conocerse como el "último teorema de Fermat".

En 1994 Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, anunció una demostración del último teorema de Fermat, asombrosamente 350 años después de su conjetura. Su demostración es uno de los resultados matemáticos más ampliamente reportados en la prensa popular.

El *Proyecto de descubrimiento* al que nos referimos en la página 276 describe un método numérico para resolver ecuaciones.

El método gráfico da una aproximación numérica a la respuesta. Esto es una ventaja cuando se desea una respuesta numérica. (Por ejemplo, un ingeniero podría encontrar una respuesta expresada como $x \approx 2.6$ más útil en el momento en que $x = \sqrt{7}$.) Del mismo modo trazar la gráfica de una ecuación nos ayuda a visualizar la forma en que la solución está relacionada con los demás valores de la variable.

EJEMPLO 1 ■ Resolver algebraica y gráficamente una ecuación cuadrática

Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática. Utilice el método algebraico y el gráfico.

a) $x^2 - 4x + 2 = 0$ ***b)*** $x^2 - 4x + 4 = 0$ ***c)*** $x^2 - 4x + 6 = 0$

SOLUCIÓN 1: Algebraica

La fórmula cuadrática se aborda en la página 50.

El lector puede verificar que la fórmula cuadrática aporta las soluciones siguientes.

a) Hay dos soluciones reales, $x = 2 + \sqrt{2}$ y $x = 2 - \sqrt{2}$.

b) Hay una solución real, $x = 2$.

c) Hay una solución no real. (Las dos soluciones complejas son $x = 2 + \sqrt{2}i$ y $x = 2 - \sqrt{2}i$.)

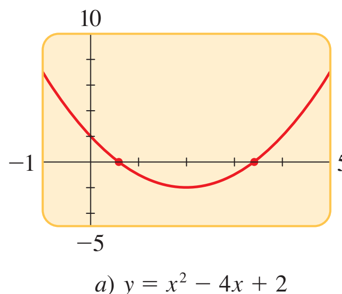
SOLUCIÓN 2: Gráfica

Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de las ecuaciones $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x^2 - 4x + 4$ y $y = x^2 - 4x + 6$ en la figura 1. Al determinar los puntos de intersección x de las gráficas encontramos las siguientes soluciones.

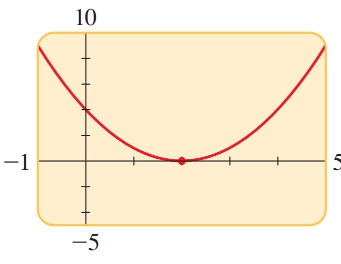
a) Las dos intersecciones x dan las soluciones $x \approx 0.6$ y $x \approx 3.4$.

b) La única intersección x da la única solución $x = 2$.

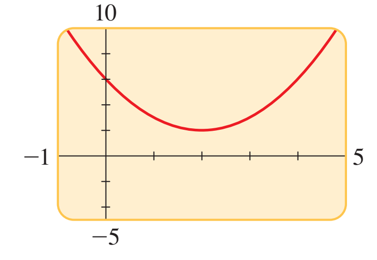
c) No hay intersección x, de modo que la ecuación no tiene solución.



a) $y = x^2 - 4x + 2$



b) $y = x^2 - 4x + 4$

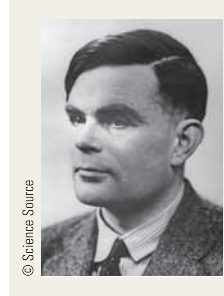


c) $y = x^2 - 4x + 6$

FIGURA 1

Ahora intente realizar los ejercicios 9, 11 y 15 ■

Las gráficas de la figura 1 muestran visualmente por qué una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones, una solución o ninguna solución real. Se demostró este hecho algebraicamente en la sección 1.5 cuando se estudió el discriminante.



ALAN TURING (1912-1954) estuvo en el centro de dos eventos cruciales: la Segunda Guerra Mundial y el invento de la computadora. A la edad de 23 años Turing realizó su hazaña en matemáticas al resolver un importante problema en los fundamentos de matemáticas que había sido planteado por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1928 (véase la página 735). En esta investigación inventó una máquina teórica, ahora llamada máquina de Turing, que fue la inspiración para las modernas computadoras digitales. Durante la Segunda Guerra Mundial Turing estuvo a cargo del esfuerzo británico por descifrar códigos secretos alemanes. El total éxito de dicho esfuerzo tuvo un papel decisivo en la victoria de los aliados. Para realizar los numerosos pasos lógicos que se requieren para descifrar un mensaje codificado, Turing ideó procedimientos de decisión semejantes a los modernos programas de computadora. Después de la guerra ayudó a perfeccionar las primeras computadoras electrónicas en Gran Bretaña. También ejecutó trabajos pioneros sobre inteligencia artificial y modelos de computadora para procesos biológicos. A la edad de 42 años Turing murió envenenado por comer una manzana que misteriosamente había sido rociada con cianuro.

EJEMPLO 2 ■ Otro método gráfico

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación: $5 - 3x = 8x - 20$

SOLUCIÓN 1: Algebraica

$5 - 3x = 8x - 20$	Ecuación dada
$-3x = 8x - 25$	Reste 5
$-11x = -25$	Reste $8x$
$x = \dfrac{-25}{-11} = 2\frac{3}{11}$	Divida entre –11 y simplifique

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Podríamos pasar todos los términos a un lado del signo igual, igualar a y el resultado y trazar la gráfica de la ecuación resultante. Pero para evitar toda esta álgebra graficamos dos ecuaciones:

$$y_1 = 5 - 3x \qquad \text{y} \qquad y_2 = 8x - 20$$

La solución de la ecuación original será el valor de x que hace y_1 igual a y_2; es decir, la solución es la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas. Usando la función `TRACE` o la instrucción `intersect` en una calculadora graficadora vemos por la figura 2 que la solución es $x \approx 2.27$.

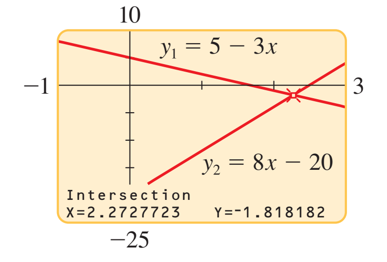


FIGURA 2

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

En el siguiente ejemplo usamos el método gráfico para resolver una ecuación que es extremadamente difícil de resolver con álgebra.

EJEMPLO 3 ■ Resolver una ecuación en un intervalo

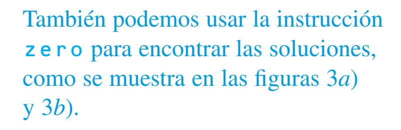
Resuelva la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

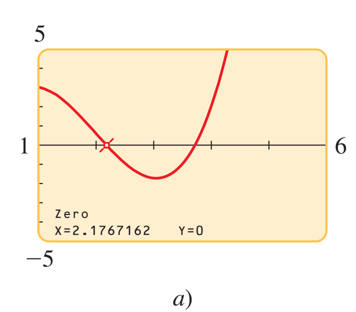
en el intervalo $[1, 6]$.

SOLUCIÓN Nos piden encontrar todas las soluciones x que satisfagan $1 \le x \le 6$, por lo cual trazaremos la gráfica de la ecuación en un rectángulo de vista para el cual los valores x están restringidos a este intervalo.

$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$	Ecuación dada
$x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x} = 0$	Reste $\sqrt{x}$


También podemos usar la instrucción `zero` para encontrar las soluciones, como se muestra en las figuras 3*a*) y 3*b*).

La figura 3 muestra la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x}$ en el rectángulo de vista $[1, 6]$ por $[-5, 5]$. Hay dos puntos de intersección x en este rectángulo de vista; haciendo un acercamiento vemos que las soluciones son $x \approx 2.18$ y $x \approx 3.72$.



a)

5
1
6
Zero
X=3.7200502 Y=0
−5

b)

FIGURA 3

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

La ecuación del ejemplo 3 en realidad tiene cuatro soluciones. Nos piden determinar las otras dos en el ejercicio 46.

Resolver desigualdades gráficamente

Para resolver gráficamente una desigualdad de una variable tal como $3x - 5 \geq 0$ primero dibujamos una gráfica de la ecuación de dos variables $y = 3x - 5$ obtenida haciendo el lado distinto de cero de la desigualdad igual a una variable y. Las soluciones de la desigualdad dada son los valores de x para los cuales y es mayor o igual a 0. Es decir, las soluciones son los valores de x para los cuales la gráfica está arriba del eje x.

RESOLVER UNA DESIGUALDAD

Método algebraico

Use las reglas de álgebra para despejar la incógnita x en un lado de la desigualdad.

Ejemplo: $3x - 4 \geq 1$

$3x \geq 5$ Sume 4

$x \geq \frac{5}{3}$ Divida entre 3

La solución es $[\frac{5}{3}, \infty)$.

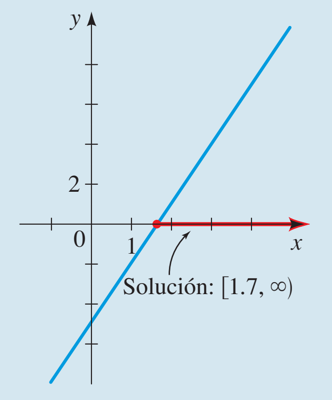
Método gráfico

Mueva todos los términos a un lado e iguálelos a y. Trace la gráfica de la ecuación resultante y encuentre los valores de x para los cuales está arriba o sobre el eje x.

Ejemplo: $3x - 4 \geq 1$

$3x - 5 \geq 0$

Haga que $y = 3x - 5$ y trace la gráfica. En la gráfica se ve que la solución es $[1.7, \infty)$.



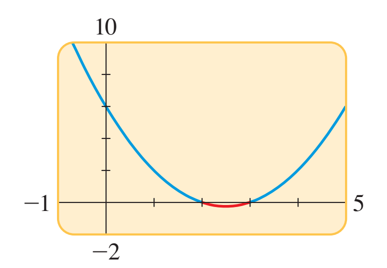


FIGURA 4

EJEMPLO 4 ■ Resolver una desigualdad gráficamente

Resuelva gráficamente la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

SOLUCIÓN Esta desigualdad fue resuelta algebraicamente en el ejemplo 3 de la sección 1.8. Para resolver la desigualdad gráficamente trazamos la gráfica de

$$y = x^2 - 5x + 6$$

Nuestro objetivo es determinar los valores de x para los cuales $y \leq 0$. Estos son simplemente los valores de x para los que la gráfica se encuentra abajo del eje x. De la gráfica de la figura 4 vemos que la solución de la desigualdad es el intervalo $[2, 3]$.

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

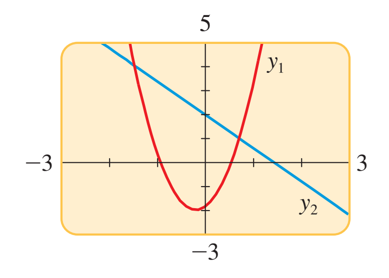


FIGURA 5
$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9$
$y_2 = 2.0 - 1.4x$

EJEMPLO 5 ■ Resolver una desigualdad gráficamente

Resuelva la desigualdad $3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \leq 2.0 - 1.4x$.

SOLUCIÓN Utilizamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de las ecuaciones

$$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \qquad \text{y} \qquad y_2 = 2.0 - 1.4x$$

En la figura 5 se muestran las gráficas. Estamos interesados en aquellos valores de x para los que $y_1 \leq y_2$; estos son puntos para los que la gráfica de y_2 está sobre la gráfica de y_1 o arriba de esta. Para determinar el intervalo apropiado buscamos las coordenadas x de puntos donde se intersecan las gráficas. Concluimos que la solución es (aproximadamente) el intervalo $[-1.45, 0.72]$.

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

EJEMPLO 6 ■ Resolver una desigualdad gráficamente

Resuelva la desigualdad $x^3 - 5x^2 \geq -8$.

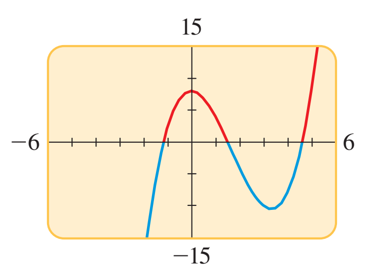


FIGURA 6 $x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$

SOLUCIÓN Escribimos la desigualdad como

$$x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$$

y luego graficamos la ecuación

$$y = x^3 - 5x^2 + 8$$

en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-15, 15]$, como se muestra en la figura 6. La solución de la desigualdad está formada por estos intervalos en los que la gráfica está sobre el eje x o arriba de este. Moviendo el cursor a los puntos de intersección x encontramos que, redondeada a un lugar decimal, la solución es $[-1.1, 1.5] \cup [4.6, \infty)$.

Ahora intente resolver el ejercicio 37 ■

1.11 EJERCICIOS

CONCEPTOS

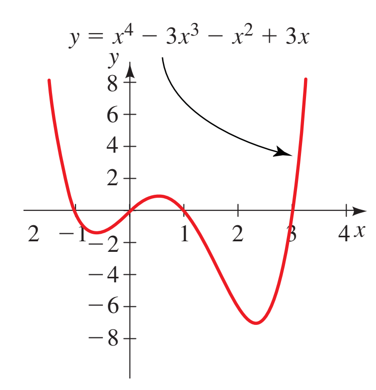
1. Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ son los puntos de intersección ____ de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.

2. Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 > 0$ son las coordenadas x de los puntos sobre la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$ que están ________ del eje x.

3. La figura muestra una gráfica de $y = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$. Use la gráfica para hacer lo siguiente.

a) Encontrar las soluciones de la ecuación $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0$.

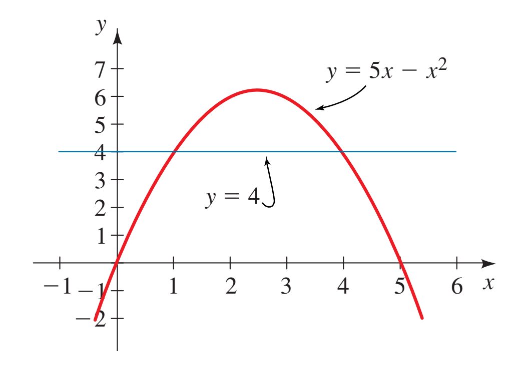
b) Determinar las soluciones de la desigualdad $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x \leq 0$.



4. La figura siguiente muestra las gráficas de $y = 5x - x^2$ y $y = 4$. Use las gráficas para hacer lo siguiente.

a) Encontrar las soluciones de la ecuación $5x - x^2 = 4$.

b) Determinar las soluciones de la desigualdad $5x - x^2 > 4$.



HABILIDADES

5–16 ■ Ecuaciones Resuelva la ecuación algebraica y gráficamente.

5. $x - 4 = 5x + 12$

6. $\frac{1}{2}x - 3 = 6 + 2x$

7. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x} = 7$

8. $\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{6}{2x} = \dfrac{5}{2x+4}$

9. $x^2 - 32 = 0$

10. $x^3 + 16 = 0$

11. $x^2 + 9 = 0$

12. $x^2 + 3 = 2x$

13. $16x^4 = 625$

14. $2x^5 - 243 = 0$

15. $(x - 5)^4 - 80 = 0$

16. $6(x + 2)^5 = 64$



17–24 ■ Ecuaciones Resuelva la ecuación gráficamente en el intervalo dado. Indique cada respuesta redondeada con dos decimales.

17. $x^2 - 7x + 12 = 0$; $[0, 6]$

18. $x^2 - 0.75x + 0.125 = 0$; $[-2, 2]$

19. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; $[-1, 4]$

20. $16x^3 + 16x^2 = x + 1$; $[-2, 2]$

21. $x - \sqrt{x+1} = 0$; $[-1, 5]$

22. $1 + \sqrt{x} = \sqrt{1 - x^2}$; $[-1, 5]$

23. $x^{1/3} - x = 0$; $[-3, 3]$

24. $x^{1/2} + x^{1/3} - x = 0$; $[-1, 5]$



25–28 ■ Ecuaciones Utilice el método gráfico para resolver la ecuación en el ejercicio indicado de la sección 1.5.

25. Ejercicio 97.

26. Ejercicio 98.

27. Ejercicio 105.

28. Ejercicio 106.

29–32 ■ Ecuaciones Encuentre todas las soluciones reales redondeadas a dos decimales.

29. $x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$

30. $x^4 - 8x^2 + 2 = 0$

31. $x(x - 1)(x + 2) = \frac{1}{6}x$

32. $x^4 = 16 - x^3$

33–40 ■ Desigualdades Encuentre las soluciones de la desigualdad trazando las gráficas adecuadas. Indique cada respuesta redondeada a dos decimales.

33. $x^2 \leq 3x + 10$

34. $0.5x^2 + 0.875x \leq 0.25$

35. $x^3 + 11x \leq 6x^2 + 6$

36. $16x^3 + 24x^2 > -9x - 1$

37. $x^{1/3} < x$

38. $\sqrt{0.5x^2 + 1} \le 2|x|$

39. $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$

40. $(x + 1)^2 \le x^3$



41–44 ■ Desigualdades Use el método gráfico para resolver la desigualdad en el ejercicio indicado de la sección 1.8.

41. Ejercicio 45.

42. Ejercicio 46.

43. Ejercicio 55.

44. Ejercicio 56.

HABILIDADES Plus

45. Otro método gráfico En el ejemplo 2 resolvimos la ecuación $5 - 3x = 8x - 20$ trazando las gráficas de dos ecuaciones. Resuelva la ecuación trazando la gráfica de una sola ecuación. Compare su respuesta con la obtenida en el ejemplo 2.



46. Encontrar más soluciones En el ejemplo 3 encontramos dos soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 6]$. Encuentre dos soluciones más, redondeadas a dos lugares decimales.

APLICACIONES



47. Estimación de utilidades Un fabricante de aparatos electrodomésticos estima que las utilidades y (en dólares) generadas al producir x ollas al mes están dadas por la ecuación

$$y = 10x + 0.5x^2 - 0.001x^3 - 5000$$

donde $0 \le x \le 450$.

a) Trace la gráfica de la ecuación.

b) ¿Cuántas ollas se tienen que fabricar para empezar a tener ganancias

c) ¿Para qué intervalo de valores de x la ganancia de la compañía es mayor de 15 000 dólares?



48. ¿A qué distancia se puede ver? Si una persona está de pie en un barco, con el mar en calma, entonces su estatura x (en pies) sobre el nivel del mar está relacionada con la mayor distancia y (en millas) a la que puede ver por la ecuación

$$y = \sqrt{1.5x + \left(\frac{x}{5280}\right)^2}$$

a) Trace la gráfica de la ecuación para $0 \le x \le 100$.

b) ¿A qué altura debe encontrarse para poder ver a 10 millas?



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

49. REDACCIÓN: Métodos de solución algebraicos y gráficos Redacte un breve ensayo que compare los métodos algebraico y gráfico para resolver ecuaciones. Forme sus propios ejemplos para ilustrar las ventajas y desventajas de cada método.

50. DISCUSIÓN: Ingrese ecuaciones con cuidado Un estudiante desea tazar la gráfica de las ecuaciones

$$y = x^{1/3} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{x}{x + 4}$$

en la misma pantalla, de modo que ingresa la siguiente información en su calculadora:

$$\text{Y}_1 = \text{X}^\wedge 1/3 \qquad \text{Y}_2 = \text{X}/\text{X}+4$$

La calculadora traza la gráfica de dos rectas en lugar de las ecuaciones que el estudiante deseaba. ¿Qué estuvo mal?

1.12 MODELOS USANDO VARIACIONES

■ Variación directa ■ Variación inversa ■ Combinación de diferentes tipos de variación

Cuando los científicos hablan de un *modelo matemático* para un fenómeno real con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir la forma en que la población de una especie animal varía con el tiempo, o el modo en que la presión de un gas varía conforme cambia su volumen. En esta sección estudiamos una clase de modelado que se presenta con frecuencia en las ciencias, llamado *variación.*

■ Variación directa

Un tipo de variación se llama *variación directa* y ocurre cuando una cantidad es un múltiplo constante de otra. Se utiliza una función de la forma $f(x) = kx$ para modelar esta dependencia.

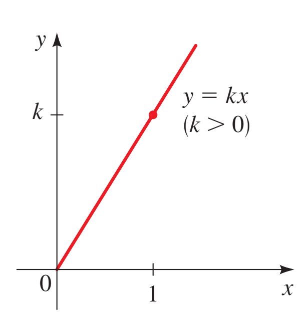


FIGURA 1

VARIACIÓN DIRECTA

Si las cantidades x y y están relacionadas por una ecuación

$$y = kx$$

para alguna constante $k \neq 0$, decimos que y **varía directamente** con x, o que y es **directamente proporcional** a x, o simplemente y **es proporcional** a x. La constante k se denomina **constante de proporcionalidad**.

Recuerde que la gráfica de una ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta con pendiente m y punto de intersección b en el eje y. Entonces, la gráfica de una ecuación $y = kx$ que describe variación directa es una recta con pendiente k y punto de intersección 0 en el eje y (véase la figura 1).

EJEMPLO 1 ■ Variación directa

Durante una tormenta se ve el rayo antes de escuchar el trueno porque la luz viaja mucho más rápido que el sonido. La distancia entre una persona y la tormenta varía directamente con el tiempo entre el relámpago y el trueno.

a) Suponga que el trueno de una tormenta que está a 5 400 pies de distancia tarda 5 s en llegar a usted. Determine la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación para la variación.

b) Trace la gráfica de esta ecuación. ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?

c) Si el tiempo entre el relámpago y el trueno es ahora de 8 s, ¿a qué distancia está la tormenta?

SOLUCIÓN

a) Sea d la distancia entre usted y la tormenta y sea t el tiempo. Se nos indica que d varía directamente con t, por lo que

$$d = kt$$

donde k es una constante. Para encontrar k, usamos el hecho de que $t = 5$ cuando $d = 5\,400$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$5\,400 = k(5) \qquad \text{Sustituya}$$

$$k = \frac{5\,400}{5} = 1\,080 \qquad \text{Despeje } k$$

Sustituyendo este valor de k de la ecuación por d, obtenemos

$$d = 1\,080t$$

porque la ecuación por d es una función de t.

b) La gráfica de la ecuación $d = 1\,080t$ es una recta que pasa por el origen con pendiente 1 080 y se muestra en la figura 2. La constante $k = 1\,080$ es la rapidez aproximada del sonido (en pies/s).

c) Cuando $t = 8$, tenemos

$$d = 1\,080 \cdot 8 = 8\,640$$

Por tanto, la tormenta está a 8 640 pies $\approx$ 1.6 millas de distancia.

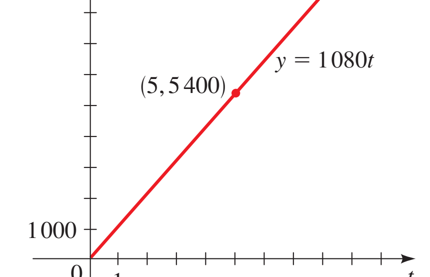


FIGURA 2

Ahora intente realizar los ejercicios 19 y 35 ■

Variación inversa

Otra función que se usa con frecuencia en el modelado matemático es $f(x) = k/x$, donde k es una constante.

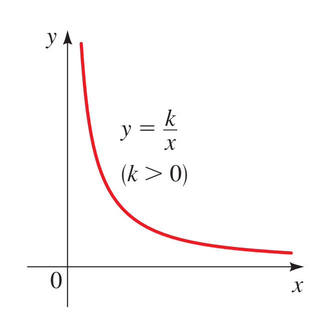


FIGURA 3 Variación inversa

> **VARIACIÓN INVERSA**
>
> Si las cantidades x y y están relacionadas por la ecuación
>
> $$y = \frac{k}{x}$$
>
> para alguna constante $k \neq 0$ decimos que y es **inversamente proporcional a** x o que y **varía inversamente** con x. La constante k se denomina **constante de proporcionalidad**.

La gráfica de $y = k/x$ para $x > 0$ se muestra en la figura 3 para el caso $k > 0$. Esta da una imagen de lo que ocurre cuando y es inversamente proporcional a x.

EJEMPLO 2 ■ Variación inversa

La ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.

a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa 0.106 m^3 a 25°C es 50 kPa. Encuentre la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación que exprese la proporcionalidad inversa. Trace una gráfica de esta ecuación.

b) Si la muestra se expande a un volumen de 0.3 m^3, encuentre la nueva presión.

SOLUCIÓN

a) Sea P la presión de la muestra de gas y sea V su volumen. Entonces, por la definición de proporcionalidad inversa, tenemos

$$P = \frac{k}{V}$$

donde k es una constante. Para encontrar k usamos el hecho de que $P = 50$ cuando $V = 0.106$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$50 = \frac{k}{0.106} \qquad \text{Sustituya}$$

$$k = (50)(0.106) = 5.3 \qquad \text{Despeje } k$$

Poniendo este valor de k en la ecuación por P, tenemos

$$P = \frac{5.3}{V}$$

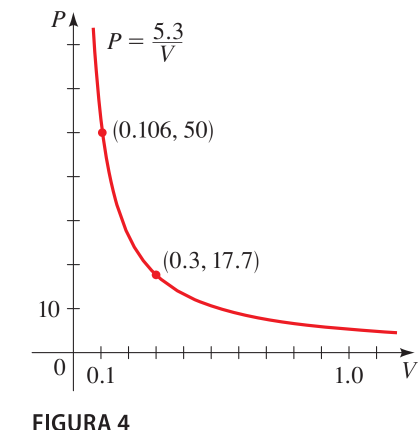


FIGURA 4

Dado que V representa volumen (que nunca es negativo), sólo trazamos la parte de la gráfica para la cual $V > 0$. En la figura 4 se muestra la gráfica.

b) Cuando $V = 0.3$, tenemos

$$P = \frac{5.3}{0.3} \approx 17.7$$

Entonces la nueva presión es aproximadamente 17.7 kPa.

Ahora intente realizar los ejercicios 21 y 43 ■

Combinación de diferentes tipos de variación

En ciencias las relaciones entre tres o más variables son comunes, y es posible cualquier combinación de los diferentes tipos de proporcionalidad que hemos estudiado. Por ejemplo, si las cantidades x, y y z están relacionados por la ecuación

$$z = kxy$$

decimos entonces que z es **proporcional al producto** de x y y. También podemos expresar esta relación diciendo que z **varía conjuntamente** como x y y, o que z es **conjuntamente proporcional** a x y y. Si las cantidades x, y y z están relacionadas por la ecuación

$$z = k\frac{x}{y}$$

decimos que z **es proporcional a** x **e inversamente proporcional a** y, o que z **varía directamente como** x **e inversamente como** y.

EJEMPLO 3 ■ Combinación de variaciones

El brillo aparente B de una fuente luminosa (medida en W/m^2) es directamente proporcional a la luminosidad L (medida en W) de la fuente de luz e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d de la fuente luminosa (medida en metros).

a) Escriba una ecuación que expresa esta variación.

b) Si se duplica la distancia, ¿en qué factor cambiará el brillo?

c) Si la distancia se reduce a la mitad y se triplica la luminosidad, ¿en qué factor cambiará el brillo?

SOLUCIÓN

a) Puesto que B es directamente proporcional a L e inversamente proporcional a d^2, tenemos

$$B = k\frac{L}{d^2} \qquad \text{Brillo a la distancia } d\text{, luminosidad } L$$

donde k es una constante.

b) Para obtener el brillo al doble de la distancia sustituimos d por $2d$ en la ecuación obtenida en el inciso *a*).

$$B = k\frac{L}{(2d)^2} = \frac{1}{4}\left(k\frac{L}{d^2}\right) \qquad \text{Brillo a la distancia } 2d$$

Comparando esta expresión con la obtenida en el inciso *a*) vemos que el brillo es $\frac{1}{4}$ del brillo original.


© LuckyKeeper/Shutterstock.com

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Proporcionalidad: forma y tamaño

Muchas cantidades reales están relacionadas con proporcionalidades. Utilizamos el símbolo de proporcionalidad $\propto$ para expresar proporcionalidades en el mundo natural. Por ejemplo, para animales con la misma forma, el área de la piel y el volumen son proporcionales, de diferentes maneras, a la longitud del animal. En un caso utilizamos proporcionalidad para determinar cómo el tamaño de una rana está relacionado con su sensibilidad a los contaminantes en el ambiente. Puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

c) Para obtener el brillo a la mitad de la distancia d y al triple la luminosidad L remplazamos d por $d/2$ y L por $3L$ en la ecuación que obtuvimos en el inciso a).

$$B = k\frac{3L}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} = \frac{3}{\frac{1}{4}}\left(k\frac{L}{d^2}\right) = 12\left(k\frac{L}{d^2}\right) \qquad \text{Brillo a la distancia } \tfrac{1}{2}d \text{ y luminosidad } 3L$$

Comparando esta expresión con la obtenida en el inciso a) vemos que el brillo es 12 veces el brillo original.

Ahora intente realizar los ejercicios 23 y 45 ■

Para calcular la distancia de las estrellas se utiliza la relación entre el brillo aparente, el brillo real (o luminosidad) y la distancia (véase el ejercicio 56).

EJEMPLO 4 ■ Ley de Newton de la gravitación

La ley de Newton de la gravitación dice que dos cuerpos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza F que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre los cuerpos. Exprese la ley de Newton de la gravitación como una ecuación.

SOLUCIÓN Usando las definiciones de variación conjunta e inversa y la tradicional notación G para la constante de proporcionalidad gravitacional tenemos

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 31 y 37 ■

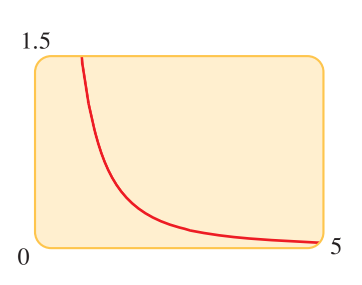


FIGURA 5 Gráfica de $F = \dfrac{1}{r^2}$

Si m_1 y m_2 son masas fijas, entonces la fuerza gravitacional entre ellas es $F = C/r^2$ (donde $C = Gm_1m_2$ es una constante). La figura 5 muestra la gráfica de esta ecuación para $r > 0$ con $C = 1$. Observe cómo decrece la atracción gravitacional cuando la distancia aumenta.

Al igual que la ley de la gravitación, muchas leyes de la naturaleza son *leyes cuadradas inversas*. Hay una razón geométrica. Imagine una fuerza o energía procedente de una fuente puntual que difunde su influencia igualmente en todas direcciones, al igual que la fuente de luz del ejemplo 3, o la fuerza gravitacional ejercida por un planeta del ejemplo 4. La influencia de la fuerza o energía a una distancia r de la fuente se extiende sobre la superficie de una esfera de radio r, que tiene área $A = 4\pi r^2$ (véase la figure 6). Así la intensidad I a una distancia r de la fuente es la fuerza de la fuente S dividida entre el área A de la esfera:

$$I = \frac{S}{4\pi r^2} = \frac{k}{r^2}$$

donde k es la constante $S/(4\pi)$. Entonces todas las fuentes puntuales de luz, sonido, gravedad, campos electromagnéticos y radiación deben obedecer leyes cuadradas inversas, simplemente debido a la geometría del espacio.

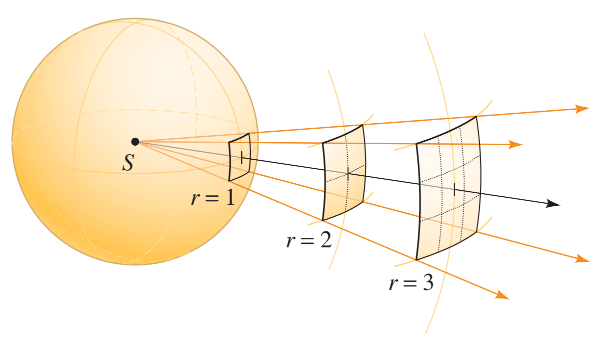


FIGURA 6 Energía de una fuente puntual S

1.12 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si las cantidades x y y están relacionadas por la ecuación $y = 3x$, entonces decimos que y es ________________ ________________ a x y la constante de ________________ es 3.

2. Si las cantidades x y y están relacionadas por la ecuación $y = \frac{3}{x}$, entonces decimos que y es ________________ ________________ a x y la constante de ________________ es 3.

3. Si las cantidades x, y y z están relacionadas por la ecuación $z = 3\frac{x}{y}$, entonces decimos que z es ________________ ________________ a x y ________________ ________________ a y.

4. Si z es conjuntamente proporcional a x y y, y si z es 10 cuando x es 4 y y es 5, entonces x, y y z están relacionadas por la ecuación $z =$ __________.

5–6 ■ En cada ecuación, ¿es y directamente proporcional, inversamente proporcional o no es proporcional a x?

5. ***a***) $y = 3x$ ***b***) $y = 3x + 1$

6. ***a***) $y = \frac{3}{x + 1}$ ***b***) $y = \frac{3}{x}$

HABILIDADES

7–18 ■ **Ecuaciones de proporcionalidad** Escriba una ecuación que exprese el enunciado.

7. T varía directamente con x.

8. P es directamente proporcional a w.

9. v es inversamente proporcional a z.

10. w es proporcional a m y n.

11. y es proporcional a s e inversamente proporcional a t.

12. P varía inversamente a T.

13. z es proporcional a la raíz cuadrada de y.

14. A es proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de t.

15. V es proporcional al producto de l, w y h.

16. S es proporcional a los cuadrados de r y θ.

17. R es proporcional al producto de los cuadrados de P y t e inversamente proporcional al cubo de b.

18. A es conjuntamente proporcional a las raíces cuadradas de x y y.

19–30 ■ **Constantes de proporcionalidad** Exprese el enunciado como una ecuación. Use la información dada para encontrar la constante de proporcionalidad.

19. y es directamente proporcional a x. Si $x = 6$, entonces $y = 42$.

20. w es inversamente proporcional a t. Si $t = 8$, entonces $w = 3$.

21. A varía inversamente a r. Si $r = 3$, entonces $A = 7$.

22. P es directamente proporcional a T. Si $T = 300$, entonces $P = 20$.

23. A es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a t. Si $x = 7$ y $t = 3$, entonces $A = 42$.

24. S es proporcional al producto de p y q. Si $p = 4$ y $q = 5$, entonces $S = 180$.

25. W es inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $r = 6$, entonces $W = 10$.

26. t es proporcional al producto de x y y e inversamente proporcional a r. Si $x = 2$, $y = 3$ y $r = 12$, entonces $t = 25$.

27. C es conjuntamente proporcional a l, w y h. Si $l = w = h = 2$, entonces $C = 128$.

28. H es conjuntamente proporcional a los cuadrados de l y w. Si $l = 2$ y $w = \frac{1}{3}$, entonces $H = 36$.

29. R es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de x. Si $x = 121$, entonces $R = 2.5$.

30. M es conjuntamente proporcional a, b y c e inversamente proporcional a d. Si a y d tienen el mismo valor y si b y c son, ambas, 2 entonces $M = 128$.

31–34 ■ **Proporcionalidad** Se da un enunciado que describe la relación entre las variables x, y y z. ***a***) Exprese el enunciado como una ecuación de proporcionalidad. ***b***) Si x se triplica y y se duplica, ¿en qué factor cambia z? (Vea el ejemplo 3.)

31. z varía directamente como el cubo de x e inversamente como el cuadrado de y.

32. z es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la cuarta potencia de y.

33. z es conjuntamente proporcional al cubo de x y a la quinta potencia de y.

34. z es inversamente proporcional al cuadrado de x y al cubo de y.

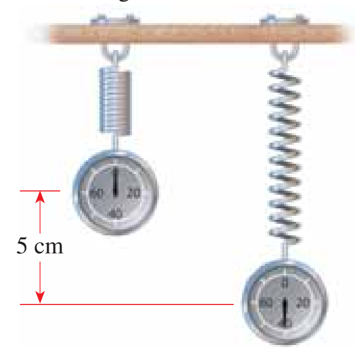
APLICACIONES

35. **Ley de Hooke** La ley de Hooke dice que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más que su longitud natural es directamente proporcional a x. Aquí la constante de proporcionalidad se denomina **constante de resorte**.

a) Escriba la ley de Hooke como una ecuación.

b) Si un resorte tiene una longitud natural de 5 cm y se requiere una fuerza de 30 N para mantener estirado el resorte a una longitud de 9 cm, encuentre la constante de resorte.

c) ¿Qué fuerza es necesaria para mantener estirado el resorte a una longitud de 11 cm?



36. Costos de impresión El costo C de imprimir una revista es conjuntamente proporcional al número de páginas p de la revista y el número m de revistas impresas.

a) Escriba una ecuación que exprese esta variación conjunta.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad si el costo de impresión es 60 000 dólares para 4 000 ejemplares de una revista de 120 páginas.

c) ¿Cuál sería el costo de impresión de 5 000 ejemplares de una revista de 92 páginas?

37. Potencia de un molino de viento La potencia P que se puede obtener de un molino de viento es directamente proporcional al cubo de la velocidad del viento s.

a) Escriba una ecuación que exprese la variación.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad para un molino de viento que produce 96 watts de potencia cuando el viento está soplando a 20 mi/h.

c) ¿Cuánta potencia producirá el molino de viento si la velocidad del viento aumenta a 30 mi/h?

38. Potencia necesaria para impulsar un bote La potencia P (medida en caballos de fuerza, hp) necesaria para impulsar un bote es directamente proporcional al cubo de la velocidad s.

a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.

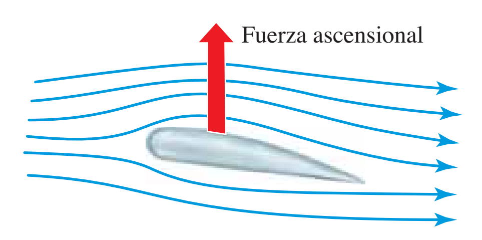
b) Encuentre la constante de proporcionalidad para un barco que necesita un motor de 80 caballos de fuerza para propulsar el barco a 10 nudos.

c) ¿Cuánta energía se necesita para conducir este barco a 15 nudos?



39. Distancia de frenado La distancia de frenado D de un auto después de accionar los frenos varía directamente con el cuadrado de su velocidad s. Cierto auto que corre a 40 mi/h puede detenerse en 150 pies. ¿Cuál es la velocidad máxima a la que puede correr si necesita detenerse en 200 pies?

40. Fuerza ascensional aerodinámica La fuerza ascensional L del ala de un avión durante el despegue varía conjuntamente con el cuadrado de la velocidad s del avión y el área A de sus alas. Un avión con un área de alas de 500 pies^2 que corre a 50 mi/h experimenta una fuerza ascensional de 1 700 lb. ¿Cuánta fuerza ascensional experimentará un avión con área de alas de 600 pies^2 que corre a 40 mi/h?



41. Fuerza de resistencia al avance de un bote La fuerza F de resistencia al avance de un bote es conjuntamente proporcional al área A de superficie húmeda en el casco y el cuadrado de la velocidad s del bote. Un bote experimenta una fuerza de resistencia al avance de 220 lb cuando navega a 5 mi/h con un área de superficie húmeda de 40 pies^2. ¿Con qué rapidez debe estar navegando un bote si tiene 28 pies^2 de área de superficie húmeda y está experimentando una fuerza de resistencia al avance de 175 lb?

42. Tercera ley de Kepler La tercera ley de Kepler del movimiento planetario dice que el cuadrado del periodo T de un planeta (el tiempo que tarda en hacer una revolución completa alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de su promedio de distancia d desde el Sol.

a) Exprese la tercera ley de Kepler como ecuación.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad usando el hecho que, para nuestro planeta, el periodo es alrededor de 365 días y la distancia promedio es de unos 93 millones de millas.

c) El planeta Neptuno está a unos 2.79×10^9 millas del Sol. Encuentre el periodo de Neptuno.

43. Ley de gas ideal La presión P de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional al volumen V.

a) Escriba una ecuación que expresa esta variación.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad si 100 L de gas ejercen una presión de 33.2 kPa a una temperatura de 400 K (temperatura absoluta medida en la escala Kelvin).

c) Si la temperatura se aumenta a 500 K y el volumen se reduce a 80 L, ¿cuál es la presión del gas?

44. Derrape en una curva Un auto se desplaza sobre una curva que forma un arco circular. La fuerza F necesaria para evitar que el auto derrape es conjuntamente proporcional al peso w del auto y al cuadrado de la velocidad s, y es inversamente proporcional al radio r de la curva.

a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.

b) Un auto que pesa 1 600 lb se desplaza en una curva a 60 mi/h. El siguiente auto en transitar por esta curva pesa 2 500 lb y requiere la misma fuerza que el primer auto para evitar derrapar. ¿A qué velocidad circula?



45. Intensidad del sonido La intensidad L de un sonido (medida en decibeles, dB) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente del sonido.

a) Escriba una ecuación que expresa esta variación.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad si una persona, a 10 pies de una podadora de césped, experimenta un nivel de sonido de 70 dB.

c) Si se duplica la distancia en el inciso *b*), ¿en qué factor cambia el volumen?

d) Si la distancia en el inciso *b*) se reduce a la mitad, ¿en qué factor cambia el volumen?

46. Un chorro de agua La potencia P de un chorro de agua es conjuntamente proporcional al área de sección transversal A del chorro y al cubo de la velocidad v.

a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.

b) Si la velocidad se duplica y el área de sección transversal se reduce a la mitad, ¿en qué factor aumenta la potencia?

c) Si la velocidad se reduce a la mitad y se triplica el área de sección transversal, ¿en qué factor cambia la potencia?



47. Resistencia eléctrica La resistencia R de un alambre varía directamente con su longitud L e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.

a) Escriba una ecuación que exprese esta variación conjunta.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad si un alambre de 1.2 m de largo y 0.005 m de diámetro tiene una resistencia de 140 ohms.

c) Encuentre la resistencia de un alambre hecho del mismo material, que mide 3 m de largo y tiene un diámetro de 0.008 m.

d) ¿Si el diámetro se duplica y la longitud se triplica, en qué factor cambia la resistencia?

48. Producción de coles En una corta temporada de producción del territorio ártico canadiense de Nunavut algunos jardineros encuentran posible producir coles gigantes en el sol de medianoche. Suponga que el tamaño final de una col es proporcional a la cantidad de nutrientes que recibe e inversamente proporcional al número de otras coles que la rodean. Una col que recibe 20 onzas de nutrientes y tenía otras 12 coles a su alrededor creció para pesar 30 libras. ¿De qué tamaño crecerá si recibe 10 onzas de nutrientes y tiene sólo 5 coles "vecinas"?

49. Energía de radiación El total de energía de radiación emitida por una superficie caliente, por unidad de área, varía con la cuarta potencia de su temperatura absoluta T. La temperatura es 6 000 K en la superficie del Sol y 300 K en la superficie de la Tierra.

a) ¿Cuántas veces es producida más energía de radiación por unidad de área por el Sol que por la Tierra?

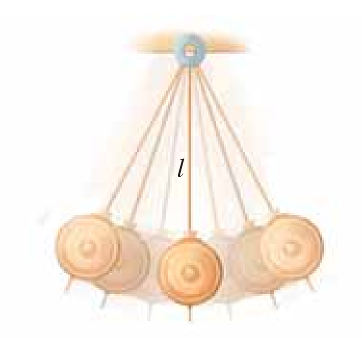
b) El radio de la Tierra es de 3 960 millas y el radio del Sol es de 435 000 millas. ¿Cuántas veces emite más radiación total el Sol que la Tierra?

50. Valor de un lote El valor de un lote para construcción en la isla de Galiano es conjuntamente proporcional a su área y a la cantidad de agua producida por un pozo que está en la propiedad. Un lote de 200 por 300 pies tiene un pozo que produce 10 galones de agua por minuto, y está valuado en 48 000 dólares. ¿Cuál es el valor de un lote de 400 por 400 pies si el pozo del lote produce 4 galones de agua por minuto?

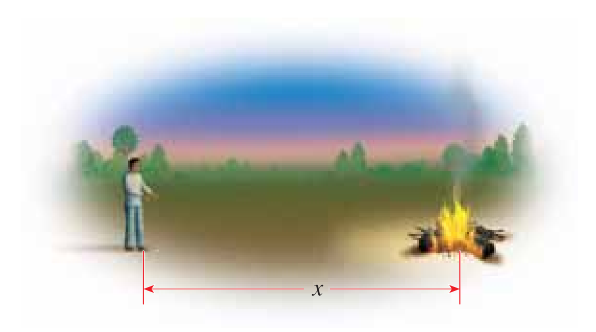
51. Ley del péndulo El periodo de un péndulo (tiempo transcurrido durante una oscilación completa del péndulo) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del péndulo.

a) Exprese esta relación escribiendo una ecuación.

b) Para duplicar el periodo, ¿cómo tendríamos que cambiar la longitud l?



52. Calor de una fogata El calor que percibe un excursionista frente a una fogata es proporcional a la cantidad de madera en la fogata e inversamente proporcional al cubo de su distancia desde la misma. Si el excursionista está a 20 pies de la fogata y alguien duplica la cantidad de madera que está ardiendo, ¿a qué distancia de la fogata tendría que estar para captar el mismo calor que antes?



53. Frecuencia de vibración La frecuencia f de vibraciones de una cuerda de violín es inversamente proporcional a su longitud L. La constante de proporcionalidad k es positiva y depende de la tensión y la densidad de la cuerda.

a) Escriba una ecuación que represente esta variación.

b) ¿Qué efecto tendrá duplicar la longitud de la cuerda en la frecuencia de su vibración?

54. Propagación de una enfermedad La rapidez r con la que se propaga una enfermedad en una población de tamaño P es conjuntamente proporcional al número x de personas infectadas y al número $P - x$ que no estén infectadas. Una infección brota en una pequeña ciudad que tiene una población $P = 5000$.

a) Escriba una ecuación que exprese r como función de x.

b) Compare la rapidez de propagación de esta infección cuando 1 000 personas están infectadas. ¿Qué rapidez es mayor? ¿En qué factor?

c) Calcule la rapidez de dispersión cuando toda la población está infectada. ¿Por qué esta respuesta tiene sentido intuitivo?

55–56 ■ Combinación de variaciones Resuelva el problema usando la relación entre brillo B, luminosidad L y distancia d, que se deduce en el ejemplo 3. La constante de proporcionalidad es $k = 0.080$

55. Brillo de una estrella La luminosidad de una estrella es $L = 2.5 \times 10^{26}$ W, y su distancia desde la Tierra es $d = 2.4 \times 10^{19}$ m. ¿Cuál es el brillo que parece tener la estrella sobre la Tierra?

56. Distancia a una estrella La luminosidad de una estrella es $L = 5.8 \times 10^{30}$ W, y su brillo visto desde la Tierra es $B = 8.2 \times 10^{-16}$ W/m^2. Determine la distancia a la estrella desde la Tierra.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

57. DISCUSIÓN: ¿Lo es todo la proporcionalidad? Numerosas leyes de física y química se pueden expresar como proporcionalidades. Dé al menos un ejemplo de una función que ocurra en ciencias y que *no* sea una proporcionalidad.

CAPÍTULO 1 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Propiedades de los números reales (p. 3)

Conmutativa: $a + b = b + a$

$ab = ba$

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

$(ab)c = a(bc)$

Distributiva: $a(b + c) = ab + ac$

Valor absoluto (pp. 8-9)

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Distancia entre a y b:

$$d(a, b) = |b - a|$$

Exponentes (p. 14)

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Radicales (p. 18)

$\sqrt[n]{a} = b$ significa $b^n = a$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es impar, entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Si n es par, entonces $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Fórmulas de productos notables (p. 27)

Suma y diferencia de los mismos términos:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Cuadrado de una suma o diferencia:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Cubo de una suma o diferencia:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Fórmulas especiales de factorización (p. 30)

Diferencia de cuadrados:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Cuadrados perfectos:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

Suma o diferencia de cubos:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Expresiones racionales (pp. 37-38)

Podemos eliminar factores comunes:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores juntos y sus denominadores juntos:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Para dividir fracciones invertimos el divisor y multiplicamos:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$$

Para sumar fracciones encontramos un común denominador:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C}$$

Propiedades de la igualdad (p. 46)

$A = B \iff A + C = B + C$

$A = B \iff CA = CB$ $(C \neq 0)$

Ecuaciones lineales (p. 46)

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma $ax + b = 0$

Propiedad producto cero (p. 48)

Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

Completar el cuadrado (p. 49)

Para hacer de $x^2 + bx$ un cuadrado perfecto sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Esto da el cuadrado perfecto

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Fórmula cuadrática (p. 50)

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sus soluciones están dadas por la **fórmula cuadrática**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El **discriminante** es $D = b^2 - 4ac$.

Si $D > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales.

Si $D = 0$, la ecuación tiene una solución.

Si $D < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

Números complejos (pp. 59-61)

Un **número complejo** es un número de la forma $a + bi$, donde $i = \sqrt{-1}$.

El **complejo conjugado** de $a + bi$ es

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

Para **multiplicar** números complejos debe tratarlos como binomios y utilizar $i^2 = -1$ para simplificar el resultado.

Para **dividir** números complejos multiplique numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di}\right) \cdot \left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Desigualdades (p. 82)

Sumar la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente:

$$A < B \iff A + C < B + C$$

Multiplicar cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente. Multiplicar cada lado por la misma cantidad *negativa* invierte la dirección de la desigualdad:

Si $C > 0$, entonces $A < B \iff CA < CB$

Si $C < 0$, entonces $A < B \iff CA > CB$

Desigualdades de valor absoluto (p. 86)

Para resolver las desigualdades de valor absoluto utilice

$$|x| < C \iff -C < x < C$$

$$|x| > C \iff x < -C \quad \text{o} \quad x > C$$

Fórmula de distancia (p. 93)

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Fórmula del punto medio (p. 94)

El punto medio del segmento de recta de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Intersecciones (p. 97)

Para encontrar las **intersecciones *x*** de la gráfica de una ecuación haga que $y = 0$ y despeje x.

Para encontrar las **intersecciones *y*** de la gráfica de una ecuación haga que $x = 0$ y despeje y.

Circunferencias (p. 98)

La circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio r tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La circunferencia con centro (h, k) y radio r tiene la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Simetría (p. 100)

La gráfica de la ecuación es **simétrica respecto al eje *x*** si la ecuación no cambia cuando y se sustituye por $-y$.

La gráfica de una ecuación es **simétrica respecto al eje *y*** si la ecuación no cambia cuando x se sustituye por $-x$.

La gráfica de una ecuación es **simétrica respecto al origen** si la ecuación no cambia cuando x se sustituye por $-x$ y y por $-y$.

Pendiente de una recta (p. 107)

La pendiente de una recta no vertical que contiene los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuaciones de rectas (pp. 108-110)

Si una recta tiene pendiente m, tiene intersección y, b, y contiene el punto (x_1, y_1), entonces:

la **forma punto-pendiente** de esta ecuación es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

la **forma pendiente-intersección** de esta ecuación es

$$y = mx + b$$

La ecuación de cualquier recta se puede expresar en la **forma general**

$$Ax + By + C = 0$$

(donde A y B no pueden ser ambos 0).

Rectas verticales y horizontales (p. 110)

La recta **vertical** que contiene el punto (a, b) tiene la ecuación $x = a$.

La recta **horizontal** que contiene el punto (a, b) tiene la ecuación $y = b$.

Rectas paralelas y perpendiculares (pp. 111-112)

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son

paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$

perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$

Variación (pp. 123-124)

Si y es **directamente proporcional** a x, entonces

$$y = kx$$

Si y es **inversamente proporcional** a x, entonces

$$y = \frac{k}{x}$$

■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a***) ¿En qué consiste el conjunto de números naturales? ¿En qué consiste el conjunto de números enteros? Dé un ejemplo de un entero que no sea un número natural.
b) ¿En qué consiste el conjunto de números racionales? Dé un ejemplo de un número racional que no sea un entero.
c) ¿En qué consiste el conjunto de números irracionales? Dé un ejemplo de un número irracional.
d) ¿En qué consiste el conjunto de los números reales?

2. Se da una propiedad de los números reales. Enuncie la propiedad y dé un ejemplo en el que se le utilice.
i) Propiedad conmutativa
ii) Propiedad asociativa
iii) Propiedad distributiva

3. Explique la diferencia entre el intervalo abierto (a, b) y el intervalo cerrado $[a, b]$. Dé un ejemplo de un intervalo que no sea abierto ni cerrado.

4. Dé la fórmula para encontrar la distancia entre dos números reales a y b. Utilice la fórmula para encontrar la distancia entre 103 y -52.

5. Supongamos que $a \neq 0$ es cualquier número real.
a) En la expresión a^n, ¿cuál es la base y cuál es el exponente?
b) ¿Qué significa a^n si n es un entero positivo? ¿Qué significa 6^5?
c) ¿Qué significa a^{-n} si n es un entero positivo? ¿Qué significa 3^{-2}?
d) ¿Qué significa a^n si n es cero?
e) Si m y n son enteros positivos, ¿qué significa $a^{m/n}$? ¿Qué significa $4^{3/2}$?

6. Enuncie las primeras cinco leyes de exponentes. Dé ejemplos en los que usaría cada ley.

7. Cuando se multiplican dos potencias de la misma cantidad, ¿qué se hace con los exponentes? Cuando se eleva una potencia a una nueva potencia, ¿qué se hace con los exponentes?

8. ***a***) ¿Qué significa $\sqrt[n]{a} = b$?
b) ¿Es verdad que $\sqrt{a^2}$ es igual a $|a|$? Intente con valores de a positivos y negativos.
c) Cuántas raíces n-ésimas reales tiene un número real positivo si n es par? Y ¿si n es impar?
d) ¿Es $\sqrt[4]{-2}$ un número real? ¿Es $\sqrt[3]{-2}$ un número real? Explique por qué sí o por qué no.

9. Explique los pasos necesarios para racionalizar un denominador. ¿Cuál es el primer paso lógico para racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5}{\sqrt{3}}$?

10. Explique la diferencia entre desarrollar una expresión y factorizar una expresión.

11. Enuncie las fórmulas de productos notables que se usan para desarrollar la expresión dada.
i) $(a + b)^2$ ***ii***) $(a - b)^2$ ***iii***) $(a + b)^3$
iv) $(a - b)^3$ ***v***) $(a + b)(a - b)$

Utilice la fórmula adecuada para desarrollar $(x + 5)^2$ y $(x + 5)(x - 5)$.

12. Enuncie las siguientes fórmulas especiales de factorización.
i) Diferencia de cuadrados
ii) Cuadrado perfecto
iii) Suma de cubos

Utilice la fórmula adecuada para factorizar $x^2 - 9$.

13. Si el numerador y el denominador de una expresión racional tienen un factor común, ¿cómo simplificaría la expresión? Simplifique la expresión $\frac{x^2 + x}{x + 1}$.

14. Explique lo siguiente.
a) Cómo multiplicar y dividir expresiones racionales.
b) Cómo sumar y restar expresiones racionales.
c) ¿Qué MCD utilizamos para realizar la suma en la expresión $\frac{3}{x - 1} + \frac{5}{x + 2}$?

15. ¿Cuál es el primer paso lógico para racionalizar el denominador de $\frac{3}{1 + \sqrt{x}}$?

16. ¿Cuál es la diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación? Dé ejemplos.

17. Escriba la forma general de cada tipo de ecuación.
i) Ecuación lineal
ii) Ecuación cuadrática

18. ¿Cuáles son las tres formas de resolver una ecuación cuadrática?

19. Enuncie la propiedad de producto cero. Utilice la propiedad para resolver la ecuación $x(x - 1) = 0$.

20. ¿Qué necesita sumar a $ax^2 + bx$ para completar el cuadrado? Complete el cuadrado para la expresión $x^2 + 6x$.

21. Enuncie la fórmula cuadrática para la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, y utilícela para resolver la ecuación $x^2 + 6x - 1 = 0$.

22. ¿Cuál es el discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$? Encuentre el discriminante de $2x^2 - 3x + 5 = 0$. ¿Cuántas raíces reales tiene esta ecuación?

23. ¿Cuál es el primer paso lógico para resolver la ecuación $\sqrt{x - 1} = x - 3$? ¿Por qué es importante verificar las respuestas cuando se resuelven ecuaciones de este tipo?

24. ¿Qué es un número complejo? Dé un ejemplo de un número complejo e identifique las partes real e imaginaria.

25. ¿Cuál es el complejo conjugado de un número complejo $a + bi$?

26. ***a***) ¿Cómo se suman los números complejos?
b) ¿Cómo se multiplica $(3 + 5i)(2 - i)$?
c) ¿Es $(3 - i)(3 + i)$ un número real?
d) ¿Cómo se simplifica el cociente $(3 + 5i)/(3 - i)$?

27. Enuncie las directrices para modelar con ecuaciones.

28. Explique cómo resolver el tipo de problema dado.
a) Desigualdad lineal: $2x \geq 1$
b) Desigualdad no lineal: $(x - 1)(x - 4) < 0$
c) Ecuación con valor absoluto: $|2x - 5| = 7$
d) Desigualdad con valor absoluto: $|2x - 5| \leq 7$

29. ***a***) En el plano coordenado, ¿cómo se llaman el eje horizontal y el eje vertical?
b) Para trazar la gráfica de un par ordenado de números (x, y), se necesita el plano coordenado. Para el punto $(2, 3)$, ¿cuál es la coordenada x y cuál la coordenada y?
c) Para una ecuación en las variables x y y, ¿cómo se determina si un punto dado se encuentra sobre la gráfica? El punto $(5, 3)$ ¿está sobre la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$?

30. ***a***) ¿Cuál es la fórmula para encontrar la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)?
b) ¿Cuál es la fórmula para encontrar el punto medio entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2)?

31. ¿Cómo se encuentran las intersecciones x y y de una gráfica de una ecuación?

32. ***a***) Escriba una ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r.
b) Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, -1)$ y radio 3.

33. ***a***) ¿Cómo prueba si la gráfica de una ecuación es simétrica respecto a *i*) el eje x, *ii*) el eje y y *iii*) el origen?
b) ¿Qué tipo de simetría tiene la gráfica de la ecuación $xy^2 + y^2x^2 = 3x$?

34. ***a***) ¿Qué es la pendiente de una recta? ¿Cómo se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(1, -2)$?
b) ¿Cómo encuentra la pendiente y la intersección y de la recta $6x + 3y = 12$?
c) ¿Cómo escribe la ecuación para una recta que tiene pendiente 3 y que pasa por el punto $(1, 2)$?

35. Dé una ecuación de una recta vertical y de una recta horizontal que pasa por el punto $(2, 3)$.

36. Enuncie la ecuación general de una recta.

37. Dadas las rectas con pendientes m_1 y m_2, explique cómo podría decir si las rectas son *i*) paralelas, *ii*) perpendiculares.

38. ¿Cómo resuelve una ecuación *i*) algebraicamente? *ii*) gráficamente?

39. ¿Cómo resuelve una desigualdad *i*) algebraicamente? *ii*) gráficamente?

40. Escriba una ecuación que exprese cada relación.
a) y es directamente proporcional a x.
b) y es inversamente proporcional a x.
c) z es conjuntamente proporcional a x y y.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–4 ■ Propiedades de números reales Exprese la propiedad de números reales que se está usando.

1. $3x + 2y = 2y + 3x$

2. $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$

3. $4(a + b) = 4a + 4b$

4. $(A + 1)(x + y) = (A + 1)x + (A + 1)y$

5–6 ■ Intervalos Exprese el intervalo en términos de desigualdades y luego trace la gráfica del intervalo.

5. $[-2, 6)$ **6.** $(-\infty, 4]$

7–8 ■ Intervalos Exprese la desigualdad en notación de intervalo y luego trace la gráfica del intervalo correspondiente.

7. $x \geq 5$ **8.** $-1 < x \leq 5$

9–16 ■ Evaluar Evalúe la expresión.

9. $|1 - |-4||$

10. $5 - |10 - |-4||$

11. $2^{1/2}8^{1/2}$

12. $2^{-3} - 3^{-2}$

13. $216^{-1/3}$

14. $64^{2/3}$

15. $\dfrac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}$

16. $\sqrt{2}\sqrt{50}$

17–20 ■ Radicales y exponentes Simplifique la expresión.

17. ***a)*** $(a^2)^{-3}(a^3b)^2(b^3)^4$ ***b)*** $(3xy^2)^3(\frac{2}{3}x^{-1}y)^2$

18. ***a)*** $\dfrac{x^2(2x)^4}{x^3}$ ***b)*** $\left(\dfrac{r^2s^{4/3}}{r^{1/3}s}\right)^6$

19. ***a)*** $\sqrt[3]{(x^3y)^2y^4}$ ***b)*** $\sqrt{x^2y^4}$

20. ***a)*** $\dfrac{8r^{1/2}s^{-3}}{2r^{-2}s^4}$ ***b)*** $\left(\dfrac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$

21–24 ■ Notación científica Estos ejercicios implican notación científica.

21. Escriba el número 78 250 000 000 en notación científica.

22. Escriba el número 2.08×10^{-8} en notación decimal ordinaria.

23. Si $a \approx 0.00000293$, $b \approx 1.582 \times 10^{-14}$ y $c \approx 2.8064 \times 10^{12}$ use una calculadora para aproximar el número ab/c.

24. Si su corazón late 80 veces por minuto y usted vive 90 años estime el número de veces que su corazón pulsa durante toda su vida. Exprese su respuesta en notación científica.

25–38 ■ Factorizar Factorice la expresión completamente.

25. $x^2 + 5x - 14$

26. $12x^2 + 10x - 8$

27. $x^4 - 2x^2 + 1$

28. $12x^2y^4 - 3xy^5 + 9x^3y^2$

29. $16 - 4t^2$

30. $2y^6 - 32y^2$

31. $x^6 - 1$

32. $16a^4b^2 + 2ab^5$

33. $-3x^{-1/2} + 2x^{1/2} + 5x^{3/2}$

34. $7x^{-3/2} - 8x^{-1/2} + x^{1/2}$

35. $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$

36. $w^3 - 3w^2 - 4w + 12$

37. $(a + b)^2 - 3(a + b) - 10$

38. $(x + 2)^2 - 7(x + 2) + 6$

39–50 ■ Operaciones con expresiones algebraicas Realice las operaciones indicadas y simplifique.

39. $(2y - 7)(2y + 7)$

40. $(1 + x)(2 - x) - (3 - x)(3 + x)$

41. $x^2(x - 2) + x(x - 2)^2$

42. $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)$

43. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

44. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 6x + 5} \div \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 1}$

45. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{3}{(x - 2)^2}$

46. $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{2}{x^2 - x - 2}$

47. $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

48. $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}}$

49. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (racionalice el denominador)

50. $\dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$ (racionalice el denominador)

51–54 ■ Racionalizar Racionalice el denominador y simplifique.

51. $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$

52. $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

53. $\dfrac{10}{\sqrt{2} - 1}$

54. $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$

55–70 ■ Resolver ecuaciones Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

55. $7x - 6 = 4x + 9$

56. $8 - 2x = 14 + x$

57. $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{3x}{3x - 6}$

58. $(x + 2)^2 = (x - 4)^2$

59. $x^2 - 9x + 14 = 0$

60. $x^2 + 24x + 144 = 0$

61. $2x^2 + x = 1$

62. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

63. $4x^3 - 25x = 0$

64. $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$

65. $3x^2 + 4x - 1 = 0$

66. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 1} = 3$

67. $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

68. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

69. $|x - 7| = 4$

70. $|2x - 5| = 9$

71–74 ■ Números complejos Evalúe la expresión y escriba en la forma $a + bi$.

71. ***a)*** $(2 - 3i) + (1 + 4i)$ ***b)*** $(2 + i)(3 - 2i)$

72. ***a)*** $(3 - 6i) - (6 - 4i)$ ***b)*** $4i(2 - \frac{1}{2}i)$

73. ***a)*** $\dfrac{4 + 2i}{2 - i}$ ***b)*** $(1 - \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})$

74. ***a)*** $\dfrac{8 + 3i}{4 + 3i}$ ***b)*** $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-40}$

75–80 ■ Soluciones reales y complejas Encuentre todas las soluciones reales y complejas de la ecuación.

75. $x^2 + 16 = 0$

76. $x^2 = -12$

77. $x^2 + 6x + 10 = 0$

78. $2x^2 - 3x + 2 = 0$

79. $x^4 - 256 = 0$

80. $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$

81. Mezclas El propietario de una tienda vende pasitas en 3.20 dólares por libra y nueces en \$2.40 por libra. Decide mezclar las pasitas y las nueces y vender 50 lb de la mezcla en \$2.72 por libra. ¿Qué cantidades de pasitas y nueces debe usar?

82. Distancia y tiempo Antonio sale de Kingston a las 2:00 p.m. y viaja en auto a Queensville, a 160 millas de distancia, a 45 mi/h. A las 2:15 p.m. Helen sale de Queensville y conduce su auto hacia Kingston a 40 mi/h. ¿A qué hora coinciden en un punto de la carretera?

83. Distancia y tiempo Una mujer se traslada en bicicleta a 8 mi/h más rápido de lo que corre. Todas las mañanas recorre en bicicleta 4 millas y corre $2\frac{1}{2}$ millas, para un total de una hora de ejercicio. ¿Cuál es la velocidad a la que corre?

84. Geometría La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 20 cm de longitud. La suma de las longitudes de los otros dos lados es 28 cm. Encuentre las longitudes de los otros lados del triángulo.

85. Hacer el trabajo Abbie pinta casas el doble de rápido que Beth y el triple de rápido que Cathie. Si a las tres trabajando juntas les toma 60 minutos pintar una sala, ¿cuánto tiempo tardaría Abbie si trabajara sola?

86. Dimensiones de un jardín La propietaria de una casa desea poner una cerca en tres terrenos de jardín adyacentes, uno para cada uno de sus hijos, como se muestra en la figura. Si cada lote ha de tener 80 pies^2 de área y ella tiene a la mano 88 pies de material para la cerca, ¿qué dimensiones debe tener cada lote?



87–94 ■ Desigualdades Resuelva la desigualdad. Exprese la solución usando notación de intervalos y trace la gráfica del conjunto solución en la recta numérica real.

87. $3x - 2 > -11$

88. $-1 < 2x + 5 \leq 3$

89. $x^2 + 4x - 12 > 0$

90. $x^2 \leq 1$

91. $\dfrac{x - 4}{x^2 - 4} \leq 0$

92. $\dfrac{5}{x^3 - x^2 - 4x + 4} < 0$

93. $|x - 5| \leq 3$

94. $|x - 4| < 0.02$

95–96 ■ Plano coordenado Se dan dos puntos P y Q. ***a***) Coloque P y Q en un plano de coordenadas. ***b***) Encuentre la distancia de P a Q. ***c***) Encuentre el punto medio del segmento PQ. ***d***) Trace la recta determinada por P y Q, y encuentre su ecuación en forma de pendiente e intersección. ***e***) Trace la circunferencia que pasa por Q y tiene centro P, y encuentre la ecuación de dicha circunferencia.

95. $P(2, 0), Q(-5, 12)$

96. $P(7, -1), Q(2, -11)$

97–98 ■ Trazar regiones Trace la región dada por el conjunto.

97. $\{(x, y) \mid -4 < x < 4 \quad \text{y} \quad -2 < y < 2\}$

98. $\{(x, y) \mid x \geq 4 \quad \text{o} \quad y \geq 2\}$

99. Fórmula de distancia ¿Cuál de los puntos $A(4, 4)$ o $B(5, 3)$ es más cercano al punto $C(-1, -3)$?

100–102 ■ Circunferencias En estos ejercicios encontramos las ecuaciones de las circunferencias.

100. Encuentre una ecuación del círculo que tenga centro $(2, -5)$ y radio $\sqrt{2}$.

101. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro $(-5, -1)$ y que pasa por el origen.

102. Encuentre la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-1, 8)$ y que tiene el punto medio del segmento PQ como su centro.

103–106 ■ Circunferencias ***a***) Complete el cuadrado para determinar si la ecuación representa una circunferencia, si representa un punto o si no tiene gráfica. ***b***) Si la ecuación es la de una circunferencia, encuentre su centro y su radio y trace su gráfica.

103. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$

104. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = \frac{1}{2}$

105. $x^2 + y^2 + 72 = 12x$

106. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$

107–112 ■ Trazo de gráficas de ecuaciones Trace la gráfica de la ecuación al crear una tabla y colocar los puntos.

107. $y = 2 - 3x$

108. $2x - y + 1 = 0$

109. $y = 16 - x^2$

110. $8x + y^2 = 0$

111. $x = \sqrt{y}$

112. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

113–118 ■ Simetría e intersecciones ***a***) Pruebe la ecuación para simetría respecto al eje x, al eje y y al origen. ***b***) Encuentre las intersecciones x y y de la gráfica de la ecuación.

113. $y = 9 - x^2$

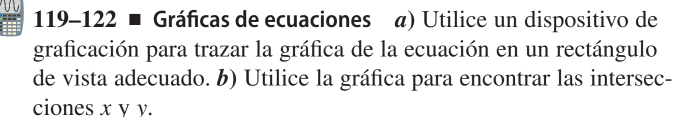
114. $6x + y^2 = 36$

115. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

116. $9x^2 - 16y^2 = 144$

117. $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

118. $x^3 + xy^2 = 5$



119–122 ■ Gráficas de ecuaciones ***a***) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de la ecuación en un rectángulo de vista adecuado. ***b***) Utilice la gráfica para encontrar las intersecciones x y y.

119. $y = x^2 - 6x$

120. $y = \sqrt{5 - x}$

121. $y = x^3 - 4x^2 - 5x$

122. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

123–130 ■ Rectas Se da una descripción de la recta. ***a***) Encuentre una ecuación para la recta en la forma pendiente e intersección. ***b***) Determine una ecuación para la recta en la forma general. ***c***) Trace la gráfica:

123. De la recta que tiene pendiente 2 e intersección y de 6

124. De la recta que tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y que pasa por el punto $(6, -3)$

125. De la recta que pasa por los puntos $(-1, -6)$ y $(2, -4)$

126. De la recta que tiene punto de intersección x de 4 y punto de intersección y de 12.

127. De la recta vertical que pasa por el punto $(3, -2)$

128. De la recta horizontal con punto de intersección y de 5

129. De la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene los puntos $(2, 4)$ y $(4, -4)$

130. De la recta que pasa por el punto $(1, 7)$ y es perpendicular a la recta $x - 3y + 16 = 0$

131. Estirar un resorte La ley de Hooke dice que si un peso w se fija a un resorte colgante, entonces la longitud alargada s del resorte está linealmente relacionada con w. Para un resorte particular tenemos

$$s = 0.3w + 2.5$$

donde s se mide en pulgadas y w en libras.

a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección s en esta ecuación?

b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando se le fija un peso de 5 libras?

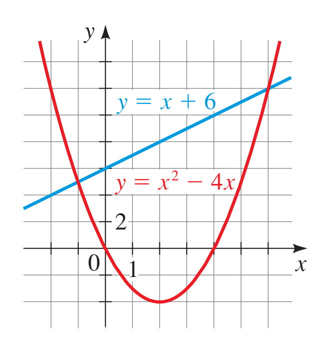
132. Salario anual Margarita es contratada por una empresa de contadores con un salario de 60 000 dólares por año. Tres años después su salario anual ha aumentado a 70 500 dólares. Suponga que su salario aumenta linealmente.

a) Encuentre una ecuación que relacione el salario anual S de Margarita con el número de años t que ha trabajado para la empresa.

b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección S de la ecuación del salario de Margarita?

c) ¿Cuál será su salario después de 12 años en la empresa?

133–138 ■ Ecuaciones y desigualdades Se dan las gráficas de las ecuaciones $y = x^2 - 4x$ y $y = x + 6$. Utilice las gráficas para resolver la ecuación o la desigualdad.



133. $x^2 - 4x = x + 6$

134. $x^2 - 4x = 0$

135. $x^2 - 4x \leq x + 6$

136. $x^2 - 4x \geq x + 6$

137. $x^2 - 4x \geq 0$

138. $x^2 - 4x \leq 0$



139–142 ■ Ecuaciones Resuelva la ecuación gráficamente.

139. $x^2 - 4x = 2x + 7$

140. $\sqrt{x + 4} = x^2 - 5$

141. $x^4 - 9x^2 = x - 9$

142. $\left| |x + 3| - 5 \right| = 2$



143–146 ■ Desigualdades Resuelva la desigualdad gráficamente.

143. $4x - 3 \geq x^2$

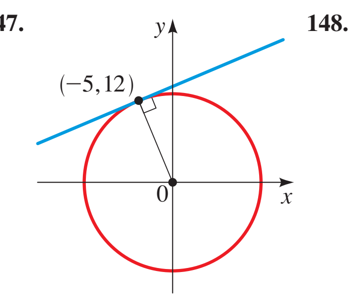
144. $x^3 - 4x^2 - 5x > 2$

145. $x^4 - 4x^2 < \frac{1}{2}x - 1$

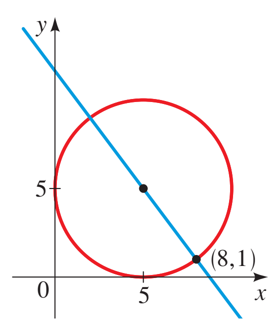
146. $|x^2 - 16| - 10 \geq 0$

147–148 ■ Circunferencias y rectas Encuentre la ecuación para la circunferencia y la recta en la figura.

147.



148.



149. Variación Suponga que M varía directamente con z, y que $M = 120$ cuando $z = 15$. Escriba una ecuación que exprese esta variación.

150. Variación Suponga que z es inversamente proporcional a y, y que $z = 12$ cuando $y = 16$. Escriba una ecuación que exprese z en términos de y.

151. Intensidad de la luz La intensidad de iluminación I de una luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d desde la luz.

a) Escriba este enunciado como una ecuación.

b) Determine la constante de proporcionalidad si se sabe que una lámpara tiene una intensidad de 1 000 candelas a una distancia de 8 metros.

c) ¿Cuál es la intensidad de esta lámpara a una distancia de 20 metros?

152. Cuerda vibrando La frecuencia de una cuerda en vibración bajo tensión constante es inversamente proporcional a su longitud. Si una cuerda de violín de 12 pulgadas de largo vibra 440 veces por segundo, ¿a qué longitud debe reducirse para que vibre 660 veces por segundo?

153. Velocidad terminal La velocidad terminal de un paracaidista es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su peso. Un paracaidista de 160 lb de peso alcanza una velocidad terminal de 9 mi/h. ¿Cuál es la velocidad terminal para un paracaidista que pesa 240 libras?

154. Alcance de un proyectil El alcance máximo de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Un lanzador de béisbol lanza una pelota a 60 mi/h, con un alcance máximo de 242 pies. ¿Cuál es este máximo alcance si lanza la pelota a 70 mi/h?

EXAMEN

1. ***a)*** Trace la gráfica de los intervalos $(-5, 3]$ y $(2, \infty)$ sobre la recta de números reales.
b) Exprese las desigualdades $x \leq 3$ y $-1 \leq x < 4$ en notación de intervalos.
c) Encuentre la distancia entre -7 y 9 sobre la recta de números reales.

2. Evalúe cada una de las expresiones siguientes.

a) $(-3)^4$ ***b)*** -3^4 ***c)*** 3^{-4} ***d)*** $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ ***e)*** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ ***f)*** $16^{-3/4}$

3. Escriba cada uno de estos números en notación científica.

a) 186 000 000 000 ***b)*** 0.0000003965

4. Simplifique cada expresión. Escriba su respuesta final sin exponentes negativos.

a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ ***b)*** $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ ***c)*** $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

d) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ ***e)*** $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ ***f)*** $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

5. Racionalice el denominador y simplifique: $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$

6. Realice las operaciones que se indican y simplifique.

a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ ***b)*** $(x + 3)(4x - 5)$ ***c)*** $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
d) $(2x + 3)^2$ ***e)*** $(x + 2)^3$

7. Factorice por completo cada expresión.

a) $4x^2 - 25$ ***b)*** $2x^2 + 5x - 12$ ***c)*** $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
d) $x^4 + 27x$ ***e)*** $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ***f)*** $x^3y - 4xy$

8. Encuentre todas las soluciones reales.

a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ ***b)*** $\dfrac{2x}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x}$ ***c)*** $x^2 - x - 12 = 0$

d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$ ***e)*** $\sqrt{3 - \sqrt{x + 5}} = 2$ ***f)*** $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
g) $3|x - 4| = 10$

9. Realice las operaciones que se indican y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

a) $(3 - 2i) + (4 + 3i)$ ***b)*** $(3 - 2i) - (4 + 3i)$

c) $(3 - 2i)(4 + 3i)$ ***d)*** $\dfrac{3 - 2i}{4 + 3i}$

e) i^{48} ***f)*** $(\sqrt{2} - \sqrt{-2})(\sqrt{8} + \sqrt{-2}))$

10. Encuentre todas las soluciones reales y complejas dela ecuación $2x^2 + 4x + 3 = 0$.

11. Mary manejó su auto de Amity a Belleville a una velocidad de 50 mi/h. En el viaje de regreso manejó a 60 mi/h. El total del viaje duró $4\frac{2}{5}$ h de tiempo de manejo. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades.

12. Una parcela rectangular de tierras mide 70 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal entre esquinas opuestas mide 130 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

13. Resuelva estas desigualdades. Escriba la respuesta usando notación de intervalos y trace la solución en la recta de números reales.

a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$ ***b)*** $x(x - 1)(x + 2) > 0$

c) $|x - 4| < 3$ ***d)*** $\dfrac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$

14. Se ha de almacenar un frasco de medicina a una temperatura entre 5 y 10 °C. ¿A qué intervalo corresponde esto en la escala Fahrenheit? [*Nota:* Las temperaturas Fahrenheit (F) y Celsius (C) satisfacen la relación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.]

15. ¿Para qué valores de x está definida la expresión $\sqrt{6x - x^2}$ como un número real?

16. ***a***) Coloque los puntos $P(0, 3)$, $Q(3, 3)$ y $R(6, 3)$ en el plano coordenado. ¿Dónde estará situado el punto S para que $PQRS$ sea un cuadrado?

b) Encuentre el área de $PQRS$.

17. ***a***) Trace la gráfica de $y = x^2 - 4$.

b) Encuentre las intersecciones x y y de la gráfica.

c) ¿La gráfica es simétrica respecto al eje x, al eje y o al origen?

18. Sean $P(-3, 1)$ y $Q(5, 6)$ dos puntos en el plano de coordenadas.

a) Coloque P y Q en el plano de coordenadas.

b) Encuentre la distancia entre P y Q.

c) Encuentre el punto medio del segmento PQ.

d) Encuentre la pendiente de la recta que contenga a P y Q.

e) Encuentre el bisector perpendicular de la recta que contenga a P y Q.

f) Encuentre la ecuación para la circunferencia para la cual el segmento PQ es un diámetro.

19. Encuentre el centro y el radio de cada circunferencia y trace su gráfica.

a) $x^2 + y^2 = 25$ ***b***) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ***c***) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$

20. Escriba una ecuación lineal $2x - 3y = 15$ en forma de pendiente e intersección y trace su gráfica. ¿Cuáles son la pendiente y el punto de intersección y?

21. Encuentre una ecuación para la recta con la propiedad dada.

a) Pasa por el punto $(3, -6)$ y es paralela a la recta $3x + y - 10 = 0$.

b) Tiene punto de intersección x en 6 y punto de intersección y en 4.

22. Un geólogo usa una sonda para medir la temperatura T (en °C) del suelo, a varias profundidades debajo de la superficie y encuentra que a una profundidad de x centímetros la temperatura está dada por la ecuación lineal $T = 0.08x - 4$.

a) ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de 1 metro (100 cm)?

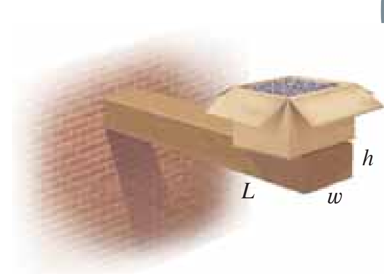
b) Trace una gráfica de la ecuación lineal.

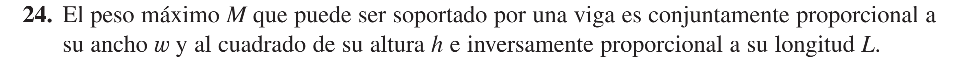
c) ¿Qué representan la pendiente, la intersección en x y la intersección T de la gráfica de esta ecuación?



23. Resuelva gráficamente la ecuación y la desigualdad.

a) $x^3 - 9x - 1 = 0$ ***b***) $x^2 - 1 \leq | x + 1 |$





24. El peso máximo M que puede ser soportado por una viga es conjuntamente proporcional a su ancho w y al cuadrado de su altura h e inversamente proporcional a su longitud L.

a) Escriba una ecuación que exprese esta proporcionalidad.

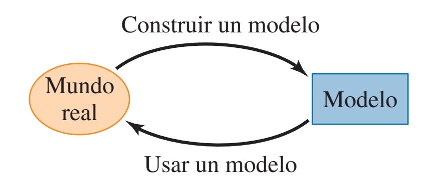
b) Determine la constante de proporcionalidad si una viga de 4 pulg de ancho, 6 pulg de alto y 12 pies de largo puede soportar un peso de 4 800 libras.

c) Si una viga de 10 pies hecha del mismo material mide 3 pulg de ancho y 10 de alto, ¿cuál es el peso máximo que puede soportar?

Si usted tuvo dificultad con alguno de estos problemas puede repasar la sección correspondiente, como se indica a continuación.

Problema	Sección	Problema	Sección
1	Sección 1.1	13, 14, 15	Sección 1.8
2, 3, 4*a*), 4*b*), 4*c*)	Sección 1.2	23	Sección 1.11
4*d*), 4*e*), 4*f*), 5	Sección 1.4	16, 17, 18*a*), 18*b*)	Sección 1.9
6, 7	Sección 1.3	18*c*), 18*d*)	Sección 1.10
8	Sección 1.5	18*e*), 18*f*), 19	Sección 1.9
9, 10	Sección 1.6	20, 21, 22	Sección 1.10
11, 12	Sección 1.7	24	Sección 1.12

ENFOQUE SOBRE MODELADO Ajuste lineal de datos

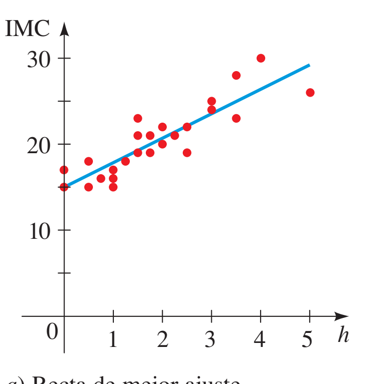


Un modelo es una representación de un objeto o un proceso. Por ejemplo, un Ferrari de juguete es un modelo del auto real; un mapa de caminos es un modelo de las calles en una ciudad. Un **modelo matemático** es una representación matemática (por lo general una ecuación) de un objeto o proceso. Una vez hecho un modelo matemático, este se puede usar para obtener información útil o hacer predicciones acerca de lo que esté siendo modelado. En estas secciones de *Enfoque sobre modelado* exploramos diferentes formas en las que se puede usar matemáticas para modelar fenómenos reales.

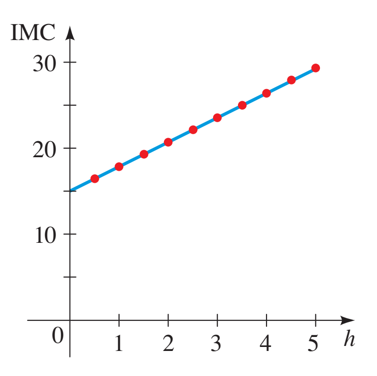
La recta que mejor se ajusta a los datos



En la sección 1.10 usamos ecuaciones lineales para modelar relaciones entre cantidades variables. En la práctica estas relaciones se descubren al recolectar datos, pero los datos reales raras veces caen en una recta precisa. La **gráfica de dispersión** de la figura 1*a*) muestra el resultado de un estudio acerca de la obesidad infantil. La gráfica determina el índice de masa corporal (IMC) contra el número de horas al día de ver televisión para 25 adolescentes. Desde luego que no esperaríamos que los datos fueran exactamente lineales como en la figura 1*b*), pero hay una *tendencia* lineal indicada por la recta azul de la figura 1*a*): a más horas que un adolescente ve televisión, más alto es el IMC. En esta sección aprenderemos a encontrar la recta que mejor se ajusta a los datos.



a) Recta de mejor ajuste



b) La recta se ajusta exactamente a los datos

FIGURA 1

La tabla 1 presenta la tasa de mortalidad infantil en todo el país (Estados Unidos) para el periodo de 1950 a 2000. La *tasa* es el número de infantes que mueren antes de llegar a su primer año de vida, por cada 1 000 niños nacidos vivos.

TABLA 1
Mortalidad infantil en Estados Unidos

Año	Tasa
1950	29.2
1960	26.0
1970	20.0
1980	12.6
1990	9.2
2000	6.9

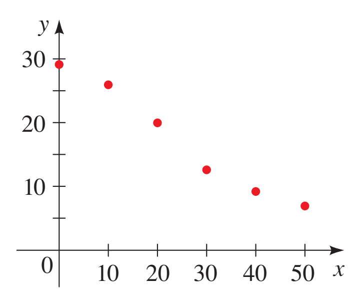


FIGURA 2 Tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos

La gráfica de dispersión de la figura 2 muestra que los datos están aproximadamente en una línea recta. Podemos tratar de ajustar una recta visualmente para aproximar los puntos de datos, pero como los datos no son *exactamente* lineales, hay muchas rectas

que podría parecer que funcionan. La figura 3 presenta dos intentos de “visualizar” una recta para ajustar a los datos.

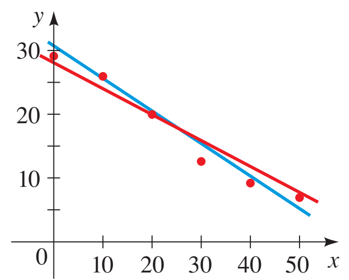


FIGURA 3 Intentos visuales para ajustar la recta a los datos

De todas las rectas que pasan por estos puntos de datos hay una que “mejor” se ajusta a los datos, en el sentido de que da el modelo lineal más preciso para los mismos. A continuación describimos cómo encontrar esta recta.

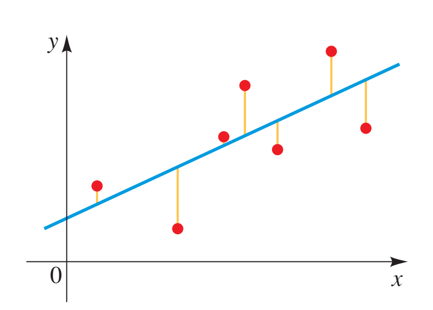


FIGURA 4 Distancia de los puntos de datos a la recta

Parece razonable que la recta de mejor ajuste sea aquella que se acerca lo mejor posible a todos los puntos de datos. Esta es la recta para la cual la suma de las distancias verticales de los puntos de datos a la recta es tan pequeña como sea posible (véase la figura 4). Por razones técnicas es mejor usar la recta donde la suma de los cuadrados de estas distancias sea la más pequeña. Esta se denomina **recta de regresión**. La fórmula para la recta de regresión se encuentra mediante cálculo, pero afortunadamente la fórmula está programada en casi todas las calculadoras graficadoras. En el ejemplo 1 vemos cómo usar una calculadora TI-83 para determinar la recta de regresión para los datos de mortalidad infantil comentados líneas arriba. (El proceso para otras calculadoras es similar.)



EJEMPLO 1 ■ Recta de regresión para tasas de mortalidad infantil en Estados Unidos

a) Encuentre la recta de regresión para los datos de mortalidad infantil de la tabla 1.

b) Trace la gráfica de la recta de regresión en una gráfica de dispersión de los datos.

c) Use la recta de regresión para estimar las tasas de mortalidad infantil en 1995 y 2006.

SOLUCIÓN

a) Para encontrar la recta de regresión usando una calculadora TI-83, primero debemos ingresar los datos en las listas L_1 y L_2, a las que se tiene acceso presionando la tecla `STAT` y seleccionando `Edit`. La figura 5 muestra la pantalla de la calculadora después de ingresar los datos. (Observe que estamos haciendo que $x = 0$ correspondiente al año 1950, de modo que $x = 50$ corresponde a 2000. Esto hace que las ecuaciones sean más fáciles de trabajar.) Luego presionamos otra vez la tecla `STAT` para seleccionar `Calc`, en seguida `4:LinReg(ax+b)`, que da la salida visualizada en la figura 6*a*). Esto nos dice que la recta de regresión es

L1	L2	L3 1
0	29.2	-------
10	26	
20	20	
30	12.6	
40	9.2	
50	6.9	

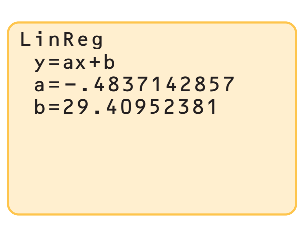
L2(7)=

FIGURA 5 Ingreso de datos

$$y = -0.48x + 29.4$$

Aquí x representa el número de años desde 1950 y y representa la tasa de mortalidad infantil correspondiente.

b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión han sido determinadas en la pantalla de una calculadora graficadora en la figura 6*b*).


```
LinReg
 y=ax+b
 a=-.4837142857
 b=29.40952381
```

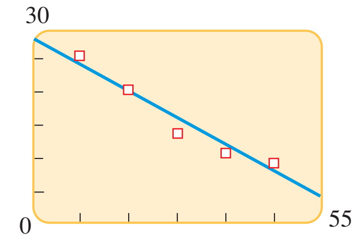


FIGURA 6 *a*) Salida de la instrucción `LinReg` *b*) Gráfica de dispersión y recta de regresión

c) El año 1995 es 45 años después de 1950, de manera que sustituyendo por x encontramos que $y = -0.48(45) + 29.4 = 7.8$. Por tanto, la tasa de mortalidad infantil en 1995 fue alrededor de 7.8. De modo similar, al sustituir 56 por x, encontramos que la tasa de mortalidad infantil pronosticada para 2006 fue de aproximadamente $-0.48(56) + 29.4 \approx 2.5$. ■

Una búsqueda en internet muestra que la verdadera tasa de mortalidad infantil fue de 7.6 en 1995 y 6.4 en 2006. Entonces, la recta de regresión es suficientemente precisa para 1995 (la tasa real fue un poco menor que la pronosticada), pero está muy alejada para 2006 (la tasa real fue más del doble de la pronosticada). La razón es que la tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos dejó de descender y en realidad empezó a aumentar en 2002, por primera vez en más de un siglo. Esto muestra que debemos ser cuidadosos al extrapolar modelos lineales fuera del dominio sobre el cual están dispersos los datos.



Renaud Lavillenie, ganador de la medalla de oro olímpica de 2012, en salto con pértiga para hombres.

■ Ejemplos de análisis de regresión

Desde que comenzaron los Juegos Olímpicos en 1896, los logros en eventos de pista y campo han ido mejorando constantemente. Un ejemplo en el que los récords ganadores han presentado una tendencia lineal ascendente es el salto con pértiga. El salto con pértiga empezó en Holanda como actividad práctica: cuando viajaban de una población a otra, las personas saltaban los muchos canales que cruzaban la zona para evitar tener que desviarse de su camino para encontrar un puente. Las familias tenían a la mano un buen abasto de maderos de longitudes apropiadas para cada miembro de la familia. El salto con pértiga de altura en lugar de distancia se convirtió en un evento universitario de pista y campo hacia mediados del siglo XIX y fue uno de los eventos de los primeros Juegos Olímpicos modernos. En el siguiente ejemplo vemos un modelo lineal para récords ganadores de medalla de oro en Juegos Olímpicos en el salto con pértiga para hombres.



EJEMPLO 2 ■ Recta de regresión para récords olímpicos de salto con pértiga

La tabla 2 presenta los récords olímpicos de salto con pértiga para hombres hasta 2008.

a) Encuentre la recta de regresión para los datos.

b) Cree una gráfica de dispersión de los datos y trace una gráfica de la recta de regresión. ¿La recta de regresión será apropiada para modelar los datos?

c) ¿Qué representa la pendiente de la recta de regresión?

d) Use el modelo para predecir la altura ganadora de salto con pértiga para los Juegos Olímpicos de 2012.

TABLA 2
Récords olímpicos de salto con pértiga para hombres

Año	x	Medallista de oro	Altura (m)	Año	x	Medallista de oro	Altura (m)
1896	−4	William Hoyt, EUA	3.30	1960	60	Don Bragg, EUA	4.70
1900	0	Irving Baxter, EUA	3.30	1964	64	Fred Hansen, EUA	5.10
1904	4	Charles Dvorak, EUA	3.50	1968	68	Bob Seagren, EUA	5.40
1906	6	Fernand Gonder, Francia	3.50	1972	72	W. Nordwig, Alemania Oriental	5.64
1908	8	A. Gilbert, E. Cook, EUA	3.71	1976	76	Tadeusz Slusarski, Polonia	5.64
1912	12	Harry Babcock, EUA	3.95	1980	80	W. Kozakiewicz, Polonia	5.78
1920	20	Frank Foss, EUA	4.09	1984	84	Pierre Quinon, Francia	5.75
1924	24	Lee Barnes, EUA	3.95	1988	88	Sergei Bubka, URSS	5.90
1928	28	Sabin Can, EUA	4.20	1992	92	M. Tarassob, Equipo Unificado	5.87
1932	32	William Miller, EUA	4.31	1996	96	Jean Jaffione, Francia	5.92
1936	36	Earle Meadows, EUA	4.35	2000	100	Nick Hysong, EUA	5.90
1948	48	Guinn Smith, EUA	4.30	2004	104	Timothy Mack, EUA	5.95
1952	52	Robert Richards, EUA	4.55	2008	108	Steven Hooker, Australia	5.96
1956	56	Robert Richards, EUA	4.56				

```
LinReg
 y=ax+b
 a=.0265652857
 b=3.400989881
```

Salida en la función `LinReg` en la TI-83

SOLUCIÓN

a) Sea x = año − 1900, de modo que 1896 corresponde a $x = -4$, 1900 a $x = 0$ y así, sucesivamente. Usando calculadora encontramos la siguiente recta de regresión:

$$y = 0.0260x + 3.42$$

b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión se ilustran en la figura 7. La recta de regresión parece ser un buen modelo para los datos.

c) La pendiente es el promedio del porcentaje de aumento en el récord de salto con pértiga por año. Entonces, en promedio, el récord de salto con pértiga aumentó en 0.0266 m/año.

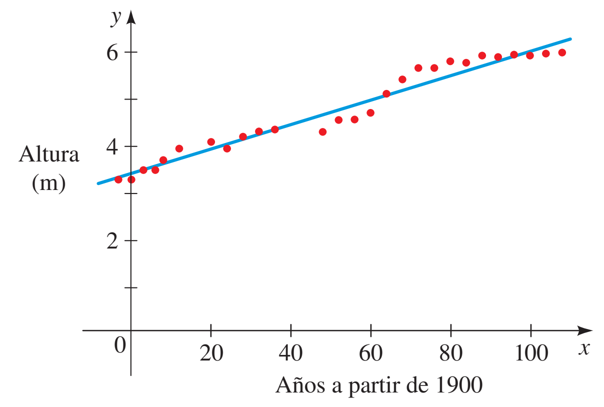


FIGURA 7 Gráfica de dispersión y recta de regresión para los datos de salto con pértiga

d) El año 2012 corresponde a $x = 112$ en nuestro modelo. El modelo da

$$y = 0.0260(112) + 3.42$$
$$\approx 6.33$$

Por tanto, el modelo predice que en 2012 el salto con pértiga ganador será de 6.33 m. ■

En los Juegos Olímpicos de 2012 en Londres, Inglaterra, Renaud Lavilleni de Francia obtuvo la medalla de oro en salto con pértiga, con un salto de 5.97 metros. Aun cuando esta altura estableció un récord olímpico fue considerablemente más bajo que los 6.33 m pronosticados por el modelo del ejemplo 2. En el problema 10 encontramos una recta de regresión para los datos de salto con pértiga de 1972 a 2008. Realice usted el problema para ver si este conjunto restringido de datos más recientes da un mejor pronóstico para el récord de 2012.

¿Realmente es apropiado un modelo lineal para los datos del ejemplo 2? En el siguiente *Enfoque sobre modelado* estudiaremos los modelos de regresión que usan otros tipos de funciones y aprenderemos a escoger el mejor modelo para un conjunto dado de datos.

En el siguiente ejemplo vemos cómo se usa la regresión lineal en la investigación médica respecto a potenciales causas de enfermedades como el cáncer.

EJEMPLO 3 ■ Recta de regresión para relacionar asbesto y cáncer

Cuando ratas de laboratorio son expuestas a fibras de asbesto, algunas presentan tumores pulmonares. La tabla 3 enumera los resultados de diversos experimentos realizados por diferentes científicos.

a) Encuentre la recta de regresión para los datos.

b) Haga una gráfica de dispersión y trace la gráfica de la recta de regresión. ¿Parecerá la recta de regresión un modelo razonable para los datos?

c) ¿Qué representa el punto de intersección y de la recta de regresión?

TABLA 3
Datos de tumores causados por asbesto

Exposición al asbesto (fibras/mL)	Porcentaje que presentó tumores pulmonares
50	2
400	6
500	5
900	10
1 100	26
1 600	42
1 800	37
2 000	28
3 000	50



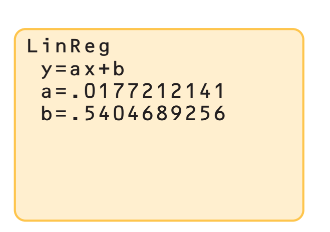
FIGURA 8 Regresión lineal para los datos de asbesto-tumores

SOLUCIÓN

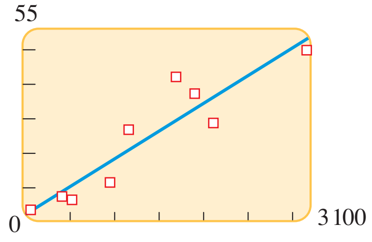
a) Usando calculadora encontramos la siguiente recta de regresión (véase la figura 8*a*)):

$$y = 0.0177x + 0.5405$$

b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión están graficadas en la figura 8*b*). La recta de regresión parece ser un modelo razonable para los datos.



a) Salida de la instrucción `LinReg`



b) Gráfica de dispersión y recta de regresión

c) El punto de intersección *y* es el porcentaje de ratas a las que se les formaron tumores cuando no había fibras de asbesto presentes. En otras palabras, este es el porcentaje que normalmente presenta tumores pulmonares (por razones ajenas al asbesto). ■

¿Qué tan bueno es el ajuste? El coeficiente de correlación

Para cualquier conjunto dado de datos con dos variables siempre es posible encontrar una recta de regresión, incluso si los puntos de datos no tienden a estar en una recta y si las variables parecen no estar relacionadas en absoluto. Veamos las tres gráficas de dispersión de la figura 9. En la primera gráfica de dispersión los puntos de datos están cercanos a una recta. En la segunda gráfica aún se observa una tendencia lineal, pero los puntos están más dispersos. En la tercera gráfica no parece haber ninguna tendencia en absoluto, lineal ni de otro tipo.

Una calculadora graficadora puede darnos una recta de regresión por cada una de estas gráficas de dispersión, pero ¿qué tan bien representan o "se ajustan" estas líneas a los datos? Para contestar esta pregunta los estadísticos han inventado el **coeficiente de correlación**, por lo general denotado por *r*. El coeficiente de correlación es un número entre -1 y 1 que mide cuán cercanamente siguen los datos a la recta de regresión o, en otras palabras, qué tan fuertemente están **correlacionadas** las variables. Muchas calculadoras dan el valor de *r* cuando calculan la recta de regresión. Si *r* es cercana a -1 o a 1, entonces las variables están fuertemente correlacionadas; es decir, la gráfica de dispersión sigue muy de cerca a la recta de regresión. Si *r* es cercana a 0, entonces las variables están débilmente correlacionadas o no están correlacionadas en absoluto. (El signo de *r* depende de la pendiente de la recta de regresión.) Los coeficientes de correlación de las gráficas de dispersión de la figura 9 están indicados en las gráficas. En la primera gráfica *r* es cercana a 1 porque los datos están muy cerca de ser lineales. La segunda gráfica también tiene una *r*, relativamente grande, pero no tan grande como la primera porque los datos si bien son bastante lineales están más difusos. La tercera gráfica tiene una *r* cercana a 0, ya que prácticamente no hay tendencia lineal en los datos.

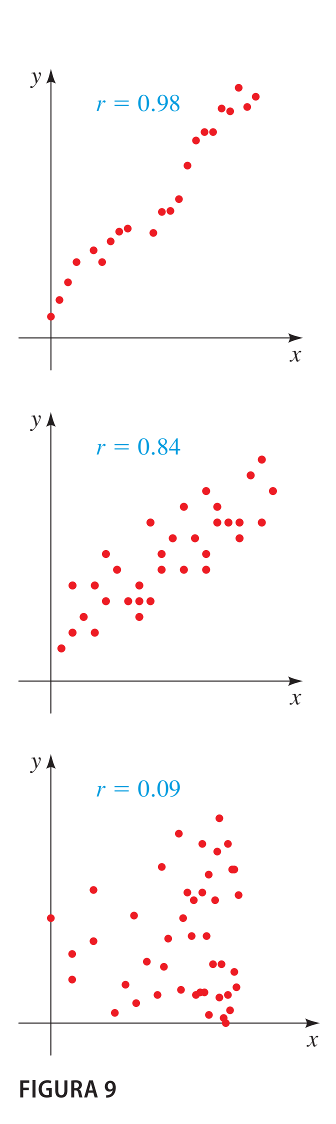


FIGURA 9

No hay reglas rígidas y rápidas para determinar qué valores de *r* son suficientes para decidir que una correlación lineal es "significativa". El coeficiente de correlación es sólo una guía aproximada para ayudarnos a decidir cuánta fe poner en una determinada recta de regresión. En el ejemplo 1 el coeficiente de correlación es -0.99, indicando un muy alto nivel de correlación, por lo cual podemos decir con seguridad que la baja en las tasas de mortalidad infantil de 1950 a 2000 fue fuertemente lineal. (El valor de *r* es negativo, puesto que la mortalidad infantil tuvo una tendencia a la *baja* en este periodo.) En el ejemplo 3 el coeficiente de correlación es 0.92, que también indica una fuerte correlación entre las variables. Por tanto la exposición al asbesto está claramente asociada con el crecimiento de tumores pulmonares en ratas. ¿Significa esto que el asbesto *causa* cáncer pulmonar?

Si dos variables están correlacionadas, esto no necesariamente significa que un cambio en una variable *cause* un cambio en la otra. Por ejemplo, el matemático John Allen Paulos afirma que la medida en calzado está fuertemente correlacionada con las calificaciones en matemáticas de los niños en edad escolar. ¿Significa esto que los pies grandes causan altas calificaciones en matemáticas? Ciertamente no, pero la medida en calzado y la facilidad para las matemáticas aumentan de manera independiente a medida que los niños crecen. Por tanto, es importante no saltar a las conclusiones: la correlación y la causa no son lo mismo. El lector puede explorar más en este tema en el *Discovery Project: Correlation and Causation* (Proyecto de descubrimiento: correlación y causalidad) en **www.stewartmath.com***. La correlación es una útil herramienta para descubrir importantes asociaciones de causa y efecto; pero para demostrar una causa debemos explicar el mecanismo por medio del cual una variable afecta a la otra. Por ejemplo, la conexión entre fumar y el cáncer pulmonar fue observada como correlación mucho antes de que la ciencia encontrara el mecanismo mediante el cual el hecho de fumar causa cáncer pulmonar.

PROBLEMAS

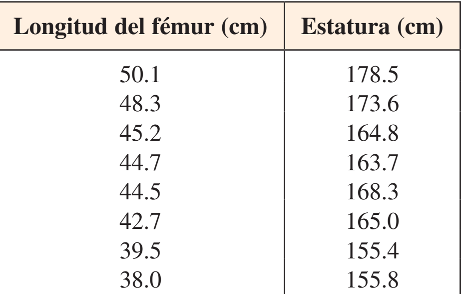
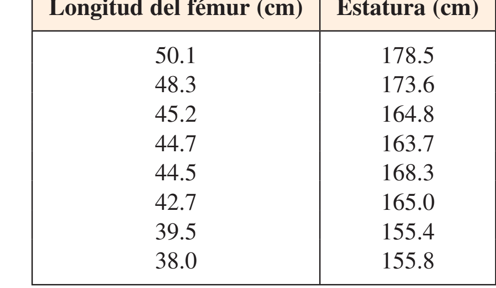
1. **Longitud del fémur y estatura** Los antropólogos usan un modelo lineal que relaciona la longitud del fémur con la estatura. El modelo permite a un antropólogo determinar la estatura de una persona cuando se cuenta sólo una parte de un esqueleto (incluyendo el fémur). En este problema encontramos el modelo al analizar los datos acerca de la longitud del fémur y la estatura para los ocho hombres dados en la tabla.

   a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

   b) Encuentre y trace la gráfica de una función lineal que modele los datos.

   c) Un antropólogo encuentra un fémur de 58 cm de longitud. ¿Cuál era la estatura de la persona?

Fémur

Longitud del fémur (cm)	Estatura (cm)
50.1	178.5
48.3	173.6
45.2	164.8
44.7	163.7
44.5	168.3
42.7	165.0
39.5	155.4
38.0	155.8

2. **Demanda de bebidas gaseosas** El gerente de una tienda de conveniencia observa que las ventas de bebidas gaseosas son más altas en los días calurosos, de modo que reúne los datos de la tabla.

   a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

   b) Encuentre y trace la gráfica de una función lineal que modele los datos.

   c) Use el modelo para predecir las ventas de gaseosas si la temperatura es de 95°F.

Temperatura alta (°F)	Número de latas vendidas
55	340
58	335
64	410
68	460
70	450
75	610
80	735
84	780

3. **Diámetro de un árbol y su edad** Para estimar las edades de los árboles los guardabosques usan un modelo lineal que relaciona el diámetro de un árbol con la edad del mismo. El modelo es útil porque el diámetro de un árbol es mucho más fácil de medir que la edad (lo cual requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal repre-

Diámetro (pulg)	Edad (años)
2.5	15
4.0	24
6.0	32
8.0	56
9.0	49
9.5	76
12.5	90
15.5	89

* Este material se encuentra disponible en inglés.

sentativa del árbol y contar los anillos). Para determinar el modelo use los datos de la tabla, mismos que fueron recolectados para una cierta variedad de robles.

a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y trace la gráfica de una función que modele los datos.

c) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 18 pulgadas.

4. Niveles de dióxido de carbono El Mauna Loa Observatory, ubicado en la isla de Hawái, ha monitoreado niveles de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera desde 1958. La tabla es una lista del promedio anual de niveles de CO_2 medidos en partes por millón (ppm) de 1990 a 2012.

a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y trace la gráfica de la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso *b*) para estimar el nivel de CO_2 en la atmósfera en 2011. Compare su respuesta con el nivel real de CO_2 de 391.6 que fue medido en 2011.

Año	Nivel de CO_2 (ppm)
1990	354.4
1992	356.4
1994	358.8
1996	362.6
1998	366.7
2000	369.5
2002	373.2
2004	377.5
2006	381.9
2008	385.6
2010	389.9
2012	393.8

Fuente: Mauna Loa Observatory

5. Temperatura y el chirrido de los grillos Unos biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de los grillos de cierta especie parece estar relacionada con la temperatura. La tabla siguiente muestra las frecuencias de chirridos para varias temperaturas.

a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y trace la gráfica de la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso *b*) para estimar la frecuencia de chirridos a 100°F.

Temperatura (°F)	Frecuencia de chirridos (chirridos/minuto)
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

6. Extensión del hielo del Océano Ártico El National Snow and Ice Data Center monitorea todo el año la cantidad de hielo del Ártico. La tabla siguiente da valores aproximados para la extensión del hielo marino en millones de kilómetros cuadrados de 1986 a 2012, en intervalos de dos años.

a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y trace la gráfica de la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso *b*) para estimar la extensión del hielo en el año 2016.

Año	Extensión del hielo (millones de km^2)	Año	Extensión del hielo (millones de km^2)
1986	7.5	2000	6.3
1988	7.5	2002	6.0
1990	6.2	2004	6.0
1992	7.5	2006	5.9
1994	7.2	2008	4.7
1996	7.9	2010	4.9
1998	6.6	2012	3.6

Fuente: National Snow and Ice Data Center

7. Prevalencia de mosquitos La tabla siguiente es una lista de la abundancia relativa de mosquitos (medida por el porcentaje positivo de mosquitos) contra la rapidez de flujo (medida como porcentaje del flujo máximo) de las redes de canales en la ciudad de Saga, Japón.

a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

Porcentaje de flujo (%)	Porcentaje positivo de mosquitos (%)
0	22
10	16
40	12
60	11
90	6
100	2

Nivel de ruido (dB)	Calificación en MRT (%)
80	99
84	91
88	84
92	70
96	47
100	23
104	11

Año	Esperanza de vida
1920	54.1
1930	59.7
1940	62.9
1950	68.2
1960	69.7
1970	70.8
1980	73.7
1990	75.4
2000	76.9

Año	x	Altura (m)
1972	0	5.64
1976	4	
1980	8	
1984		
1988		
1992		
1996		
2000		
2004		
2008		

¿Compraría una barra de chocolate de la máquina expendedora del pasillo si el precio fuera el que se indica?

Precio	Sí o no
50 cts.	
75 cts.	
$1.00	
$1.25	
$1.50	
$1.75	
$2.00	

***b*)** Encuentre y trace la gráfica de la recta de regresión.

***c*)** Use el modelo lineal del inciso *b*) para estimar el porcentaje positivo de mosquitos si el flujo del canal es 70% del máximo.

8. Ruido e inteligencia Expertos en audiología estudian la inteligibilidad de las palabras habladas bajo diferentes niveles de ruido. La inteligibilidad, calificación de una MRT (tomografía de resonancia magnética por sus siglas en inglés), se mide como porcentaje de una oración pronunciada y que el escucha puede descifrar a cierto nivel de ruido en decibeles (dB). La tabla muestra los resultados de uno de dichos exámenes.

***a*)** Cree una gráfica de dispersión de los datos.

***b*)** Encuentre y trace la gráfica de la recta de regresión.

***c*)** Encuentre el coeficiente de correlación. ¿Es apropiado un modelo lineal?

***d*)** Use el modelo lineal del inciso *b*) para estimar la inteligibilidad de una oración a un nivel de ruido de 94 dB.

9. Esperanza de vida El promedio de esperanza de vida en Estados Unidos ha aumentado constantemente en las últimas décadas, como se muestra en la tabla siguiente.

***a*)** Cree una gráfica de dispersión de los datos.

***b*)** Encuentre y trace la gráfica de la recta de regresión.

***c*)** Use el modelo lineal que encontró en el inciso *b*) para predecir la esperanza de vida en el año 2006.

***d*)** Busque en internet o en la biblioteca de su plantel para encontrar el promedio real de esperanza de vida en 2006. Compare con su respuesta del inciso *c*).

10. Salto con pértiga en Juegos Olímpicos La gráfica de la figura 7 indica que en años recientes la altura ganadora de salto con pértiga para hombres, en Juegos Olímpicos, ha caído por debajo del valor pronosticado por la recta de regresión del ejemplo 2. Esto podría haber ocurrido porque cuando el salto con pértiga era un evento nuevo había mucho más espacio para mejorar la actuación de los deportistas de esta especialidad, mientras que ahora hasta el mejor entrenamiento puede dar avances apenas incrementales. Veamos si al concentrarnos en los resultados más recientes resulta un mejor pronóstico de récords futuros.

***a*)** Use los datos de la tabla 2 (página 141) para completar la tabla de las alturas ganadoras de salto con pértiga que se muestra al margen. (Observe que estamos usando $x = 0$ para que corresponda al año 1972, donde empieza este conjunto restringido de datos.)

***b*)** Encuentre la recta de regresión para los datos del inciso *a*).

***c*)** Coloque los datos y la recta de regresión en los mismos ejes. ¿Dará la recta de regresión un buen modelo para los datos?

***d*)** ¿Qué altura ganadora de salto con pértiga predice la recta de regresión para los Juegos Olímpicos de 2012? Compare este valor pronosticado con la altura ganadora real de 2012 de 5.97 metros, como se describe en la página 141. ¿Ha dado un mejor pronóstico esta nueva recta de regresión que la recta del ejemplo 2?

11. Tamaño del zapato y altura ¿Cree que el tamaño del zapato y la altura están correlacionados? Investíguelo examinando el tamaño de los zapatos y la altura de las personas en su clase. (Por supuesto, los datos para hombres y mujeres se deben manejar por separado.) Encuentre el coeficiente de correlación.

12. Demanda de barras de dulce En este problema se determinará una ecuación de demanda lineal que describe la demanda de barras de dulce en su clase. Estudie a sus compañeros de clase para determinar qué precio estarían dispuestos a pagar por una barra de dulce. Su formulario de la encuesta se puede parecer al del ejemplo que se muestra a la izquierda.

***a*)** Haga una tabla del número de encuestados que respondió "sí" en cada nivel de precio.

***b*)** Haga un diagrama de dispersión de los datos.

***c*)** Encuentre y trace la gráfica de la recta de regresión $y = mp + b$, que da el número de encuestados y que comprarían una barra de dulce si el precio fuera de p centavos. Esta es la *ecuación de demanda*. ¿Por qué la pendiente m es negativa?

***d*)** ¿Cuál es la intersección p de la ecuación de demanda? ¿Qué le dice esta intersección sobre los precios de las barras de dulce?


© iStockphoto.com/Jeff McDonald

2 Funciones

Una ***función* es una regla** que describe cómo una cantidad depende de otra. Muchas situaciones reales siguen reglas precisas, por lo que se pueden modelar usando funciones. Por ejemplo, hay una regla que relaciona la distancia que cae un paracaidista con el tiempo que ha estado cayendo. Entonces la distancia recorrida por el paracaidista es una *función* del tiempo. Conocer este modelo de función permite al paracaidista determinar cuándo debe abrir su paracaídas. En este capítulo se estudian las funciones y sus gráficas, así como muchas aplicaciones de funciones en el mundo real. En el *Enfoque sobre modelado* al final del capítulo se exploran diferentes situaciones del mundo real que se pueden modelar con funciones.

2.1 FUNCIONES

■ Funciones a nuestro alrededor ■ Definición de función ■ Evaluación de una función ■ Dominio de una función ■ Cuatro formas de representar una función

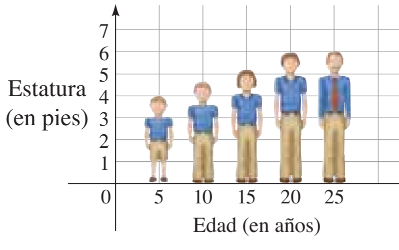
En esta sección exploramos la idea de una función y luego damos la definición de función.

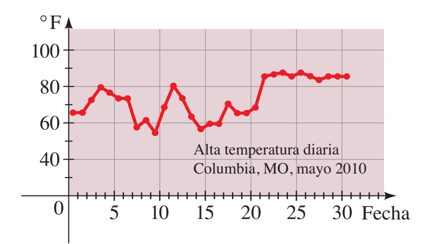
Funciones a nuestro alrededor

En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (véase la figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona la temperatura con la fecha.





w (onzas)	2014 Costo del envío (dólares)
$0 < w \le 1$	0.98
$1 < w \le 2$	1.19
$2 < w \le 3$	1.40
$3 < w \le 4$	1.61
$4 < w \le 5$	1.82
$5 < w \le 6$	2.03

FIGURA 1 La estatura es una función de la edad. La temperatura es una función de la fecha. El costo de envío es una función del peso.

¿Puede considerar otras funciones? A continuación se presentan algunos ejemplos más:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos hacerlo mediante una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos el grifo del agua caliente la temperatura de esta depende de cuánto tiempo haya estado saliendo. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua del grifo es una función del tiempo.



La figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió el grifo. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega al grifo, la temperatura T del agua aumenta rápida-

mente. En la siguiente fase T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando este se descarga T disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

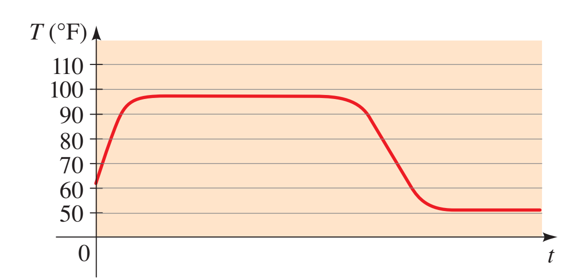


FIGURA 2 Gráfica de la temperatura de agua T como una función del tiempo t

Definición de función

Ya antes hemos usado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "elevar el número al cuadrado"

Cuando escribimos $f(2)$, queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa x en la pantalla. Luego, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En la mayoría de las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta hasta cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se denomina **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (véase la figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina se acepta como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Por tanto, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

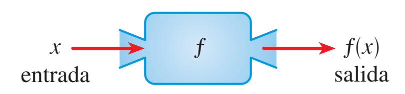
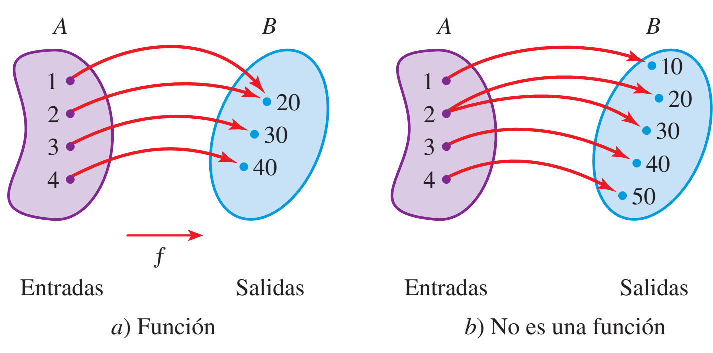


FIGURA 3 Diagrama de máquina de f

Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la figura 4a). Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. Puesto

que una función asocia *exactamente* una salida a cada entrada, el diagrama de la figura 4*a*) representa una función, pero el diagrama de la figura *no* representa una función.



a) Función   *b*) No es una función

FIGURA 4 Diagramas de flecha

EJEMPLO 1 ■ Análisis de una función

Una función f está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.

b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

c) Encuentre el dominio y rango de f.

d) Trace un diagrama de máquina para f.

SOLUCIÓN

a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

b) Los valores de f se encuentran al sustituir x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } 3$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } -2$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } \sqrt{5}$$

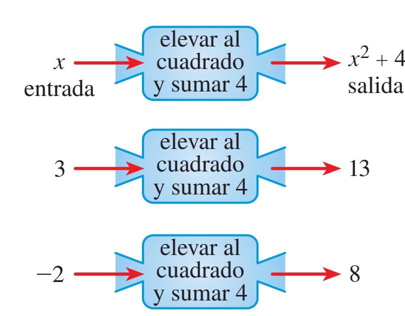


FIGURA 5 Diagrama de máquina

c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para f. Dado que podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

d) En la figura 5 se muestra un diagrama de máquina para f.

Ahora intente realizar los ejercicios 11, 15, 19 y 51 ■

■ Evaluación de una función

En la definición de una función la variable independiente x desempeña el papel de un parámetro. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número sustituimos el número por el parámetro.

EJEMPLO 2 ■ Evaluar una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

a) $f(-2)$ ***b***) $f(0)$ ***c***) $f(4)$ ***d***) $f(\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número sustituimos el número x en la definición de f.

a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

EJEMPLO 3 ■ Una función definida por tramos



Un plan de teléfono celular cuesta 39 dólares al mes. El plan incluye 2 gigabytes (GB) de datos libres y carga 15 dólares por gigabyte por datos adicionales. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 39 + 15(x - 2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre $C(0.5)$, $C(2)$ y $C(4)$.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Aquí aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 2$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 2$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 15(x - 2)$.

Una **función definida por tramos** se define por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función C del ejemplo 3 está definida por tramos.

Dado que $0.5 \le 2$, tenemos $C(0.5) = 39$.

Dado que $2 \le 2$, tenemos $C(2) = 39$.

Dado que $4 > 2$, tenemos $C(4) = 39 + 15(4 - 2) = 69$.

Por tanto, el plan cobra 39 dólares por 0.5 GB, \$39 por 2 GB y \$69 por 4 GB.

Ahora intente realizar el ejercicio 31 y 85 ■

De los ejemplos 2 y 3 vemos que los valores de una función pueden cambiar de una entrada a otra. El **cambio neto** en el valor de una función f cuando cambia la entrada de a a b (donde $a \le b$) está dada por

$$f(b) - f(a)$$

El ejemplo siguiente ilustra este concepto.

EJEMPLO 4 ■ Encontrar el cambio neto

Sea $f(x) = x^2$. Encuentre el cambio neto en el valor de f entre las entradas dadas.

a) De 1 a 3 ***b***) De -2 a 2

Los valores de la función en el ejemplo 4 disminuyen y luego aumentan entre -2 y 2, pero el cambio neto de -2 a 2 es 0 porque $f(-2)$ y $f(2)$ tienen el mismo valor.

SOLUCIÓN

a) El cambio neto es $f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$.

b) El cambio neto es $f(2) - f(-2) = 4 - 4 = 0$.

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

EJEMPLO 5 ■ Evaluar una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

a) $f(a)$ ***b)*** $f(-a)$ ***c)*** $f(a + h)$ ***d)*** $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Expresiones como la del inciso *d*) del ejemplo 5 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de $x = a$ y $x = a + h$.

SOLUCIÓN

a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

c) $f(a + h) = 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1$

$$= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1$$

$$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1$$

d) Usando los resultados de los incisos *c*) y *a*), tenemos

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h}$$

$$= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3$$

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

Una **tabla de valores** de una función es una tabla de dos columnas, una para las entradas y otra para las salidas correspondientes. Una tabla de valores nos ayuda a analizar una función numérica, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 ■ El peso de una astronauta



El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de esta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentra en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de “ingravidez” porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces cuando esté a h millas sobre la Tierra su peso está dado por la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

a) ¿Cuál será el peso de la astronauta cuando esté a 100 millas sobre la Tierra?

b) Construya una tabla de valores para la función w que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

c) Encuentre el cambio neto en el peso de la astronauta desde nivel del suelo hasta una altura de 500 mi.

SOLUCIÓN

a) Queremos el valor de la función w cuando $h = 100$; esto es, debemos calcular $w(100)$:

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas ella pesa aproximadamente 124 lb.

b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en el inciso *a*).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre la astronauta, menor es su peso.

***c*)** El cambio neto en el peso de la astronauta de $h = 0$ a $h = 500$ es

$$w(500) - w(0) = 102 - 130 = -28$$

el signo negativo indica que el peso de la astronauta *disminuye* aproximadamente 28 lb.

 **Ahora intente realizar el ejercicio 79** ■

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función se puede indicar explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención el dominio de la función es *el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real*. Por ejemplo, considere las funciones

En la página 36 se estudian los dominios de expresiones algebraicas.

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ne 4\}$. La función g no está definida para x negativas, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

EJEMPLO 7 ■ Determinar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

***a*)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ ***b*)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ***c*)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$

SOLUCIÓN

***a*)** Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Puesto que

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando el denominador $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid x \ne 0, x \ne 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

***b*)** No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \ge 0$. Usando los métodos de la sección 1.8, podemos resolver esta desigualdad para encontrar que $-3 \le x \le 3$. Por tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \le x \le 3\} = [-3, 3]$$

***c*)** No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

Ahora intente realizar los ejercicios 55, 59 y 69 ■

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (mediante descripción en palabras)
- algebraicamente (mediante una fórmula explícita)
- visualmente (mediante una gráfica)
- numéricamente (mediante una tabla de valores)

Una función individual se puede representar de las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural a través de un método que de los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

> "Para determinar la temperatura equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplíquela por $\frac{9}{5}$ y luego sume 32."

En el ejemplo 8 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica o función, gráficamente y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea el cuadro siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final considere la función $C(w)$, que se describe verbalmente como "el costo de envío de primera clase por correo de una carta con peso w". La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplique la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sume 32."

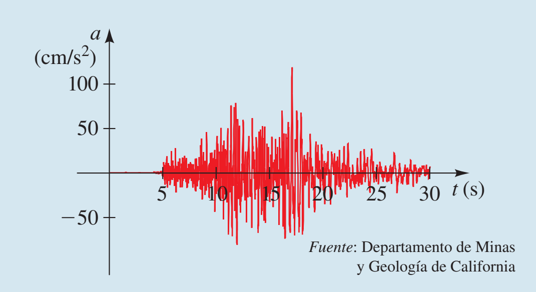
Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit

Algebraica Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual Usando una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \le 1$	\$0.98
$1 < w \le 2$	\$1.19
$2 < w \le 3$	\$1.40
$3 < w \le 4$	\$1.61
$4 < w \le 5$	\$1.82
⋮	⋮

Costo de enviar un paquete por correo de primera clase

EJEMPLO 8 ■ Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro de la página 154 da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

a) Algebraicamente (usando una fórmula)

b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado. Entonces se obtiene

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

b) Usamos la fórmula algebraica para F, que encontramos en el inciso *a*), para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	*F* (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

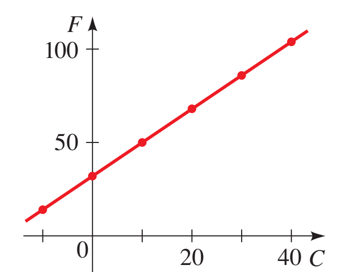


FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

c) Utilizamos los puntos tabulados en el inciso *b*) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la figura 6.



Ahora intente realizar el ejercicio 73 ■

2.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función $f(x) = x^3 + 1$, entonces

a) el valor de f en $x = -1$ es $f($____$) =$ ________.

b) el valor de f en $x = 2$ es $f($____$) =$ ________.

c) el cambio neto en el valor de f entre $x = -1$ y $x = 2$ es $f($____$) - f($____$) =$ ________.

2. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina ________ de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina ________ de f.

3. ***a)*** ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x - 10}$$

b) Para las funciones del inciso *a*) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x - 4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

a) *Verbal:* "Restar 4, luego ________ y ________.

b) *Numérica:*

x	*f*(*x*)
0	19
2	
4	
6	

5. Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente ________ elementos llamados $f(x)$ en un conjunto B. ¿Cuál de las siguientes tablas define a y como una función de x?

i)

x	y
1	5
2	7
3	6
4	8

ii)

x	y
1	5
1	7
2	6
3	8

6. *¿Sí o no?* Si es *no* explique. Sea f una función.

a) ¿Es posible que $f(1) = 5$ y $f(2) = 5$?

b) ¿Es posible que $f(1) = 5$ y $f(1) = 6$?

HABILIDADES

7–10 ■ Notación de función Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

7. Multiplicar por 3, luego restar 5

8. Elevar al cuadrado, luego sumar 2

9. Restar 1, luego elevar al cuadrado

10. Sumar 1, tomar la raíz cuadrada, luego dividir entre 6

11–14 ■ Funciones en palabras Exprese la función (o regla) en palabras.

11. $f(x) = 2x + 3$

12. $g(x) = \dfrac{x + 2}{3}$

13. $h(x) = 5(x + 1)$

14. $k(x) = \dfrac{x^2 - 4}{3}$

15–16 ■ Diagrama de máquina Trace un diagrama de máquina para la función.

15. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

16. $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$

17–18 ■ Tabla de valores Complete la tabla.

17. $f(x) = 2(x - 1)^2$

x	$f(x)$
−1	
0	
1	
2	
3	

18. $g(x) = |2x + 3|$

x	$g(x)$
−3	
−2	
0	
1	
3	

19–30 ■ Evaluar funciones Evalúe la función en los valores indicados.

19. $f(x) = x^2 - 6$; $f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2})$

20. $f(x) = x^3 + 2x$; $f(-2), f(-1), f(0), f(\frac{1}{2})$

21. $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{3}$;

$f(2), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a - 1)$

22. $h(x) = \dfrac{x^2 + 4}{5}$;

$h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a - 2), h(\sqrt{x})$

23. $f(x) = x^2 + 2x$;

$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

24. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;

$h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x - 1), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

25. $g(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$;

$g(2), g(-1), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a - 1), g(x^2 - 1)$

26. $g(t) = \dfrac{t + 2}{t - 2}$;

$g(-2), g(2), g(0), g(a), g(a^2 - 2), g(a + 1)$

27. $k(x) = -x^2 - 2x + 3$;

$k(0), k(2), k(-2), k(\sqrt{2}), k(a + 2), k(-x), k(x^2)$

28. $k(x) = 2x^3 - 3x^2$;

$k(0), k(3), k(-3), k(\frac{1}{2}), k(\frac{a}{2}), k(-x), k(x^3)$

29. $f(x) = 2|x - 1|$;

$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x + 1), f(x^2 + 2)$

30. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

31–34 ■ Funciones definidas en tramos Evalúe la función definida en tramos en los valores indicados.

31. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

32. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

34. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

35–38 ■ Evaluar funciones Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

35. $f(x) = x^2 + 1$; $f(x + 2)$, $f(x) + f(2)$

36. $f(x) = 3x - 1$; $f(2x)$, $2f(x)$

37. $f(x) = x + 4$; $f(x^2)$, $(f(x))^2$

38. $f(x) = 6x - 18$; $f\left(\frac{x}{3}\right)$, $\frac{f(x)}{3}$

39–42 ■ Cambio neto Determine el cambio neto del valor de la función entre los puntos dados.

39. $f(x) = 3x - 2$; de 1 a 5

40. $f(x) = 4 - 5x$; de 3 a 5

41. $g(t) = 1 - t^2$; de -2 a 5

42. $h(t) = t^2 + 5$; de -3 a 6

43–50 ■ Cociente de diferencias Encuentre $f(a)$, $f(a + h)$ y el cociente de diferencias $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

43. $f(x) = 5 - 2x$

44. $f(x) = 3x^2 + 2$

45. $f(x) = 5$

46. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

47. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

48. $f(x) = \frac{2x}{x - 1}$

49. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

50. $f(x) = x^3$

51–54 ■ Dominio y rango Encuentre el dominio y el rango de la función.

51. $f(x) = 3x$

52. $f(x) = 5x^2 + 4$

53. $f(x) = 3x$, $-2 \leq x \leq 6$

54. $f(x) = 5x^2 + 4$, $0 \leq x \leq 2$

55–72 ■ Dominio Encuentre el dominio de la función.

55. $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

56. $f(x) = \frac{1}{3x - 6}$

57. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

58. $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + x - 6}$

59. $f(t) = \sqrt{t + 1}$

60. $g(t) = \sqrt{t^2 + 9}$

61. $f(t) = \sqrt[3]{t - 1}$

62. $g(x) = \sqrt{7 - 3x}$

63. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

64. $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

65. $g(x) = \frac{\sqrt{2 + x}}{3 - x}$

66. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$

67. $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$

68. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

69. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x - 4}}$

70. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{6 - x}}$

71. $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{2x - 1}}$

72. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{9 - x^2}}$

73–76 ■ Cuatro maneras de representar una función Se da una descripción verbal de una función. Encuentre las representaciones de la función ***a*)** algebraica, ***b*)** numérica y ***c*)** gráfica.

73. Para evaluar $f(x)$ divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

74. Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

75. Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para determinar el impuesto tome 8% del precio de compra.

76. Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro d. Para encontrar el volumen tome el cubo del diámetro, luego multiplique por π y divida entre 6.

HABILIDADES Plus

77–78 ■ Dominio y rango Determine el dominio y rango de f.

77. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 5 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

78. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 5x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

APLICACIONES

79. Ley de Torricelli Un tanque contiene 50 galones de agua que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 20$$

***a*)** Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.

***b*)** ¿Qué representan sus respuestas del inciso *a*)?

***c*)** Cree una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

***d*)** Encuentre el cambio neto en el volumen cuando V cambia de 0 a 20 min.



80. Área de una esfera El área superficial S de una esfera es una función de su radio r dada por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

***a*)** Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.

***b*)** ¿Qué representan sus respuestas del inciso *a*)?

81. Relatividad De acuerdo con la teoría de la relatividad, la longitud L de un cuerpo es una función de su velocidad v respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz (300 000 km/s).

a) Encuentre $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.

b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

82. Tamaño de la pupila Cuando aumenta el brillo x de una fuente de luz, el ojo reacciona disminuyendo el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

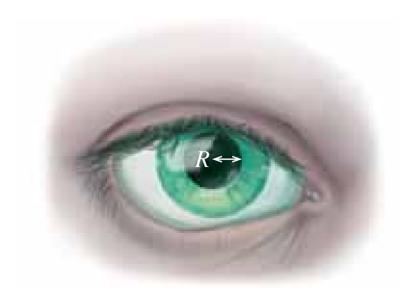
$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillo apropiadas.

a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.

b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.

c) Determine el cambio neto en el radio R cuando cambia de 10 a 100.



83. Flujo sanguíneo Cuando la sangre circula por una vena o una arteria su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia r desde el eje central aumenta (véase la figura). La fórmula que da v como función de r se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre v (en cm/s) y r (en cm) está dada por la función

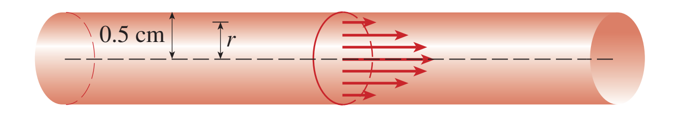
$$v(r) = 18\,500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

a) Encuentre $v(0.1)$ y $v(0.4)$.

b) ¿Qué le dicen sus respuestas del inciso *a*) acerca del flujo sanguíneo en esta arteria?

c) Haga una tabla de valores de $v(r)$ para $r = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

d) Encuentre el cambio neto en la velocidad v cuando r cambia de 0.1 a 0.5 cm.



84. ¿A qué distancia puede usted ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima a la que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o de un avión a una altitud h está dada por la función

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.

a) Encuentre $D(0.1)$ y $D(0.2)$.

b) ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1 135 pies del suelo?

c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

d) Determine el cambio neto en el valor de la distancia D cuando h cambia de 1 135 pies a 7 millas.

85. Impuesto sobre la renta En cierto país el impuesto sobre la renta T se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10\,000 \\ 0.08x & \text{si } 10\,000 < x \le 20\,000 \\ 1\,600 + 0.15x & \text{si } 20\,000 < x \end{cases}$$

a) Encuentre $T(5\,000)$, $T(12\,000)$ y $T(25\,000)$.

b) ¿Qué representan sus repuestas del inciso *a*)?

86. Compras por internet Una librería de ventas por internet cobra 15 dólares por el envío de pedidos de menos de 100 dólares, pero no cobra nada por pedidos de 100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso *a*)?

87. Costo de una estancia en hotel Una cadena hotelera cobra 75 dólares por noche por las primeras dos noches y \$50 por cada noche adicional de estancia. El costo total T es una función del número de noches x que permanezca un huésped.

a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} \square & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \square & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Encuentre $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

c) ¿Qué representan sus respuestas del inciso *b*)?

88. Boleta de infracción por rebasar el límite de velocidad En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es de 40 mi/h. La multa F por violar estos límites es de 15 dólares por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos, donde x es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} \square & \text{si } 0 < x < 40 \\ \square & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ \square & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

b) Encuentre $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

c) ¿Qué representan sus respuestas del inciso *b*)?

89. Altura de césped La propietaria de una casa poda el césped los miércoles en la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un periodo de 4 semanas que empieza un domingo.



90. Cambio de temperatura Una persona hornea durante una hora un pastel congelado. Luego saca el pastel del horno y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como una función del tiempo.

91. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 2014. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de T como función de t.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

92. Crecimiento poblacional La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2010, se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de P como función de t.

t	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
P	629	714	782	825	895	901	946

Fuente: Oficina del Censo de Estados Unidos.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

93. DISCUSIÓN: Ejemplos de funciones Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo de envío postal es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de la vida diaria.

94. DISCUSIÓN: Cuatro formas de representar una función En el cuadro de la página 154 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que se pueda representar de las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

95. DISCUSIÓN: Funciones definidas por tramos En los ejercicios 85-88 trabajamos con situaciones del mundo real modeladas por funciones definidas por tramos. Encuentre otros ejemplos de situaciones del mundo real que pueden ser modelados por funciones definidas por tramos y exprese los modelos de notación de función.

2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

■ Trazar la gráfica de funciones al colocar puntos ■ Trazar la gráfica de funciones con calculadora graficadora ■ Trazar la gráfica de funciones definidas por tramos ■ La prueba de la recta vertical: ¿qué gráficas representan funciones? ■ ¿Qué ecuaciones representan funciones?

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de trazar la gráfica de funciones.

Trazar la gráfica de funciones al colocar puntos

Para trazar la gráfica de una función f colocamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, colocamos los puntos (x, y) cuya coordenada x es una entrada, y cuya coordenada y es la correspondiente salida de la función.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

colocados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

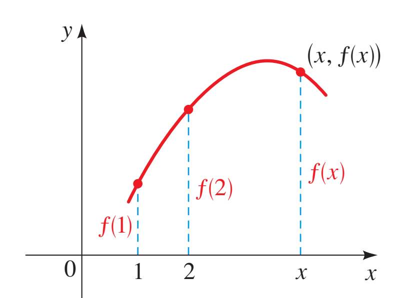
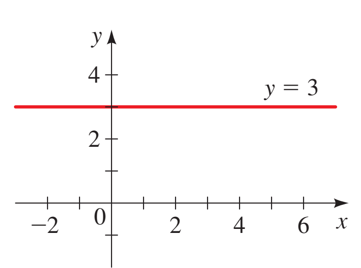


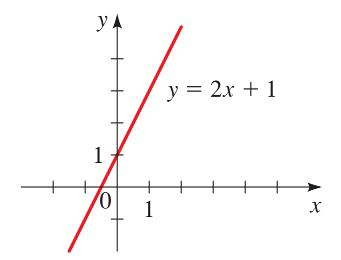
FIGURA 1 La altura de la gráfica arriba del punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función f da una fotografía del comportamiento o "historia de la vida" de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase la figura 1).

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se denomina **función lineal** porque su gráfica es la gráfica de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y punto de intersección b en y. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un número dado, recibe el nombre de **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, es decir, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. La figura 2 muestra las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.



La función constante $f(x) = 3$



La función lineal $f(x) = 2x + 1$

FIGURA 2

Funciones de la forma $f(x) = x^n$ se conocen como **funciones de potencia**, y las funciones de la forma $f(x) = x^{1/n}$ se llaman **funciones raíz**. En el ejemplo siguiente se traza la gráfica de dos funciones de potencia y de una función raíz.

EJEMPLO 1 ■ Trazar la gráfica de funciones colocando puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

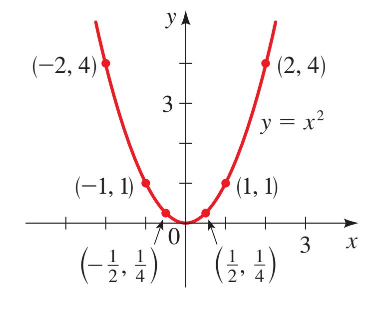
a) $f(x) = x^2$ ***b)*** $g(x) = x^3$ ***c)*** $h(x) = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN Primero hacemos una tabla de valores. Luego colocamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave para obtener la gráfica. En la figura 3 están trazadas las gráficas.

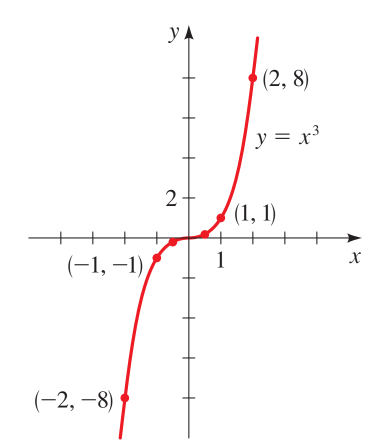
x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

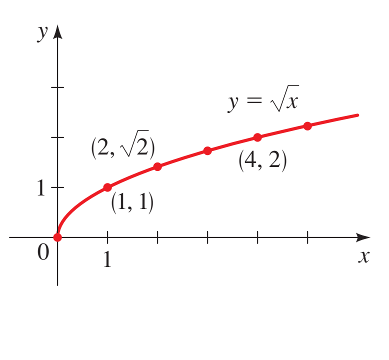
x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$



a) $f(x) = x^2$



b) $g(x) = x^3$



c) $h(x) = \sqrt{x}$

FIGURA 3

Ahora intente realizar los ejercicios 9, 15 y 19 ■

Trazar la gráfica de funciones con calculadora graficadora

Consulte el apéndice C,* *Gráficas con una calculadora graficadora,* para ver indicaciones sobre el uso de una calculadora graficadora. Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84,* para ver instrucciones específicas para trazar gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

Una forma conveniente de trazar la gráfica de una función es usar una calculadora graficadora. Para trazar la gráfica de la función f utilizamos una calculadora para trazar la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

EJEMPLO 2 ■ Trazar la gráfica de una función con calculadora graficadora

Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 8x^2$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN Para trazar la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 8x^2$ debemos trazar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 8x^2$. En la calculadora graficadora TI-83 el rectángulo de vista predeterminado da la gráfica de la figura 4*a*). Pero esta gráfica parece rebasar las partes superior e inferior de la pantalla. Necesitamos ampliar el eje vertical para obtener una mejor representación de la gráfica. El rectángulo de vista $[-4, 10]$ por $[-100, 100]$ da una imagen más completa de la gráfica como se muestra en la figura 4*b*).

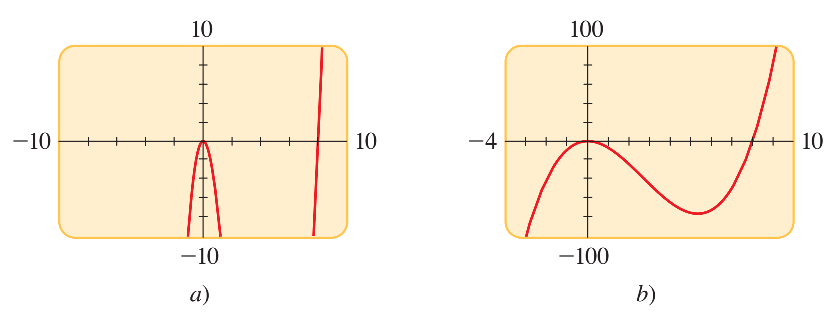


FIGURA 4 Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 8x^2$

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

EJEMPLO 3 ■ Una familia de funciones de potencia

a) Trace la gráfica de las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2, 4$ y 6 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

b) Trace la gráfica de las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1, 3$ y 5 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

c) ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas gráficas?

SOLUCIÓN Para trazar la gráfica de la función $f(x) = x^n$, trazamos la gráfica de la ecuación $y = x^n$. En la figura 5 se muestran las gráficas de los incisos *a*) y *b*).

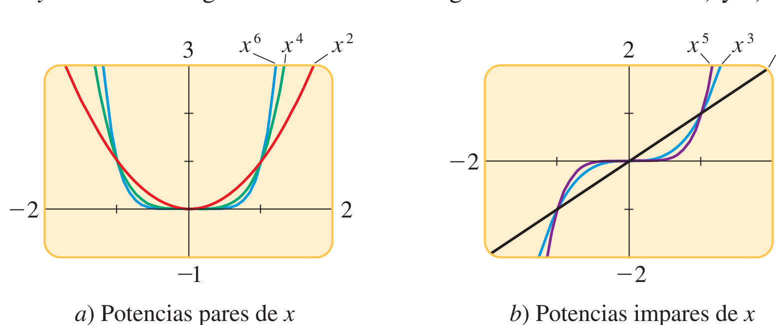


FIGURA 5 Una familia de funciones de potencia: $f(x) = x^n$

c) Vemos que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.

Si n es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$.

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

Observe de la figura 5 que cuando n crece, la gráfica de $y = x^n$ se hace más plana cerca de 0 y más pronunciada cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias inferiores de x son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias superiores de x son las funciones dominantes.

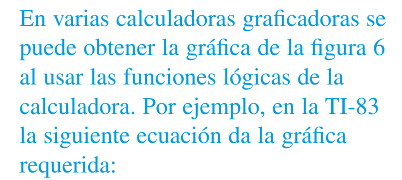
Trazar la gráfica de funciones definidas por tramos

Una función definida por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Como se puede esperar, la gráfica de esta función está formada por tramos separados.

EJEMPLO 4 ■ Trazar la gráfica de una función definida por tramos

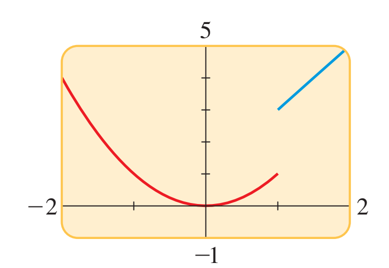
Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



En varias calculadoras graficadoras se puede obtener la gráfica de la figura 6 al usar las funciones lógicas de la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

```
Y₁=(X≤1)X²+(X>1)(2X+1)
```



(Para evitar la extraña recta vertical entre las dos partes de la gráfica ponga la calculadora en el modo `Dot`.)

SOLUCIÓN Si $x \le 1$, entonces $f(x) = x^2$, y la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que trazamos en la figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, y la parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que trazamos en la gráfica de en la figura 2. Esto nos permite trazar la gráfica de la figura 6.

El punto sólido en $(1, 1)$ indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en $(1, 3)$ indica que este punto está excluido de la gráfica.

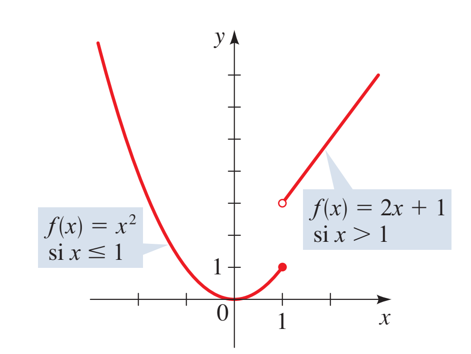


FIGURA 6
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

EJEMPLO 5 ■ Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando el mismo método que en el ejemplo 4 observamos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase la figura 7).

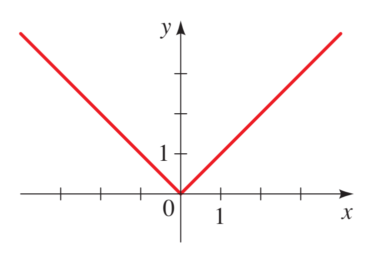


FIGURA 7 Gráfica de $f(x) = |x|$

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

La **función mayor entero** está definida por

$$[\![x]\!] = \text{mayor entero menor o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$ y $[\![-0.5]\!] = -1$.

EJEMPLO 6 ■ Gráfica de la función mayor entero

Trace la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$.

SOLUCIÓN La tabla muestra los valores de f para algunos valores de x. Observe que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos, de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal como se muestra en la figura 8.

x	$[\![x]\!]$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

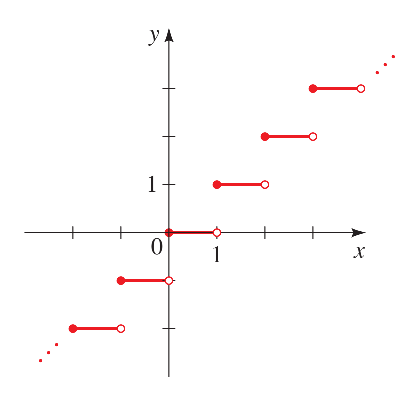


FIGURA 8 La función mayor entero, $y = [\![x]\!]$ ■

La función mayor entero es un ejemplo de una **función escalón**. El siguiente ejemplo da un ejemplo real de una función escalón.

EJEMPLO 7 ■ La función de costo para un plan de datos mundial

Un plan de datos mundial cuesta 25 dólares al mes por los primeros 100 megabytes y 20 dólares por cada 100 megabytes adicionales (o parte de los mismos). Trace la gráfica del costo C (en dólares) de la llamada telefónica como función del número de megabytes t usados por mes.

SOLUCIÓN Sea $C(x)$ el costo del uso de x megabytes de datos por mes. Dado que $x \ge 0$, el dominio de la función es $[0, \infty)$. De la información dada tenemos

$$\begin{aligned}
C(x) &= 25 && \text{si } 0 < x \le 100 \\
C(x) &= 25 + 20 = 45 && \text{si } 100 < x \le 200 \\
C(x) &= 25 + 2(20) = 65 && \text{si } 200 < x \le 300 \\
C(x) &= 25 + 3(20) = 85 && \text{si } 300 < x \le 400 \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

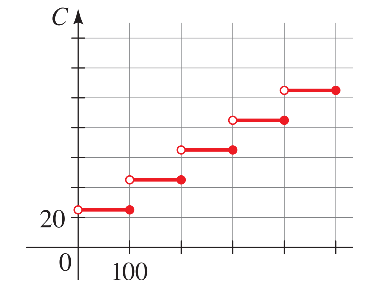


FIGURA 9 Costo de datos usados

En la figura se muestra la gráfica 9.

Ahora intente realizar el ejercicio 83 ■

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Relaciones y funciones

Muchas de las relaciones reales son funciones, pero muchas otras no lo son. Por ejemplo, la regla que asigna a cada estudiante su número de identificación de la escuela es una función. Pero ¿qué pasa con la regla que asigna a cada fecha la fecha de nacimiento de cada persona nacida en Chicago? ¿Ve por qué esta "relación" no es una función? Un conjunto de pares ordenados se llama una *relación*. En este proyecto exploramos cuáles relaciones son funciones. Se puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Una función se llama **continua** si su gráfica no tiene "rupturas" o "huecos". Las funciones de los ejemplos 1, 2, 3 y 5 son continuas; las funciones de los ejemplos 4, 6 y 7 no lo son.

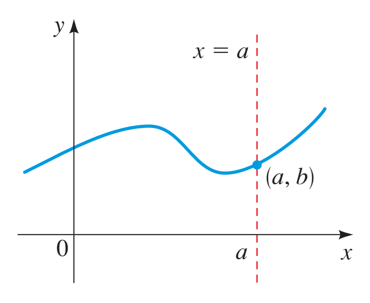
La prueba de la recta vertical: ¿qué gráficas representan funciones?

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿cuáles curvas del plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta mediante la prueba siguiente.

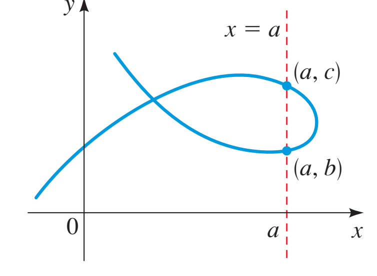
LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

Podemos ver de la figura 10 por qué la prueba de la recta vertical es verdadera. Si cada recta vertical $x = a$ cruza la curva sólo una vez en (a, b), entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ cruza la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes de a.



Gráfica de una función

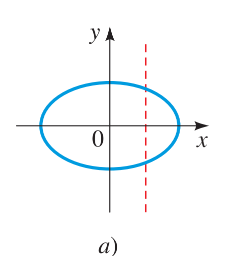


No es la gráfica de una función

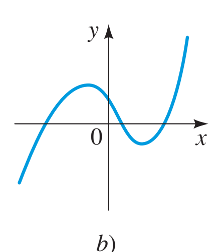
FIGURA 10 Prueba de la recta vertical

EJEMPLO 8 ■ Uso de la prueba de la recta vertical

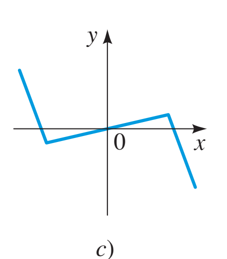
Usando la prueba de la recta vertical vemos que las curvas en los incisos *b*) y *c*) de la figura 11 representan funciones, mientras que los incisos *a*) y *d*) no lo hacen.



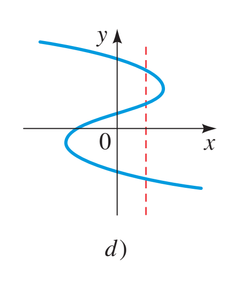
a)



b)



c)



d)

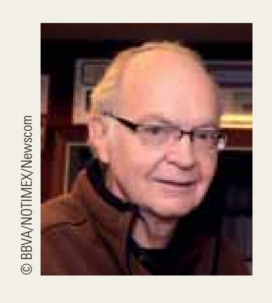
FIGURA 11

Ahora intente realizar el ejercicio 51 ■

¿Qué ecuaciones representan funciones?

Cualquier ecuación con las variables x y y definen una relación entre dichas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$



DONALD KNUTH nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de Ciencias de la Computación en la Universidad de Stanford. Cuando Knuth era estudiante de secundaria, quedó fascinado con las gráficas de funciones y laboriosamente dibujó cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (Por supuesto, hoy en día, es mucho más fácil usar computadoras y calculadoras graficadoras para hacer esto.) Cuando aún era estudiante a punto de posgrado en el Caltech, empezó a escribir una monumental serie de libros titulada *The Art of Computer Programming*.

Knuth es famoso por su invento del TEX, que es un sistema de ajuste de tipos asistido por computadora. Este sistema fue utilizado en la preparación del manuscrito para este libro.

Knuth ha recibido numerosos honores, uno de ellos es su nombramiento como profesor asociado de la Academia de Ciencias de Francia y como Miembro de Número de la Royal Society. El presidente Carter le otorgó la Medalla Nacional de Ciencias, en 1979.

define una relación entre y y x. ¿Esta ecuación define a y como *función* de x? Para saberlo, despejamos y y obtenemos

$$y = x^2 \qquad \text{Forma ecuación}$$

Vemos que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de y por cada valor de x. Podemos expresar esta regla en notación de funciones como

$$f(x) = x^2 \qquad \text{Forma función}$$

Pero no toda ecuación define a y como función de x como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 ■ Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como función de x?

a) $y - x^2 = 2$ ***b***) $x^2 + y^2 = 4$

SOLUCIÓN

a) Despejando y en términos de x se obtiene

$$y - x^2 = 2$$
$$y = x^2 + 2 \qquad \text{Sume } x^2$$

La última ecuación es una regla que da un valor de y por cada valor de x, de modo que define a y como función de x. Podemos escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

b) Intentamos despejar y en términos de x.

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2 \qquad \text{Reste } x^2$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

La última ecuación da dos valores de y por un valor dado de x. Entonces, la ecuación no define a y como una función de x.


Ahora intente realizar los ejercicios 57 y 61 ■

En la figura 12 se muestran las gráficas de las ecuaciones del ejemplo 9. La prueba de la recta vertical muestra gráficamente que la ecuación del ejemplo 9*a*) define una función, pero la ecuación del ejemplo 9*b*) no lo hace.

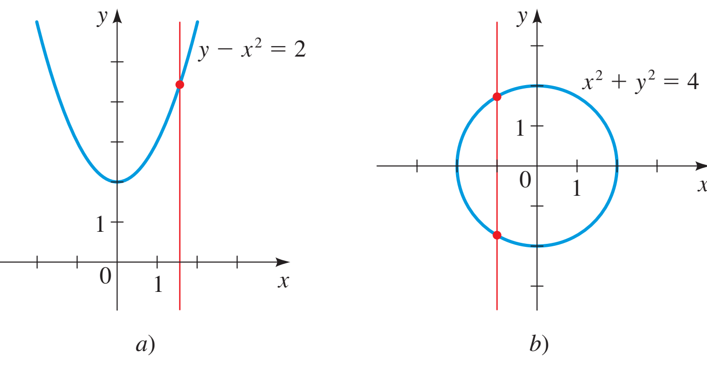


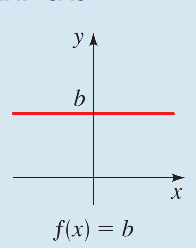
FIGURA 12

El cuadro siguiente muestra las gráficas de algunas funciones que con frecuencia se ven en este libro.

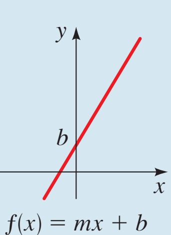
ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Funciones lineales

$f(x) = mx + b$



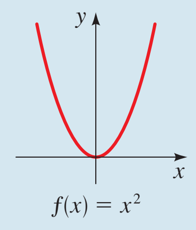
$f(x) = b$



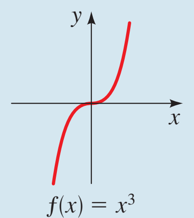
$f(x) = mx + b$

Funciones de potencia

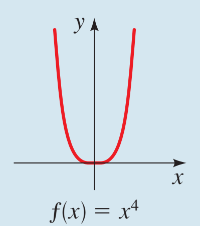
$f(x) = x^n$



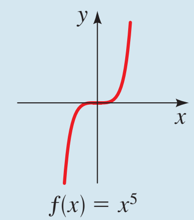
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



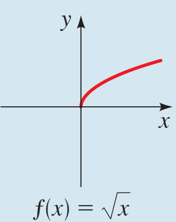
$f(x) = x^4$



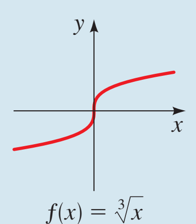
$f(x) = x^5$

Funciones raíz

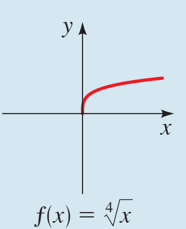
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



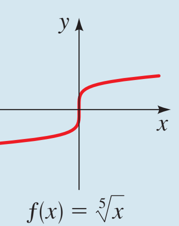
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$



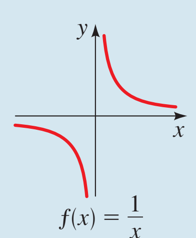
$f(x) = \sqrt[4]{x}$



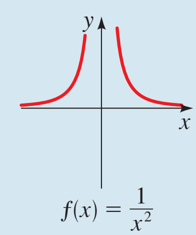
$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas

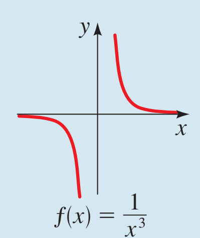
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$



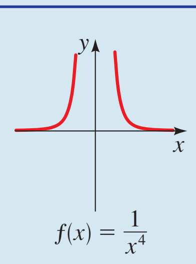
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



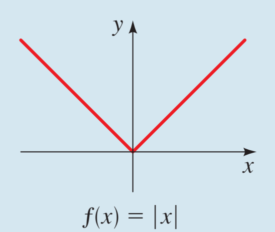
$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$



$f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

Función valor absoluto

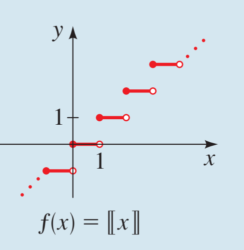
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función mayor entero

$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

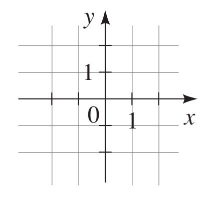
2.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para trazar la gráfica de la función f, colocamos los puntos (x, ________) en un plano de coordenadas. Para trazar la gráfica de $f(x) = x^2 - 2$, colocamos los puntos (x, ________). Por tanto, el punto (3, ________) está sobre la gráfica de f.

La altura de la gráfica de f arriba del eje x cuando $x = 3$ es ________. Complete la tabla y trace una gráfica de f.

x	$f(x)$	(x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		



2. Si $f(4) = 10$ entonces el punto $(4, ____)$ está sobre la gráfica de f.

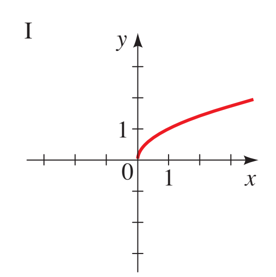
3. Si el punto $(3, 7)$ está sobre la gráfica de f, entonces $f(3) = ________$.

4. Relacione la función con su gráfica.

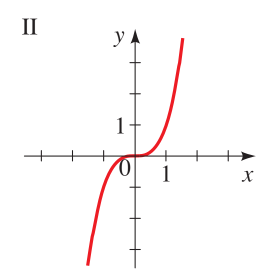
a) $f(x) = x^2$ ***b)*** $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ ***d)*** $f(x) = |x|$

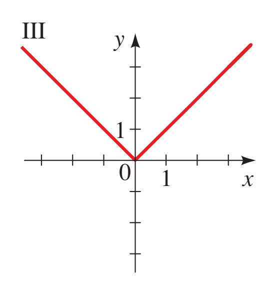
I



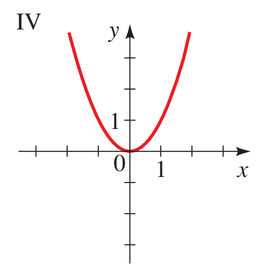
II



III



IV



HABILIDADES

5–28 ■ Trazar gráficas de funciones Trace la gráfica de la función haciendo primero una tabla de valores.

5. $f(x) = x + 2$

6. $f(x) = 4 - 2x$

7. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \le x \le 3$

8. $f(x) = \dfrac{x - 3}{2}, \quad 0 \le x \le 5$

9. $f(x) = -x^2$

10. $f(x) = x^2 - 4$

11. $g(x) = -(x + 1)^2$

12. $g(x) = x^2 + 2x + 1$

13. $r(x) = 3x^4$

14. $r(x) = 1 - x^4$

15. $g(x) = x^3 - 8$

16. $g(x) = (x - 1)^3$

17. $k(x) = \sqrt[3]{-x}$

18. $k(x) = -\sqrt[3]{x}$

19. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

20. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

21. $C(t) = \dfrac{1}{t^2}$

22. $C(t) = -\dfrac{1}{t + 1}$

23. $H(x) = |2x|$

24. $H(x) = |x + 1|$

25. $G(x) = |x| + x$

26. $G(x) = |x| - x$

27. $f(x) = |2x - 2|$

28. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

29–32 ■ Trazar gráficas de funciones Trace la gráfica de la función en cada uno de los rectángulos de vista dados y seleccione el que produzca la gráfica más apropiada de la función.

29. $f(x) = 8x - x^2$

a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

c) $[-2, 10]$ por $[-5, 20]$

d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$

30. $g(x) = x^2 - x - 20$

a) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$

b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

c) $[-7, 7]$ por $[-25, 20]$

d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$

31. $h(x) = x^3 - 5x - 4$

a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

b) $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

c) $[-3, 3]$ por $[-10, 5]$

d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

32. $k(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 2$

a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$

b) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

c) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

33–46 ■ Trazar gráficas de funciones definidas por tramos Trace la gráfica de la función definida por tramos.

33. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



47–48 ■ Trazar gráficas de funciones definidas por tramos Use una la calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función definida por tramos. (Vea la nota al margen, página 162.)

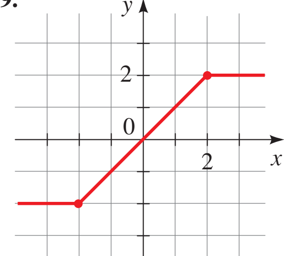
47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

49–50 ■ Funciones definidas por tramos Se da la gráfica de una función definida por tramos. Encuentre una fórmula para la función en la forma indicada.

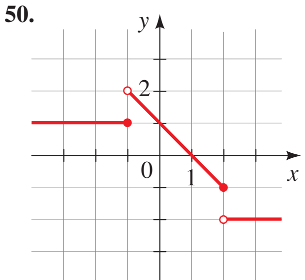
49.

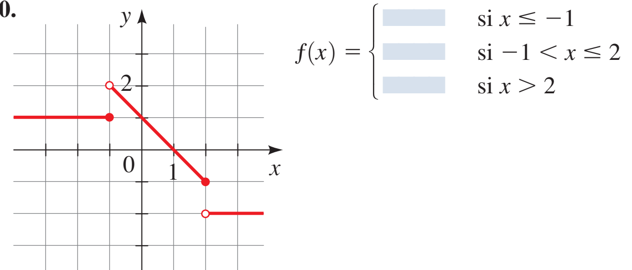




$f(x) = \begin{cases} \square & \text{si } x < -2 \\ \square & \text{si } -2 < x \le 2 \\ \square & \text{si } x > 2 \end{cases}$

50.

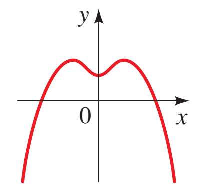




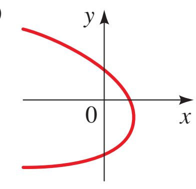
$f(x) = \begin{cases} \square & \text{si } x \le -1 \\ \square & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \square & \text{si } x > 2 \end{cases}$

51–52 ■ Prueba de la recta vertical Use la prueba de la recta vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de *x*.

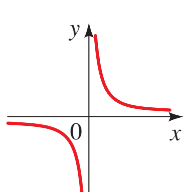
51. *a)*



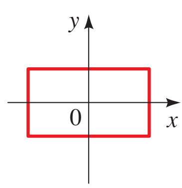
b)



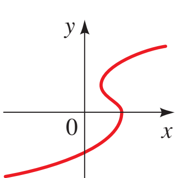
c)



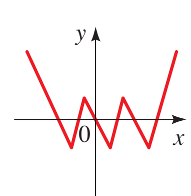
d)



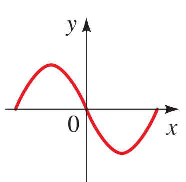
52. *a)*



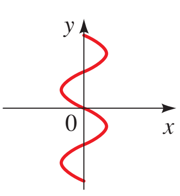
b)



c)

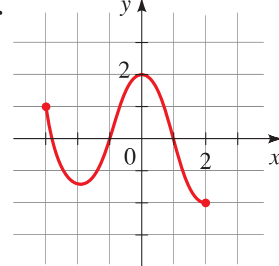


d)

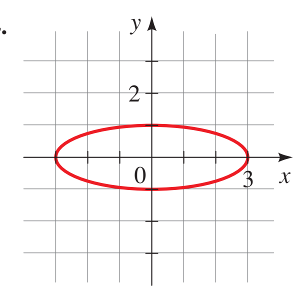


53–56 ■ Prueba de la recta vertical: dominio y rango Use la prueba de la recta vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de *x*. Si lo es indique el dominio y el rango de la función.

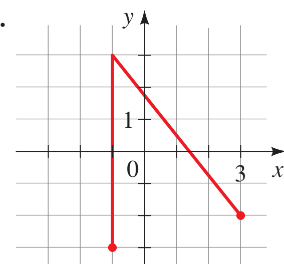
53.



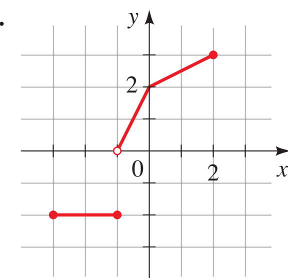
54.



55.



56.



57–68 ■ Ecuaciones que definen funciones Determine si la ecuación define a *y* como función de *x*. (Vea el ejemplo 9.)

57. $3x - 5y = 7$

58. $3x^2 - y = 5$

59. $x = y^2$

60. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

61. $2x - 4y^2 = 3$

62. $2x^2 - 4y^2 = 3$

63. $2xy - 5y^2 = 4$

64. $\sqrt{y} - x = 5$

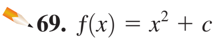
65. $2|x| + y = 0$

66. $2x + |y| = 0$

67. $x = y^3$

68. $x = y^4$


69–74 ■ Familias de funciones Se da una familia de funciones. En los incisos *a*) y *b*) trace la gráfica de todos los miembros dados de la familia en el rectángulo de vista indicado. En el inciso *c*) exprese las conclusiones que pueda hacer a partir de sus gráficas.


69. $f(x) = x^2 + c$

a) $c = 0, 2, 4, 6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -2, -4, -6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

70. $f(x) = (x - c)^2$

a) $c = 0, 1, 2, 3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -1, -2, -3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

71. $f(x) = (x - c)^3$

a) $c = 0, 2, 4, 6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -2, -4, -6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

72. $f(x) = cx^2$

a) $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

73. $f(x) = x^c$

a) $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$; $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$

b) $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$; $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

74. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

a) $n = 1, 3$; $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$

b) $n = 2, 4$; $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$

c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de n?

HABILIDADES Plus

75–78 ■ Determinar funciones para ciertas curvas Encuentre una función cuya gráfica sea la curva dada.

75. El segmento de recta que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

76. El segmento de recta que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

77. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

78. La mitad inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

APLICACIONES


79. Globo de meteorología Cuando se infla un globo de meteorología, el grueso T de la capa de caucho está relacionada con el globo mediante la ecuación

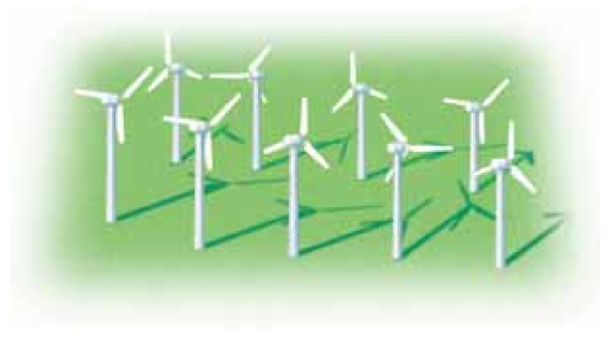
$$T(r) = \frac{0.5}{r^2}$$

donde T y r se miden en centímetros. Trace la gráfica de la función T para valores de r entre 10 y 100.


80. Potencia generada por una turbina de viento La potencia producida por una turbina de viento depende de la velocidad del viento. Si un molino de viento tiene aspas de 3 metros de largo, entonces la potencia P producida por la turbina está modelada por

$$P(v) = 14.1v^3$$

donde P se mide en watts (W) y v se mide en metros por segundo (m/s). Trace la gráfica de la función P para velocidades de viento entre 1 y 10 m/s.



81. Tarifas de una empresa La empresa Westside Energy cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa base de 6.00 dólares por mes, más 10 centavos por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh consumidos y 6 centavos por kWh por el consumo mayor de 300 kWh. Suponga que un cliente usa x kWh de electricidad en un mes.

a) Exprese el costo mensual E como una función de x definida por tramos.

b) Trace la gráfica de la función E para $0 \leq x \leq 600$.

82. Función de un taxi Una compañía de taxis cobra 2.00 dólares por la primera milla (o parte de milla) y 20 centavos por cada décimo sucesivo de milla (o parte). Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función definida por partes de la distancia x recorrida (en millas) para $0 < x < 2$, y trace la gráfica de esta función.

83. Tarifas postales La tarifa nacional de costos de envío postal por cartas de primera clase, de 3.5 onzas o menos, es de 49 centavos por la primera onza (o menos), más 21 centavos por cada onza adicional (o parte de una onza). Exprese el costo de envío postal P como una función definida por tramos del peso x de una carta, con $0 < x \leq 3.5$, y trace la gráfica de esta función.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

84. DESCUBRIMIENTO: ¿Cuándo una gráfica representa una función? Para todo entero n, la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, es decir $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ *no* es la gráfica de una función de x. ¿La gráfica de $x = y^3$ es una gráfica de la función de x? Si es así, ¿de qué función de x es la gráfica? Determine para qué enteros n la gráfica de $x = y^n$ es la gráfica de una función de x.

85. DISCUSIÓN: Funciones escalón En el ejemplo 7 y los ejercicios 82 y 83 se dan funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos de recta horizontal. Es frecuente que estas funciones se llamen *funciones escalón* porque sus gráficas se ven como escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que se ven en la vida diaria.

86. DISCUSIÓN: Funciones escalón estiradas Trace gráficas de las funciones $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = [\![2x]\!]$ y $h(x) = [\![3x]\!]$ en gráficas separadas. ¿Cómo están relacionadas? Si n es un entero positivo, ¿qué aspecto tiene la gráfica de $k(x) = [\![nx]\!]$?

87. DESCUBRIMIENTO: Gráfica de la función valor absoluto

a) Trace las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

y

$$g(x) = |x^2 + x - 6|$$

¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

b) Trace las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 6x^2$ y $g(x) = |x^4 - 6x^2|$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

c) En general, si $g(x) = |f(x)|$, ¿cómo están relacionadas las gráficas de f y g? Trace las gráficas para ilustrar su respuesta.

2.3 OBTENER INFORMACIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

■ Valores de una función: dominio y rango ■ Comparar valores de la función: resolver ecuaciones y desigualdades gráficamente ■ Funciones crecientes y decrecientes ■ Valores máximos y mínimos locales de una función

Numerosas propiedades de una función se obtienen más fácilmente de una gráfica que de la regla que describe la función. Veremos en esta sección cómo una gráfica nos dice si los valores de una función son crecientes o decrecientes, así como también dónde están los valores máximo y mínimo de una función.

■ Valores de una función: dominio y rango

Una gráfica completa de una función contiene toda la información acerca de la misma, porque la gráfica nos dice cuáles valores de entrada corresponden a cuáles valores de salida. Para analizar la gráfica de una función debemos recordar que la *altura de la gráfica es el valor de la función*. Entonces, podemos leer los valores de una función a partir de su gráfica.

EJEMPLO 1 ■ Determinar los valores de una función a partir de una gráfica

La función T que está trazada en la gráfica en la figura 1 da la temperatura entre el mediodía y las 6:00 p.m. en cierta estación meteorológica.

a) Encuentre $T(1)$, $T(3)$ y $T(5)$.

b) ¿Cuál es mayor, $T(2)$ o $T(4)$?

c) Encuentre el valor o los valores de x para los que $T(x) = 25$.

d) Encuentre el valor o los valores de x para los que $T(x) \geq 25$.

e) Encuentre el cambio neto en la temperatura de 1.00 a 3.00 p.m.

FIGURA 1 Función de temperatura

SOLUCIÓN

a) $T(1)$ es la temperatura a la 1:00 p.m. Está representada por la altura de la gráfica arriba del eje x en $x = 1$. Entonces, $T(1) = 25$. Similarmente, $T(3) = 30$ y $T(5) = 20$.

b) Dado que la gráfica es más alta en $x = 2$ que en $x = 4$, se deduce que $T(2)$ es mayor que $T(4)$.

c) La altura de la gráfica es 25 cuando x es 1 y cuando x es 4. En otras palabras, la temperatura es 25 a la 1:00 p.m. y a las 4:00 p.m.

d) La gráfica es más alta de 25 para x entre 1 y 4. En otras palabras, la temperatura era 25 o mayor entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m.

e) El cambio neto en la temperatura es

El cambio neto se define en la página 151.

$$T(3) - T(1) = 30 - 25 = 5$$

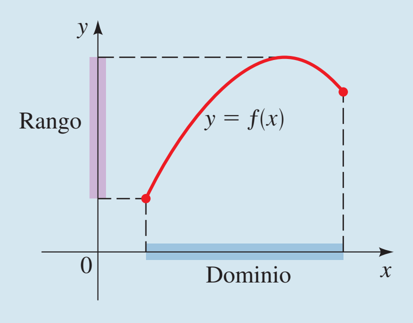
Por lo que hubo un cambio neto de 5°F de 1.00 a 3.00 p.m.

Ahora intente realizar los ejercicios 7 y 55 ■

La gráfica de una función nos ayuda a representar el dominio y el rango de la función en el eje x y el eje y, como se muestra en el cuadro siguiente.

DOMINIO Y RANGO DE UNA GRÁFICA

El **dominio** y el **rango** de una función $y = f(x)$ se pueden obtener de la gráfica de f como la que se muestra en la figura. El dominio es el conjunto de todos los valores x para los que f está definida, y el rango son todos los valores y correspondientes.



EJEMPLO 2 ■ Encontrar el dominio y el rango a partir de una gráfica

Consulte el apéndice C,* *Gráficas con una calculadora graficadora,* para ver indicaciones sobre el uso de una calculadora graficadora. Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84,* para ver instrucciones específicas para trazar gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

a) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

b) Encuentre el dominio y el rango de f.

SOLUCIÓN

a) La gráfica se muestra en la figura 2.

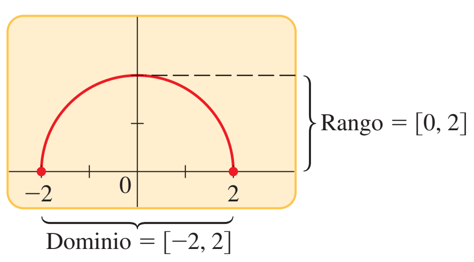


FIGURA 2 Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

b) De la gráfica de la figura 2 vemos que el dominio es $[-2, 2]$ y el rango es $[0, 2]$.

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

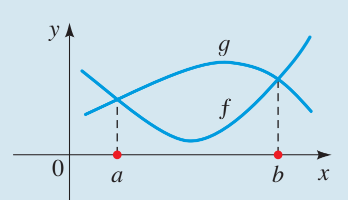
■ Comparar valores de la función: resolver ecuaciones y desigualdades gráficamente

Podemos comparar visualmente los valores de dos funciones f y g al trazar sus gráficas. Los puntos en que se cruzan las gráficas son los puntos donde los valores de las dos funciones son iguales. Por lo que las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ son los valores de x en la que se intersecan las dos gráficas. Los puntos en que la gráfica de g es mayor que la gráfica de f son los puntos donde los valores de g son mayores que los valores de f. Por tanto, las soluciones de la desigualdad $f(x) < g(x)$ son los valores de x en los que la gráfica de g es *más alta que* la gráfica de f.

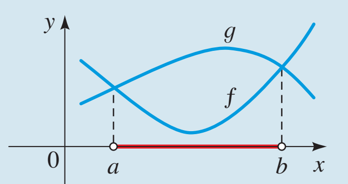
RESOLVER GRÁFICAMENTE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Las **soluciones de la ecuación** $f(x) = g(x)$ son los valores de x donde se cruzan las gráficas de f y g.

Las **soluciones de la desigualdad** $f(x) < g(x)$ son los valores de x donde la gráfica de g es más alta que la gráfica de f.



Las soluciones de $f(x) = g(x)$ son los valores a y b.



La solución de $f(x) < g(x)$ es el intervalo (a, b).

Podemos utilizar estas observaciones para resolver gráficamente ecuaciones y desigualdades como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 ■ Resolver gráficamente

Resolver gráficamente la ecuación dada o a la desigualdad.

a) $2x^2 + 3 = 5x + 6$

b) $2x^2 + 3 \le 5x + 6$

c) $2x^2 + 3 > 5x + 6$

También puede resolver las ecuaciones y desigualdades algebraicamente. Verifique que las soluciones coincidan con las soluciones que se obtienen gráficamente.

SOLUCIÓN En primer lugar se definen las funciones f y g que corresponden a la izquierda y la derecha de la ecuación o desigualdad. Por lo que definimos

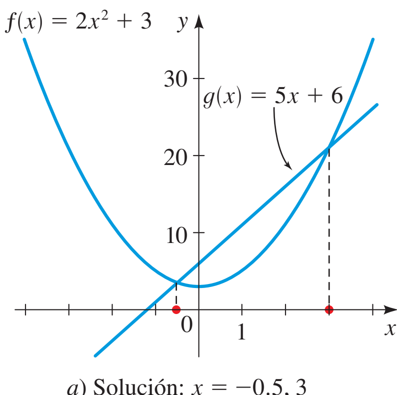
$$f(x) = 2x^2 + 3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 5x + 6$$

A continuación trazamos las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes.

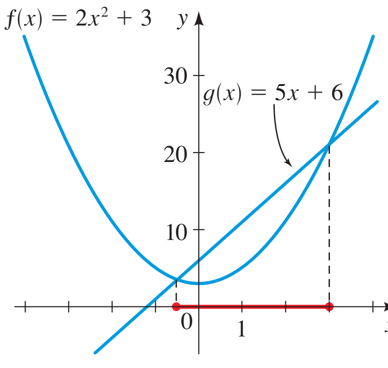
a) La ecuación dada es equivalente a $f(x) = g(x)$. En la gráfica de la figura 3*a*) vemos que las soluciones de la ecuación son $x = -0.5$ y $x = 3$.

b) La desigualdad dada es equivalente a $f(x) \le g(x)$. En la gráfica de la figura 3*b*) vemos que la solución es el intervalo $[-0.5, 3]$.

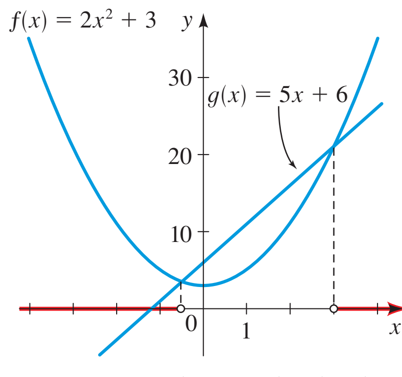
c) La desigualdad dada es equivalente a $f(x) > g(x)$. En la gráfica de la figura 3*c*) vemos que la solución es $(-\infty, -0.5) \cup (3, \infty)$.



a) Solución: $x = -0.5, 3$



b) Solución: $[-0.5, 3]$



c) Solución: $(-\infty, -0.5) \cup (3, \infty)$

FIGURA 3 Gráficas de $f(x) = 2x^2 + 3$ y $g(x) = 5x + 6$

Ahora intente realizar el ejercicio 9 y 23 ■

Para resolver gráficamente una ecuación, podemos primero pasar todos los términos a un lado de la ecuación y luego trazar la gráfica de la función que corresponde al lado de la ecuación distinto de cero. En este caso las soluciones de la ecuación son las intersecciones x de la gráfica. Se puede utilizar este mismo método para resolver las desigualdades gráficamente como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 ■ Resolver gráficamente

Resuelva la ecuación o desigualdad dada gráficamente.

a) $x^3 + 6 = 2x^2 + 5x$

b) $x^3 + 6 \geq 2x^2 + 5x$

SOLUCIÓN Primero pasamos todos los términos a un lado para obtener una ecuación (o desigualdad) equivalente. Para la ecuación del inciso *a*) se obtiene

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \text{Mueva todos los términos al LI}$$

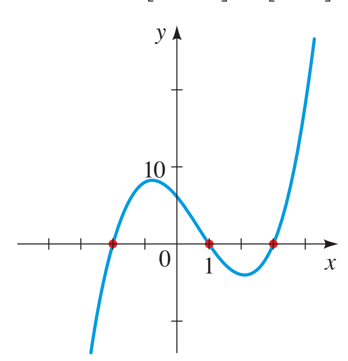
Luego definimos una función f por

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \qquad \text{Defina } f$$

Luego utilizamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de f, como se muestra en la figura 4.

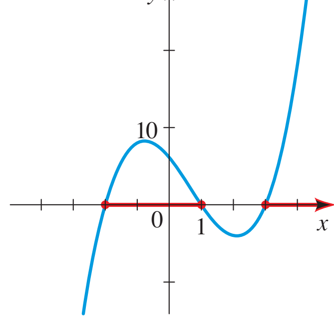
a) La ecuación dada es igual a $f(x) = 0$, por lo que las soluciones son las intersecciones x de la gráfica. En la figura 4 vemos que las soluciones son $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$.

b) La desigualdad dada es igual a $f(x) \geq 0$, por lo que las soluciones son los valores x en los que la gráfica de f está sobre o encima del eje x. De la figura 4*b*) vemos que la solución es $[-2, 1] \cup [3, \infty]$.





a) Solución: $x = -2, 1, 3$



b) Solución: $[-2, 1] \cup [3, \infty]$

FIGURA 4 Gráficas de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

■ Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber en dónde sube la gráfica y en dónde baja. La gráfica que se ve en la figura 5 sube, baja y luego sube de nuevo conforme nos movemos de izquierda a derecha: sube de A a B, baja de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando baja.

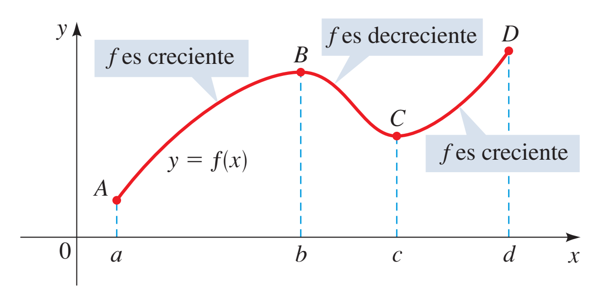
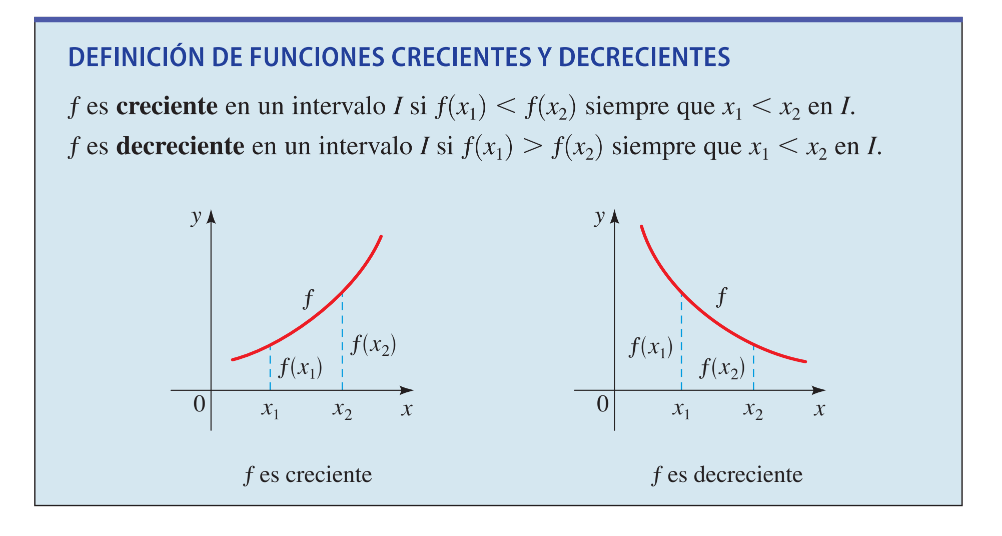


FIGURA 5 f es creciente en (a, b) y (c, d); f es decreciente en (b, c)

Tenemos la siguiente definición.

De la definición vemos que la función aumenta o disminuye *en un intervalo*. No tiene sentido aplicar estas definiciones en un solo punto.



DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

EJEMPLO 5 ■ Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la figura 6 da el peso W de una persona a una edad x. Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.



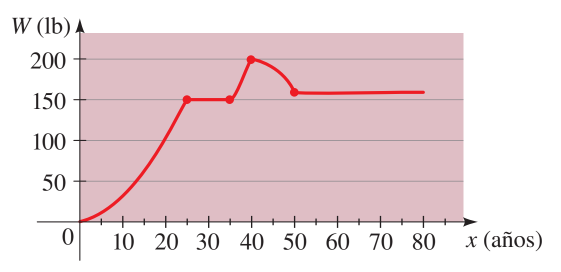


FIGURA 6 El peso como función de la edad

SOLUCIÓN La función W es creciente en $(0, 25)$ y $(35, 40)$. Es decreciente en $(40, 50)$. La función W es constante (ni creciente ni decreciente) en $(25, 35)$ y $(50, 80)$. Esto significa que la persona aumentó de peso hasta la edad de 25, luego aumentó de peso otra vez entre las edades de 35 y 40. Bajó de peso entre las edades de 40 y 50.


Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

Por convención escribimos los intervalos en los que una función está creciendo o decreciendo como intervalos abiertos. (También se puede decir que la función es creciente o decreciente en el intervalo cerrado correspondiente. Por ejemplo, también es correcto decir que la función W en el ejemplo 5 está decreciendo en $[40, 50]$.)

EJEMPLO 6 ■ Encontrar intervalos donde una función crece y decrece

a) Trace la gráfica de la función $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$.

b) Encuentre el dominio y el rango de f.

c) Encuentre los intervalos en los que f crece y decrece.

SOLUCIÓN

a) Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la figura 7.

b) El dominio de f es $\mathbb{R}$ porque f está definida para todos los números reales. Usando la función TRACE de la calculadora, encontramos que el valor más alto de $f(2) = 32$. Por tanto, el rango de f es $(-\infty, 32]$.

c) De la gráfica vemos que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 2)$ y es decreciente en $(-1, 0)$ y $(2, \infty)$.

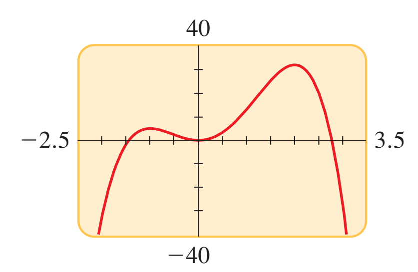


FIGURA 7 Gráfica de $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

EJEMPLO 7 ■ Determinar intervalos donde una función crece y decrece

a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.

b) Encuentre el dominio y el rango de la función.

c) Encuentre los intervalos en los que f crece y decrece.

SOLUCIÓN

a) Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica en la figura 8.

b) De la gráfica observamos que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el rango es $[0, \infty)$.

c) De la gráfica vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

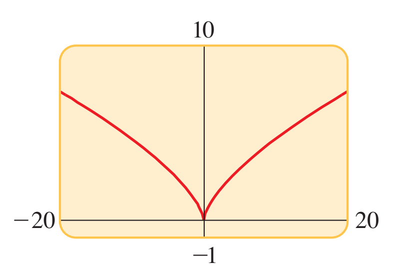


FIGURA 8 Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

■ Valores máximos y mínimos locales de una función

Determinar los valores máximo y mínimo de una función es importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, si una función representa ingreso o utilidad, entonces estamos interesados en su valor máximo. Para una función que representa costo desearíamos encontrar su valor mínimo. (Vea *Enfoque sobre modelado: modelado con funciones* en las páginas 237-244 para muchos otros ejemplos.) Fácilmente podemos encontrar estos valores a partir de la gráfica de una función. Primero definimos qué queremos decir con un máximo o mínimo locales.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN

1. El valor de una función $f(a)$ es un **valor máximo local** de f si

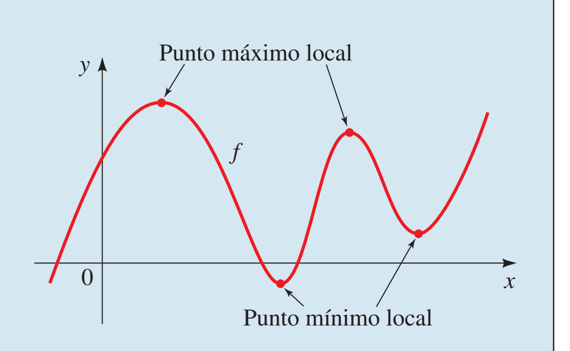
$$f(a) \geq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a.) En este caso decimos que f tiene un **máximo local** en $x = a$.

2. El valor de la función $f(a)$ es un **mínimo local** de f si

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a.) En este caso decimos que f tiene un **mínimo local** en $x = a$.



Podemos encontrar los valores máximo y mínimo locales de una función usando una calculadora graficadora. Si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de f *dentro* del rectángulo de vista (no en el borde), entonces el número $f(a)$ es un valor máximo local de f (véase la figura 9). Observe que $f(a) \geq f(x)$ para todos los números x que sean cercanos a a.

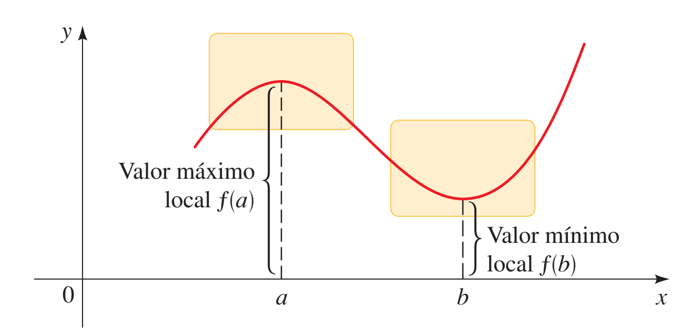


FIGURA 9

De modo similar, si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(b, f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de f dentro del rectángulo de vista, entonces el número $f(b)$ es un valor mínimo local de f. En este caso, $f(b) \leq f(x)$ para todos los números x que sean cercanos a b.

EJEMPLO 8 ■ Encontrar máximos y mínimos locales para una gráfica

Encuentre los valores máximo y mínimo local de la función $f(x) = x^3 - 8x + 1$, redondeados a tres lugares decimales.

SOLUCIÓN La gráfica de f se muestra en la figura 10. Parece haber un máximo local entre $x = -2$ y $x = -1$, y un mínimo local entre $x = 1$ y $x = 2$.

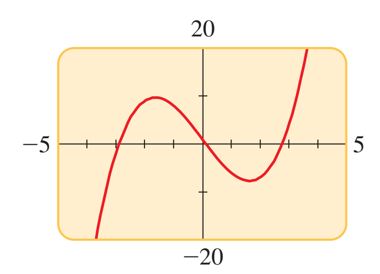


FIGURA 10 Gráfica de $f(x) = x^3 - 8x + 1$

Primero busquemos las coordenadas del punto máximo local. Hacemos acercamiento (*zoom*) para ampliar el área cerca de este punto, como se muestra en la figura 11. Con el

uso de la función `TRACE` de la calculadora graficadora movemos el cursor a lo largo de la curva y observamos cómo cambian las coordenadas y. El valor máximo local de y es 9.709 y este valor ocurre cuando x es -1.633, correcto a tres lugares decimales.

Colocamos el valor mínimo de forma similar. Al hacer un acercamiento en el rectángulo de vista, como se muestra en la figura 12, encontramos que el valor mínimo local es aproximadamente -7.709, y este valor se presenta cuando $x \approx 1.633$.

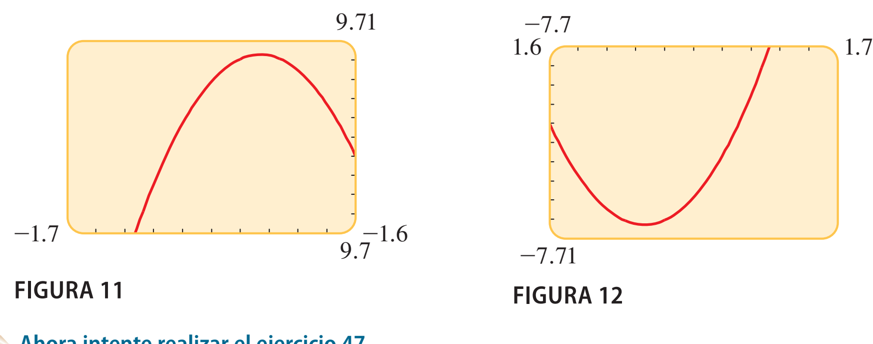


FIGURA 11 **FIGURA 12**

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

Las instrucciones `maximum` y `minimum` en una calculadora TI-83 o TI-84 son otro método para encontrar valores extremos de funciones. Usamos este método en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 ■ Un modelo de manejo de tráfico

Vea el *Proyecto de descubrimiento* del capítulo 3, en la página 295, para ver cómo se obtiene este modelo.

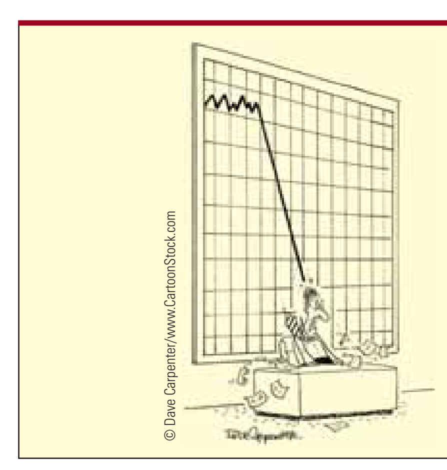
Una ingeniera de carreteras desarrolla una fórmula para calcular el número de autos que pueden viajar con seguridad en una determinada autopista a una velocidad dada. Ella supone que cada auto tiene 17 pies de largo y viaja a una velocidad de x mi/h, y que este sigue al auto de enfrente a una distancia segura para esa rapidez. Ella encuentra que el número N de vehículos que puede pasar por un punto dado por minuto se modela con la función

$$N(x) = \frac{88x}{17 + 17\left(\frac{x}{20}\right)^2}$$

Trace la gráfica de la función en el rectángulo de visión $[0, 100]$ por $[0, 60]$.

a) Determine los intervalos para los que la función N es creciente y aquellos en los que es decreciente.

b) Encuentre el máximo valor de N. ¿Cuál es la máxima capacidad de carga de la carretera y a qué velocidad se alcanza?



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Cada gráfica cuenta una historia

Una gráfica a menudo puede describir una "historia" del mundo real mucho más rápida y efectivamente que muchas palabras. Por ejemplo, la caída de la bolsa de 1929 se describe muy bien mediante una gráfica del índice bursátil de referencia de la bolsa de valores de Nueva York. No se necesitan palabras para transmitir el mensaje en la caricatura que mostramos. En este proyecto describimos o contamos la historia que corresponde a una gráfica dada, así como también realizamos gráficas que corresponden a una "historia" del mundo real. Puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

SOLUCIÓN En la figura 13*a*) se muestra la gráfica.

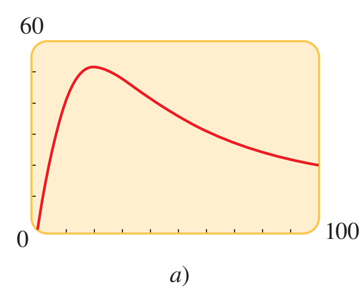
a) En la gráfica se ve que la función N es creciente en $(0, 20)$ y decreciente en $(20, \infty)$.

b) Parece haber un máximo entre $x = 19$ y $x = 21$. Usando la instrucción `maximum` como se muestra en la figura 13*b*) vemos que el valor máximo de N es aproximadamente 51.78, y ocurre cuando x es 20. Por lo que la capacidad máxima es de 52 autos por minuto a una velocidad de 20 mi/h.

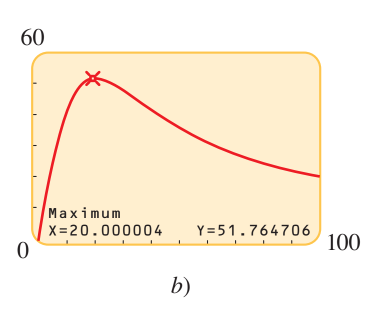
Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84,* para obtener instrucciones específicas sobre cómo utilizar la instrucción `maximum`. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en ingles.



a)



b)

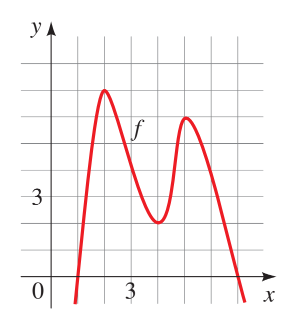
FIGURA 13 Capacidad de la autopista a la velocidad x

Ahora intente realizar el ejercicio 65 ■

2.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1–5 ■ La función f que se muestra a continuación se define mediante una expresión polinomial de grado 4. Utilice la gráfica para resolver los ejercicios.



1. Para determinar el valor de una función $f(a)$ a partir de la gráfica de f, encontramos la altura de la gráfica arriba del eje x en $x =$ ________. De la gráfica de f vemos que $f(3) =$ ________ y $f(1) =$ ____. El cambio neto en f entre $x = 1$ y $x = 3$ es $f($____$) - f($____$) =$ ____.

2. El dominio de la función f es todos los valores de ___ de los puntos sobre la gráfica, y el rango es todos los valores ___ correspondientes. De la gráfica de f vemos que el dominio de f es el intervalo ________ y el rango de f es el intervalo ________.

3. ***a***) Si f es creciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos en la gráfica ________ cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es creciente en los intervalos ________ y ________.

b) Si f es decreciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos sobre la gráfica ________ cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es decreciente en los intervalos ________ y ________.

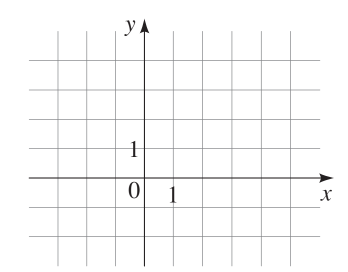
4. ***a***) El valor de una función $f(a)$ es un valor máximo local de f si $f(a)$ es el ________ valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que hay dos máximos locales de f: un máximo local es ________, y se presenta cuando $x = 2$; el otro máximo local es ________, y ocurre cuando $x =$ ________.

b) El valor de una función $f(a)$ es un valor mínimo local de f si $f(a)$ es el ________ valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que hay un valor mínimo local de f. El valor mínimo local es ________, y se presenta cuando $x =$ ________.

5. Las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son las intersecciones ____ de la gráfica de f. La solución de la desigualdad $f(x) \geq 0$ es el conjunto de valores x para los que la gráfica de f está en el eje o sobre el eje ____. De la gráfica de f encontramos que las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x =$ ____ y $x =$ ____, y la solución de la desigualdad $f(x) \geq 0$ es ______________.

6. ***a***) Para resolver gráficamente la ecuación $2x + 1 = -x + 4$ trazamos la gráfica de las funciones $f(x) =$ __________ y $g(x) =$ ______________ en el mismo conjunto de ejes y se determinan los valores de x para los cuales se

intersecan las gráficas de f y g. Trace las gráficas de f y g y utilice las gráficas para resolver la ecuación. La solución es $x =$ ________.



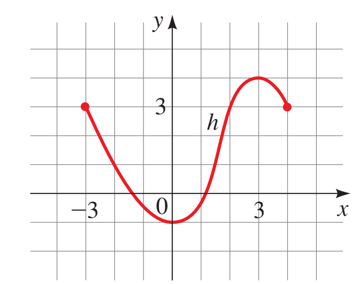
b) Para resolver gráficamente la desigualdad $2x + 1 < -x + 4$ trazamos las gráficas de las funciones

$f(x) =$ ______________ y $g(x) =$ ______________
en el mismo conjunto de ejes y encontramos los valores de x para los cuales la gráfica de g es ______________ (mayor/menor) que la gráfica de f. A partir de las gráficas del inciso *a*) vemos que la solución de la desigualdad es el intervalo (____, ____).

HABILIDADES

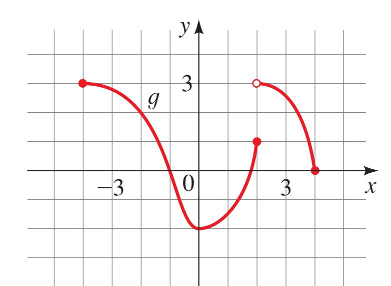
7. Valores de una función Se da la gráfica de una función h.

a) Encuentre $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.
b) Encuentre el dominio y rango de h.
c) Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) = 3$.
d) Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) \leq 3$.
e) Encuentre el cambio neto de h entre $x = -3$ y $x = 3$.



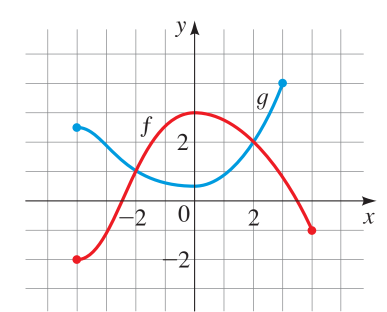
8. Valores de una función Se da la gráfica de una función g.

a) Encuentre $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.
b) Encuentre el dominio y el rango de g.
c) Encuentre los valores de x para los cuales $g(x) = 3$.
d) Encuentre los valores de x para los cuales $g(x) \leq 0$.
e) Encuentre el cambio neto en g entre $x = -1$ y $x = 2$.



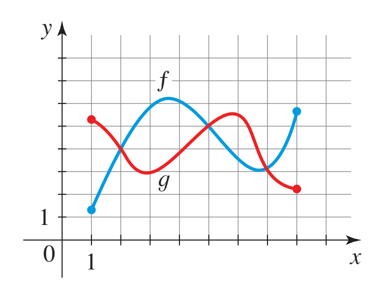
9. Resolver gráficamente ecuaciones y desigualdades Se dan las gráficas de las funciones f y g.

a) ¿Cuál es mayor, $f(0)$ o $g(0)$?
b) ¿Cuál es mayor, $f(-3)$ o $g(-3)$?
c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?
d) Encuentre los valores de x para los cuales $f(x) \leq g(x)$.
e) Encuentre los valores de x para los cuales $f(x) > g(x)$.



10. Resolver gráficamente ecuaciones y desigualdades Se dan las gráficas de las funciones f y g.

a) ¿Cuál es mayor, $f(6)$ o $g(6)$?
b) ¿Cuál es mayor, $f(3)$ o $g(3)$?
c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?
d) Encuentre los valores de x para los cuales $f(x) \leq g(x)$.
e) Encuentre los valores de x para los cuales $f(x) > g(x)$.



11–16 ■ Dominio y rango de una gráfica Se da una función f. ***a***) trace una gráfica de f. ***b***) Utilice una gráfica para encontrar el dominio y el rango de f.

11. $f(x) = 2x + 3$

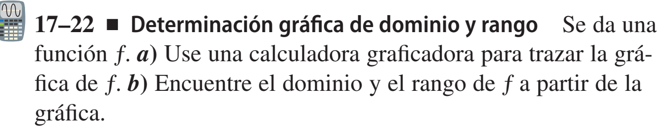
12. $f(x) = 3x - 2$

13. $f(x) = x - 2, \ -2 \leq x \leq 5$

14. $f(x) = 4 - 2x, \ 1 < x < 4$

15. $f(x) = x^2 - 1, \ -3 \leq x \leq 3$

16. $f(x) = 3 - x^2, \ -3 \leq x \leq 3$



17–22 ■ Determinación gráfica de dominio y rango Se da una función f. ***a***) Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de f. ***b***) Encuentre el dominio y el rango de f a partir de la gráfica.

17. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

18. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

19. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

20. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

21. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

22. $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

23–26 ■ Resolver gráficamente ecuaciones y desigualdades Resuelva en forma gráfica la ecuación o desigualdad dadas.

23. ***a)*** $x - 2 = 4 - x$ ***b)*** $x - 2 > 4 - x$

24. ***a)*** $-2x + 3 = 3x - 7$ ***b)*** $-2x + 3 \leq 3x - 7$

25. ***a)*** $x^2 = 2 - x$ ***b)*** $x^2 \leq 2 - x$

26. ***a)*** $-x^2 = 3 - 4x$ ***b)*** $-x^2 \geq 3 - 4x$



27–30 ■ Resolver gráficamente ecuaciones y desigualdades Resuelva la ecuación o desigualdad dadas. Escriba sus respuestas redondeadas a dos decimales.

27. ***a)*** $x^3 + 3x^2 = -x^2 + 3x + 7$
b) $x^3 + 3x^2 \geq -x^2 + 3x + 7$

28. ***a)*** $5x^2 - x^3 = -x^2 + 3x + 4$
b) $5x^2 - x^3 \leq -x^2 + 3x + 4$

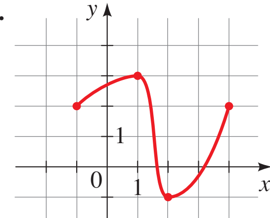
29. ***a)*** $16x^3 + 16x^2 = x + 1$
b) $16x^2 + 16x^2 \geq x + 1$

30. ***a)*** $1 + \sqrt{x} = \sqrt{x^2 + 1}$
b) $1 + \sqrt{x} > \sqrt{x^2 + 1}$

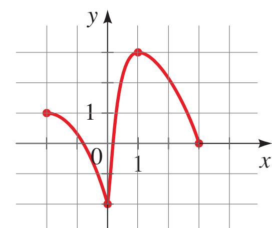
31–34 ■ Creciente y decreciente Se da la gráfica de una función f. Utilice la gráfica para estimar lo siguiente. ***a)*** El dominio y el rango de f. ***b)*** Los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.



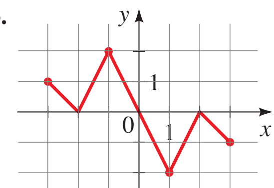
31.



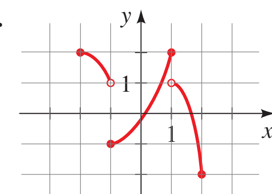
32.



33.



34.



35–42 ■ Creciente y decreciente Se da una función f. ***a)*** Utilice una calculadora graficadora para dibujar la gráfica de f. ***b)*** Encuentre el dominio y el rango de f. ***c)*** Indique aproximadamente los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

35. $f(x) = x^2 - 5x$

36. $f(x) = x^3 - 4x$

37. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

38. $f(x) = x^4 - 16x^2$

39. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

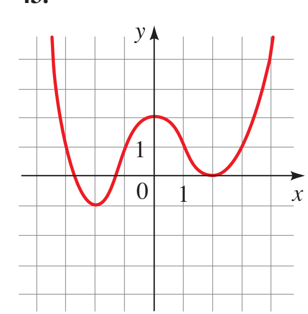
40. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

41. $f(x) = x^{2/5}$

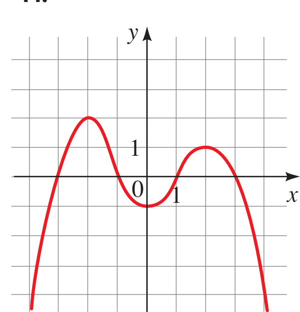
42. $f(x) = 4 - x^{2/3}$

43–46 ■ Valores de máximo y mínimo local Se da la gráfica de una función. Utilice la gráfica para calcular lo siguiente. ***a)*** Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. ***b)*** Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente.

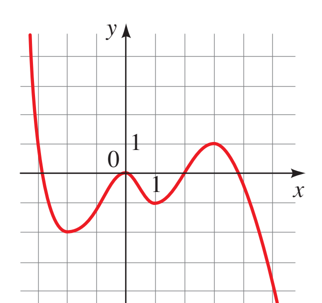
43.



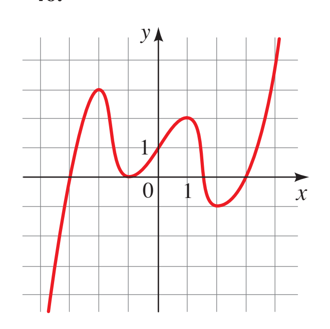
44.



45.



46.



47–54 ■ Valores de máximo y mínimo local Se da una función. ***a)*** Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales. ***b)*** Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

47. $f(x) = x^3 - x$

48. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

49. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

50. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

51. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

52. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

53. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

54. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

APLICACIONES

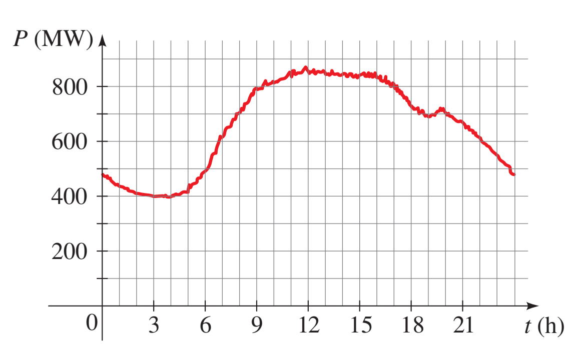
55. Consumo de energía eléctrica La figura muestra el consumo de energía eléctrica en San Francisco para un día de septiembre (P se mide en megawatts; t se mide en horas empezando a la medianoche).

a) ¿Cuál fue el consumo de energía eléctrica a las 6:00 a.m. Y cuál, a las 6:00 p.m.?

b) ¿Cuándo fue el mínimo consumo de energía eléctrica?

c) ¿Cuándo fue el máximo consumo de energía eléctrica?

d) Encuentre el cambio neto en el consumo de energía de 9:00 a.m. a 7:00 p.m.



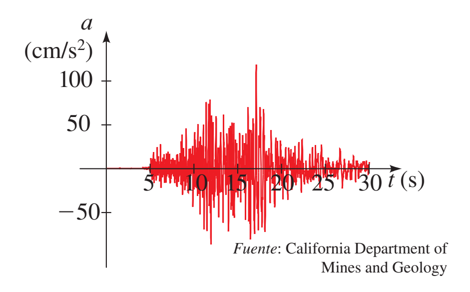
Fuente: Pacific Gas & Electric

56. Terremoto La gráfica muestra la aceleración vertical del suelo debida al terremoto Northridge de 1994, en Los Ángeles, medido por un sismógrafo. (Aquí t representa el tiempo en segundos.)

a) ¿En qué tiempo t el terremoto hizo los primeros movimientos observables de la Tierra?

b) ¿En qué tiempo t pareció culminar el terremoto?

c) ¿En qué tiempo t el terremoto alcanzó su intensidad máxima?



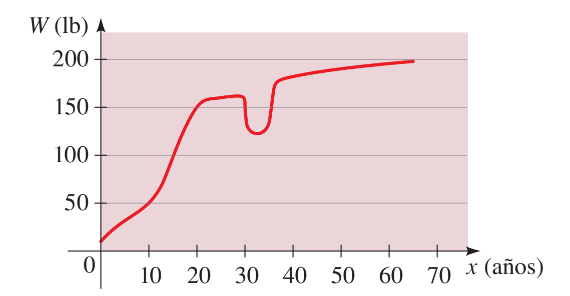
Fuente: California Department of Mines and Geology

57. Función de peso La gráfica da el peso W de una persona a la edad x.

a) Determine los intervalos en los que la función W es creciente y aquellos en los que es decreciente.

b) ¿Qué piensa usted que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años de edad?

c) Encuentre el cambio neto en el peso de la persona W de 10 a 20 años.

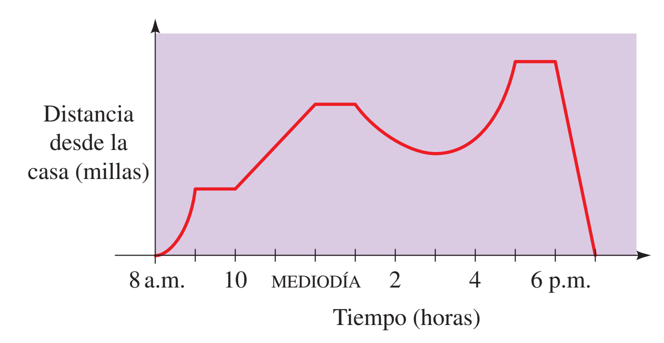


58. Función de distancia La gráfica da la distancia de un representante de ventas desde su casa como función del tiempo en cierto día.

a) Determine los intervalos de tiempo en los que la distancia desde su casa fue creciente y aquellos en los que fue decreciente.

b) Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de sus viajes este día.

c) Encuentre el cambio neto de la casa entre el mediodía y la 1.00 p.m.

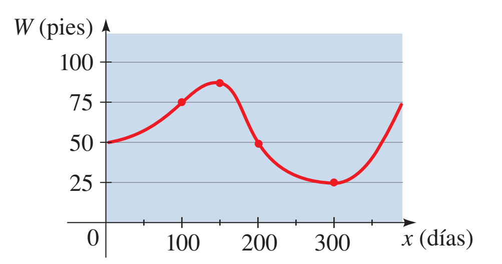


59. Niveles cambiantes de agua La gráfica muestra la profundidad del agua W en un depósito en un periodo de un año, como función del número de días x desde el principio del año.

a) Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

b) ¿En qué valor de x alcanza W un máximo local? ¿Un mínimo local?

c) Encuentre el cambio neto de la profundidad W de 100 a 300 días.

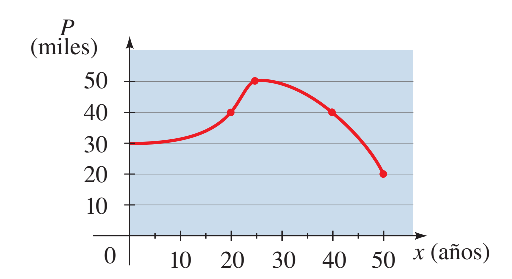


60. Crecimiento y decrecimiento de población La gráfica siguiente muestra la población P en una pequeña ciudad industrial de los años 1950 a 2000. La variable x representa los años desde 1950.

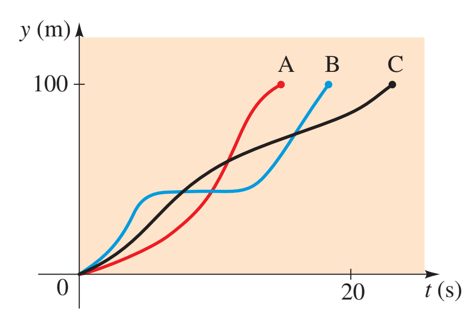
a) Determine los intervalos en los que la función P es creciente y aquellos en los que es decreciente.

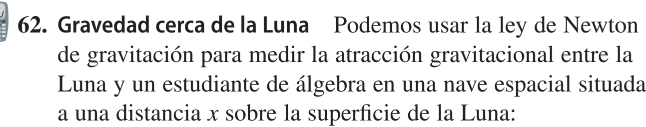
b) ¿Cuál fue la población máxima, y en qué año se alcanzó?

c) Encuentre el cambio neto en la población P de 1970 a 1990.



61. Carrera de obstáculos Tres atletas compiten en una carrera de 100 metros con vallas. La gráfica describe la distancia corrida como función del tiempo para cada uno de los atletas. Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de la carrera. ¿Quién la ganó? ¿Cada uno de los atletas terminó la carrera? ¿Qué piensa usted que le ocurrió al corredor B?





62. Gravedad cerca de la Luna Podemos usar la ley de Newton de gravitación para medir la atracción gravitacional entre la Luna y un estudiante de álgebra en una nave espacial situada a una distancia x sobre la superficie de la Luna:

$$F(x) = \frac{350}{x^2}$$

Aquí F se mide en newtons (N), y x se mide en millones de metros.

a) Trace la gráfica de la función F para valores de x entre 0 y 10.

b) Use la gráfica para describir el comportamiento de la atracción gravitacional F cuando aumenta la distancia x.



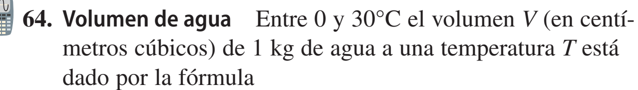
63. Radios de estrellas Los astrónomos infieren los radios de estrellas con el uso de la ley de Stefan Boltzmann:

$$E(T) = (5.67 \times 10^{-8})T^4$$

donde E es la energía radiada por unidad de área superficial medida en watts (W) y T es la temperatura absoluta medida en kelvins (K).

a) Trace la gráfica de la función E para temperaturas T entre 100 y 300 K.

b) Use la gráfica para describir el cambio en energía E cuando la temperatura T aumenta.



64. Volumen de agua Entre 0 y 30°C el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dado por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

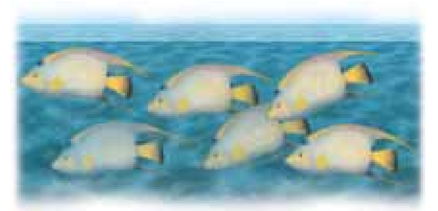
Encuentre la temperatura a la que el volumen de 1 kg de agua es mínimo.
[*Fuente: Physics* de D. Halliday y R. Resnick]



65. Peces migratorios Un pez nada a una velocidad v respecto al agua, contra una corriente de 5 mi/h. Usando un modelo matemático de gasto de energía se puede demostrar que la energía total E requerida para nadar una distancia de 10 millas está dada por

$$E(v) = 2.73v^3 \frac{10}{v - 5}$$

Los biólogos piensan que los peces migratorios tratan de minimizar la energía necesaria para nadar una distancia fija. Encuentre el valor de v que minimiza la energía necesaria. [*Nota:* Este resultado ha sido verificado; los peces migratorios nadan contra corriente a una velocidad 50% mayor que la velocidad de la corriente.]



66. Toser Cuando un cuerpo extraño alojado en la tráquea (garganta) obliga a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba causando un aumento en presión en los pulmones. Al mismo tiempo, la tráquea se contrae causando que el aire expulsado se mueva más rápido y aumente la presión sobre el cuerpo extraño. De acuerdo con un modelo matemático del tosido, la velocidad v de la corriente de aire que pasa por la tráquea —tamaño promedio— de una persona está relacionada con el radio r de la tráquea (en centímetros) por la función

$$v(r) = 3.2(1 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2} \le r \le 1$$

Determine el valor de r para el cual v es máxima.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

67. DISCUSIÓN: Funciones que son siempre crecientes o decrecientes Trace gráficas aproximadas de las funciones que están definidas para todos los números reales, y que exhiben el comportamiento indicado (o explique por qué dicho comportamiento es imposible).

a) f es siempre creciente y $f(x) > 0$ para toda x

b) f es siempre decreciente y $f(x) > 0$ para toda x

c) f es siempre creciente y $f(x) < 0$ para toda x

d) f es siempre decreciente y $f(x) < 0$ para toda x

68. DISCUSIÓN: Máximos y mínimos En el ejemplo 9 vimos una situación real en la que el valor máximo de una función es importante. Mencione otras situaciones diarias diferentes en las que un valor máximo o mínimo es importante.

69. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Minimizar una distancia Cuando buscamos un valor mínimo o máximo de una función a veces es más fácil trabajar con una función más sencilla.

a) Suponga que

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

donde $f(x) \ge 0$ para toda x. Explique por qué los mínimos y máximos locales de f y g se presentan a los mismos valores de x.

b) Sea $g(x)$ la distancia entre el punto $(3, 0)$ y el punto (x, x^2) en la gráfica de la parábola $y = x^2$. Exprese g como función de x.

c) Use el principio descrito en el inciso *a*) para simplificar su trabajo.

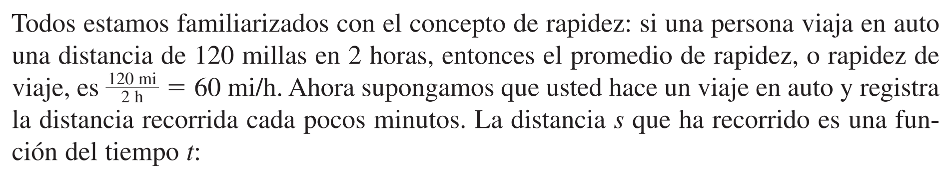
2.4 RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

■ Razón de cambio promedio ■ Las funciones lineales tienen razón de cambio constante

Las funciones se usan con frecuencia para modelar cantidades que cambian. En esta sección aprendemos a encontrar la rapidez con la que cambian los valores de una función cuando cambia la variable de entrada.

Razón de cambio promedio





Todos estamos familiarizados con el concepto de rapidez: si una persona viaja en auto una distancia de 120 millas en 2 horas, entonces el promedio de rapidez, o rapidez de viaje, es $\frac{120\text{ mi}}{2\text{ h}} = 60$ mi/h. Ahora supongamos que usted hace un viaje en auto y registra la distancia recorrida cada pocos minutos. La distancia s que ha recorrido es una función del tiempo t:

$$s(t) = \text{distancia total recorrida en el tiempo } t$$

Trazamos la gráfica de la función s como se muestra en la figura 1. La gráfica muestra que la persona ha recorrido un total de 50 millas después de 1 hora, 75 millas después de 2 horas, 140 millas después de 3 horas y así, sucesivamente. Para encontrar su rapidez *promedio* entre cualesquier dos puntos en el viaje dividimos la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

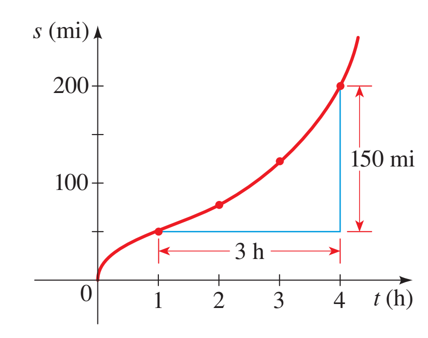


FIGURA 1 Rapidez promedio

Calculemos su rapidez promedio entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m. El tiempo transcurrido es $4 - 1 = 3$ horas. Para encontrar la distancia recorrida restamos la distancia a la 1:00 p.m. de la distancia a las 4:00 p.m., es decir, $200 - 50 = 150$ millas. Entonces, la rapidez promedio es

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{150\text{ mi}}{3\text{ h}} = 50\text{ mi/h}$$

La rapidez promedio que acabamos de calcular se puede expresar usando notación de funciones:

$$\text{rapidez promedio} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{200 - 50}{3} = 50\text{ mi/h}$$

Observe que la rapidez promedio es diferente en diferentes intervalos. Por ejemplo, entre las 2:00 p.m. y las 3:00 p.m. encontramos que la rapidez promedio

$$\text{rapidez promedio} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{140 - 75}{1} = 65\text{ mi/h}$$

En innumerables contextos es importante determinar la razón de cambio promedio. Por ejemplo, podríamos estar interesados en saber qué tan rápido desciende la temperatura del aire cuando se aproxima una tormenta, o qué tan rápido aumentan los ingresos

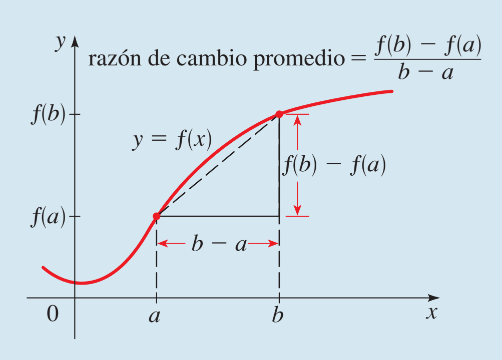
por la venta de un nuevo producto. Por tanto, necesitamos saber cómo determinar la razón de cambio promedio de las funciones que modelan estas cantidades. De hecho, el concepto de razón de cambio promedio se puede definir para cualquier función.

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

La **razón de cambio promedio** de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La razón de cambio promedio es la pendiente de la **recta secante** entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de f, es decir, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



En la expresión para la razón de cambio el numerador $f(b) - f(a)$ es el cambio neto en el valor de f entre $x = a$ y $x = b$ (vea la página 151).

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de la razón de cambio promedio

Para la función $f(x) = (x - 3)^2$ cuya gráfica se muestra en la figura 2 encuentre el cambio neto y la razón de cambio promedio entre los siguientes puntos:

a) $x = 1$ y $x = 3$ ***b)*** $x = 4$ y $x = 7$

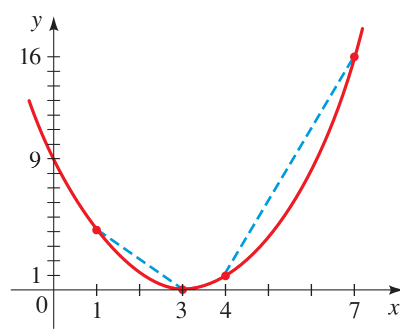


FIGURA 2 $f(x) = (x - 3)^2$

SOLUCIÓN

a) Cambio neto $= f(3) - f(1)$ — Definición

$= (3 - 3)^2 - (1 - 3)^2$ — Utilice $f(x) = (x - 3)^2$

$= -4$ — Calcule

Razón de cambio promedio $= \dfrac{f(3) + f(1)}{3 - 1}$ — Definición

$= \dfrac{-4}{2} = -2$ — Calcule

b) Cambio neto $= f(7) - f(4)$ — Definición

$= (7 - 3)^2 - (4 - 3)^2$ — Utilice $f(x) = (x - 3)^2$

$= 15$ — Calcule

Razón de cambio promedio $= \dfrac{f(7) - f(4)}{7 - 4}$ — Definición

$= \dfrac{15}{3} = 5$ — Calcule

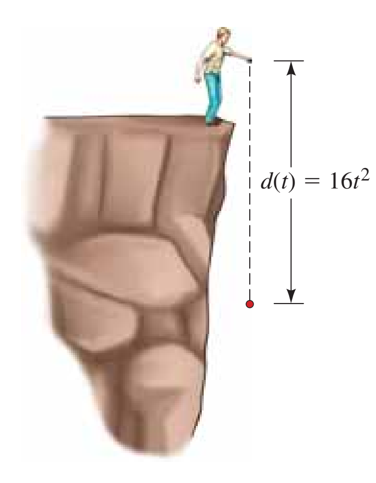
Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

EJEMPLO 2 ■ Rapidez promedio de un cuerpo en caída

Si un cuerpo se deja caer desde un risco o un edificio alto, entonces la distancia que ha caído después de t segundos está dada por la función $d(t) = 16t^2$. Encuentre su rapidez promedio (razón de cambio promedio) en los siguientes intervalos:

***a*)** Entre 1 y 5 s ***b*)** Entre $t = a$ y $t = a + h$





Función: En t segundos la piedra cae $16t^2$ pies.

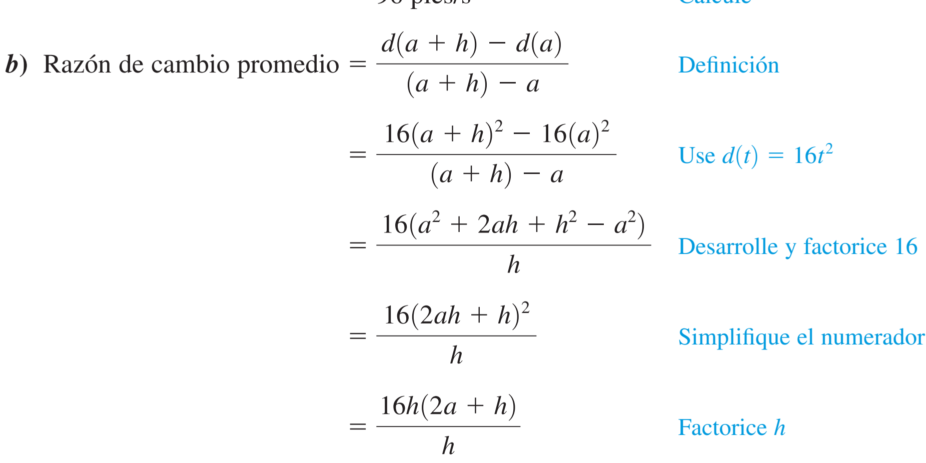
SOLUCIÓN

***a*)** Razón de cambio promedio $= \dfrac{d(5) - d(1)}{5 - 1}$ Definición

$= \dfrac{16(5)^2 - 16(1)^2}{3 - 1}$ Use $d(t) = 16t^2$

$= \dfrac{400 - 16}{4}$ Calcule

$= 96$ pies/s Calcule



***b*)** Razón de cambio promedio $= \dfrac{d(a + h) - d(a)}{(a + h) - a}$ Definición

$= \dfrac{16(a + h)^2 - 16(a)^2}{(a + h) - a}$ Use $d(t) = 16t^2$

$= \dfrac{16(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h}$ Desarrolle y factorice 16

$= \dfrac{16(2ah + h)^2}{h}$ Simplifique el numerador

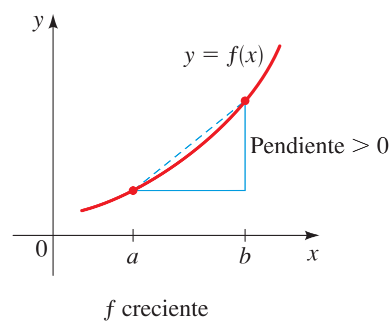
$= \dfrac{16h(2a + h)}{h}$ Factorice h

$= 16(2a + h)$ Simplifique

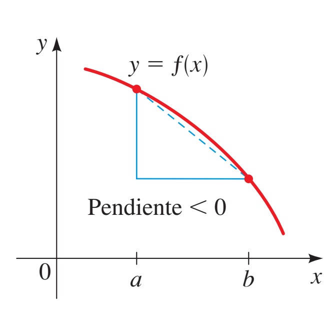
Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

La razón de cambio promedio calculada en el ejemplo 2*b*) se conoce como *cociente de diferencias*. En cálculo usamos cocientes de diferencias para calcular la magnitud de razón de cambio *instantánea*. Un ejemplo de una razón de cambio instantánea es la velocidad indicada en el velocímetro de un auto. Esta cambia de un instante al siguiente cuando cambia la velocidad del auto.

Las gráficas de la figura 3 muestran que, si una función es creciente en un intervalo, entonces la razón de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es positivo, mientras que si una función es decreciente en un intervalo, entonces la razón de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es negativa.



f creciente
Razón de cambio promedio positiva



f decreciente
Razón de cambio promedio negativa

FIGURA 3

EJEMPLO 3 ■ Razón de cambio promedio de temperatura

Tiempo	Temperatura (°F)
8:00 a.m.	38
9:00 a.m.	40
10:00 a.m.	44
11:00 a.m.	50
12:00 mediodía	56
1:00 p.m.	62
2:00 p.m.	66
3:00 p.m.	67
4:00 p.m.	64
5:00 p.m.	58
6:00 p.m.	55
7:00 p.m.	51

La tabla al margen da las temperaturas exteriores observadas por un estudiante de ciencias en un día de primavera. Trace la gráfica de los datos y encuentre la razón de cambio promedio de temperatura entre las siguientes horas:

a) 8:00 a.m. y 9:00 a.m.

b) 1:00 p.m. y 3:00 p.m.

c) 8:00 p.m. y 7:00 p.m.

SOLUCIÓN En la figura 4 se muestra una gráfica de los datos; t representa el tiempo, medido en horas desde la medianoche (así, por ejemplo, 2:00 p.m. corresponde a $t = 14$). Defina la función F mediante

$$F(t) = \text{temperatura en el tiempo } t$$

Temperatura a las 9:00 a.m. — Temperatura a las 8:00 a.m.

a) $$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{F(9) - F(8)}{9 - 8} = \frac{40 - 38}{9 - 8} = 2$$

La razón de cambio promedio fue 2°F por hora.

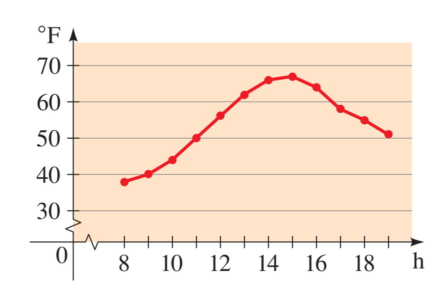


FIGURA 4

b) $$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{F(15) - F(13)}{15 - 13} = \frac{67 - 62}{2} = 2.5$$

La razón de cambio promedio fue 2.5°F por hora.

c) $$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{F(19) - F(16)}{19 - 16} = \frac{51 - 64}{3} \approx -4.3$$

La razón de cambio promedio fue alrededor de −4.3°F por hora durante este intervalo. El signo negativo indica que la temperatura estaba descendiendo.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Cuando cambian las razones de cambio

En el mundo real con frecuencia cambian las razones de cambio. Un enunciado como "la inflación es creciente, pero a un ritmo más lento" supone un cambio de una razón de cambio. Cuando usted conduce su coche su rapidez (razón de cambio de distancia) aumenta cuando acelera y disminuye cuando decelera. Del ejemplo 4 vemos que las funciones cuya gráfica es una recta (funciones lineales) tienen una razón de cambio constante. En este proyecto exploramos cómo la forma de la gráfica corresponde a un cambio en la razón de cambio. Este proyecto se puede encontrar en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Las funciones lineales tienen razón de cambio constante

Recuerde que una función de la forma $f(x) = mx + b$ es una función lineal (vea la página 160). Su gráfica es una recta con pendiente m. Por otro lado, si una función f tiene una razón de cambio constante, entonces debe ser una función lineal. (Se le pide que demuestre estos hechos en los ejercicios 51 y 52 de la sección 2.5.) En general, la razón de cambio promedio de una función lineal entre cualesquier dos puntos es la constante m. En el siguiente ejemplo determinamos la razón de cambio promedio de una función lineal dada.

EJEMPLO 4 ■ Las funciones lineales tienen razón de cambio constante

Sea $f(x) = 3x - 5$. Encuentre la razón de cambio promedio de f entre los siguientes puntos.

a) $x = 0$ y $x = 1$

b) $x = 3$ y $x = 7$

c) $x = a$ y $x = a + h$

¿Qué conclusión puede sacar de sus respuestas?

SOLUCIÓN

a) $$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(3 \cdot 1 - 5) - (3 \cdot 0 - 5)}{1}$$
$$= \frac{(-2) - (-5)}{1} = 3$$

b) $$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{(3 \cdot 7 - 5) - (3 \cdot 3 - 5)}{4}$$
$$= \frac{16 - 4}{4} = 3$$

c) $$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(a + b) - f(a)}{(a + b) - a} = \frac{[3(a + h) - 5] - [3a - 5]}{h}$$
$$= \frac{3a + 3h - 5 - 3a + 5}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

Al parecer la razón de cambio promedio es siempre 3 para esta función. De hecho, el inciso *c*) demuestra que la razón de cam bio entre cualesquier dos puntos arbitrarios $x = a$ y $x = a + h$ es 3.



Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

2.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si usted hace un viaje de 100 millas en 2 horas, entonces su rapidez promedio del viaje es

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\square}{\square} = _____$$

2. La razón de cambio promedio de una función f entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\square}{\square}$$

3. La razón de cambio promedio de una función $f(x) = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 5$ es

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\square}{\square} = _____$$

4. ***a***) La razón de cambio promedio de una función f entre $x = a$ y $x = b$ es la pendiente de la recta ________ entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

b) La razón de cambio promedio de la función lineal $f(x) = 3x + 5$ entre cualesquier dos puntos es ________.

5–6 ■ *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.

5. ***a)*** ¿Es la razón de cambio promedio de una función entre $x = a$ y $x = b$ la pendiente de la recta secante a través de $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$?

b) ¿Es la razón de cambio promedio de una función lineal igual para todos los intervalos?

6. ***a)*** ¿Nunca puede ser negativa la razón de cambio promedio de una función creciente?

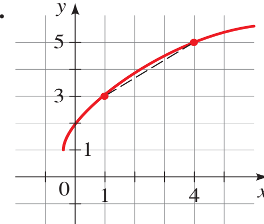
b) Si la razón de cambio promedio de una función entre $x = a$ y $x = b$ es negativa, entonces ¿la función es necesariamente decreciente en el intervalo (a, b)?

HABILIDADES

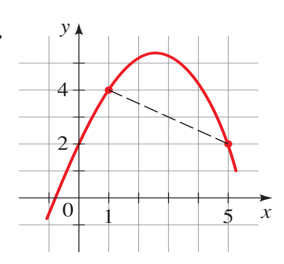
7–10 ■ **Cambio neto y razón de cambio promedio** Se da la gráfica de una función. Determine ***a)*** el cambio neto y ***b)*** la razón de cambio promedio de la función entre los puntos indicados entre los valores dados de la variable.



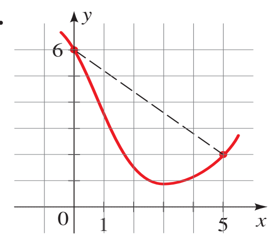
7.



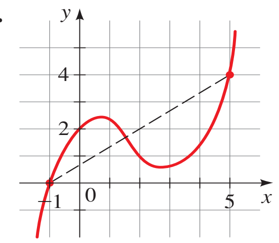
8.



9.



10.



11–24 ■ **Cambio neto y razón de cambio promedio** Se da una función. Determine ***a)*** el cambio neto y ***b)*** la razón de cambio promedio entre los dos valores dados de la variable.

11. $f(x) = 3x - 2; \quad x = 2, x = 3$

12. $r(t) = 3 - \frac{1}{3}t; \quad t = 3, t = 6$

13. $h(t) = -t + \frac{3}{2}; \quad t = -4, t = 1$

14. $g(x) = 2 - \frac{2}{3}x; \quad x = -3, x = 2$

15. $h(t) = 2t^2 - t; \quad t = 3, t = 6$

16. $f(z) = 1 - 3z^2; \quad z = -2, z = 0$

17. $f(x) = x^3 - 4x^2; \quad x = 0, x = 10$

18. $g(t) = t^4 - t^3 + t^2; \quad t = -2, t = 2$

19. $f(t) = 5t^2; \quad t = 3, t = 3 + h$

20. $f(x) = 1 - 3x^2; \quad x = 2, x = 2 + h$

21. $g(x) = \dfrac{1}{x}; \quad x = 1, x = a$

22. $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}; \quad x = 0, x = h$

23. $f(t) = \dfrac{2}{t}; \quad t = a, t = a + h$

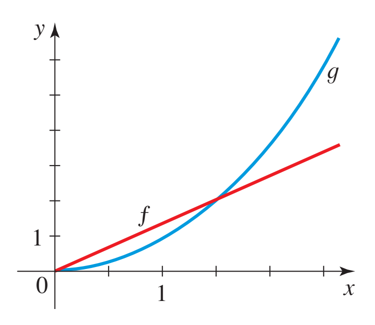
24. $f(t) = \sqrt{t}; \quad t = a, t = a + h$

25–26 ■ **Razón de cambio promedio de una función lineal** Se da una función lineal. ***a)*** Determine la razón de cambio promedio de la función entre $x = a$ y $x = a + h$. ***b)*** Demuestre que la razón de cambio promedio es igual que la pendiente de la recta.

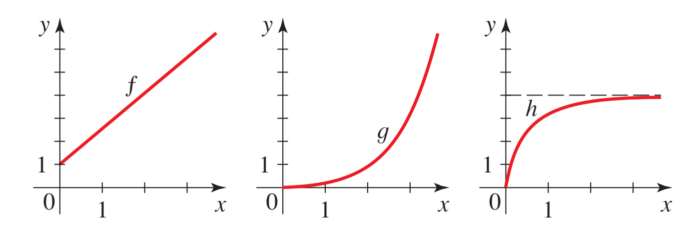
25. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ **26.** $g(x) = -4x + 2$

HABILIDADES Plus

27. Razón de cambio promedio Se muestran las gráficas de las funciones f y g. La función ____ (f o g) tiene una razón de cambio promedio mayor entre $x = 0$ y $x = 1$. La función ____ (f o g) tiene una razón de cambio mayor entre $x = 1$ y $x = 2$. Las funciones f y g tienen la misma razón de cambio promedio entre $x =$ ____ y $x =$ ____.

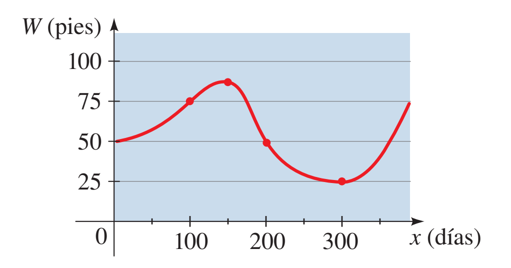


28. Razón de cambio promedio A continuación se muestran las gráficas de las funciones f, g y h. ¿Qué puede decir acerca de la razón de cambio promedio de cada función en los intervalos sucesivos $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \ldots$?



APLICACIONES

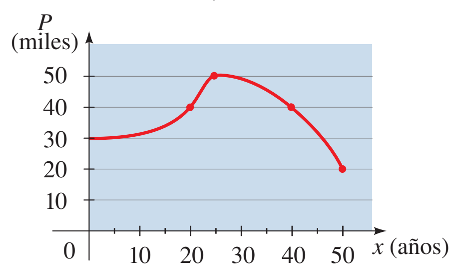
29. Cambio de niveles de agua La gráfica muestra la profundidad del agua W en un depósito en un periodo de un año como función del número de días x desde el principio del año. ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de W entre $x = 100$ y $x = 200$?



30. Crecimiento y decrecimiento de la población La gráfica siguiente muestra la población P en una pequeña ciudad industrial de los años 1950 a 2000. La variable x representa los años desde 1950.

a) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de P entre $x = 20$ y $x = 40$?

b) Interprete el valor de la razón de cambio promedio que encontró en el inciso *a*).



31. Crecimiento y decrecimiento de la población La tabla da la población en una pequeña comunidad costera para el periodo 1997-2006. Las cifras que se muestran son para el 1 de enero de cada año.

a) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de la población entre 1998 y 2001?

b) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de la población entre 2002 y 2004?

c) ¿Para qué periodo fue creciente la población?

d) ¿Para qué periodo fue decreciente la población?

Año	Población
1997	624
1998	856
1999	1 336
2000	1 578
2001	1 591
2002	1 483
2003	994
2004	826
2005	801
2006	745

32. Rapidez de carrera Un hombre está corriendo alrededor de una pista circular que mide 200 m de circunferencia. Un observador usa un cronómetro para registrar el tiempo del corredor al final de cada vuelta y obtiene los datos de la tabla siguiente.

a) ¿Cuál fue el promedio de velocidad del hombre (rapidez) entre 68 y 152 s?

b) ¿Cuál fue el promedio de velocidad del hombre entre 263 y 412 s?

c) Calcule la velocidad del hombre para cada vuelta. ¿Se reduce, aumenta o ninguna de éstas?

Tiempo (s)	Distancia (m)
32	200
68	400
108	600
152	800
203	1 000
263	1 200
335	1 400
412	1 600

33. Ventas de reproductores de DVD La tabla siguiente muestra el número de reproductores de DVD vendidos en una pequeña tienda de aparatos electrónicos en los años 2003-2013.

Año	Reproductores de DVD vendidos
2003	495
2004	513
2005	410
2006	402
2007	520
2008	580
2009	631
2010	719
2011	624
2012	582
2013	635

a) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de ventas entre 2003 y 2013?

b) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de ventas entre 2003 y 2004?

c) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de ventas entre 2004 y 2005?

d) ¿Entre cuáles dos años sucesivos las ventas de reproductores de DVD *aumentaron* más rápidamente? ¿Entre cuáles *disminuyeron* más rápidamente?

34. Colección de libros Entre 1980 y 2000 un coleccionista de libros raros compró para su colección a razón de 40 libros por año. Use esta información para completar la tabla siguiente. (Observe que no se dan todos los años en la tabla.)

Año	Número de libros	Año	Número de libros
1980	420	1995	
1981	460	1997	
1982		1998	
1985		1999	
1990		2000	1 220
1992			

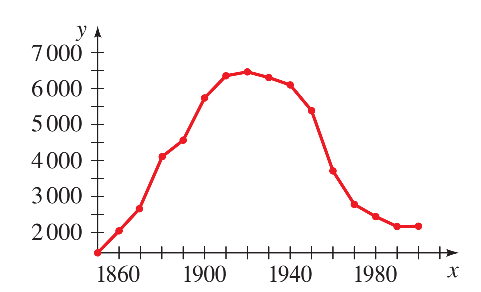
35. Sopa que se enfría Cuando un tazón de sopa caliente se deja en la mesa de una habitación, la sopa finalmente se enfría a la temperatura del lugar. La temperatura T de la sopa es una función del tiempo t. La tabla siguiente da la temperatura (en °F) de un tazón de sopa t minutos después de que se dejó en la mesa. Encuentre la razón de cambio promedio de la temperatura de la sopa en los primeros 20 minutos y en los siguientes 20 minutos. ¿Durante qué intervalo se enfrió la sopa más rápidamente?

t (min)	T (°F)	t (min)	T (°F)
0	200	35	94
5	172	40	89
10	150	50	81
15	133	60	77
20	119	90	72
25	108	120	70
30	100	150	70

36. Granjas en Estados Unidos La gráfica siguiente da el número de granjas en Estados Unidos de 1850 a 2000.

a) Estime la razón de cambio promedio en el número de granjas entre *i*) 1860 y 1890 y *ii*) 1950 y 1970.

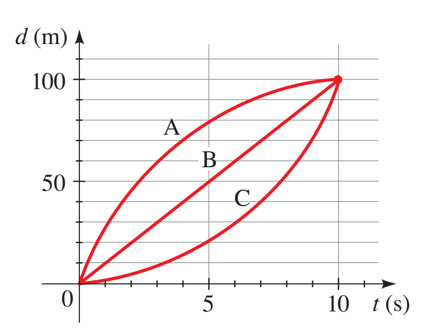
b) ¿En qué década experimentó el número de granjas la máxima razón de cambio promedio de disminución?



37. Triple empate Una carrera de descenso en esquí termina en un empate triple para el primer lugar. La gráfica muestra la distancia como función del tiempo para cada uno de los tres ganadores, *A*, *B* y *C*.

a) Encuentre el promedio de rapidez para cada ganador.

b) Describa la diferencia entre las formas en las que los tres atletas corrieron la carrera.

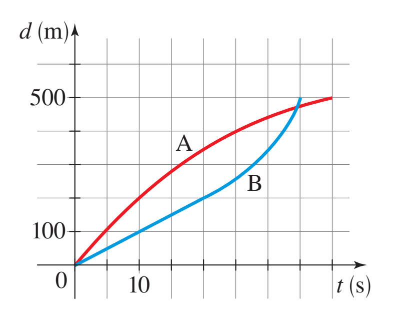


38. Patinaje de velocidad Dos patinadores de velocidad, A y B, están compitiendo en un evento de 500 m. La gráfica muestra la distancia que han viajado como una función del tiempo desde el inicio de la carrera.

a) ¿Quién ganó la carrera?

b) Encuentre la velocidad promedio durante los primeros 10 s para cada patinador.

c) Encuentre la velocidad promedio durante los últimos 15 s de cada patinador.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

39. DISCUSIÓN: Comportamiento límite de la rapidez promedio Se deja caer un objeto desde un acantilado y la distancia (en pies) que ha caído después de t segundos está dada por la función $d(t) = 16t^2$. Complete la tabla para encontrar la velocidad promedio durante los intervalos de tiempo dado. Utilice la tabla para determinar a qué valor se acerca la rapidez promedio conforme se hacen más y más pequeños los intervalos de tiempo. ¿Es razonable decir que este valor es la rapidez del objeto en el instante $t = 3$? Explique.

$t = a$	$t = b$	Rapidez promedio $= \dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$
3	3.5	
3	3.1	
3	3.01	
3	3.001	
3	3.0001	

2.5 FUNCIONES LINEALES Y MODELOS

■ Funciones lineales ■ Pendiente y razón de cambio ■ Construir y usar modelos lineales

En esta sección se estudian las funciones más simples que se pueden expresar mediante una expresión algebraica: las funciones lineales.

■ Funciones lineales

Recuerde que una *función lineal* es una función de la forma $f(x) = ax + b$. Por tanto, en la expresión de definición de una función lineal la variable sólo se presenta a la primera potencia. También podemos expresar una función lineal en forma de ecuación como $y = ax + b$. De la sección 1.10 sabemos que la gráfica de esta ecuación es una recta con pendiente a y punto de intersección y, igual a b.

> **FUNCIONES LINEALES**
>
> Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$.
>
> La gráfica de una función lineal es una recta con pendiente a y punto de intersección y igual a b.

EJEMPLO 1 ■ Identificar funciones lineales

Determine si la función dada es lineal. Si la función es lineal exprese la función en la forma $f(x) = ax + b$.

a) $f(x) = 2 + 3x$ ***b)*** $g(x) = 3(1 - 2x)$

c) $h(x) = x(4 + 3x)$ ***d)*** $k(x) = \dfrac{1 - 5x}{4}$

SOLUCIÓN

a) Tenemos $f(x) = 2 + 3x = 3x + 2$. Por lo que f es una función lineal en la que a es 3 y b es 2.

b) Tenemos $g(x) = 3(1 - 2x) = -6x + 3$. Por lo que g es una función lineal en la que a es -6 y b es 3.

c) Tenemos $h(x) = x(4 + 3x) = 4x + 3x^2$, que no es una función lineal porque la variable x se eleva al cuadrado en el segundo término de la expresión para h.

d) Tenemos $k(x) = \dfrac{1 - 5x}{4} = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}$. Por lo que k es una función lineal en la que a es $-\frac{5}{4}$ y b es $\frac{1}{4}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

EJEMPLO 2 ■ Trace la gráfica de una función lineal

Sea f la función lineal definida por $f(x) = 3x + 2$.

a) Haga una tabla de valores y trace una gráfica.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de f?

SOLUCIÓN

x	$f(x)$
-2	-4
-1	-1
0	2
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17

a) En el margen se muestra una tabla de valores. Puesto que f es una función lineal, su gráfica es una recta. Por lo que para obtener la gráfica de f trazamos dos puntos cualesquiera de la tabla y dibujamos la recta que contiene los puntos. Utilizamos los puntos $(1, 5)$ y $(4, 14)$. La gráfica es la recta que se muestra en la figura 1. Se puede comprobar que los otros puntos de la tabla de valores también se encuentran sobre la recta.

b) Use los puntos indicados en la figura 1, vemos que la pendiente es

$$\text{pendiente} = \frac{14 - 5}{4 - 1} = 3$$

Por lo que la pendiente es 3.

Del cuadro en la parte superior de esta página, usted puede ver que la pendiente de la gráfica de $f(x) = 3x + 2$ es 3.

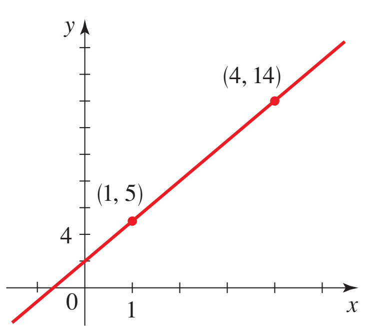


FIGURA 1 Trace la gráfica de la función lineal $f(x) = 3x + 2$

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

Pendiente y razón de cambio

En el ejercicio 52 demostramos que todas las funciones con razón de cambio constante son lineales.

Sea $f(x) = ax + b$ una función lineal. Si x_1 y x_2 son dos valores diferentes para x y si $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, entonces los puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2) están en la gráfica de f. De las definiciones de pendiente y razón de cambio promedio tenemos

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \text{razón de cambio promedio}$$

De la sección 1.10 sabemos que la *pendiente* de una función lineal es igual entre dos puntos cualesquiera. De la ecuación anterior se concluye que la *razón de cambio promedio* de una función lineal es igual entre dos puntos cualesquiera. Por otra parte, la razón de cambio promedio es igual a la pendiente (vea el ejercicio 51). Puesto que la razón de cambio promedio de una función lineal es igual entre dos puntos cualesquiera, simplemente se llama **razón de cambio**.

PENDIENTE Y RAZÓN DE CAMBIO

Para la función lineal $f(x) = ax + b$, la pendiente de la gráfica de f y la razón de cambio de f son ambas iguales a a, el coeficiente de x.

$$a = \text{pendiente de la gráfica de } f = \text{razón de cambio de } f$$

La diferencia entre "pendiente" y "razón de cambio" es simplemente una diferencia de punto de vista. Por ejemplo, para describir cómo se llena un depósito al paso del tiempo es natural hablar de la razón a la que está aumentando el nivel del agua, pero también podemos pensar en la pendiente de la gráfica del nivel de agua (vea el ejemplo 3). Para describir la pendiente de una escalera es natural hablar sobre la pendiente de la escalera, pero también se puede pensar en la razón con la que se sube la escalera (vea el ejemplo 5).

EJEMPLO 3 ■ Pendiente y razón de cambio

Una presa está construida sobre un río para crear un depósito. El nivel de agua $f(t)$ en el depósito al tiempo t está dado por

$$f(t) = 4.5t + 28$$

donde t es el número de años desde que se construyó la presa y $f(t)$ se mide en pies.

a) Trace una gráfica de f.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?

c) ¿Con qué razón está cambiando el nivel del agua en el depósito?

SOLUCIÓN

a) En la figura 2 se muestra una gráfica de f.

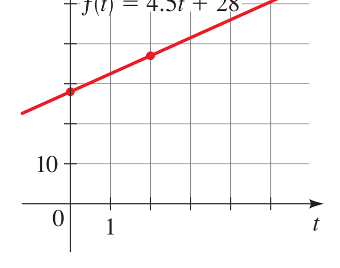


FIGURA 2 Nivel de agua como función del tiempo

b) La gráfica es una recta con pendiente 4.5, el coeficiente de t.

c) La razón de cambio de f es de 4.5, el coeficiente de t. Puesto que el tiempo t se mide en años y el nivel de agua $f(t)$ se mide en pies, el nivel del agua en el depósito está cambiando a razón de 4.5 pies por año. Dado que esta razón de cambio es positiva, el nivel del agua está aumentando.

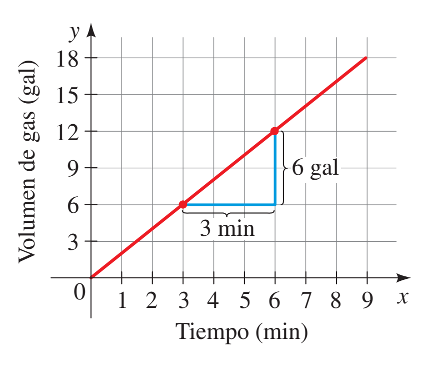
Ahora intente realizar los ejercicios 19 y 39 ■

Construir y usar modelos lineales

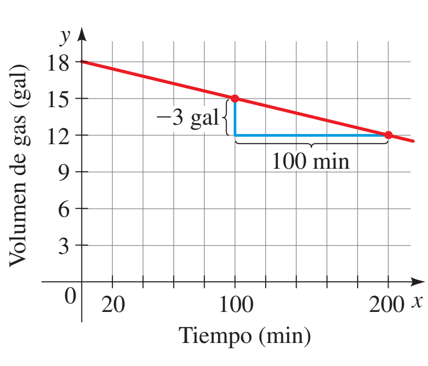
Cuando se utiliza una función lineal para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la gráfica de la función es la razón de cambio de una cantidad respecto a otro. Por ejemplo, la gráfica en la figura 3*a*) da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$a = \frac{6 \text{ gal}}{3 \text{ min}} = 2 \text{ gal/min}$$

La pendiente es la velocidad con la que se está llenando el tanque, 2 gal por minuto. En la figura 3*b*) el tanque se vacía a razón de 0.03 galones por minuto, y la pendiente es -0.03.



a) El tanque se llena a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2



b) El tanque se vacía a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es −0.03

FIGURA 3 Cantidad de gas como una función del tiempo

En los ejemplos siguientes modelamos situaciones del mundo real utilizando funciones lineales. En cada uno de estos ejemplos el modelo implica una razón constante de cambio (o una pendiente constante).

EJEMPLO 4 ■ Construcción de un modelo lineal a partir de una razón de cambio



Hay 200 galones de agua en la piscina en el tiempo $t = 0$.

Se bombea agua a una piscina a razón de 5 gal/min. Inicialmente, la piscina contiene 200 gal de agua.

***a*)** Encuentre una función lineal V que modele el volumen de agua de la piscina en cualquier tiempo t.

***b*)** Si la piscina tiene una capacidad de 600 gal, ¿cuánto tiempo tarda en llenarse completamente la piscina?

SOLUCIÓN

***a*)** Tenemos que encontrar una función lineal

$$V(t) = at + b$$

que modele el volumen $V(t)$ de agua en la piscina después de t minutos. La razón de cambio del volumen es 5 galones por minuto, por lo que $a = 5$. Puesto que la piscina contiene 200 gal en un inicio tenemos $V(0) = a \cdot 0 + b = 200$, entonces $b = 200$. Ahora que conocemos los valores de a y b obtenemos el modelo

$$V(t) = 5t + 200$$

***b*)** Queremos encontrar el tiempo t en que $V(t) = 600$. Por lo que tenemos que resolver la ecuación

$$600 = 5t + 200$$

Al despejar t, obtenemos $t = 80$. Entonces tarda 80 minutos en llenarse la piscina.



Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

EJEMPLO 5 ■ Construcción de un modelo lineal a partir de una pendiente

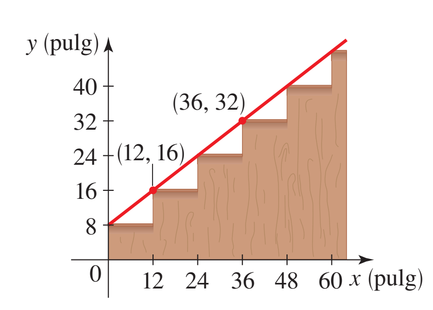


FIGURA 4 Pendiente de una escalera

En la figura 4 hemos colocado una escalera en un plano de coordenadas con el origen en la esquina inferior izquierda. La línea roja en la figura es el borde de la tabla de moldura de la escalera.

***a*)** Encuentre una función lineal H que modele la altura de la tabla de moldura arriba del piso.

***b*)** Si el espacio disponible para construir una escalera es de 11 pies de ancho, ¿qué altura alcanza la escalera?

SOLUCIÓN

***a*)** Se necesita encontrar una función

$$H(x) = ax + b$$

que modele la recta roja en la figura. Primero encontramos el valor de a, la pendiente de la recta. De la figura 4 vemos que dos puntos en la recta son $(12, 16)$ y $(36, 32)$, por lo que la pendiente es

$$a = \frac{32 - 16}{36 - 12} = \frac{2}{3}$$

Otra forma de encontrar la pendiente es observar que cada uno de los escalones tiene 8 pulgadas de altura (la subida) y 12 pulgadas de profundidad (el desplazamiento), por lo que la pendiente de la recta es $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. De la figura 4 vemos que la intersección y es 8, por lo que $b = 8$. Entonces el modelo que queremos es

$$H(x) = \tfrac{2}{3}x + 8$$

***b*)** Puesto que 11 pies son 132 pulg, tenemos que evaluar la función H cuando x es 132. Tenemos

$$H(132) = \tfrac{2}{3}(132) + 8 = 96$$

Por tanto, la escalera alcanza una altura de 96 pulg, u 8 pies.

 **Ahora intente realizar el ejercicio 43** ■

EJEMPLO 6 ■ Construcción de modelos lineales que implican rapidez

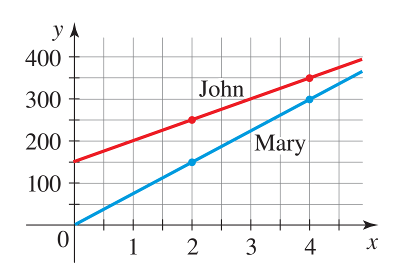


FIGURA 5 Viajes de John y Mary

John y Mary están conduciendo hacia el oeste a lo largo de la I-76 con rapideces constantes. Las gráficas de la figura 5 muestran la distancia y (en millas) que han viajado desde Filadelfia en un tiempo x (en horas), donde $x = 0$ corresponde al mediodía. (Observe que al mediodía John ya ha viajado 150 millas.)

***a*)** ¿Con qué velocidades están viajando John y Mary? ¿Quién viaja más rápido y cómo se muestra en la gráfica?

***b*)** Encuentre las funciones que modelan las distancias que John y Mary han viajado como funciones de x.

***c*)** ¿A las 5 p.m., hasta dónde habrán recorrido John y Mary?

***d*)** ¿Qué periodo de tiempo está Mary detrás de John? ¿Superará Mary a John? Si es así, ¿a qué hora?

SOLUCIÓN

***a*)** En la gráfica vemos que a las 2:00 p.m. John ha viajado 250 millas; y 350 millas a las 4:00 p.m. La rapidez es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo. Por lo que la rapidez es la pendiente de la gráfica. Por tanto, la rapidez de John es

$$\frac{350 \text{ mi} - 250 \text{ mi}}{4 \text{ h} - 2 \text{ h}} = 50 \text{ mi/h} \qquad \text{Rapidez de John}$$

Mary ha viajado 150 mi a las 2:00 p.m. y 300 mi a las 4:00 p.m., por lo que calculamos que la rapidez de Mary es

$$\frac{300 \text{ mi} - 150 \text{ mi}}{4 \text{ h} - 2 \text{ h}} = 75 \text{ mi/h} \qquad \text{Rapidez de Mary}$$

Mary está viajando más rápido que John. Lo vemos en la gráfica porque la recta de Mary está más empinada (tiene una pendiente mayor) que la recta de John.

b) Sea $f(x)$ la distancia que John ha viajado en el tiempo x. Ya que la rapidez (razón de cambio) es constante se tiene que f es una función lineal. Por lo que podemos escribir f en la forma $f(x) = ax + b$. Del inciso *a*) sabemos que la pendiente a es 50, y en la gráfica vemos que el punto de intersección y, b, es 150. Entonces la distancia que John ha viajado en el tiempo x se modela por la función lineal

$$f(x) = 50x + 150 \qquad \text{Modelo de la distancia de John}$$

Asimismo, Mary viaja a 75 mi/h y el punto de intersección y de su gráfica es 0. Entonces la distancia que ha viajado en el tiempo x se modela por la función lineal

$$g(x) = 75x \qquad \text{Modelo para la distancia de Mary}$$

c) Al sustituir x por 5 en los modelos que se obtuvieron en el inciso *b*) encontramos que a las 5:00 p.m. John ha viajado $f(5) = 50(5) + 150 = 400$ mi y Mary ha viajado $g(5) = 75(5) = 375$ mi.

d) Mary supera a John en el momento en que cada uno ha viajado la misma distancia, es decir, en el momento x cuando $f(x) = g(x)$. Por lo que debemos resolver la ecuación

$$50x + 150 = 75x \qquad \text{Distancia de John} = \text{distancia de Mary}$$

Para resolver esta ecuación obtenemos $x = 6$. Por lo que Mary supera a John después de 6 h, es decir, a las 6:00 p.m. Podemos confirmar nuestra solución gráficamente dibujando las gráficas de f y g en un dominio más grande como se muestra en la figura 6. Las gráficas se intersecan cuando $x = 6$. En la gráfica vemos que la gráfica del viaje de Mary está por debajo de la gráfica del viaje de John de $x = 0$ a $x = 6$, entonces Mary está detrás de John desde mediodía hasta las 6:00 p.m.

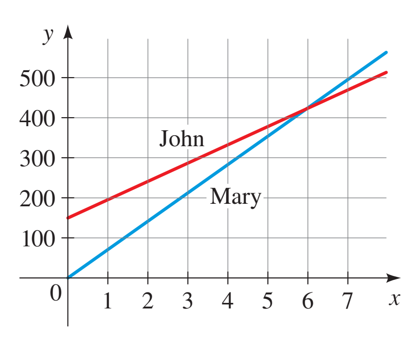


FIGURA 6 Viajes de John y Mary

Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

2.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Sea f una función con razón de cambio constante

a) f es una función ________ y f es de la forma $f(x) =$ ____ $x +$ ____.

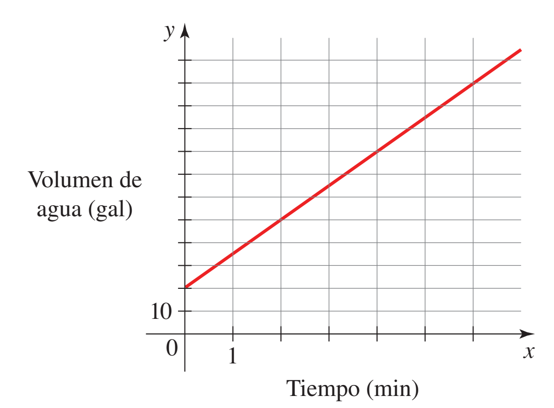
b) La gráfica de f es una ________.

2. Sea f la función lineal $f(x) = -5x + 7$.

a) La razón de cambio de f es ________.

b) La gráfica de f es una ________ con pendiente ________ y punto de intersección y ________.

3–4 ■ Se está llenando una piscina. La gráfica muestra el número de galones y en la piscina después de x minutos.



3. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?

4. ¿A qué razón se está llenando la piscina?

5. Si una función lineal tiene razón de cambio positiva, ¿su pendiente en la gráfica está hacia arriba o hacia abajo?

6. ¿Es $f(x) = 3$ una función lineal? Si es así, ¿cuáles son la pendiente y la razón de cambio?

HABILIDADES

7–14 ■ **Identificar funciones lineales** Determine si la función dada es lineal. Si la función es lineal exprese la función en la forma $f(x) = ax + b$.

7. $f(x) = 3 + \frac{1}{3}x$ **8.** $f(x) = 2 - 4x$

9. $f(x) = x(4 - x)$ **10.** $f(x) = \sqrt{x} + 1$

11. $f(x) = \dfrac{x + 1}{5}$ **12.** $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$

13. $f(x) = (x + 1)^2$ **14.** $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$

15–18 ■ **Trazar la gráfica de funciones lineales** Para la función lineal dada haga una tabla de valores y trace su gráfica. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?

15. $f(x) = 2x - 5$ **16.** $g(x) = 4 - 2x$

17. $r(t) = -\frac{2}{3}t + 2$ **18.** $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t$

19–26 ■ Pendiente y razón de cambio Se da una función lineal. ***a***) Trace la gráfica. ***b***) Encuentre la pendiente de la gráfica. ***c***) Determine la razón de cambio de la función.

19. $f(x) = 2x - 6$

20. $g(x) = -3z - 9$

21. $h(x) = -0.5t - 2$

22. $s(w) = -0.2w - 6$

23. $v(x) = -\frac{10}{3}t - 20$

24. $A(r) = -\frac{2}{3}r - 1$

25. $f(t) = -\frac{3}{2}t + 2$

26. $g(x) = \frac{5}{4}x - 10$

27–30 ■ Funciones lineales dadas verbalmente Se da una descripción verbal de una función lineal f. Exprese la función f en la forma $f(x) = ax + b$.

27. La función lineal f tiene razón de cambio 3 y valor inicial -1.

28. La función lineal g tiene razón de cambio -12 y valor inicial 100.

29. La gráfica de la función lineal h tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y punto de intersección 3.

30. La gráfica de la función lineal k tiene pendiente $-\frac{4}{5}$ y punto de intersección y, -2.

31–32 ■ Funciones lineales dadas numéricamente Se da una tabla de valores para una función lineal f. ***a***) Encuentre la razón de cambio de f. ***b***) Exprese f en la forma $f(x) = ax + b$.

31.

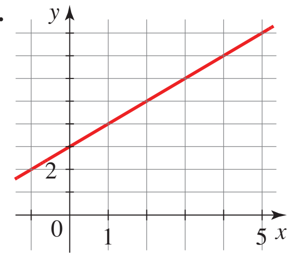
x	$f(x)$
0	7
2	10
4	13
6	16
8	19

32.

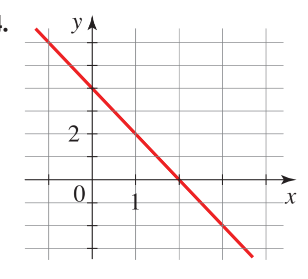
x	$f(x)$
-3	11
0	2
2	-4
5	-13
7	-19

33–36 ■ Funciones lineales dadas gráficamente Se da la gráfica de una función lineal f. ***a***) Encuentre la razón de cambio de f. ***b***) Exprese f en la forma $f(x) = ax + b$.

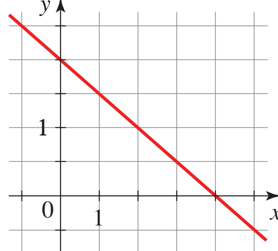
33.



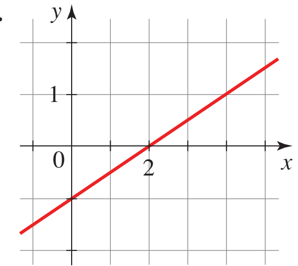
34.



35.



36.



HABILIDADES Plus

37. Familias de funciones lineales Trace la gráfica de $f(x) = ax$ para $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$ y $a = 2$, todas en el mismo conjunto de ejes. Cuando aumenta el valor de a ¿se afecta la gráfica de f? ¿Y la razón de cambio de f?

38. Familias de funciones lineales Trace la gráfica de $f(x) = x + b$ para $b = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $b = 2$, todas en el mismo conjunto de ejes. Cuando aumenta el valor de b ¿se afecta la gráfica de f? ¿Y la razón de cambio de f?

APLICACIONES

39. Relleno sanitario La cantidad de basura en un relleno sanitario del condado se modela por la función

$$T(x) = 150x + 32000$$

donde x es el número de años desde 1996 y $T(x)$ se mide en millas de toneladas.

a) Trace una gráfica de T.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?

c) ¿A qué razón aumenta por año la cantidad de basura en el relleno sanitario?

40. Minería de cobre La cantidad de cobre producido en una mina en Arizona se modela por la función

$$f(x) = 200 + 32x$$

donde x es el número de años desde 2005 y $f(x)$ se mide en miles de toneladas.

a) Trace una gráfica de f.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?

c) ¿A qué razón está cambiando la cantidad de mineral producido?

41. Globo meteorológico Los globos meteorológicos se llenan de hidrógeno y se liberan en diferentes sitios para medir y transmitir datos de condiciones tales como la temperatura y la presión del aire. Un globo meteorológico se llena con hidrógeno a una velocidad de 0.5 pies^3/s. Inicialmente el globo contiene 2 pies^3 de hidrógeno.

a) Encuentre una función lineal V que modele el volumen de hidrógeno en el globo en cualquier tiempo t.

b) Si el globo tiene una capacidad de 15 pies^3, ¿cuánto tiempo tarda en llenarse completamente?

42. Llenando un estanque Un gran estanque está llenándose con una manguera de jardín a un ritmo de 10 gal/min. Inicialmente, el estanque tiene 300 galones de agua.

a) Encuentre una función lineal V que modele el volumen de agua en el estanque en cualquier tiempo t.

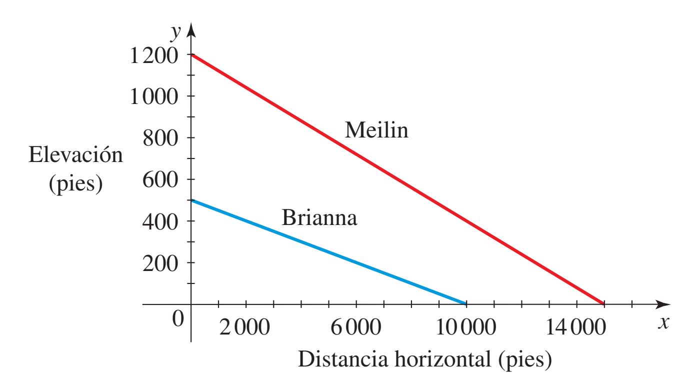
b) Si el estanque tiene una capacidad de 1 300 gal, ¿cuánto tiempo tarda en llenarse completamente?

43. Rampa para silla de ruedas Un comedor local debe construir una rampa para sillas de ruedas para facilitar el acceso de discapacitados al restaurante. Los códigos de construcción federales requieren que una rampa para silla de ruedas tenga una elevación máxima de 1 pulg por cada 12 pulg de distancia horizontal.

a) ¿Cuál es la pendiente máxima permitida para una rampa para silla de ruedas? Suponiendo que la rampa tiene la elevación máxima encuentre una función lineal H que modele la altura de la rampa sobre el suelo en función de la distancia horizontal x.

b) Si el espacio disponible para construir una rampa es de 150 pulg de ancho, ¿qué elevación alcanza la rampa?

44. Ciclismo de montaña Meilin y Brianna son ávidos ciclistas de montaña. En un día de primavera van en bicicleta cuesta abajo por carreteras rectas con pendientes pronunciadas. Las gráficas muestran una representación de la elevación de la carretera en la que cada uno de ellos va en bicicleta. Encuentre la pendiente de cada carretera.

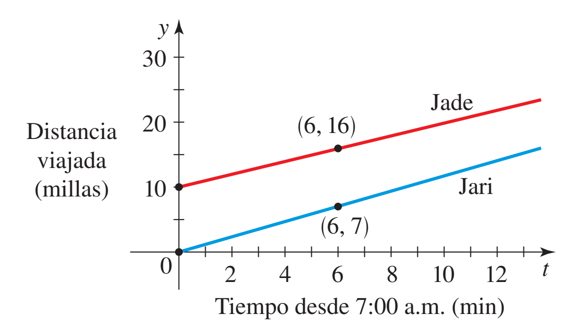


45. Ir al trabajo Jade y su compañero Jari van a trabajar cada mañana, viajan al oeste por la carretera I-10. Una mañana Jade salió hacia el trabajo a las 6:50 a.m., pero Jari salió 10 minutos más tarde. Ambos condujeron con una rapidez constante. Las gráficas siguientes muestran la distancia (en millas) que cada uno de ellos ha viajado en la I-10 al tiempo t (en minutos), donde $t = 0$ es 7:00 a.m.

a) Utilice la gráfica para decidir quién de los dos está viajando más rápido.

b) Encuentre la rapidez (en mi/h) a la cual conduce cada uno.

c) Encuentre funciones lineales f y g que modelen las distancias que Jade y Jari viajan como funciones de t (en minutos).



46. Distancia, rapidez y tiempo Jacqueline sale de Detroit a las 2:00 p.m. y conduce con una rapidez constante, viajando hacia el oeste por la carretera I-90. Pasa Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 p.m.

a) Encuentre una función lineal de d que modele la distancia (en millas) que ha viajado después de t minutos.

b) Trace una gráfica de d. ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

c) ¿Con qué rapidez (en mi/h) está viajando Jacqueline?

47. Pendiente de una carretera Al oeste de Albuquerque, Nuevo México, la ruta 40 hacia el este es recta y tiene una fuerte bajada hacia la ciudad. La autopista tiene una pendiente de 6%, lo que significa que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Al conducir por esta carretera usted nota señales de que la elevación ha descendido una distancia de 1 000 pies. ¿Cuál es el cambio en la distancia horizontal en millas?

48. Sedimentación El Lago Devils, en Dakota del Norte, tiene en el fondo una capa de sedimentación que aumenta cada año. La profundidad de la capa de sedimento se modela con la función

$$D(x) = 20 + 0.24x$$

donde x es el número de años desde 1980 y $D(x)$ se mide en centímetros.

a) Trace una gráfica de D.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?

c) ¿A qué razón (en cm) está aumentando la capa de sedimento por año?

49. Costo de conducción El costo mensual de conducción de un auto depende del número de millas conducidas. Lynn encontró que en mayo su costo de conducción fue de 380 dólares por 480 millas y en junio su costo fue de 460 dólares por 800 millas. Suponga que existe una relación lineal entre el costo mensual C de conducir un auto y la distancia x conducida.

a) Encuentre una función lineal C que modela el costo de conducir x millas por mes.

b) Trace la gráfica de C. ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

c) ¿A qué razón aumenta el costo para Lynn por cada milla adicional que conduce?

50. Costo de fabricación El gerente de una fábrica de muebles encuentra que producir 100 sillas en un día le cuesta 2 200 dólares, y producir 300 sillas en un día le cuesta $4 800.

a) Suponiendo que la relación entre el costo y el número de sillas producidas es lineal, determine una función lineal C que modele el costo de producir x sillas en un día.

b) Trace la gráfica de C. ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

c) ¿A qué razón aumenta el costo de fabricación de cada silla adicional producida?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

51. DEMOSTRACIÓN: Las funciones lineales tienen razón de cambio constante Suponga que $f(x) = ax + b$ es una función lineal.

a) Utilice la definición de la razón de cambio promedio de una función para calcular la razón de cambio promedio de f entre cualesquiera dos números reales x_1 y x_2.

b) Utilice el cálculo del inciso *a*) para demostrar que la razón de cambio promedio de f es igual a la pendiente a.

52. DEMOSTRACIÓN: Funciones con razón de cambio constante Suponga que la función f tiene la misma razón de cambio c entre dos puntos cualesquiera.

a) Encuentre la razón promedio de cambio f entre los puntos a y x para demostrar que

$$c = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

b) Reorganice la ecuación del inciso *a*) para demostrar que

$$f(x) = cx + (f(a) - ca)$$

¿Cómo se demuestra que f es una función lineal? ¿Cuál es la pendiente y cuál es el punto de intersección y?

2.6 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

■ Desplazamiento vertical ■ Desplazamiento horizontal ■ Gráficas que se reflejan ■ Estiramiento y reducción verticales ■ Estiramiento y reducción horizontales ■ Funciones pares e impares

En esta sección estudiaremos cómo ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto nos dará una mejor idea de cómo trazar la gráfica de funciones. Las transformaciones que estudiaremos son desplazamiento, reflexión y estiramiento.

■ Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza verticalmente su gráfica; hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

En general suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo obtenemos de ésta las gráficas de

Recuerde que la gráfica de la función f es igual que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c \qquad (c > 0)$$

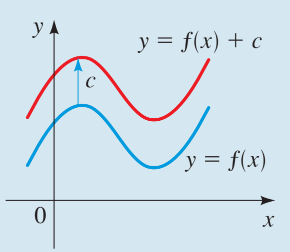
La coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = f(x) + c$ está c unidades arriba de la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por tanto, obtenemos la gráfica de $y = f(x) + c$ simplemente desplazando hacia arriba c unidades. Del mismo modo obtenemos la gráfica de $y = f(x) - c$ desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia abajo c unidades.

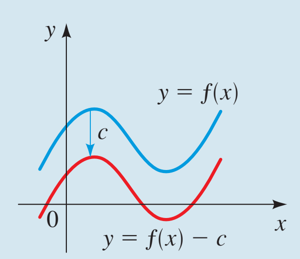
DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE GRÁFICAS

Suponga que $c > 0$.

Para trazar la gráfica de $y = f(x) + c$ desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para trazar la gráfica de $y = f(x) - c$ desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.





EJEMPLO 1 ■ Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = x^2 + 3$ ***b)*** $h(x) = x^2 - 2$

SOLUCIÓN La función $f(x) = x^2$ se graficó en el ejemplo 1*a*), sección 2.2. En la figura 1 se traza de nuevo.

a) Observe que

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Entonces la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de g está 3 unidades arriba del punto correspondiente en la gráfica de f. Esto significa que para trazar la gráfica de g desplazamos 3 unidades hacia arriba la gráfica de f como se muestra en la figura 1.

b) De la misma forma para trazar la gráfica de h desplazamos 2 unidades hacia abajo la gráfica de f como se muestra en la figura 1.

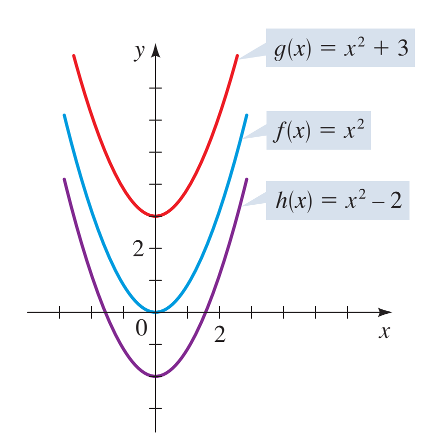


FIGURA 1

Ahora intente realizar los ejercicios 29 y 31 ■

Desplazamiento horizontal

Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Para obtener las siguientes gráficas, ¿cómo la usamos?

$$y = f(x + c) \qquad \text{y} \qquad y = f(x - c) \qquad (c > 0)$$

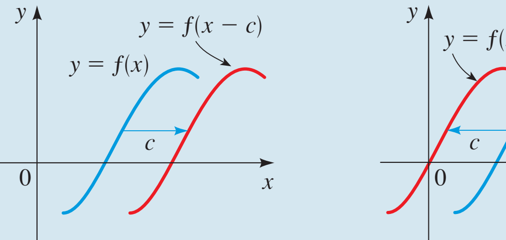
El valor de $f(x - c)$ en x es igual al valor de $f(x)$ en $x - c$. Dado que $x - c$ está c unidades a la izquierda de x, se deduce que la gráfica de $y = f(x - c)$ es justo la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia la derecha. Un razonamiento similar muestra que la gráfica de $y = f(x + c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c unidades a la izquierda. El siguiente cuadro resume estos datos.

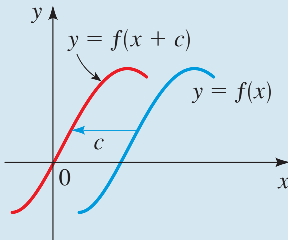
DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE GRÁFICAS

Suponga que $c > 0$.

Para trazar la gráfica de $y = f(x - c)$, desplace c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$.

Para trazar la gráfica de $y = f(x + c)$, desplace c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$.





EJEMPLO 2 ■ Desplazamientos horizontales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = (x + 4)^2$ ***b***) $h(x) = (x - 2)^2$

SOLUCIÓN

a) Para trazar la gráfica de g desplazamos 4 unidades a la izquierda la gráfica de f.

b) Para trazar la gráfica de h desplazamos 2 unidades a la derecha la gráfica de f.

Las gráficas de g y h están trazadas en la figura 2.

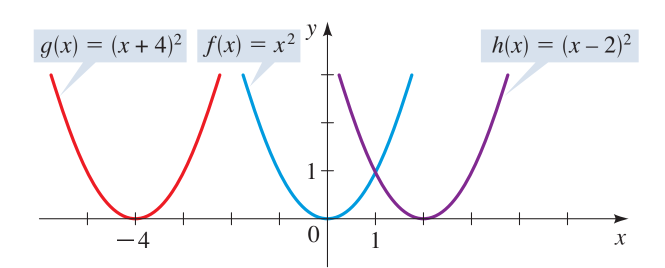


FIGURA 2

Ahora intente realizar los ejercicios 33 y 35 ■

EJEMPLO 3 ■ Combinación de desplazamientos horizontal y vertical

Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$.

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1*c*), sección 2.2) y la desplazamos 3 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. Luego desplazamos la gráfica resultante 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ que se muestra en la figura 3.

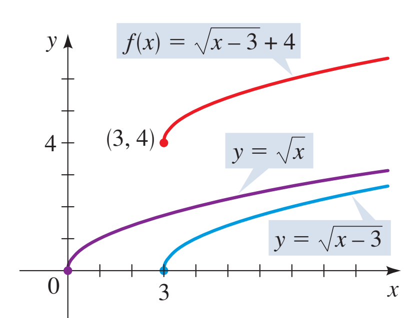


FIGURA 3

Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

■ Gráficas que se reflejan

Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener las gráficas de $y = -f(x)$ y $y = f(-x)$? La coordenada y de cada uno de los puntos en la gráfica de $y = -f(x)$ es simplemente el negativo de la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Por otra parte, el valor de $y = f(-x)$ en x es igual al



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Transformación de historias

Si una situación del mundo real o "historia" se modela mediante una función, ¿cómo se transforma la función al cambiar la historia? Por ejemplo, si la distancia recorrida en un viaje por carretera se modela mediante una función, entonces ¿cómo se desplaza o estira la función al cambiar la historia de su viaje? ¿Cómo cambia la historia del viaje al transformar la función que modela el viaje? En este proyecto se exploran algunas historias del mundo real y las transformaciones de estas historias. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

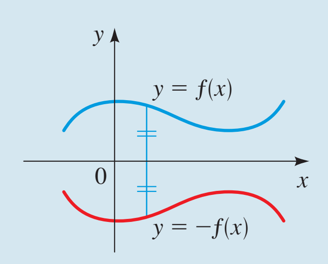
* Este material se encuentra disponible en inglés.

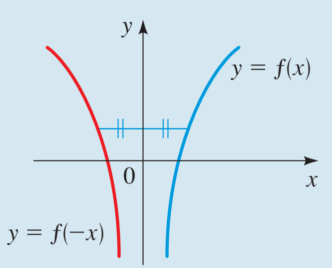
valor de $y = f(x)$ en $-x$, por lo que la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y. En el siguiente recuadro se resumen estas observaciones.

GRÁFICAS QUE SE REFLEJAN

Para trazar la gráfica de $y = -f(x)$ refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para trazar la gráfica de $y = f(-x)$ refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.





EJEMPLO 4 ■ Gráficas que se reflejan

Trace la gráfica de cada función.

a) $f(x) = -x^2$ ***b)*** $g(x) = \sqrt{-x}$

SOLUCIÓN

a) Empezamos con la gráfica de $y = x^2$. La gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $y = x^2$ reflejada en el eje x (véase la figura 4).

b) Empezamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1*c*) en la sección 2.2). La gráfica de $g(x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ reflejada en el eje y (véase la figura 5). Observe que el dominio de la función $g(x) = \sqrt{-x}$ es $\{x \mid x \leq 0\}$.

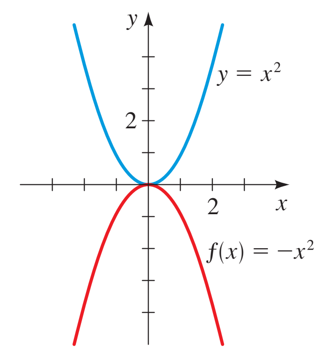


FIGURA 4

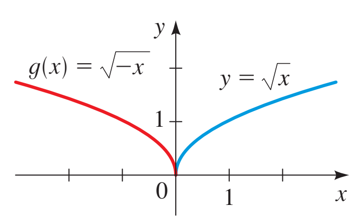


FIGURA 5

Ahora intente realizar los ejercicios 37 y 39 ■



RENÉ DESCARTES (1596-1650) nació en la población de La Haye en el sur de Francia. Desde sus primeros años gustaba de las matemáticas por "la certeza de sus resultados y la claridad de su razonamiento". Creía que para llegar a la verdad uno debe empezar dudando de todo, incluso nuestra propia existencia; esto le llevó a formular quizá la frase mejor conocida de toda la filosofía: "Pienso, luego existo". En su libro *Discurso del método* describió lo que ahora se conoce como plano cartesiano. Esta idea de combinar álgebra y geometría hizo posible que los matemáticos por primera vez trazaran gráficas de funciones y así "vieran" las ecuaciones que estaban estudiando. El filósofo John Stuart Mill llamó a esta invención "el paso más grande jamás dado en el progreso de las ciencias exactas". A Descartes le gustaba levantarse tarde y pasar la mañana en cama pensando y escribiendo. Inventó el plano de coordenadas estando en cama y viendo una mosca moverse en el techo, razonando que él podría describir la ubicación exacta de la mosca si supiera su distancia desde dos paredes perpendiculares. En 1649 Descartes se convirtió en tutor de la reina Cristina de Suecia quien gustaba de sus lecciones a las 5 de la mañana cuando, según decía, su mente estaba más aguda. Sin embargo, el cambio en los hábitos de Descartes y la helada biblioteca donde estudiaban fueron demasiado para él. En febrero de 1650, después de una estancia de sólo dos meses, contrajo pulmonía y murió.

Estiramiento y reducción verticales

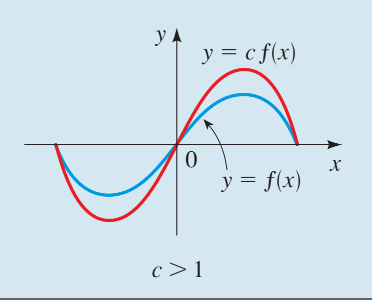
Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener la gráfica de $y = cf(x)$? La coordenada y de $y = cf(x)$ en x es igual que la coordenada y correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por c. Multiplicar las coordenadas y por c tiene el efecto de estirar o reducir verticalmente la gráfica en un factor de c (si $c > 0$).

ESTIRAMIENTO Y REDUCCIÓN VERTICAL DE GRÁFICAS

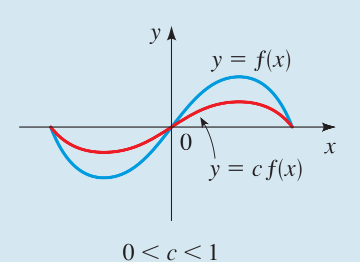
Para trazar la gráfica de $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, estire la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c.

Si $0 < c < 1$, reduzca la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c.



$c > 1$



$0 < c < 1$

EJEMPLO 5 ■ Estiramiento y reducción vertical de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = 3x^2$ ***b)*** $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de g se obtiene al multiplicar por 3 la coordenada y de cada punto de la gráfica de f. Esto es, para obtener la gráfica de g, estiramos la gráfica de f verticalmente en un factor de 3. El resultado es la parábola más angosta de la figura 6.

b) La gráfica de h se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{3}$ la coordenada y de cada punto de la gráfica de f. Esto es, para obtener la gráfica de h reducimos la gráfica de f verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$. El resultado es la parábola más ancha de la figura 6.

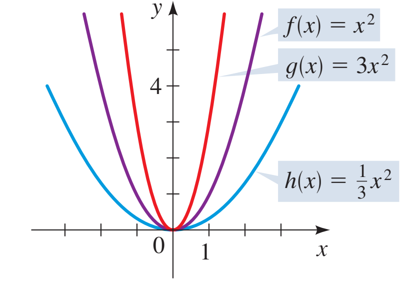
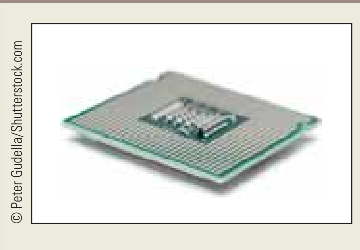


FIGURA 6



Ilustramos el efecto de combinar desplazamientos, reflexiones y estiramientos en el siguiente ejemplo.

Las matemáticas en el mundo moderno



© Peter Gudella/Shutterstock.com

Computadoras

Durante siglos se han diseñado máquinas para que ejecuten trabajos específicos. Por ejemplo, una lavadora lava ropa, una tejedora teje telas, una sumadora suma números, y así sucesivamente. La computadora ha cambiado todo esto.

La computadora es una máquina que no hace nada sino hasta que se le dan instrucciones para que haga algo. Así, una computadora puede jugar juegos, trazar imágenes o calcular π con un millón de lugares decimales; todo depende de qué programa (o instrucciones) se le den a la computadora. La computadora puede hacer todo esto porque puede aceptar instrucciones y lógicamente puede cambiar esas instrucciones basadas en datos de entrada. Esta versatilidad hace útiles a las computadoras en casi todo aspecto de la vida humana.

La idea de una computadora fue descrita teóricamente en la década de 1940 por el matemático Allan Turing (vea la página 118) en lo que él llamó *máquina universal*. En 1945 el matemático John von Neumann, ampliando las ideas de Turing, construyó una de las primeras computadoras electrónicas.

Los matemáticos continúan perfeccionando nuevas bases teóricas para el diseño de computadoras. El corazón de la computadora es el "chip", que es capaz de procesar instrucciones lógicas. Para tener idea de la complejidad de un chip considere que el chip Pentium tiene más de 3.5 millones de circuitos lógicos.

EJEMPLO 6 ■ Combinar desplazamiento, estiramiento y reflexión

Estire la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$.

SOLUCIÓN Empezando con la gráfica de $y = x^2$, primero desplazamos a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = (x - 3)^2$. Luego reflejamos en el eje x y estiramos por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = -2(x - 3)^2$. Finalmente desplazamos hacia arriba 1 unidad para obtener la gráfica de $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ que se ve en la figura 7.

Observe que los desplazamientos y estiramientos siguen el orden normal de las operaciones cuando se evalúa la función. En particular, el corrimiento hacia arriba se debe realizar al *último*.

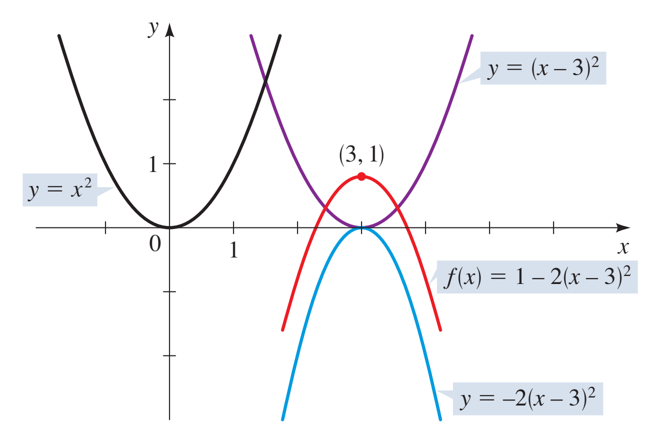


FIGURA 7

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

■ Estiramiento y reducción horizontales

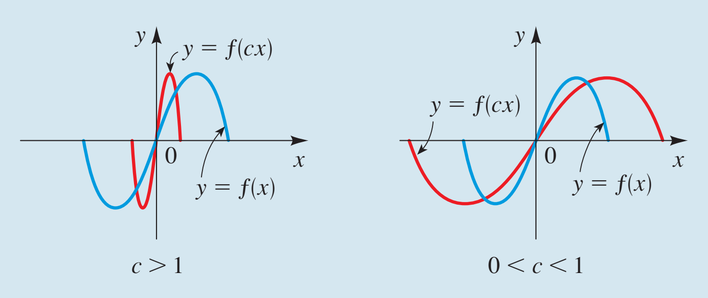
Ahora consideramos la reducción y el estiramiento horizontales de gráficas. Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, entonces ¿cómo está relacionada con esta la gráfica de $y = f(cx)$? La coordenada y de $y = f(cx)$ en x es la misma que la coordenada y de $y = f(x)$ en cx. Por tanto, las coordenadas x de la gráfica de $y = f(x)$ corresponden a las coordenadas x de la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicada por c. Viendo esto a la inversa observamos que las coordenadas x de la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas x de la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicada por $1/c$. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, debemos reducir (o estirar) la gráfica horizontalmente en un factor de $1/c$ (si $c > 0$), como se resume en el siguiente recuadro.

REDUCCIÓN Y ESTIRAMIENTO HORIZONTALES DE GRÁFICAS

Para trazar la gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, reduzca la gráfica horizontalmente $y = f(x)$ en un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, estire horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ en un factor de $1/c$.



EJEMPLO 7 ■ Estiramiento y reducción horizontales de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 8. Trace la gráfica de cada función.

a) $y = f(2x)$ ***b***) $y = f(\frac{1}{2}x)$

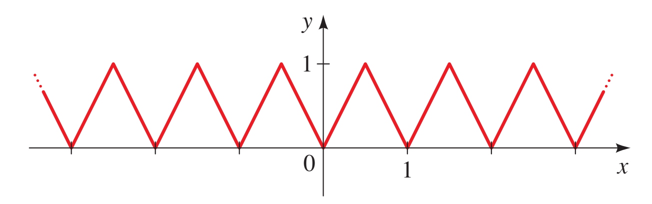


FIGURA 8 $y = f(x)$

SOLUCIÓN Usando los principios descritos en página 203: ***a***) *reducimos* la gráfica horizontalmente por el factor $\frac{1}{2}$ para obtener la gráfica de la figura 9, y ***b***) *estiramos* la gráfica horizontalmente por el factor 2 para obtener la gráfica de la figura 10.

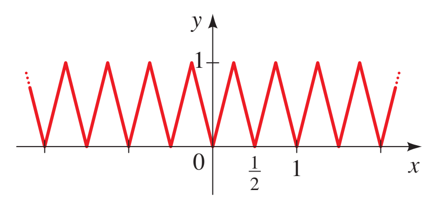


FIGURA 9 $y = f(2x)$

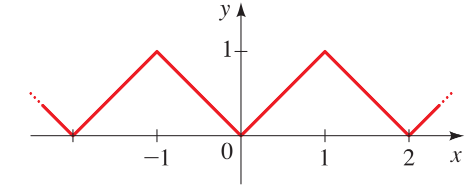


FIGURA 10 $y = f(\frac{1}{2}x)$



Ahora intente realizar el ejercicio 71 ■

■ Funciones pares e impares

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es función par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2 = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y (véase la figura 11). Esto significa que si hemos trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces podemos obtener toda la gráfica simplemente al reflejar esta parte en el eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se denomina **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica alrededor del origen (véase la figura 12). Si hemos trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces podemos obtener toda la gráfica al girar esta parte 180° alrededor del origen. (Esto es equivalente a reflejar primero en el eje x y luego en el eje y.)

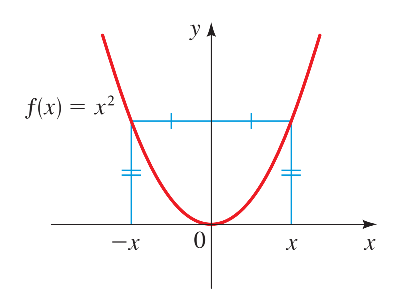


FIGURA 11 $f(x) = x^2$ es una función par.

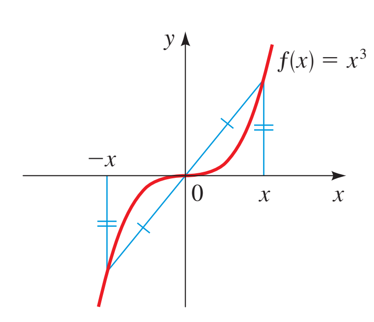


FIGURA 12 $f(x) = x^3$ es una función impar.



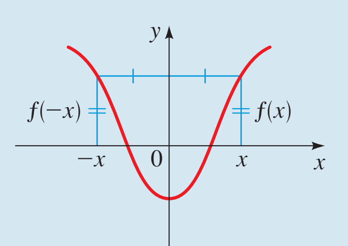
SONYA KOVALEVSKY (1850-1891) es considerada la más importante matemática del siglo XIX. Nació en Moscú dentro de una familia aristocrática. De niña estudió los principios de cálculo en una forma muy poco común: su habitación estaba temporalmente tapizada con las páginas de un libro de cálculo. Tiempo después escribió que "pasaba muchas horas frente a aquella pared tratando de entenderla". Puesto que las leyes rusas prohibían que las mujeres estudiaran en universidades, contrajo matrimonio por conveniencia, lo que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemáticas por la Universidad de Göttingen. Finalmente se le otorgó un profesorado de tiempo completo en la Universidad de Estocolmo donde fue profesora durante ocho años hasta su muerte debido a una epidemia de gripe a la edad de 41 años. Su investigación fue de gran utilidad para ayudar a poner las ideas y aplicaciones de funciones y cálculo en una base sólida y lógica. Recibió numerosos homenajes y premios por sus trabajos de investigación.

FUNCIONES PARES E IMPARES

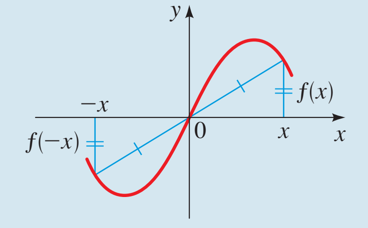
Sea f una función.

f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.



La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.



La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

EJEMPLO 8 ■ Funciones par e impar

Determine si las funciones son par, impar o ninguna de estas.

a) $f(x) = x^5 + x$

b) $g(x) = 1 - x^4$

c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

a) $$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$$

Por tanto, f es una función impar.

b) $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

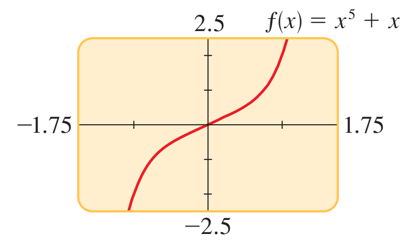
Por tanto, g es par.

c) $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

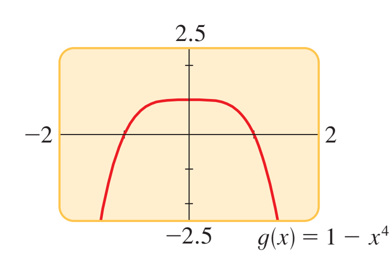
Dado que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, concluimos que h no es par ni impar.

Ahora intente realizar los ejercicios 83, 85 y 87 ■

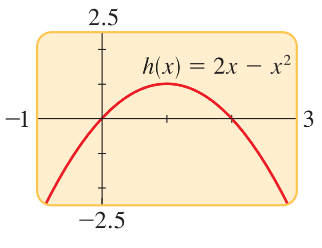
Las gráficas de las funciones del ejemplo 8 se muestran en la figura 13. La gráfica de f es simétrica alrededor del origen y la gráfica de g es simétrica alrededor del eje y. La gráfica de h no es simétrica ya sea alrededor del eje y o del origen.



a)



b)



c)

FIGURA 13

2.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1–2 ■ Llene el espacio en blanco con la dirección apropiada (izquierda, derecha, hacia arriba o hacia abajo).

1. ***a***) La gráfica de $y = f(x) + 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ________ 3 unidades.

b) La gráfica de $y = f(x + 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ________ 3 unidades.

2. ***a***) La gráfica de $y = f(x) - 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ________ 3 unidades.

b) La gráfica de $y = f(x - 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ________ 3 unidades.

3. Llene el espacio en blanco con el eje apropiado (eje x o eje y).

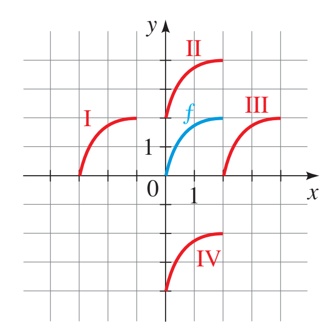
a) La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejarse en el ________.

b) La gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejarse en el ________.

4. Se da una gráfica de una función f. Relacione cada ecuación con una de las gráficas marcadas I-IV.

a) $f(x) + 2$ ***b***) $f(x + 3)$

c) $f(x - 2)$ ***d***) $f(x) - 4$



5. Si una función f es una función par, entonces ¿qué tipo de simetría tiene la gráfica de f?

6. Si una función f es una función impar, entonces ¿qué tipo de simetría tiene la gráfica de f?

HABILIDADES

7–18 ■ Describir transformaciones Suponga que se da la gráfica de f. Describa la forma en que la gráfica de cada función se puede obtener a partir de la gráfica de f.

7. ***a***) $f(x) - 1$ ***b***) $f(x - 2)$

8. ***a***) $f(x + 5)$ ***b***) $f(x) + 4$

9. ***a***) $f(-x)$ ***b***) $3f(x)$

10. ***a***) $-f(x)$ ***b***) $\frac{1}{3}f(x)$

11. ***a***) $y = f(x - 5) + 2$ ***b***) $y = f(x + 1) - 1$

12. ***a***) $y = f(x + 3) + 2$ ***b***) $y = f(x - 7) - 3$

13. ***a***) $y = -f(x) + 5$ ***b***) $y = 3f(x) - 5$

14. ***a***) $1 - f(-x)$ ***b***) $2 - \frac{1}{5}f(x)$

15. ***a***) $2f(x + 5) - 1$ ***b***) $\frac{1}{4}f(x - 3) + 5$

16. ***a***) $\frac{1}{3}f(x - 2) + 5$ ***b***) $4f(x + 1) + 3$

17. ***a***) $y = f(4x)$ ***b***) $y = f(\frac{1}{4}x)$

18. ***a***) $y = f(2x) - 1$ ***b***) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

19–22 ■ Describir transformaciones Explique cómo se obtiene la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

19. ***a***) $f(x) = x^2, \quad g(x) = (x + 2)^2$

b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 2$

20. ***a***) $f(x) = x^3, \quad g(x) = (x - 4)^3$

b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^3 - 4$

21. ***a***) $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x + 2| - 2$

b) $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x - 2| + 2$

22. ***a***) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = -\sqrt{x} + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x} + 1$

23. Trazar gráficas de transformaciones Use la gráfica de $y = x^2$ de la figura 4 para trazar la gráfica de lo siguiente.

a) $g(x) = x^2 + 1$ ***b***) $g(x) = (x - 1)^2$

c) $g(x) = -x^2$ ***d***) $g(x) = (x - 1)^2 + 3$

24. Trazar gráficas de transformaciones Use la gráfica de $y = \sqrt{x}$ de la figura 5 para trazar las gráficas siguientes.

a) $g(x) = \sqrt{x - 2}$ ***b***) $g(x) = \sqrt{x} + 1$

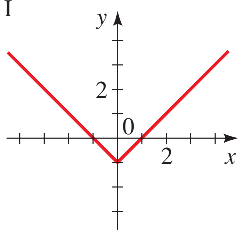
c) $g(x) = \sqrt{x + 2} + 2$ ***d***) $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

25–28 ■ Identificar transformaciones Relacione la gráfica con la función. (Vea la gráfica de $y = |x|$ en la página 96.)

25. $y = |x + 1|$ **26.** $y = |x - 1|$

27. $y = |x| - 1$ **28.** $y = -|x|$

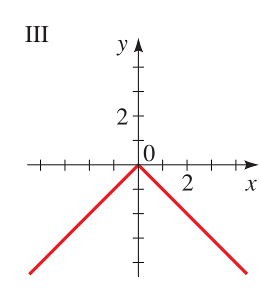
I



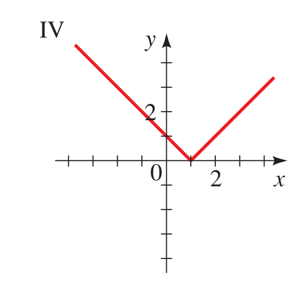
II

y
2
0
2
x

III



IV



29–52 ■ Trazar transformaciones de gráficas Trace la gráfica de la función no colocando los puntos sino empezando con la gráfica de una función estándar y aplique las transformaciones.

29. $f(x) = x^2 + 3$
30. $f(x) = x^2 - 4$
31. $f(x) = |x| - 1$
32. $f(x) = \sqrt{x} + 1$
33. $f(x) = (x - 5)^2$
34. $f(x) = (x + 1)^2$
35. $f(x) = |x + 2|$
36. $f(x) = \sqrt{x - 4}$
37. $f(x) = -x^3$
38. $f(x) = -|x|$
39. $y = \sqrt[4]{-x}$
40. $y = \sqrt[3]{-x}$
41. $y = \frac{1}{4}x^2$
42. $y = -5\sqrt{x}$
43. $y = 3|x|$
44. $y = \frac{1}{2}|x|$
45. $y = (x - 3)^2 + 5$
46. $y = \sqrt{x + 4} - 3$
47. $y = 3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$
48. $y = 2 - \sqrt{x + 1}$
49. $y = |x + 2| + 2$
50. $y = 2 - |x|$
51. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$
52. $y = 3 - 2(x - 1)^2$

53–62 ■ Encontrar ecuaciones para transformaciones Se da una función f y las transformaciones indicadas se aplican a su gráfica (en el orden dado). Escriba la ecuación para la gráfica final transformada.

53. $f(x) = x^2$; desplazar hacia arriba 3 unidades

54. $f(x) = x^3$; desplazar hacia abajo 5 unidades

55. $f(x) = \sqrt{x}$; desplazar 2 unidades a la izquierda

56. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; desplazar 1 unidad a la derecha

57. $f(x) = |x|$; desplazar 2 unidades a la izquierda y desplazar 5 unidades hacia abajo

58. $f(x) = |x|$; reflejar en el eje x, desplazar 4 unidades a la izquierda y desplazar 3 unidades hacia abajo

59. $f(x) = \sqrt[4]{x}$; reflejar en el eje y y desplazar hacia arriba 1 unidad

60. $f(x) = x^2$; desplazar 2 unidades a la izquierda y reflejar en el eje x

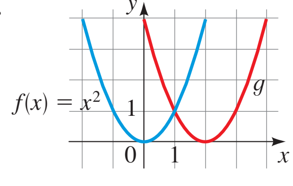
61. $f(x) = x^2$; estirar verticalmente en un factor de 2, desplazar hacia abajo 2 unidades y desplazar 3 unidades a la derecha

62. $f(x) = |x|$; reducir verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$, desplazar a la izquierda 1 unidad y desplazar hacia arriba 3 unidades

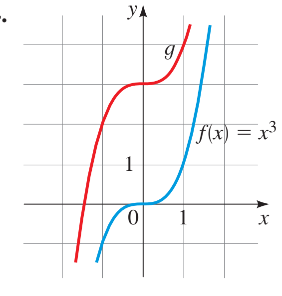
63–68 ■ Encontrar fórmulas para transformaciones Se dan las gráficas de f y de g. Encuentre una fórmula para la función g.



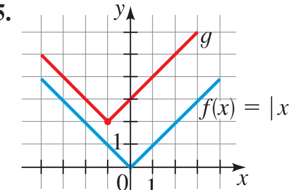
63.



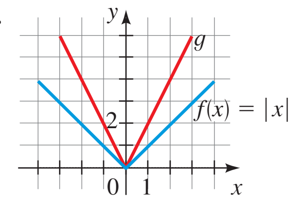
64.



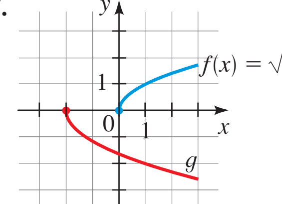
65.



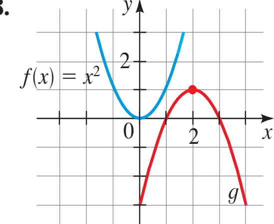
66.



67.

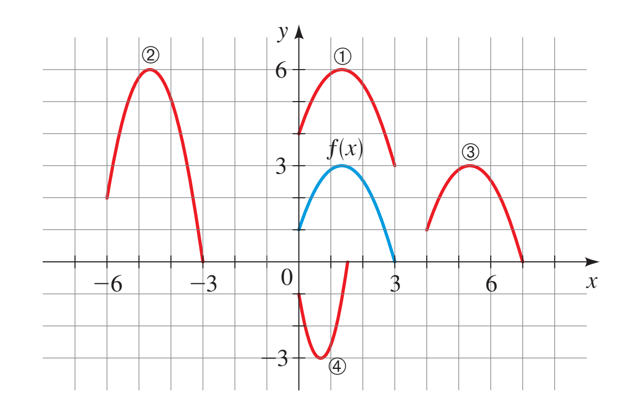


68.

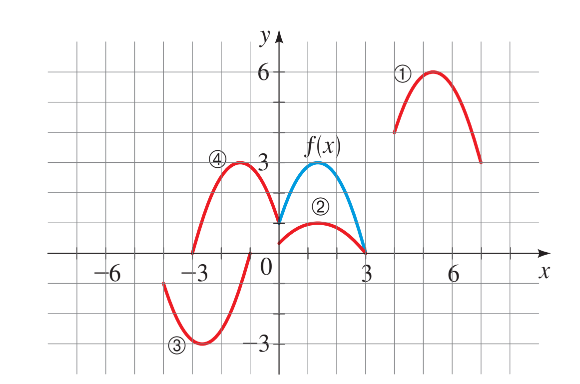


69–70 ■ Identificar transformaciones Se da la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada ecuación con su gráfica.

69. ***a***) $y = f(x - 4)$ ***b***) $y = f(x) + 3$
c) $y = 2f(x + 6)$ ***d***) $y = -f(2x)$

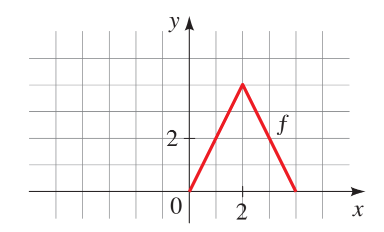


70. ***a***) $y = \frac{1}{3}f(x)$ ***b***) $y = -f(x + 4)$
c) $y = f(x - 4) + 3$ ***d***) $y = f(-x)$

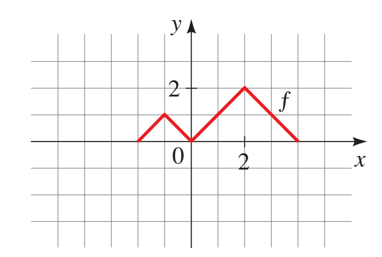


71–74 ■ Transformaciones de gráficas Se da la gráfica de f. Trace las gráficas de las siguientes funciones f.

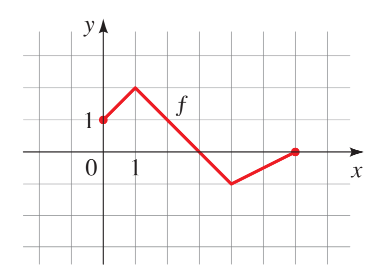
71. ***a)*** $y = f(x - 2)$ ***b)*** $y = f(x) - 2$
c) $y = 2f(x)$ ***d)*** $y = -f(x) + 3$
e) $y = f(-x)$ ***f)*** $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



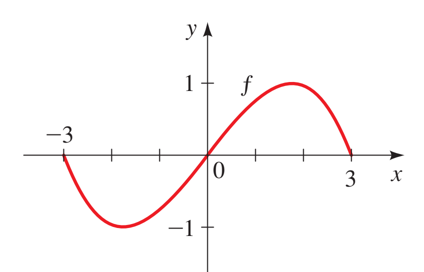
72. ***a)*** $y = f(x + 1)$ ***b)*** $y = f(-x)$
c) $y = f(x - 2)$ ***d)*** $y = f(x) - 2$
e) $y = -f(x)$ ***f)*** $y = 2f(x)$



73. ***a)*** $y = f(2x)$ ***b)*** $y = f(\frac{1}{2}x)$



74. ***a)*** $y = f(3x)$ ***b)*** $y = f(\frac{1}{3}x)$



75–76 ■ Transformaciones de gráficas Use la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$ descrita en la página 163 para trazar la gráfica de la función indicada.

75. $y = [\![2x]\!]$ **76.** $y = [\![\frac{1}{4}x]\!]$

77–80 ■ Transformaciones de gráficas Trace la gráfica de las funciones en cada pantalla usando el rectángulo de vista dado. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica del inciso *a*)?

77. Rectángulo de vista $[-8, 8]$ por $[-2, 8]$
a) $y = \sqrt[4]{x}$ ***b)*** $y = \sqrt[4]{x + 5}$
c) $y = 2\sqrt[4]{x + 5}$ ***d)*** $y = 4 + 2\sqrt[4]{x + 5}$

78. Rectángulo de vista $[-8, 8]$ por $[-6, 6]$
a) $y = |x|$ ***b)*** $y = -|x|$
c) $y = -3|x|$ ***d)*** $y = -3|x - 5|$

79. Rectángulo de vista $[-4, 6]$ por $[-4, 4]$
a) $y = x^6$ ***b)*** $y = \frac{1}{3}x^6$
c) $y = -\frac{1}{3}x^6$ ***d)*** $y = -\frac{1}{3}(x - 4)^6$

80. Rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$
a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ***b)*** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$
c) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}}$ ***d)*** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}} - 3$



81–82 ■ Transformaciones de gráficas Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, trace la gráfica de las siguientes funciones en el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica del inciso *a*)?

81. ***a)*** $y = f(x)$ ***b)*** $y = f(2x)$ ***c)*** $y = f(\frac{1}{2}x)$

82. ***a)*** $y = f(x)$ ***b)*** $y = f(-x)$
c) $y = -f(-x)$ ***d)*** $y = f(-2x)$
e) $y = f(-\frac{1}{2}x)$

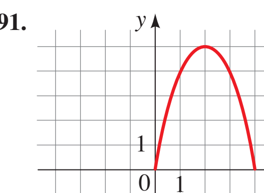
83–90 ■ Funciones pares e impares Determine si la función f es par, impar o ninguna de estas. Si f es par o impar, use simetría para trazar su gráfica.

83. $f(x) = x^4$ **84.** $f(x) = x^3$
85. $f(x) = x^2 + x$ **86.** $f(x) = x^4 - 4x^2$
87. $f(x) = x^3 - x$ **88.** $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$
89. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ **90.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

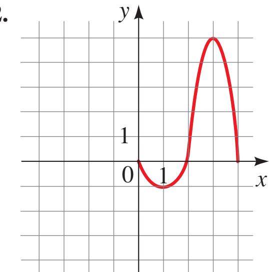
HABILIDADES Plus

91–92 ■ Trazar gráficas pares e impares Se da la gráfica de una función definida por $x \geq 0$. Complete la gráfica para $x < 0$ para que sea ***a)*** una función par y ***b)*** una función impar.

91.

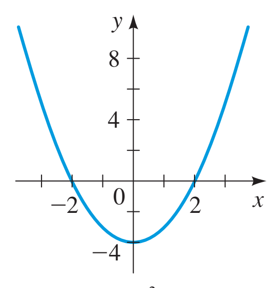


92.

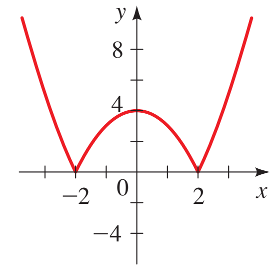


93–94 ■ Trazar la gráfica del valor absoluto de una función Estos ejercicios muestran cómo se obtiene la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

93. Se presentan las gráficas de $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = |x^2 - 4|$ Explique cómo se obtiene la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

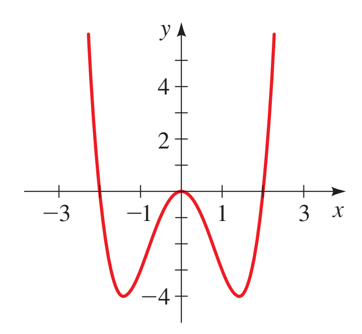


$f(x) = x^2 - 4$



$g(x) = |x^2 - 4|$

94. Se presenta la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$. Use esta gráfica para trazar la gráfica de $g(x) = |x^4 - 4x^2|$.



95–96 ■ Trazar la gráfica del valor absoluto de una función Trace la gráfica de cada función.

95. ***a)*** $f(x) = 4x - x^2$ ***b)*** $g(x) = |4x - x^2|$

96. ***a)*** $f(x) = x^3$ ***b)*** $g(x) = |x^3|$

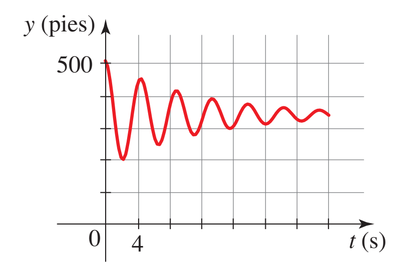
APLICACIONES

97. Salto *bungee* Luisa hace salto *bungee* desde un puente de 500 pies de altura. La gráfica muestra la altura de Luisa $h(t)$ (en pies) después de t segundos.

a) Describir en palabras lo que la gráfica indica sobre el salto *bungee* de Luisa.

b) Suponga que Luisa va saltar en *bungee* desde un puente de 400 pies de altura. Trace una nueva gráfica que muestre la altura de Luisa $H(t)$ después de t segundos.

c) ¿Qué transformación debe realizarse en la función h para obtener la función H? Exprese la función H en términos de h.

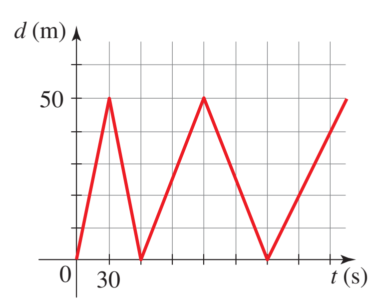


98. Vueltas en natación Miyuki practica vueltas nadando con su equipo. La gráfica de función $y = f(t)$ que se muestra a continuación da su distancia (en metros) desde el extremo inicial de la piscina t segundos después de que comienza sus vueltas.

a) Describa con palabras la práctica de natación de Miyuki. ¿Cuál es su rapidez promedio para los primeros 30 s?

b) Trace la gráfica de la función $y = 1.2f(t)$. ¿Cómo se relaciona la gráfica de la nueva función con la gráfica de la función original?

c) ¿Cuál es la nueva rapidez promedio de Miyuki para los primeros 30 s?

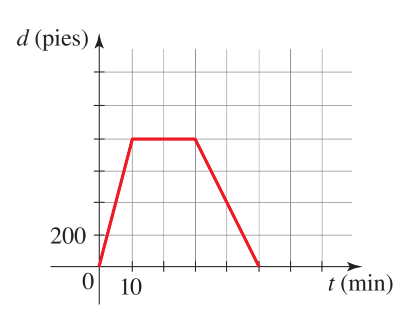


99. Excursión En una excursión alumnos de cuarto grado caminan hacia un parque. La función $y = f(t)$ cuya gráfica se presenta a continuación presenta la distancia recorrida (en pies) t minutos después de que salieron de la escuela.

a) ¿Cuál es la rapidez promedio con la que van al parque? ¿A qué distancia del parque estaban los alumnos? ¿A qué distancia está el parque?

b) Trace la gráfica de la función $y = 0.5f(t)$. ¿Cómo se relaciona la gráfica de la nueva función con la gráfica de la función original? ¿Cuál es la rapidez con la que van al nuevo parque? ¿A qué distancia está el nuevo parque?

c) Trace la gráfica de la función $y = f(t - 10)$. ¿Cómo se relaciona la gráfica de la nueva función con la gráfica de la función original? ¿Cómo difiere la excursión descrita por esta función con la excursión original?



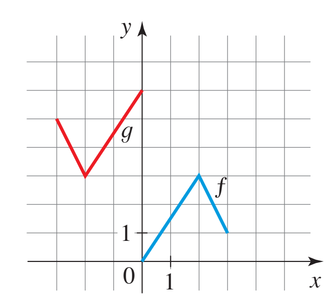
DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

100–101 ■ DISCUSIÓN: Obtener transformaciones ¿Se puede obtener la función f mediante transformaciones a partir de la función g?

100. Las funciones f y g se describen algebraicamente como:

$$f(x) = (x + 2)^2 \qquad g(x) = (x - 2)^2 + 5$$

101. Las funciones f y g se describen gráficamente en la figura:



102. DISCUSIÓN: Sumas de funciones pares e impares Si f y g son funciones pares, $f + g$ es necesariamente par? Si ambas son impares, ¿su suma es necesariamente impar? ¿Qué se puede decir acerca de la suma si una es impar y la otra es par? En cada caso, demuestre su respuesta.

103. DISCUSIÓN: Productos de funciones pares e impares Conteste las mismas preguntas del ejercicio 102, excepto que esta vez considere el producto de f y g en lugar de la suma.

104. DISCUSIÓN: Funciones de potencia pares e impares ¿Qué debe ser cierto acerca del entero n si la función

$$f(x) = x^n$$

es una función par? ¿Y si es una función impar? ¿Por qué piensa usted que se les designaron estos nombres, "par" e "impar", a estas propiedades de función?

2.7 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

■ Sumas, diferencias, productos y cocientes ■ Composición de funciones
■ Aplicaciones de la composición

Para formar nuevas funciones, en esta sección estudiaremos diferentes maneras de combinarlas.

■ Sumas, diferencias, productos y cocientes

La suma de f y g está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es "$f + g$". Por tanto, este signo + representa la operación de adición de *funciones*, pero el signo + del lado derecho representa adición de los *números* $f(x)$ y $g(x)$.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g de modo similar a como sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números reales. Por ejemplo, definimos la función $f + g$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La nueva función $f + g$ se denomina **suma** de las funciones f y g; su valor en x es $f(x) + g(x)$. Por supuesto, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas, es decir, si x pertenece al dominio de f y también al dominio de g. Por tanto, si el dominio de f es A y el dominio de g es B, entonces el dominio $f + g$ es la intersección de estos dominios, o sea $A \cap B$. Del mismo modo, podemos definir la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g de las funciones f y g. Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente debemos recordar no dividir entre 0.

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g están definidas como sigue.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	Dominio $A \cap B$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	Dominio $A \cap B$
$(fg)(x) = f(x)g(x)$	Dominio $A \cap B$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	Dominio $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$

EJEMPLO 1 ■ Combinaciones de funciones y sus dominios

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g y sus dominios.

b) Encuentre $(f+g)(4)$, $(f-g)(4)$, $(fg)(4)$ y $(f/g)(4)$.

SOLUCIÓN

a) El dominio de f es $\{x \mid x \neq 2\}$, y el dominio de g es $\{x \mid x \geq 0\}$. La intersección de los dominios de f y g es

$$\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\} = [0, 2) \cup (2, \infty)$$

Por tanto, tenemos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x > 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

Para dividir fracciones invierta el denominador y multiplique:

$$\frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}} = \frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}/1} = \frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}$$

Observe que en el dominio de f/g excluimos 0 porque $g(0) = 0$.

b) Cada uno de estos valores existe porque $x = 4$ está en el dominio de cada función:

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Iteración y caos

© Mr. Green/Shutterstock.com

Las *iteraciones* de una función f en un punto x son los números $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, y así sucesivamente. Examinamos la iteración de la *función logística,* qué modela la población de una especie con potencial limitado para el crecimiento (como lagartos en una isla o peces en un estanque). Iterar el modelo nos puede ayudar a predecir si la población con el tiempo se estabiliza o si va a fluctuar caóticamente. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

La gráfica de la función $f + g$ se puede obtener de las gráficas de f y g por **suma gráfica**. Esto significa que sumamos las coordenadas y correspondientes como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ Uso de suma gráfica

En la figura 1 se muestran las gráficas de f y g. Use suma gráfica para trazar la gráfica de la función de $f + g$.

SOLUCIÓN Obtenemos la gráfica de $f + g$ al "sumar gráficamente" el valor de $f(x)$ a $g(x)$ como se muestra en la figura 2. Esto se implementa al copiar el segmento de recta PQ sobre el de PR para obtener el punto S en la gráfica de $f + g$.

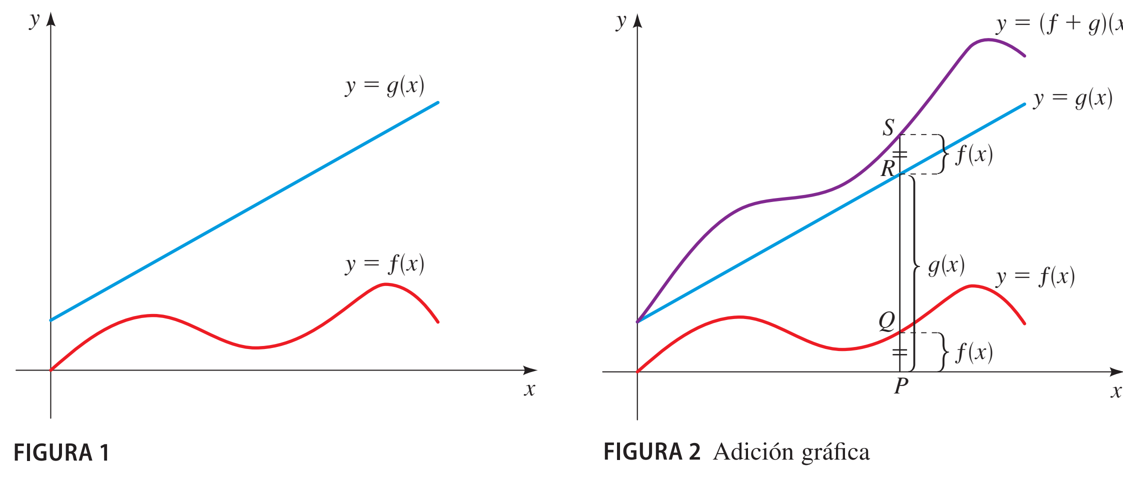


FIGURA 1

FIGURA 2 Adición gráfica

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

■ Composición de funciones

Ahora consideremos una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) + \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Podemos definir una nueva función h como

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función h está formada por las funciones f y g en una forma interesante: dado un número x, primero le aplicamos la función g y luego aplicamos f al resultado. En este caso, f es la regla "tome la raíz cuadrada", g es la regla "eleve al cuadrado, luego sume 1" y h es la regla "eleve al cuadrado, sume 1, luego tome la raíz cuadrada". En otras palabras, obtenemos la regla h al aplicar la regla g y luego la regla f. La figura 3 muestra un diagrama de máquina para h.

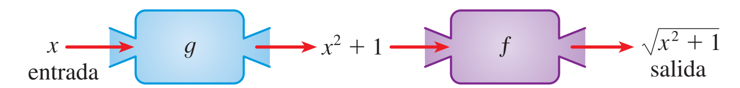


FIGURA 3 La máquina h está compuesta por la máquina g (primero) y luego por la máquina f.

En general, dadas dos funciones f y g cualesquiera, empezamos con un número x en el dominio de g y su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, podemos entonces calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ que se obtiene al sustituir g en f. Se denomina *composición* (o *compuesta*) de f y g, y se denota con $f \circ g$ ("f compuesta con g").

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que tanto $g(x)$ como $f(g(x))$ estén definidas. Podemos describir $f \circ g$ usando un diagrama de flechas (figura 4).

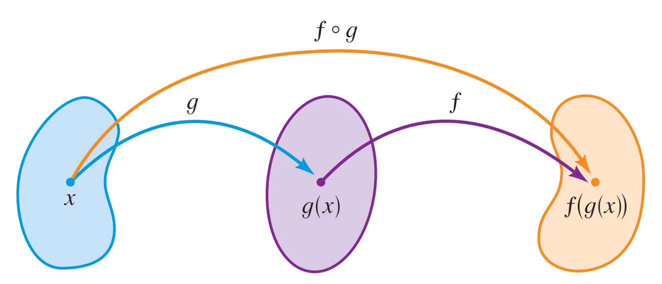


FIGURA 4 Diagrama de flechas para $f \circ g$

EJEMPLO 3 ■ Encontrar la composición de funciones

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

a) Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

b) Encuentre $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

En el ejemplo 3, f es la regla "elevar al cuadrado" y g es la regla "reste 3". La función $f \circ g$ *primero* resta 3 y *luego* eleva al cuadrado; la función $g \circ f$ *primero* eleva al cuadrado y *luego* resta 3.

SOLUCIÓN

a) Tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g\\ &= f(x - 3) && \text{Definición de } g\\ &= (x - 3)^2 && \text{Definición de } f\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f\\ &= g(x^2) && \text{Definición de } f\\ &= x^2 - 3 && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Los dominios tanto de $f \circ g$ y $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

b) Tenemos

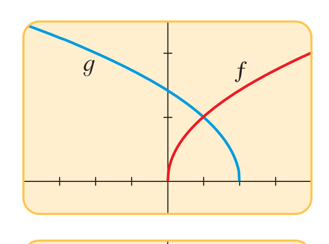
$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4$$

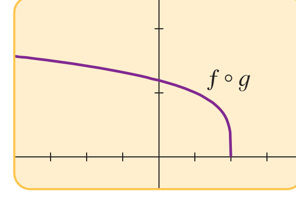
$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46$$

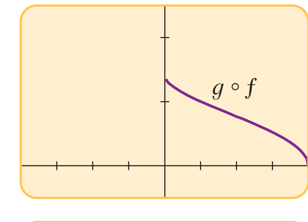
Ahora intente realizar los ejercicios 27 y 49 ■

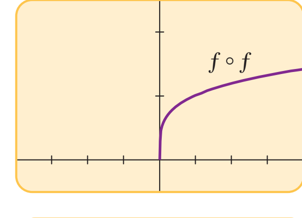
Del ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ significa que primero se aplica la función g y luego, en segundo lugar, se aplica f.

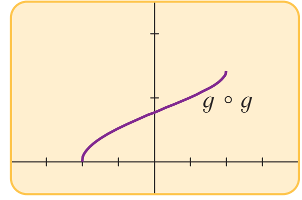
A continuación se muestran las gráficas de f y g del ejemplo 4, así como las de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones que son bastante diferentes de las funciones originales.











EJEMPLO 4 ■ Encontrar la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

a) $f \circ g$ ***b)*** $g \circ f$ ***c)*** $f \circ f$ ***d)*** $g \circ g$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g\\ &= f(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{\sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt[4]{2 - x}\end{aligned}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$

b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f\\ &= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt{2 - \sqrt{x}} && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida debemos tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debemos tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o $x \leq 4$. Entonces, tenemos $0 \leq x \leq 4$, de modo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

c)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f\\ &= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

d)
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g\\ &= g(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad significa que $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$ o $2 - x \leq 4$ o $x \geq -2$. Por tanto $-2 \leq x \leq 2$, de modo que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$.

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ f$ se encuentra al aplicar primero h, después g y luego f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 5 ■ Una composición de tres funciones

Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{Definición de } f \circ g \circ h\\ &= f(g(x + 3)) && \text{Definición de } h\\ &= f((x + 3)^{10}) && \text{Definición de } g\\ &= \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1} && \text{Definición de } f\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 59 ■

Hasta este punto hemos empleado la composición para construir funciones complicadas a partir de unas más sencillas, pero en cálculo es útil saber "descomponer" una función complicada en otras más sencillas como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 ■ Reconocer una composición de funciones

Dada $F(x) = \sqrt[4]{x + 9}$, encuentre funciones f y g tales que $F = f \circ g$.

SOLUCIÓN Como la fórmula de F dice que primero sumamos 9 y luego tomamos la raíz cuarta, hacemos

$$g(x) = x + 9 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x + 9) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt[4]{x + 9} && \text{Definición de } f \\ &= F(x) \end{aligned}$$

 **Ahora intente realizar el ejercicio 63** ■

■ Aplicaciones de la composición

Cuando se trabaja con funciones que modelan situaciones del mundo real nombramos a las variables usando letras que sugieren la cantidad que será modelada. Podemos usar t para el tiempo, d para distancia, V para el volumen, etcétera. Por ejemplo, si se bombea aire a un globo, entonces el radio R del globo es una función del volumen V de aire bombeado en el globo, $R = f(V)$. También el volumen V es una función del tiempo t que la bomba ha estado trabajando, por ejemplo, $V = g(t)$. Se deduce que el radio R es una función del tiempo t dado por $R = f(g(t))$.

EJEMPLO 7 ■ Una aplicación de composición de funciones

Un barco está navegando a 20 mi/h paralelo a un borde recto de la playa. El barco está a 5 millas de la playa y al mediodía pasa frente a un faro.

a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como función de d, la distancia que el barco ha navegado desde el mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.

b) Exprese d como función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; esto es, encuentre g para que $d = g(t)$.

c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

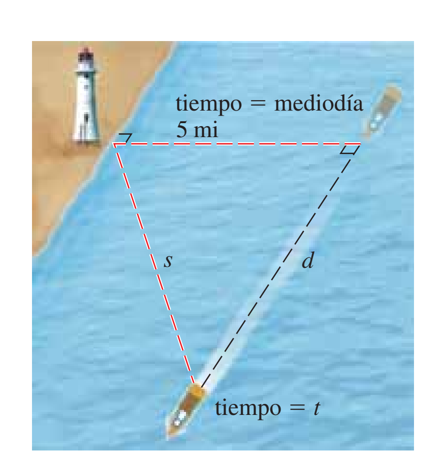


FIGURA 5

SOLUCIÓN Primero trazamos un diagrama como el de la figura 5.

a) Podemos relacionar las distancias s y d por el teorema de Pitágoras. Así s puede ser expresada como función de d por

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$$

distancia = rapidez × tiempo

b) Dado que el barco está navegando a 20 mi/h, la distancia d que ha recorrido es una función de t como sigue:

$$d = g(t) = 20t$$

c) Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(g(t)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(20t) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{25 + (20t)^2} && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

La función $f \circ g$ da la distancia del barco desde el faro como función del tiempo.

Ahora trate de hacer el ejercicio 77 ■

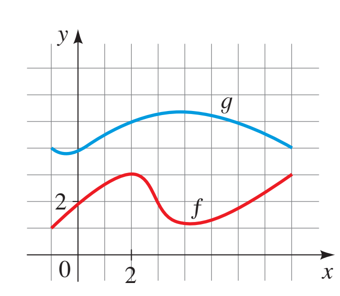
2.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. De las gráficas de f y g de la figura, encontramos

$(f+g)(2) =$ ______ $(f-g)(2) =$ ______

$(fg)(2) =$ ______ $\left(\frac{f}{g}\right)(2) =$ ______



2. Por definición, $(f \circ g)(x) =$ ______. Por tanto, si $g(2) = 5$ y $f(5) = 12$, entonces $(f \circ g)(2) =$ ______.

3. Si la regla de la función f es "sumar 1" y la regla de la función g es "multiplicar por 2", entonces la regla de $f \circ g$ es "______", y la regla de de $g \circ f$ es "______".

4. Podemos expresar algebraicamente las funciones del ejercicio 3 como $f(x) =$ ______ $g(x) =$ ______

$(f \circ g)(x) =$ ______ $(g \circ f)(x) =$ ______

5–6 ■ Sean f y g funciones.

5. ***a)*** La función $(f+g)(x)$ se define para todos los valores de x que están en los dominios tanto de ______ como de ______.

b) La función $(fg)(x)$ se define para todos los valores de x que están en los dominios tanto de ______ y ______.

c) La función $(f/g)(x)$ se define para todos los valores de x que están en los dominios tanto de ______ como de ______ y $g(x)$ no es igual a ______.

6. La composición $(f \circ g)(x)$ se define para todos los valores de x que están en el dominio de ______ y $g(x)$ que están en el dominio de ______.

HABILIDADES

7–16 ■ **Combinación de funciones** Encuentre $f+g$, $f-g$, fg y f/g y sus dominios.

7. $f(x) = x, \quad g(x) = 2x$

8. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x}$

9. $f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = x^2$

10. $f(x) = 3 - x^2, \quad g(x) = x^2 - 4$

11. $f(x) = 5 - x, \quad g(x) = x^2 - 3x$

12. $f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

13. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x+3}$

14. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

15. $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{4}{x+4}$

16. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

17–20 ■ **Dominio** Encuentre el dominio de la función.

17. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3 - x}$

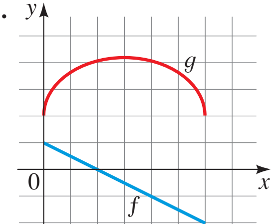
18. $f(x) = \sqrt{x+4} - \dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

19. $h(x) = (x-3)^{-1/4}$

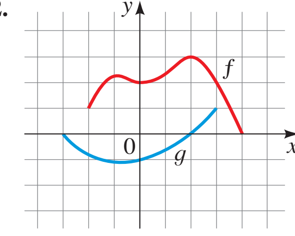
20. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

21–22 ■ **Adición gráfica** Use suma gráfica para trazar la gráfica de $f + g$.

21.



22.





23–26 ■ **Adición gráfica** Trace las gráficas de f, g y $f+g$ en una pantalla común para ilustrar la adición gráfica.

23. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad g(x) = \sqrt{1-x}$

24. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

25. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3$

26. $f(x) = \sqrt[4]{1-x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$

27–32 ■ **Evaluación de funciones compuestas** Use $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = 4 - x^2$ para evaluar la expresión.

27. ***a)*** $f(g(0))$ ***b)*** $g(f(0))$

28. ***a)*** $f(f(2))$ ***b)*** $g(g(3))$

29. ***a)*** $(f \circ g)(-2)$ ***b)*** $(g \circ f)(-2)$

30. ***a)*** $(f \circ f)(-1)$ ***b)*** $(g \circ g)(-1)$

31. ***a)*** $(f \circ g)(x)$ ***b)*** $(g \circ f)(x)$

32. ***a)*** $(f \circ f)(x)$ ***b)*** $(g \circ g)(x)$

33–38 ■ Composición usando una gráfica Use las gráficas dadas de f y g para evaluar la expresión.

33. $f(g(2))$
34. $g(f(0))$
35. $(g \circ f)(4)$
36. $(f \circ g)(0)$
37. $(g \circ g)(-2)$
38. $(f \circ f)(4)$

39–46 ■ Composición usando una tabla Use la tabla para evaluar la expresión.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	1	6	3
$g(x)$	3	5	6	2	1	4

39. $f(g(2))$
40. $g(f(2))$
41. $f(f(1))$
42. $g(g(2))$
43. $(f \circ g)(6)$
44. $(g \circ f)(2)$
45. $(f \circ f)(5)$
46. $(g \circ g)(2)$

47–58 ■ Composición de funciones Encuentre $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

47. $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 4x - 1$

48. $f(x) = 6x - 5, \quad g(x) = \dfrac{x}{2}$

49. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$

50. $f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

51. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = 2x + 4$

52. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

53. $f(x) = |x|, \quad g(x) = 2x + 3$

54. $f(x) = x - 4, \quad g(x) = |x + 4|$

55. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = 2x - 1$

56. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = x^2 - 4x$

57. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

58. $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

59–62 ■ Composición de tres funciones Encuentre $f \circ g \circ h$.

59. $f(x) = x - 1, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x - 1$

60. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^2 + 2$

61. $f(x) = x^4 + 1, \quad g(x) = x - 5, \quad h(x) = \sqrt{x}$

62. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

63–68 ■ Expresión de una función como una composición Exprese la función en la forma $f \circ g$.

63. $F(x) = (x - 9)^5$
64. $F(x) = \sqrt{x} + 1$

65. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
66. $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

67. $H(x) = |1 - x^3|$
68. $H(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

69–72 ■ Expresión de una función como una composición Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

69. $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
70. $F(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

71. $G(x) = (4 + \sqrt[3]{x})^9$
72. $G(x) = \dfrac{2}{(3 + \sqrt{x})^2}$

HABILIDADES Plus

73. Composición de funciones lineales Las gráficas de las funciones

$$f(x) = m_1x + b_1$$
$$g(x) = m_2x + b_2$$

son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. ¿Es la gráfica de $f \circ g$ una recta? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

74. Resolver una ecuación para una función desconocida Suponga que

$$g(x) = 2x + 1$$
$$h(x) = 4x^2 + 4x + 7$$

Encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tiene que realizar en la fórmula de g para obtener la fórmula h.) Ahora suponga que

$$f(x) = 3x + 5$$
$$h(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

Utilice el mismo tipo de razonamiento para encontrar una función g tal que $f \circ g = h$.

APLICACIONES

75–76 ■ Ingreso, costo y utilidad Un taller de imprenta hace calcomanías para adherir en los parachoques de los autos como parte de las campañas políticas. Si se hace un pedido de x calcomanías (donde $x < 10\,000$), entonces el precio por calcomanía es de $0.15 - 0.000002x$ dólares, y el costo total por producir el pedido es $0.095x - 0.0000005x^2$ dólares.

75. Use el hecho de que

ingreso = precio por artículo × número de artículos vendidos

para expresar $R(x)$, el ingreso por un pedido de x calcomanías como producto de dos funciones de x.

76. Use el hecho de que

utilidad = ingreso − costo

para expresar $P(x)$, la utilidad de un pedido de x calcomanías como diferencia de dos funciones de x.

77. Área de una onda Se deja caer una piedra en un lago, creando una onda circular que se mueve hacia fuera con una rapidez de 60 cm/s.

a) Encuentre una función g que modele el radio como función del tiempo.

b) Encuentre una función f que modele el área del círculo como función del radio.

c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?



78. Inflar un globo Un globo esférico está siendo inflado. El radio del globo está creciendo a razón de 1 cm/s.

a) Encuentre una función f que modele el radio como función del tiempo.

b) Encuentre una función g que modele el volumen como función del radio.

c) Encuentre $g \circ f$. ¿Qué representa esta función?

79. Área de un globo Un globo esférico de meteorología está inflándose. El radio del globo está creciendo a razón de 2 cm/s. Exprese el área superficial del globo como función del tiempo t (en segundos).

80. Descuentos múltiples Una persona tiene un cupón de 50 dólares del fabricante, válido para comprar un teléfono celular. La tienda donde compra el teléfono está ofreciendo 20% de descuento en todos los teléfonos celulares. Sea x el precio regular del aparato.

a) Suponga que sólo se aplica 20% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio regular x.

b) Suponga que sólo se aplica el cupón de descuento de 50 dólares. Encuentre una función g que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio x de la etiqueta.

c) Si se pueden usar el cupón y el descuento, entonces el precio de compra es $(f \circ g)(x)$ o $(g \circ f)(x)$, dependiendo del pedido en el que se aplique el precio. Encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. ¿Cuál composición da el precio más bajo?

81. Descuentos múltiples Un distribuidor de aparatos electrodomésticos anuncia 10% de descuento en todas sus lavadoras de ropa. Además, el fabricante ofrece un descuento de 100 dólares sobre la compra de una lavadora. Represente con x el precio de etiqueta de la lavadora.

a) Suponga que sólo se aplica 10% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra de la lavadora como función del precio x de etiqueta.

b) Suponga que sólo aplica el descuento de 100 dólares. Encuentre una función g que modele el precio de compra de la lavadora como función del precio x de etiqueta.

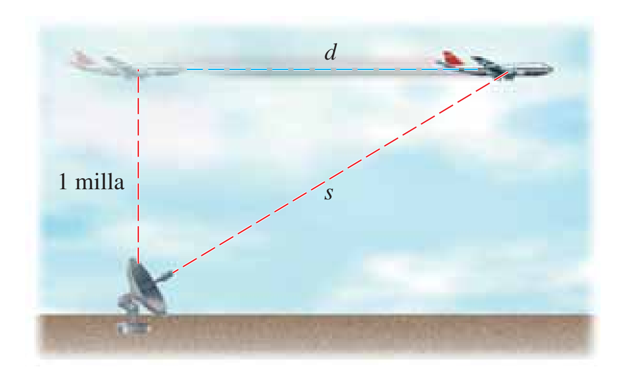
c) Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Qué representan estas funciones? ¿Cuál es el mejor acuerdo?

82. Trayectoria de un avión Un avión está volando con una rapidez de 350 mi/h a una altitud de 1 milla. El avión sobrevuela justo una estación de radar en el tiempo $t = 0$.

a) Exprese la distancia s (en millas) entre el avión y la estación de radar como función de la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado.

b) Exprese d como función del tiempo t (en horas) que el avión ha volado.

c) Use composición para expresar s como función de t.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

83. DESCUBRIMIENTO: Interés compuesto Una cuenta de ahorros gana 5% de interés compuesto anualmente. Si una persona invierte x dólares en esa cuenta, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5%; es decir,

$$A(x) = x + 0.05x = 1.05x$$

Encuentre

$$A \circ A$$

$$A \circ A \circ A$$

$$A \circ A \circ A \circ A$$

¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para lo que la persona obtendrá cuando componga n copias de A.

84. DISCUSIÓN: Composición de funciones pares e impares
Suponga que

$$h = f \circ g$$

Si g es una función par, ¿h es necesariamente par? Si g es impar, ¿h es impar? ¿Qué pasa si g es impar y f es impar? ¿Qué pasa si g es impar y f es par?

2.8 FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

■ Funciones uno a uno ■ Inversa de una función ■ Determinar la inversa de una función ■ Trazar la gráfica de la inversa de una función ■ Aplicaciones de funciones inversas

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por tanto, la inversa "deshace" o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno*.

■ Funciones uno a uno

Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la figura 1. Observe que f nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.

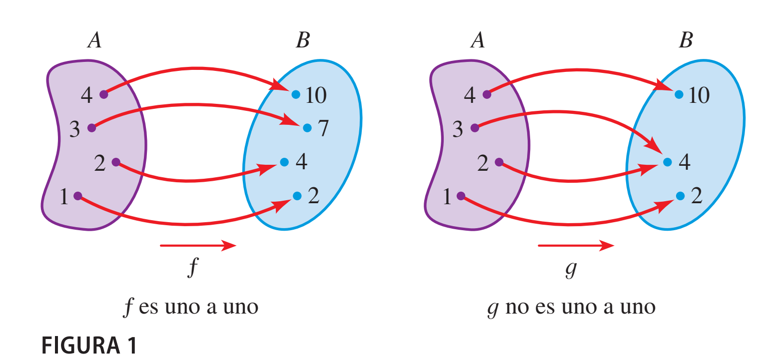


FIGURA 1

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición para una función uno a uno es esta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

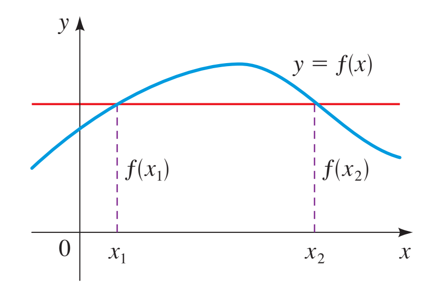


FIGURA 2 Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos de la figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

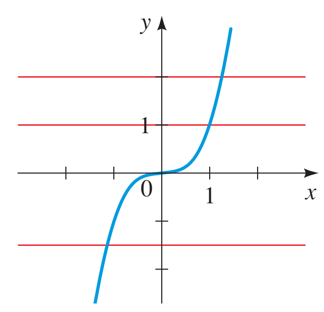


FIGURA 3 $f(x) = x^3$ es uno a uno.

EJEMPLO 1 ■ Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por tanto $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno.

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

Observe que la función f del ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede demostrar que *toda función creciente y toda función decreciente son uno a uno*.

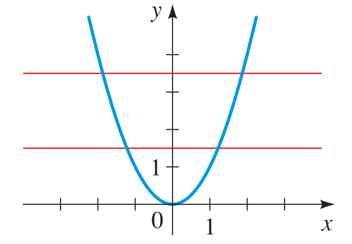


FIGURA 4 $g(x) = x^2$ no es uno a uno.

EJEMPLO 2 ■ Decidir si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y -1 tienen la misma imagen.

SOLUCIÓN 2 De la figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno.

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

Aun cuando la función g del ejemplo 2 no es uno a uno es posible restringir su dominio de manera que la función resultante sea uno a uno. De hecho, definimos

$$h(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede ver de la figura 5 y la prueba de la recta horizontal.

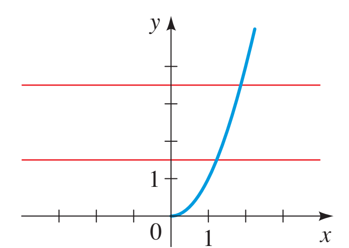


FIGURA 5 $h(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ es uno a uno.

EJEMPLO 3 ■ Demostrar que una función es uno a uno

Demuestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

SOLUCIÓN Suponga que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \qquad \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2)$$

$$3x_1 = 3x_2 \qquad \text{Reste 4}$$

$$x_1 = x_2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Por tanto, f es uno a uno.

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

■ Inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que tienen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

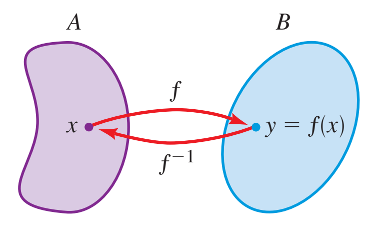


FIGURA 6

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

Esta definición dice que, si f toma x por y, entonces f^{-1} regresa y a x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas de la figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. De la definición tenemos

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$


No confunda con un exponente el -1 de f^{-1}.

$$f^{-1}(x) \quad \text{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

EJEMPLO 4 ■ Encontrar f^{-1} para valores específicos

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encontrar $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$ y $f^{-1}(-10)$.

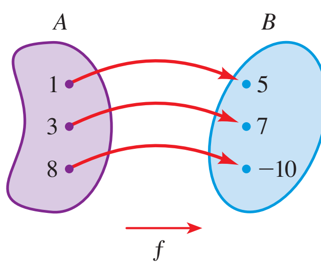
SOLUCIÓN De la definición de f^{-1} tenemos

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

La figura 7 muestra cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.



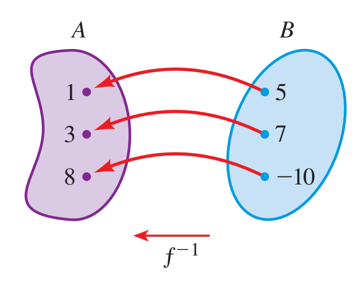


FIGURA 7

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

EJEMPLO 5 ■ Determinar los valores de una función inversa

Podemos encontrar valores específicos de una función inversa de una tabla o gráfica de la función misma.

a) La siguiente tabla da los valores de una función h. De la tabla vemos que $h^{-1}(8) = 3$, $h^{-1}(12) = 4$ y $h^{-1}(3) = 6$.

b) En la figura 8 se muestra una gráfica de una función f. En esta vemos que $f^{-1}(5) = 7$ y $f^{-1}(3) = 4$.

x	$h(x)$
2	5
3 ←	8
4 ←	12
5	1
6 ←	3
7	15

Determinar los valores de h^{-1} a partir de una tabla de h

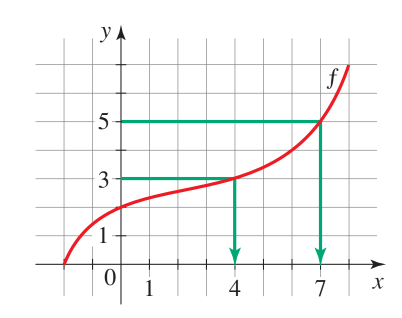


FIGURA 8 Determinar valores de f^{-1} de una gráfica de f

Ahora intente realizar los ejercicios 29 y 31 ■

Por definición, la función inversa f^{-1} deshace lo que f hace: si empezamos con x, aplicamos f y luego aplicamos f^{-1} llegamos otra vez a x, donde empezamos. Del mismo modo, f deshace lo que f^{-1} hace. En general, cualquier función que invierte el efecto de f en esta forma debe ser la inversa de f. Estas observaciones se expresan precisamente como sigue.

PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } B$$

Recíprocamente, cualquier función f^{-1} que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de f.

Estas propiedades indican que f es la función inversa de f^{-1}, de modo que decimos que f y f^{-1} son *inversas entre sí*.

EJEMPLO 6 ■ Verificar que dos funciones son inversas

Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

SOLUCIÓN Observe que el dominio y rango de f y de g es $\mathbb{R}$. Tenemos

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

Por tanto, por la propiedad de funciones inversas, f y g son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente dicen que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando son compuestas, se cancelan entre sí.

 **Ahora intente realizar el ejercicio 39** ■

Determinar la inversa de una función

Ahora examinemos la forma en que calculamos funciones inversas. Primero observamos de la definición de f^{-1} que

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

Por tanto, si $y = f(x)$ y si podemos despejar x de esta ecuación en términos de y, entonces debemos tener $f^{-1}(y)$. Si luego intercambiamos x y y tenemos $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

CÓMO DETERMINAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Observe que los pasos 2 y 3 se pueden invertir. En otras palabras podemos intercambiar x y y primero y luego despejar y en términos de x.

En el ejemplo 7 observe que f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Multiplique por 3, luego reste 2", mientras que f^{-1} es la regla "Sume 2, luego divida entre 3".

EJEMPLO 7 ■ Encontrar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la propiedad de la función inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 2) = \frac{(3x - 2) + 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x + 2}{3}\right) = 3\left(\frac{x + 2}{3}\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \quad ✓$$

A continuación despejamos x de esta ecuación:

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$

$$x = \frac{y + 2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Finalmente intercambiamos x y y:

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

Por tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 49 ■

EJEMPLO 8 ■ Encontrar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 2}{2}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (x^5 - 3)/2$ y despejamos x.

$$y = \frac{x^5 - 3}{3} \qquad \text{Ecuación que define la función}$$

$$2y = x^5 - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x^5 = 2y + 3 \qquad \text{Sume 3 (e intercambie los lados)}$$

$$x = (2y + 3)^{1/5} \qquad \text{Tome la raíz quinta de cada lado}$$

Luego intercambiamos x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

En el ejemplo 8 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2", mientras que f^{-1} es la regla "Multiplique por 2, sume 3, luego saque la raíz quinta".

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la propiedad de la función inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x^5 + 2}{3}\right) = \left[2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3\right]^{1/5} = (x^5 - 3 + 3)^{1/5} = (x^5)^{1/5} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f((2x + 3)^{1/5}) = \frac{[(2x + 3)^{1/5}]^5 - 3}{2} = \frac{2x + 3 - 3}{2} = \frac{2x}{3} = x \quad ✓$$

Una **función racional** es una función definida por una expresión racional. En el siguiente ejemplo encontramos la inversa de una función racional.

Las funciones racionales se estudian en la sección 3.6.

EJEMPLO 9 ■ Determinar la inversa de una función racional

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (2x + 3)/(x - 1)$ y despejamos x.

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \qquad \text{Ecuación que define la función}$$

$$y(x - 1) = 2x + 3 \qquad \text{Multiplique por } x - 1$$

$$yx - y = 2x + 3 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$yx - 2x = y + 3 \qquad \text{Lleve los términos en } x \text{ al lado izquierdo}$$

$$x(y - 2) = y + 3 \qquad \text{Factorice } x$$

$$x = \frac{y + 3}{y - 2} \qquad \text{Divida entre } y - 2$$

Por tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

Trazar la gráfica de la inversa de una función

El principio de intercambiar x y y para determinar la función inversa también nos da un método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero obtenemos el punto (b, a) a partir del punto (a, b) al reflejar en la recta $y = x$ (véase la figura 9). Por tanto, como lo muestra la figura 10, el enunciado siguiente es verdadero.

> La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

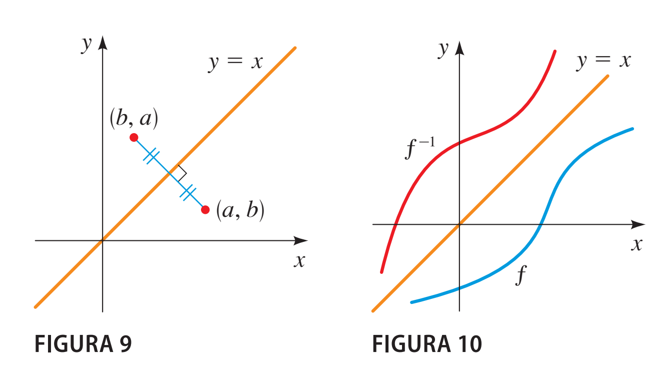


FIGURA 9 FIGURA 10

EJEMPLO 10 ■ Trazar la gráfica de la inversa de una función

a) Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-2}$.

b) Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre la ecuación de f^{-1}.

FIGURA 11

SOLUCIÓN

a) Usando las transformaciones de la sección 2.6 trazamos la gráfica de $y = \sqrt{x-2}$ al encontrar los puntos de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1*c*) de la sección 2.2) y al moverla a la derecha 2 unidades.

b) La gráfica de f^{-1} se obtiene de la gráfica de f del inciso *a*) al reflejarla en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 11.

c) De la ecuación $y = \sqrt{x-2}$ despeje x, observando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x - 2 = y^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado cada uno de los lados}$$

$$x = y^2 + 2 \qquad y \geq 0 \qquad \text{Sume 2}$$

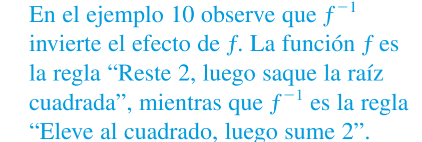
Intercambie x y y:

$$y = x^2 + 2 \qquad x \geq 0$$

Por tanto

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2 \qquad x \geq 0$$

Esta expresión muestra que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$, por la gráfica que se muestra en la figura 11, esto parece razonable.



En el ejemplo 10 observe que f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Reste 2, luego saque la raíz cuadrada", mientras que f^{-1} es la regla "Eleve al cuadrado, luego sume 2".

Ahora intente realizar el ejercicio 73 ■

Aplicaciones de funciones inversas

Cuando se trabaja con funciones que modelan situaciones del mundo real identificamos las variables mediante letras que sugieren la cantidad a ser modelada. Por ejemplo, podemos usar t para el tiempo, d para la distancia, V para el volumen, etcétera. Cuando

se usan funciones inversas seguimos dicha convención. Por ejemplo, supongamos que la variable R es una función de la variable N, por ejemplo, $R = f(N)$. Entonces $f^{-1}(R) = N$. Así, la función f^{-1} define a N como una función de R.

EJEMPLO 11 ■ Una función inversa

En una pizzería local la especial del día está en 12 dólares para una pizza de queso normal más \$2 por cada ingrediente adicional.

***a*)** Encuentre una función f que modele el precio de una pizza con n ingredientes.

***b*)** Encuentre la inversa de una función f. ¿Qué representa f^{-1}?

***c*)** Si una pizza cuesta 22 dólares, ¿cuántos ingredientes tiene?

SOLUCIÓN Observe que el precio p de una pizza es una función del número n de ingredientes.

***a*)** El precio de una pizza con n ingredientes está dada por la función

$$f(n) = 12 + 2n$$

***b*)** Para encontrar la función inversa primero se escribe $p = f(n)$, donde usamos la letra p en lugar de nuestro habitual y porque $f(n)$ es el precio de la pizza. Tenemos

$$p - 12 = 2n$$

Luego se despeja n:

$$p = 12 + 2n$$
$$p - 12 = 2n$$
$$n = \frac{p - 12}{2}$$

Así $n = f^{-1}(p) = \dfrac{p - 12}{2}$. La función f^{-1} da el número de n de ingredientes por una pizza con precio p.

***c*)** Tenemos $n = f^{-1}(22) = (22 - 12)/2 = 5$. Por lo que la pizza tiene cinco ingredientes.



2.8 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una función f es uno a uno si diferentes entradas producen ________ salidas. Se puede saber por la gráfica que una función es uno a uno si se usa la prueba de la ____________.

2. ***a*)** Para que una función tenga una inversa debe ser ______. Entonces, ¿cuál de las siguientes funciones tiene inversa?

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3$$

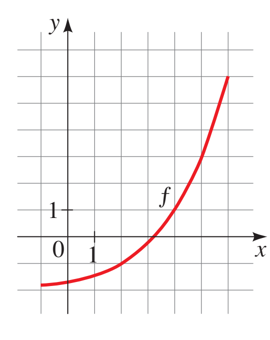
***b*)** ¿Cuál es la inversa de la función que usted escogió en el inciso *a*)?

3. Una función f tiene la siguiente descripción verbal: "Multiplique por 3, sume 5 y luego tome la tercera potencia del resultado".

***a*)** Escriba una descripción verbal para f^{-1}.

***b*)** Encuentre fórmulas algebraicas que expresen f y f^{-1} en términos de la entrada x.

4. Se da una gráfica de una función f. ¿f tiene inversa? Si es así, encuentre $f^{-1}(1) =$ ________ y $f^{-1}(3) =$ ________.



5. Si el punto (3, 4) está en la gráfica de la función f, entonces el punto (____, ____) está sobre la gráfica de f^{-1}.

6. *¿Verdadero o falso?*

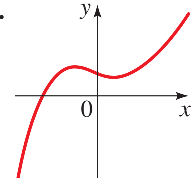
a) Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es lo mismo que $\dfrac{1}{f(x)}$.

b) Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(f(x)) = x$.

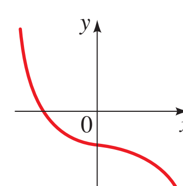
HABILIDADES

7–12 ■ ¿Función uno a uno? Se da la gráfica de una función f. Determine si f es uno a uno.

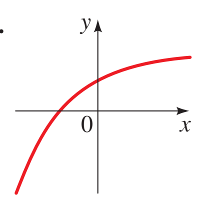
7.



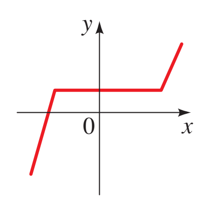
8.



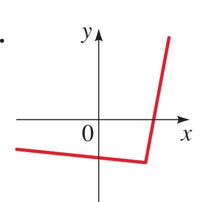
9.



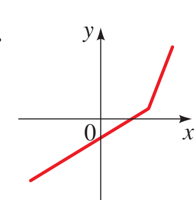
10.



11.



12.



13–24 ■ ¿Función uno a uno? Determine si la función es uno a uno.

13. $f(x) = -2x + 4$

14. $f(x) = 3x - 2$

15. $g(x) = \sqrt{x}$

16. $g(x) = |x|$

17. $h(x) = x^2 - 2x$

18. $h(x) = x^3 + 8$

19. $f(x) = x^4 + 5$

20. $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \le x \le 2$

21. $r(t) = t^6 - 3, \quad 0 \le t \le 5$

22. $r(t) = t^4 - 1$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

25–28 ■ Encontrar valores de una función inversa Suponga que f es una función uno a uno.

25. a) Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.

b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

26. a) Si $f(5) = 18$, encuentre $f^{-1}(18)$.

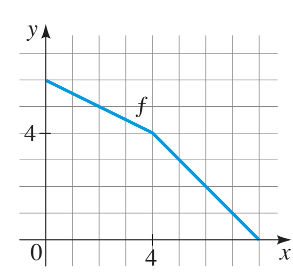
b) Si $f^{-1}(4) = 2$, encuentre $f(2)$.

27. Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$.

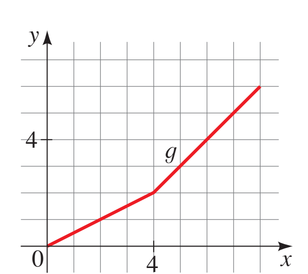
28. Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \ge -2$, encuentre $g^{-1}(5)$.

29–30 ■ Encontrar valores de una inversa a partir de una gráfica Use la gráfica para encontrar los valores indicados.

29. a) $f^{-1}(2)$ **b)** $f^{-1}(5)$ **c)** $f^{-1}(6)$



30. a) $g^{-1}(2)$ **b)** $g^{-1}(5)$ **c)** $g^{-1}(6)$



31–36 ■ Determinar valores de una inversa utilizando una tabla Se da una tabla de valores para una función uno a uno. Encuentre los valores indicados.

31. $f^{-1}(5)$

32. $f^{-1}(0)$

33. $f^{-1}(f(1))$

34. $f(f^{-1}(6))$

35. $f^{-1}(f^{-1}(1))$

36. $f^{-1}(f^{-1}(0))$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	6	2	5	0	1

37–48 ■ Propiedad de función inversa Utilice la propiedad de la función inversa para demostrar que f y g son inversas entre sí.

37. $f(x) = x - 6; \quad g(x) = x + 6$

38. $f(x) = 3x; \quad g(x) = \dfrac{x}{3}$

39. $f(x) = 3x + 4; \quad g(x) = \dfrac{x - 4}{3}$

40. $f(x) = 2 - 5x; \quad g(x) = \dfrac{2 - x}{5}$

41. $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

42. $f(x) = x^5; \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

43. $f(x) = x^2 - 9, \quad x \ge 0; \quad g(x) = \sqrt{x + 9}, \quad x \ge -9$

44. $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = (x - 1)^{1/3}$

45. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

46. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2;$
$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2$

47. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}; \quad g(x) = \dfrac{2x + 2}{x - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{x - 5}{3x + 4}; \quad g(x) = \dfrac{5 + 4x}{1 - 3x}$

49–70 ■ Encontrar la función inversa Encuentre la función inversa de f.

49. $f(x) = 3x + 5$
50. $f(x) = 7 - 5x$
51. $f(x) = 5 - 4x^3$
52. $f(x) = 3x^3 + 8$
53. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$
54. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$
55. $f(x) = \dfrac{x}{x + 4}$
56. $f(x) = \dfrac{3x}{x - 2}$
57. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 7}$
58. $f(x) = \dfrac{4x - 2}{3x + 1}$
59. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{1 - 5x}$
60. $f(x) = \dfrac{3 - 4x}{8x - 1}$
61. $f(x) = 4 - x^2, \quad x \ge 0$
62. $f(x) = x^2 + x, \quad x \ge -\frac{1}{2}$
63. $f(x) = x^6, \quad x \ge 0$
64. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$
65. $f(x) = \dfrac{2 - x^3}{5}$
66. $f(x) = (x^5 - 6)^7$
67. $f(x) = \sqrt{5 + 8x}$
68. $f(x) = 2 + \sqrt{3 + x}$
69. $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$
70. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2$

71–74 ■ Trazar la gráfica de una función inversa Se da una función f. ***a)*** Trace la gráfica de f. ***b)*** Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1}. ***c)*** Encuentre f^{-1}.

71. $f(x) = 3x - 6$
72. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \ge 0$
73. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
74. $f(x) = x^3 - 1$


75–80 ■ Funciones uno a uno a partir de una gráfica Trace la gráfica de f, y úsela para determinar si la función es uno a uno.

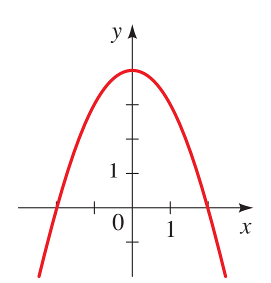
75. $f(x) = x^3 - x$
76. $f(x) = x^3 + x$
77. $f(x) = \dfrac{x + 12}{x - 6}$
78. $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$
79. $f(x) = |x| - |x - 6|$
80. $f(x) = x \cdot |x|$


81–84 ■ Determinar funciones inversas Se da una función uno a uno. ***a)*** Encuentre la inversa de la función. ***b)*** Trace la gráfica de la función y su inversa en la misma pantalla para verificar que las gráficas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

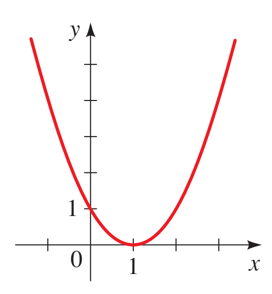
81. $f(x) = 2 + x$
82. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$
83. $g(x) = \sqrt{x + 3}$
84. $g(x) = x^2 + 1, \quad x \ge 0$

85–88 ■ Restringir el dominio La función dada no es uno a uno. Restrinja su dominio para que la función resultante *sea* uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta.)

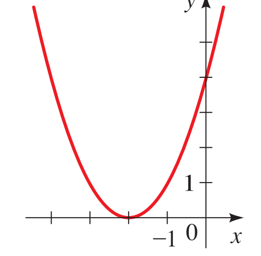
85. $f(x) = 4 - x^2$



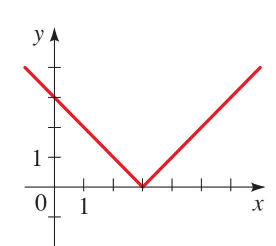
86. $g(x) = (x - 1)^2$



87. $h(x) = (x + 2)^2$

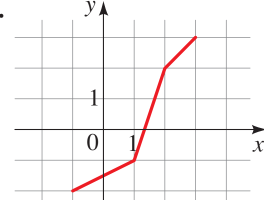


88. $k(x) = |x - 3|$

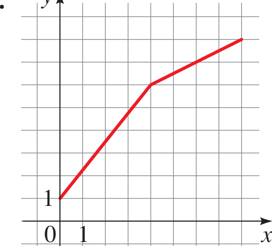


89–90 ■ Trazar la gráfica de una función inversa Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1}.


89.



90.



HABILIDADES Plus


91–92 ■ Funciones que son su propia inversa Si una función f es su propia inversa, entonces la gráfica de f es simétrica respecto a la recta $y = x$. ***a)*** Trace la gráfica de la función dada. ***b)*** ¿La gráfica indica que f y f^{-1} son la misma función? ***c)*** Encuentre la función f^{-1}. Utilice su resultado para verificar la respuesta del inciso *b*).

91. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
92. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

APLICACIONES

93. Costo de una pizza Marcello's Pizza cobra un precio base de 16 dólares por una pizza grande más \$1.50 por cada ingrediente adicional.

a) Encuentre una función f que modele el precio de una pizza con n ingredientes.
b) Encuentre la inversa de la función f. ¿Qué representa f^{-1}?
c) ¿Cuántos ingredientes tiene una pizza de 25 dólares?

94. Tarifa por un servicio Por sus servicios, un investigador privado requiere una tarifa de anticipo de 500 dólares más 80 dólares por hora. Represente con x el número de horas que el investigador emplea trabajando en un caso.

a) Encuentre una función que modele la tarifa del investigador como función de x.

b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

c) Encuentre $f^{-1}(1\,220)$. ¿Qué representa su respuesta?

95. Ley de Torricelli Un tanque contiene 100 galones de agua que se drena por una fuga del fondo y hace que el tanque se vacíe en 40 minutos. De acuerdo con la Ley de Torricelli el volumen del agua restante en el tanque después de t minutos está dado por la función

$$V = f(t) = 100\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

a) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

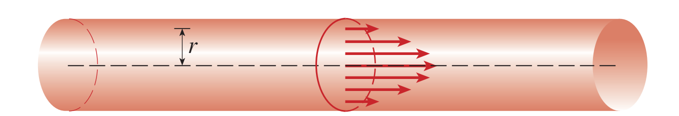
b) Encuentre $f^{-1}(15)$. ¿Qué representa su respuesta?

96. Flujo sanguíneo Cuando la sangre se mueve en una vena o arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que aumenta la distancia r desde el eje central (véase la figura siguiente). Para una arteria con radio 0.5 cm, v (en cm/s) está dada como función de r (en cm) por

$$v = g(r) = 18\,500(0.25 - r^2)$$

a) Encuentre g^{-1}. ¿Qué representa g^{-1}?

b) Encuentre $g^{-1}(30)$. ¿Qué representa su respuesta?



97. Función de demanda La cantidad de una mercancía que se vende recibe el nombre de *demanda* de esa mercancía. La demanda D de cierta mercancía es función del precio dado por

$$D = f(p) = -3p + 150$$

a) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

b) Encuentre $f^{-1}(30)$. ¿Qué representa su respuesta?

98. Escalas de temperatura La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por

$$F = g(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

a) Encuentre g^{-1}. ¿Qué representa g^{-1}?

b) Encuentre $g^{-1}(86)$. ¿Qué representa su respuesta?

99. Tasas de cambio El valor relativo de las monedas en circulación fluctúa a diario. Cuando se redactó este problema, un dólar canadiense valía 0.9766 dólares de Estados Unidos.

a) Encuentre una función f que dé el valor en dólares de Estados Unidos $f(x)$ de x dólares canadienses.

b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

c) ¿Cuánto dinero canadiense valdrían 12 250 dólares de Estados Unidos?

100. Impuesto sobre la renta En cierto país el impuesto sobre ingresos iguales o menores a €20 000 es 10%. Para ingresos mayores a €20 000, el impuesto es €2 000 más 20% de la cantidad que pase de €20 000.

a) Encuentre una función f que dé el impuesto sobre la renta en un ingreso x. Exprese f como función definida por tramos.

b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

c) ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de €10 000?

101. Descuentos múltiples Un distribuidor de autos anuncia 15% de descuento en todos sus autos nuevos. Además, el fabricante ofrece un descuento de 1 000 dólares en la compra de un auto nuevo. Sea que x represente el precio de etiqueta del auto.

a) Suponga que se aplica sólo 15% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta x.

b) Suponga que se aplica sólo el descuento de 1 000 dólares. Encuentre una función g que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta x.

c) Encuentre una fórmula para $H = f \circ g$.

d) Encuentre H^{-1}. ¿Qué representa H^{-1}?

e) Encuentre $H^{-1}(13\,000)$. ¿Qué representa su respuesta?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

102. DISCUSIÓN: Determinar cuándo una función lineal tiene inversa Para que la función lineal $f(x) = mx + b$ sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto acerca de su pendiente? Si es uno a uno, encuentre su inversa. ¿La inversa es lineal? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

103. DISCUSIÓN: Determinar una inversa "mentalmente" En las notas al margen de esta sección indicamos que se puede encontrar la inversa de una función con sólo invertir las operaciones que forman la función. Por ejemplo, en el ejemplo 7 vimos que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \qquad \text{es} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$$

porque la "inversa" de "Multiplique por 3 y reste 2" es "Sume 2 y divida entre 3". Use el mismo procedimiento para encontrar la inversa de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{5}$ *b*) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ *d*) $f(x) = (2x - 5)^3$

Ahora considere otra función:

$$f(x) = x^3 + 2x + 6$$

¿Será posible usar la misma clase de inversión simple de operaciones para encontrar la inversa de esta función? Si es así, hágalo. Si no, explique qué es diferente respecto a esta función que dificulta este ejercicio.

104. DEMOSTRACIÓN: La función identidad La función $I(x) = x$ se llama **función identidad**. Demuestre que para cualquier función f tenemos $f \circ I = f$, $I \circ f = f$ y $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. (Esto significa que para funciones y composición la función identidad I se comporta del mismo modo que el número 1 se comporta para números reales y multiplicación.)

105. DISCUSIÓN: Despejar una función incógnita de una ecuación En los ejercicios 69-72 de la sección 2.7 se le pidió resolver ecuaciones en donde las incógnitas eran funciones. Ahora que ya sabemos de inversas y de la función identidad (vea el ejercicio 104) podemos usar álgebra para resolver dichas ecuaciones. Por ejemplo, para despejar la función incógnita f de $f \circ g = h$ efectuamos los siguientes pasos:

$f \circ g = h$	Problema: despejar f
$f \circ g \circ g^{-1} = h \circ g^{-1}$	Componer con g^{-1} en la derecha
$f \circ I = h \circ g^{-1}$	Porque $g \circ g^{-1} = I$
$f = h \circ g^{-1}$	Porque $f \circ I = f$

Entonces la solución es $f = h \circ g^{-1}$. Use esta técnica para despejar la función incógnita indicada de la ecuación $f \circ g = h$.

a) Despeje f, donde $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$.

b) Despeje g, donde $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$.

CAPÍTULO 2 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Notación de función (p. 149)

Si una función está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y denota la **entrada**; y es la variable dependiente y denota la **salida**; el **dominio** es el conjunto de todas las posibles entradas x; el **rango** es el conjunto de todos y posibles salidas y.

Cambio neto (p. 151)

El **cambio neto** en el valor de la función f entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{cambio neto} = f(b) - f(a)$$

Gráfica de una función (p. 159)

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ que define a f.

La prueba de la recta vertical (p. 164)

Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si no hay recta vertical que cruce la gráfica más de una vez.

Funciones crecientes y decrecientes (p. 174)

Una función f es **creciente** en un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$ en el intervalo.

Una función f es **decreciente** en un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$ en el intervalo.

Valores de máximos y mínimos locales (p. 176)

El valor de la función $f(a)$ es un **máximo local** de la función f si $f(a) \geq f(x)$ para toda x cerca de a. En este caso decimos también que f tiene un máximo local en $x = a$.

El valor de la función $f(b)$ es un **mínimo local** de la función f si $f(b) \leq f(x)$ para toda x cerca de b. En este caso decimos que f tiene un **mínimo local** en $x = b$.

Razón de cambio promedio (p. 184)

La **razón de cambio promedio** de la función f entre $x = a$ y $x = b$ es la pendiente de la recta **secante** entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Funciones lineales (pp. 191-192)

Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de f es una recta con pendiente a y punto de intersección y, b. La razón de cambio promedio de f tiene el valor constante a entre dos puntos cualesquiera.

$$a = \text{pendiente de la gráfica de } f = \text{razón de cambio de } f$$

Desplazamientos de gráficas vertical y horizontal (pp. 198-199)

Sea c una constante positiva.

Para trazar la gráfica $y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ **hacia arriba** c unidades.

Para trazar la gráfica $y = f(x) - c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ **hacia abajo** c unidades.

Para trazar la gráfica $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ **hacia la derecha** c unidades.

Para trazar la gráfica $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ **hacia la izquierda** c unidades.

Reflexión de gráficas (p. 201)

Para trazar la gráfica de $y = -f(x)$, **refleje** la gráfica de $y = f(x)$ en el **eje *x***.

Para trazar la gráfica $y = f(-x)$, **refleje** la gráfica de $y = f(x)$ en el **eje *y***.

Estiramiento y reducción vertical y horizontal de las gráficas (pp. 202, 203)

Si $c > 1$, entonces para trazar la gráfica de $y = cf(x)$, **estire** la gráfica de $y = f(x)$ **verticalmente** por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, entonces para trazar la gráfica de $y = cf(x)$, **reduzca** la gráfica de $y = f(x)$ **verticalmente** por un factor de c.

Si $c > 1$, entonces para trazar la gráfica de $y = f(cx)$, **reduzca** la gráfica de $y = f(x)$ **horizontalmente** por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, entonces para trazar la gráfica de $y = f(cx)$, **estire** la gráfica de $y = f(x)$ **horizontalmente** por un factor de $1/c$.

Funciones pares e impares (p. 204)

Una función f es

par si $f(-x) = f(x)$

impar si $f(-x) = -f(x)$

para toda x en el dominio de f.

Composición de funciones (p. 213)

Dadas dos funciones f y g, la **composición** de f y g es la función $f \circ g$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El **dominio** de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x para los cuales se definen $g(x)$ y $f(g(x))$.

Funciones uno a uno (p. 219)

Una función f es **uno a uno** si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cuando x_1 y x_2 son elementos *diferentes* del dominio de f.

Prueba recta horizontal (p. 219)

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

Inversa de una función (p. 220)

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B.

La **inversa** de f es la función f^{-1} definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

La función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A.

Las funciones f y f^{-1} satisfacen las siguientes **propiedades de cancelación**:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } B$$

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Defina cada concepto.

a) Función

b) Dominio y rango de una función

c) Gráfica de una función

d) Variables independientes y dependientes

2. Describa las cuatro maneras de representar una función.

3. Trace a mano las gráficas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = x^2$ *b*) $g(x) = x^3$

c) $h(x) = |x|$ *d*) $k(x) = \sqrt{x}$

4. ¿Qué es una función definida en tramos? Dé un ejemplo.

5. *a*) ¿Cuál es la prueba de la recta vertical y para qué sirve?

b) ¿Cuál es la prueba de la recta horizontal y para qué sirve?

6. Define cada concepto y dé un ejemplo de cada uno.

a) Función creciente

b) Función decreciente

c) Función constante

7. Suponga que sabemos que el punto $(3, 5)$ es un punto en la gráfica de una función f. Explique cómo encontrar $f(3)$ y $f^{-1}(5)$.

8. ¿Qué significa decir que $f(4)$ es un valor máximo local de f?

9. Explique cómo encontrar la razón de cambio promedio de una función f entre $x = a$ y $x = b$.

10. *a*) ¿Cuál es la pendiente de una función lineal? ¿Cómo encontrarla? ¿Cuál es la razón de cambio de una función lineal?

b) ¿La razón de cambio de una función lineal es una constante? Explique.

c) Dé un ejemplo de una función lineal y trace su gráfica.

11. Suponga que se da la gráfica de f. Escriba una ecuación para cada gráfica que se obtenga de la gráfica de f como sigue.

a) Desplazar 3 unidades hacia arriba

b) Desplazar 3 unidades hacia abajo

c) Desplazar 3 unidades a la derecha

d) Desplazar 3 unidades a la izquierda

e) Reflejar en el eje x

f) Reflejar en el eje y

g) Estirar verticalmente en un factor de 3

h) Reducir verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$

i) Estirar verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$

j) Estirar verticalmente en un factor de 3

12. *a*) ¿Qué es una función par? ¿Qué indica una función par al observar su gráfica? Dé un ejemplo de una función par.

b) ¿Qué es una función impar? ¿Qué indica una función impar al observar su gráfica? Dé un ejemplo de una función impar.

13. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B. ¿Cuáles son los dominios de las funciones siguientes?

a) Dominio de $f + g$

b) Dominio de fg

c) Dominio de f/g

14. *a*) ¿Cómo está definida la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

b) Si $g(a) = b$ y $f(b) = c$, entonces explique cómo encontrar $(f \circ g)(a)$.

15. ***a***) ¿Qué es una función uno a uno?

b) ¿Cómo se puede saber de la gráfica de una función si es uno a uno?

c) Suponga que f es uno a uno con dominio A y rango B. ¿Cómo está definida la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio y el rango de f^{-1}?

d) Si se da una fórmula para f, ¿cómo encontramos una fórmula para f^{-1}? Encuentre la inversa de la función $f(x) = 2x$.

e) Si se da la gráfica de f, ¿cómo encontramos la gráfica de la función inversa f^{-1}?

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–2 ■ Notación de función Se da una descripción verbal de una función f. Encuentre una fórmula que exprese f en notación de funciones.

1. "Elevar al cuadrado, luego restar 5."

2. "Dividir entre 2, luego sumar 9."

3–4 ■ Función en palabras Se da una fórmula para una función f. Dé una descripción verbal de la función.

3. $f(x) = 3(x + 10)$ **4.** $f(x) = \sqrt{6x - 10}$

5–6 ■ Tabla de valores Complete la tabla de valores para la función dada.

5. $g(x) = x^2 - 4x$ **6.** $h(x) = 3x^2 + 2x - 5$

x	$g(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$h(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

7. Costo de impresión Un editor estima que el costo $C(x)$ de imprimir una serie de x ejemplares de cierto libro de texto de matemáticas está dado por la función $C(x) = 5000 + 30x - 0.001x^2$.

a) Encuentre $C(1\,000)$ y $C(10\,000)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso *a*)?

c) Encuentre $C(0)$. ¿Qué representa este número?

d) Encuentre el cambio neto y la razón de cambio promedio del costo C entre $x = 1\,000$ y $x = 10\,000$.

8. Ganancias Reynalda trabaja como vendedora en el área de electrónica de una tienda departamental. Ella gana un salario semanal fijo más una comisión basada en el precio al menudeo de los artículos que venda. Si vende mercancía con valor de x dólares su ganancia de la semana está dada por la función $E(x) = 400 + 0.03x$.

a) Encuentre $E(2\,000)$ y $E(15\,000)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso *a*)?

c) Encuentre $E(0)$. ¿Qué representa este número?

d) Encuentre el cambio neto y la razón de cambio promedio para sus ganancias E entre $x = 2\,000$ y $x = 15\,000$.

e) De la fórmula para E, determine qué porcentaje gana Reynalda sobre los artículos que vende.

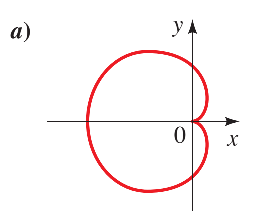
9–10 ■ Evaluar funciones Evalúe la función en los valores indicados.

9. $f(x) = x^2 - 4x + 6$; $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(\mathrm{a})$, $f(-a)$, $f(x = 1)$, $f(2x)$

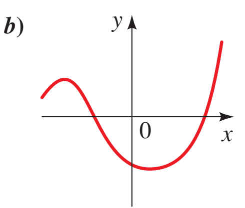
10. $f(x) = 4 - \sqrt{3x - 6}$; $f(5)$, $f(9)$, $f(a + 2)$, $f(-x)$, $f(x^2)$

11. Funciones dadas por una gráfica ¿Cuáles de las siguientes figuras son gráficas de funciones? ¿Cuáles de las funciones son uno a uno?

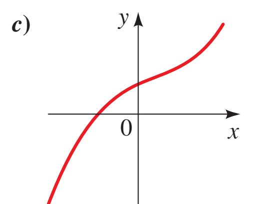
a)



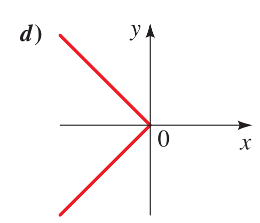
b)



c)



d)



12. Obtener información de una gráfica Se da la gráfica de una función f.

a) Encuentre $f(-2)$ y $f(2)$.

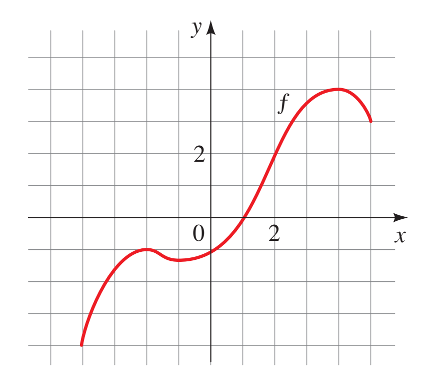
b) Encuentre el cambio neto y la razón de cambio promedio f entre $x = -2$ y $x = 2$.

c) Encuentre el dominio y el rango de f.

d) ¿En qué intervalos f es creciente? ¿En qué intervalos f es decreciente?

e) ¿Cuáles son los valores máximos locales de f?

f) ¿Es f uno a uno?



13–14 ■ Dominio y rango Encuentre el dominio y rango de la función.

13. $f(x) = \sqrt{x + 3}$ **14.** $F(t) = t^2 + 2t + 5$

15–22 ■ Dominio Encuentre el dominio de la función.

15. $f(x) = 7x + 15$ **16.** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

17. $f(x) = \sqrt{x + 4}$ **18.** $f(x) = 3x - \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2}$ **20.** $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$

21. $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$ **22.** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x + 1}}{\sqrt[3]{2x} + 2}$

23–38 ■ Trazar gráficas de funciones Trace la gráfica de la función. Utilice transformaciones de funciones siempre que sea posible.

23. $f(x) = 1 - 2x$

24. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5), \quad 2 \le x \le 8$

25. $f(x) = 3x^2$ **26.** $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

27. $f(x) = 2x^2 - 1$ **28.** $f(x) = -(x - 1)^4$

29. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ **30.** $f(x) = 1 - \sqrt{x + 2}$

31. $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ **32.** $f(x) = \sqrt[3]{-x}$

33. $f(x) = -|x|$ **34.** $f(x) = |x + 1|$

35. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **36.** $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^3}$

37. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

39–42 ■ Ecuaciones que representan funciones Determine si la ecuación define a y como una función de x.

39. $x + y^2 = 14$ **40.** $3x - \sqrt{y} = 8$

41. $x^3 - y^3 = 27$ **42.** $2x = y^4 - 16$



43–44 ■ Trazar gráficas de funciones Determine qué rectángulo de vista produce la gráfica más apropiada de la función.

43. $f(x) = 6x^3 - 15x^2 + 4x - 1$

i) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

ii) $[-8, 8]$ por $[-8, 8]$

iii) $[-4, 4]$ por $[-12, 12]$

iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

44. $f(x) = \sqrt{100 - x^3}$.

i) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

ii) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

iii) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$

iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

45–48 ■ Dominio y rango a partir de una gráfica Se da una función f. ***a)*** utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de f. ***b)*** Encuentre el dominio y el rango de f a partir de la gráfica.

45. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

46. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 3}$

47. $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$

48. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 6$



49–50 ■ Obtener información a partir de una gráfica Trace la gráfica de la función f, y determine los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

49. $f(x) = x^3 - 4x^2$ **50.** $f(x) = |x^4 - 16|$

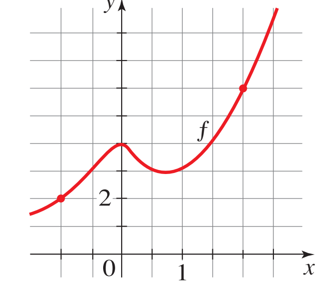
51–56 ■ Cambio neto y razón de cambio promedio Se da una función (ya sea numéricamente, gráficamente o algebraicamente). Encuentre el cambio neto y la razón de cambio promedio de la función entre los valores indicados.

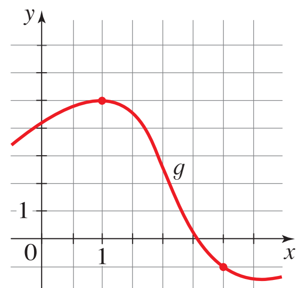
51. Entre $x = 4$ y $x = 8$ **52.** Entre $x = 10$ y $x = 30$

x	$f(x)$
2	14
4	12
6	12
8	8
10	6

x	$g(x)$
0	25
10	−5
20	−2
30	30
40	0

53. Entre $x = -1$ y $x = 2$ **54.** Entre $x = 1$ y $x = 3$





55. $f(x) = x^2 - 2x$; entre $x = 1$ y $x = 4$

56. $g(x) = (x + 1)^2$; entre $x = a$ y $x = a + h$

57–58 ■ ¿Lineal? Determine si la función dada es lineal.

57. $f(x) = (2 + 3x)^2$ **58.** $g(x) = \dfrac{x + 3}{5}$

59–60 ■ Funciones lineales Se da una función lineal. ***a)*** Trace una gráfica de la función. ***b)*** ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ***c)*** ¿Cuál es la razón de cambio de la función?

59. $f(x) = 3x + 2$ **60.** $g(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

61–66 ■ Funciones lineales Se describe una función lineal, ya sea verbalmente, numéricamente o gráficamente. Exprese f en la forma $f(x) = ax + b$.

61. La función tiene una razón de cambio -2 y un valor inicial 3.

62. La gráfica de la función tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y punto de intersección y, -1.

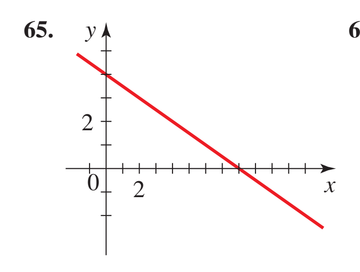
63.

x	$f(x)$
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11

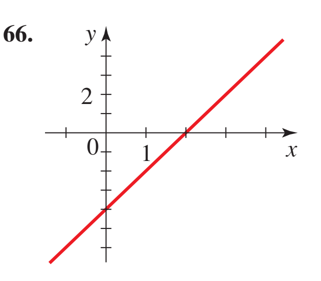
64.

x	$f(x)$
0	6
2	5.5
4	5
6	4.5
8	4

65.



66.



67. Población La población de una comunidad planeada a orillas del mar en Florida está dada por la función $P(t) = 3000 + 200t + 0.1t^2$, donde t representa el número de años desde que la comunidad fue incorporada en 1985.

***a*)** Encuentre $P(10)$ y $P(20)$. ¿Qué representan estos valores?

***b*)** Encuentre la razón de cambio promedio de P entre $t = 10$ y $t = 20$. ¿Qué representa este número?

68. Ahorro para el retiro Elia está ahorrando para su retiro, haciendo depósitos regulares en un plan 401(k). Cuando aumenta su salario encuentra que puede depositar cantidades crecientes cada año. Entre 1995 y 2008 la cantidad anual (en dólares) que depositó estuvo dada por la función $D(t) = 3500 + 15t^2$, donde t representa el año del depósito medido desde el principio del plan (entonces, 1995 corresponde a $t = 0$, 1996 corresponde a $t = 1$, y así sucesivamente).

***a*)** Encuentre $D(0)$ y $D(15)$. ¿Qué representan estos valores?

***b*)** Suponiendo que sus depósitos continúen siendo modelados por la función D, ¿en qué año habrá depositado 17 000 dólares?

***c*)** Encuentre la razón de cambio promedio de D entre $t = 0$ y $t = 15$. ¿Qué representa este número?

69–70 ■ Razón de cambio promedio Se da una función f. ***a*)** Encuentre la razón de cambio promedio de f entre $x = 0$ y $x = 2$, y la razón de cambio promedio de f entre $x = 15$ y $x = 50$. ***b*)** ¿Son iguales las dos razones de cambio promedio que encontró en el inciso *a*)? ***c*)** ¿La función es lineal? Si es así ¿cuál es la razón de cambio?

69. $f(x) = \frac{1}{2}x - 6$ **70.** $f(x) = 8 - 3x$

71. Transformaciones Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las siguientes funciones a partir de la gráfica de f.

***a*)** $y = f(x) + 8$ ***b*)** $y = f(x + 8)$

***c*)** $y = 1 + 2f(x)$ ***d*)** $y = f(x - 2) - 2$

***e*)** $y = f(-x)$ ***f*)** $y = -f(-x)$

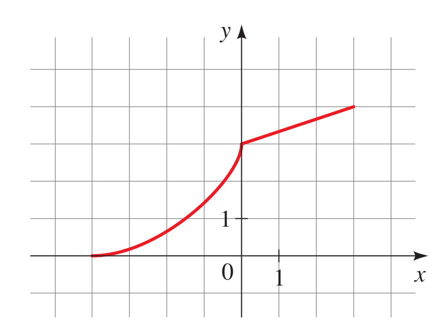
***g*)** $y = -f(x)$ ***h*)** $y = f^{-1}(x)$

72. Transformaciones Se da la gráfica de f. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

***a*)** $y = f(x - 2)$ ***b*)** $y = -f(x)$

***c*)** $y = 3 - f(x)$ ***d*)** $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

***e*)** $y = f^{-1}(x)$ ***f*)** $y = f(-x)$



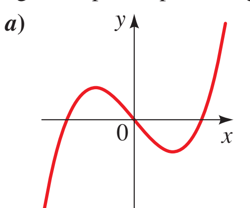
73. Funciones pares e impares Determine si f es par, impar o ninguna de estas.

***a*)** $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ ***b*)** $f(x) = x^3 - x^7$

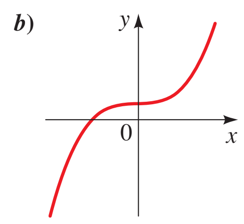
***c*)** $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ ***d*)** $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

74. Funciones pares e impares Determine si la función de la figura es par, impar o ninguna de estas.

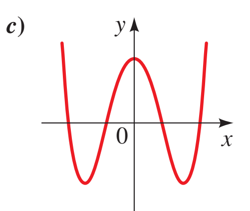
***a*)**



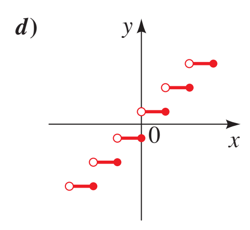
***b*)**



***c*)**



***d*)**



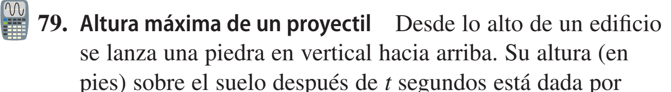
75–78 ■ Máximos y mínimos locales Encuentre los valores máximos y mínimos locales de la función y los valores de x en los que ocurren. Indique cada respuesta redondeada a dos decimales.

75. $g(x) = 2x^2 + 4x - 5$

76. $f(x) = 1 - x - x^2$

77. $f(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$

78. $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$



79. Altura máxima de un proyectil Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra en vertical hacia arriba. Su altura (en pies) sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 48t + 32$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza?



80. Máxima utilidad La utilidad P (en dólares) generada por vender x unidades de cierta mercancía está dada por

$$P(x) = -1\,500 + 12x - 0.0004x^2$$

¿Cuál es la máxima utilidad y cuántas unidades deben ser vendidas para generarla?



81–82 ■ Adición gráfica Se dan dos funciones, f y g. Trace gráficas de f, g y $f + g$ en la misma pantalla de una calculadora graficadora para ilustrar el concepto de adición gráfica.

81. $f(x) = x + 2, \quad g(x) = x^2$

82. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 3 - x^2$

83. Combinar funciones Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $g(x) = 4 - 3x$, encuentre las siguientes funciones.

a) $f + g$ ***b)*** $f - g$ ***c)*** fg

d) f/g ***e)*** $f \circ g$ ***f)*** $g \circ f$

84. Si $f(x) = 1 + x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, encuentre las siguientes.

a) $f \circ g$ ***b)*** $g \circ f$ ***c)*** $(f \circ g)(2)$

d) $(f \circ f)(2)$ ***e)*** $f \circ g \circ f$ ***f)*** $g \circ f \circ g$

85–86 ■ Composición de funciones Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

85. $f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = 2x - x^2$

86. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

87. Encuentre la composición Encuentre $f \circ g \circ h$, donde $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

88. Encuentre la composición Si $T(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$, encuentre las funciones f, g y h tal que $f \circ g \circ h = T$.

89–94 ■ Funciones uno a uno Determine si la función es uno a uno.

89. $f(x) = 3 + x^3$ **90.** $g(x) = 2 - 2x + x^2$

91. $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$ **92.** $r(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$



93. $p(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$



94. $q(x) = 3.3 + 1.6x + 2.5x^3$

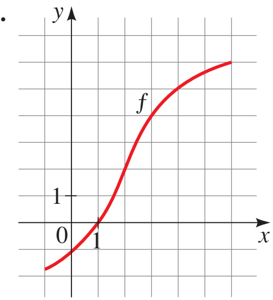
95–98 ■ Encontrar funciones inversas Encuentre la inversa de la función.

95. $f(x) = 3x - 2$ **96.** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3}$

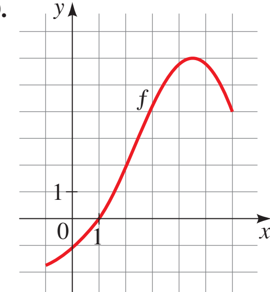
97. $f(x) = (x + 1)^3$ **98.** $f(x) = 1 + \sqrt[5]{x - 2}$

99–100 ■ Funciones inversas a partir de una gráfica Se da la gráfica de una función f. ¿f tiene inversa? Si es así encuentre $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(4)$.









101. Trazar gráficas de funciones inversas

a) Trace una gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad x \geq 0$$

b) Use el inciso *a*) para trazar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

102. Trazar gráficas de funciones inversas

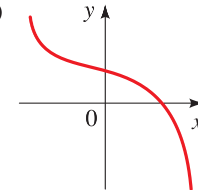
a) Demuestre que la función de $f(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$ es uno a uno.

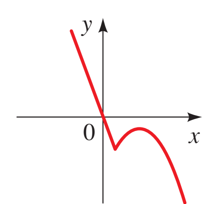
b) Trace la gráfica de f.

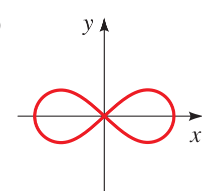
c) Use el inciso *b*) para trazar la gráfica de f^{-1}.

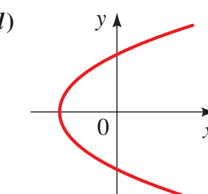
d) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

1. ¿Cuáles de las siguientes gráficas son funciones? Si la gráfica es de una función, ¿es uno a uno?

a)


b)


c)


d)


2. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$.

a) Evalúe $f(0)$, $f(2)$ y $f(a + 2)$.

b) Encuentre el dominio de f.

c) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de f entre $x = 2$ y $x = 10$?

3. Una función f tiene la siguiente descripción verbal: "Restar 2, luego elevar el resultado al cubo".

a) Encuentre una fórmula que exprese f algebraicamente.

b) Cree una tabla de valores de f para las entradas -1, 0, 1, 2, 3 y 4.

c) Trace una gráfica de f usando la tabla de valores del inciso *b*) para ayudarse.

d) ¿Cómo sabemos que f tiene una inversa? Dé una descripción verbal para f^{-1}.

e) Encuentre una fórmula que exprese f^{-1} algebraicamente.

4. En el margen se da una gráfica de una función f.

a) Encuentre los valores del mínimo y del máximo local de f y los valores de x en los que ocurren.

b) Encuentre los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.



5. Un grupo de personas que recaudan fondos para una escuela vende barras de chocolate para ayudar a financiar la construcción de una piscina para su programa de educación física. El grupo encuentra que cuando fijan el precio de x dólares por barra (donde $0 < x \le 5$), el ingreso total por sus ventas (en dólares) está dado por la función $R(x) = -500x^2 + 3\,000x$.

a) Evalúe $R(2)$ y $R(4)$. ¿Qué representan estos valores?

b) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de R. ¿Qué le dice la gráfica acerca de lo que le ocurre al ingreso cuando aumenta el precio de 0 a 5 dólares?

c) ¿Cuál es el máximo ingreso y a qué precio se obtiene?

6. Determine el cambio neto y la razón de cambio promedio para la función $f(t) = t^2 - 2t$ entre $t = 2$ y $t = 2 + h$.

7. Sea $f(x) = (x + 5)^2$ y $g(x) = 1 - 5x$.

a) Sólo una de las dos funciones f y g es lineal. ¿Cuál es lineal y cuál es no lineal?

b) Trace una gráfica de cada función.

c) ¿Cuál es la razón de cambio de la función lineal?

8. ***a***) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^3$.

b) Use el inciso *a*) para trazar la gráfica de $g(x) = (x - 1)^3 - 2$.

9. ***a)*** ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(x - 3) + 2$ obtenida a partir de la gráfica de f?

b) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(-x)$ obtenida a partir de la gráfica de f?

10. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$.

b) Trace la gráfica de f.

11. Si $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = x - 3$, determine lo siguiente.

a) $f + g$ ***b)*** $f - g$ ***c)*** $f \circ g$ ***d)*** $g \circ f$

e) $f(g(2))$ ***f)*** $g(f(2))$ ***g)*** $g \circ g \circ g$

12. Determine si la función es uno a uno.

a) $f(x) = x^3 + 1$ ***b)*** $g(x) = |x + 1|$

13. Utilice la propiedad de la función inversa para demostrar que $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ es la inversa de $g(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

14. Encuentre la función inversa $f(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 5}$.

15. ***a)*** Si $f(x) = \sqrt{3 - x}$, encuentre la función inversa f^{-1}.

b) Trace las gráficas de f y f^{-1} en los mismos ejes de coordenadas.

16–21 ■ A continuación se da la gráfica de una función f.

16. Encuentre el dominio y el rango de f.

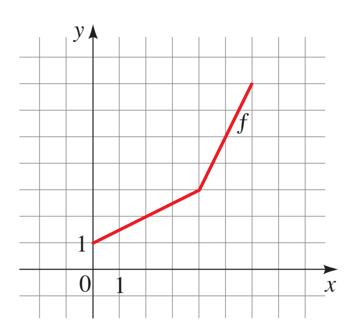
17. Determine $f(0)$ y $f(4)$.

18. Trace la gráfica de $f(x - 2)$ y $f(x) + 2$.

19. Encuentre el cambio neto y la razón de cambio promedio de f entre $x = 2$ y $x = 6$.

20. Encuentre $f^{-1}(1)$ y $f^{-1}(3)$.

21. Trace la gráfica de f^{-1}.



22. Sea $f(x) = 3x^4 - 14x^2 + 5x - 3$.

a) Trace la gráfica de f en un rectángulo de vista apropiado.

b) ¿Es f uno a uno?

c) Encuentre los valores máximo y mínimo locales de f y los valores de x en los que se presentan. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

d) Use la gráfica para determinar el rango de f.

e) Encuentre los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

Modelado con funciones

Muchos de los procesos que se estudian en ciencias físicas y sociales se relacionan con entender la forma en que una cantidad varía respecto de otra. Determinar una función que describa la dependencia de una cantidad respecto de otra se conoce como *modelado*. Por ejemplo, un biólogo observa que el número de bacterias en cierto cultivo aumenta con el tiempo. Él trata de modelar este fenómeno al encontrar la función (o regla) precisa que relacione la población de bacterias con el tiempo transcurrido.

En este *Enfoque sobre modelado* aprenderemos a encontrar modelos que se puedan construir usando propiedades geométricas o algebraicas del objeto en estudio. Una vez determinado el modelo lo usaremos para analizar y predecir propiedades del objeto o proceso en estudio.

Modelado con funciones

Empezamos por dar algunas directrices para construir una función modelo.

GUÍA PARA MODELAR CON FUNCIONES

1. **Expresar el modelo verbalmente.** Identifique la cantidad que quiere modelar y exprésela con palabras como una función de las otras cantidades del problema.
2. **Elegir la variable.** Identifique todas las variables que se usan para expresar la función del paso 1. Asigne un símbolo, como x, a una variable y exprese las otras variables en términos de dicho símbolo.
3. **Formular el modelo.** Exprese la función en lenguaje algebraico escribiéndola como una función de la variable sola que se eligió en el paso 2.
4. **Utilizar el modelo.** Utilice la función para responder las preguntas planteadas en el problema. (Para encontrar un máximo o un mínimo utilice los métodos descritos en la sección 2.3.)

EJEMPLO 1 ■ Cercar un jardín

Una jardinera tiene 140 pies de malla para cercar una huerta rectangular.

a) Encuentre una función que modele el área del jardín que puede cercar.

b) ¿Para qué intervalo de anchos es el área mayor de 825 pies^2?

c) ¿Podrá cercar un jardín con un área de 1 250 pies^2?

d) Encuentre las dimensiones de la mayor área que puede cercar.

RAZONANDO EL PROBLEMA

Si la jardinera cerca una parcela de 10 pies de ancho, entonces la longitud debe ser de 60 pies porque $10 + 10 + 60 + 60 = 140$. Por lo que el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{longitud} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

La tabla muestra diferentes opciones para cercar el jardín. Vemos que conforme aumenta el ancho aumenta el área y luego disminuye.

Ancho	Longitud	Área
10	60	600
20	50	1 000
30	40	1 200
40	30	1 200
50	20	1 000
60	10	600

longitud

ancho

SOLUCIÓN

***a*)** El modelo que deseamos es una función que proporcione el área que se puede cercar.

Expresar el modelo verbalmente. Sabemos que el área de un jardín rectangular es

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{longitud}$$

Elegir la variable. Hay dos cantidades diferentes: ancho y longitud. Debido a que la función que deseamos depende de sólo una variable, sea

$$x = \text{ancho del jardín}$$

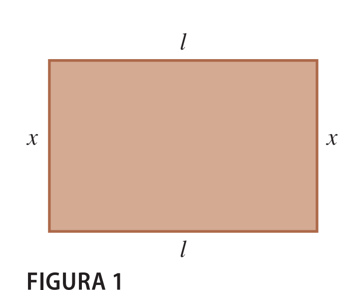


FIGURA 1

Entonces debemos expresar la duración en términos de x. El perímetro se fija en 140 pies, por lo que la longitud se determina una vez que elegimos el ancho. Si hacemos que la longitud sea l, como en la figura 1, luego $2x + 2l = 140$, entonces $l = 70 - x$. Resumimos estos hechos:

Verbalmente	Algebraicamente
Ancho	x
Longitud	$70 - x$

Formular el modelo. El modelo es la función A que da el área del jardín para cualquier ancho x.

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{longitud}$$

$$A(x) = x(70 - x)$$

$$A(x) = 70x - x^2$$

El área que puede cercar se modela con la función $A(x) = 70x - x^2$.

Utilizar el modelo. Utilizamos el modelo para responder a las preguntas de los incisos *b*) - *d*).

***b*)** Tenemos que resolver la desigualdad $A(x) \geq 825$. Para resolver gráficamente trazamos la gráfica de $y = 70x - x^2$ y $y = 825$ en el mismo rectángulo de vista (véase la figura 2). Vemos que $15 \leq x \leq 55$.

***c*)** De la figura 3 vemos que la gráfica de $A(x)$ se encuentra siempre está por debajo de la recta $y = 1\,250$, por lo que una superficie de 1 250 pies^2 no se alcanza nunca.

En la página 176 se estudian los valores máximos de las funciones.

***d*)** Tenemos que encontrar dónde se produce el valor máximo de la función $A(x) = 70x - x^2$. En la figura 4 se presenta la gráfica de la función. Utilizando la función TRACE en una calculadora gráfica, encontramos que la función alcanza su valor máximo en $x = 35$. Entonces el área máxima que puede cercar es cuando el ancho del jardín es de 35 pies y su longitud es de $70 - 35 = 35$ pies. Entonces el área máxima es $35 \times 35 = 1\,225$ pies^2.

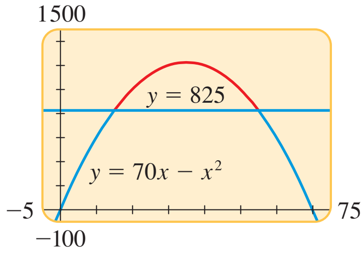


FIGURA 2

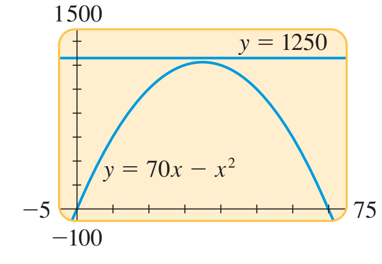


FIGURA 3

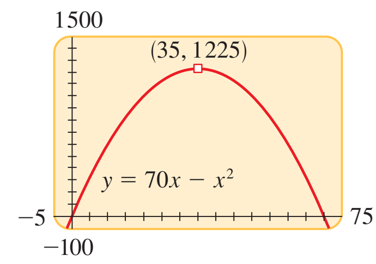


FIGURA 4

EJEMPLO 2 ■ Minimizar el metal de una lata

Un fabricante hace una lata que contiene 1 L (litro) de aceite. ¿Qué radio minimiza la cantidad de metal de la lata?

RAZONANDO EL PROBLEMA

Para usar la cantidad mínima de metal debemos minimizar el área superficial de la lata, es decir, el área de la tapa, el fondo y los lados. El área de la tapa y el fondo es $2\pi r^2$ y el área de los lados es $2\pi rh$ (véase la figura 5), de modo que el área superficial de la lata es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

El radio y altura de la lata se pueden escoger de modo que el volumen sea exactamente 1 L o 1 000 cm^3. Si queremos un radio pequeño, por ejemplo, $r = 3$, entonces la altura debe ser precisamente lo suficientemente alta para hacer que el volumen total sea 1 000 cm^3. En otras palabras, debemos tener

$$\pi(3)^2 h = 1\,000 \qquad \text{El volumen de la lata es } \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1\,000}{9\pi} \approx 35.37 \text{ cm} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora que conocemos el radio y la altura podemos encontrar el área superficial de la lata:

$$\text{área superficial} = 2\pi(3)^2 + 2\pi(3)(35.4) \approx 723.2 \text{ cm}^3$$

Si buscamos un radio diferente podemos encontrar la correspondiente altura y el área de la superficie de un modo similar.

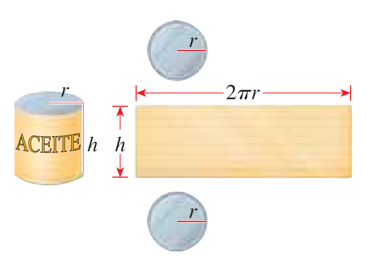


FIGURA 5

SOLUCIÓN El modelo que buscamos es una función que da el área de la superficie de la lata.

Expresar el modelo verbalmente. Sabemos que para una lata cilíndrica

área superficial = área de tapa y fondo + área lateral

Elegir la variable. Hay dos cantidades que varían: radio y altura. Dado que la función que buscamos depende del radio hacemos que

$$r = \text{radio de la lata}$$

Luego debemos expresar la altura en términos de r. Puesto que el volumen de una lata cilíndrica es $V = \pi r^2 h$ y el volumen debe ser 1 000 cm^3, tenemos

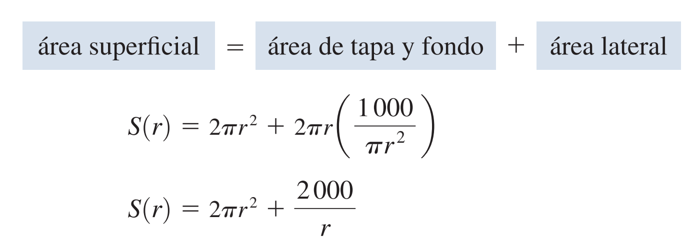
$$\pi r^2 h = 1\,000 \qquad \text{El volumen de la lata es } 1\,000 \text{ cm}^3$$

$$h = \frac{1\,000}{\pi r^2} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora podemos expresar el área de la tapa, del fondo y de los lados en términos sólo de r:

Verbalmente	Algebraicamente
Radio de la lata	r
Altura de la lata	$\dfrac{1\,000}{\pi r^2}$
Área de tapa y fondo	$2\pi r^2$
Área de los lados ($2\pi rh$)	$2\pi r\left(\dfrac{1\,000}{\pi r^2}\right)$

Formular el modelo. El modelo es la función S que da el área superficial de la lata como función del radio r.



$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1\,000}{\pi r^2}\right)$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

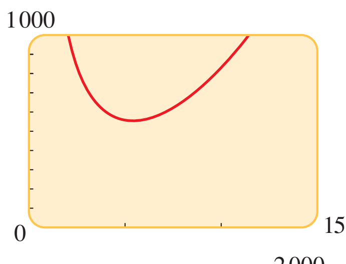


FIGURA 6 $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2\,000}{r}$

Utilizar el modelo. Usamos el modelo para encontrar el área mínima de la superficie de la lata. Trazamos la gráfica de S en la figura 6 y hacemos un acercamiento (*zoom*) en el punto mínimo para determinar que el valor mínimo de S es alrededor de 554 cm^2 y se presenta cuando el radio es de unos 5.4 cm. ■

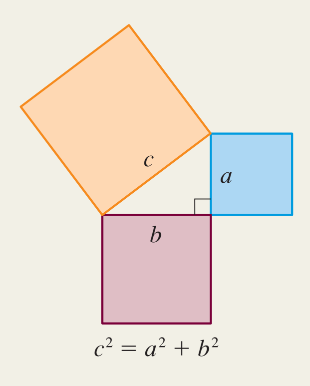
PROBLEMAS

1–18 ■ En estos problemas se le pide encontrar una función que modele una situación real. Para ayudarse use los principios para modelar que se describen en este Enfoque.

1. **Área** Un lote rectangular para construcción es tres veces más largo que ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w.
2. **Área** Un cartel mide 10 pulgadas más de largo que de ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w.
3. **Volumen** Una caja rectangular tiene base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen V en términos de su ancho w.
4. **Volumen** La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen V del cilindro en términos de su radio r.
5. **Área** Un rectángulo tiene un perímetro de 20 pies. Encuentre una función que modele su área A en términos de la longitud x de uno de sus lados.
6. **Perímetro** Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Encuentre una función que modele su perímetro P en términos de la longitud x de uno de sus lados.
7. **Área** Encuentre una función que modele el área A de un triángulo equivalente en términos de la longitud x de uno de sus lados.
8. **Área** Encuentre una función que modele el área superficial S de un cubo en términos de su volumen V.
9. **Radio** Encuentre una función que modele el radio r de un círculo en términos de su área A.
10. **Área** Encuentre una función que modele el área A de un círculo en términos de su circunferencia C.
11. **Área** Una caja rectangular con volumen de 60 pies^3 tiene una base cuadrada. Encuentre una función que modele su área superficial S en términos de la longitud x de uno de sus lados.

PITÁGORAS (ca. 580-500 a.C.) fundó una escuela en Croton, al sur de Italia, dedicada al estudio de la aritmética, la geometría, la música y la astronomía. Los pitagóricos, como se llamaron, eran una sociedad secreta con peculiares reglas y ritos de iniciación. No dejaron nada escrito y no daban a conocer a nadie lo que habían aprendido del maestro. Aun cuando por ley se prohibía que las mujeres asistieran a reuniones públicas, Pitágoras les permitía la entrada en su escuela, y su más famosa discípula fue Theana (con quien posteriormente se casó).

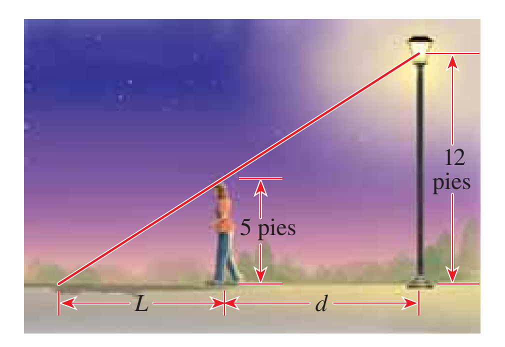
Según Aristóteles, los pitagóricos estaban convencidos de que "los principios de las matemáticas son los principios de todas las cosas". Su lema era "Todo es un número" en el cual se referían a los números *enteros*. La sobresaliente aportación de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



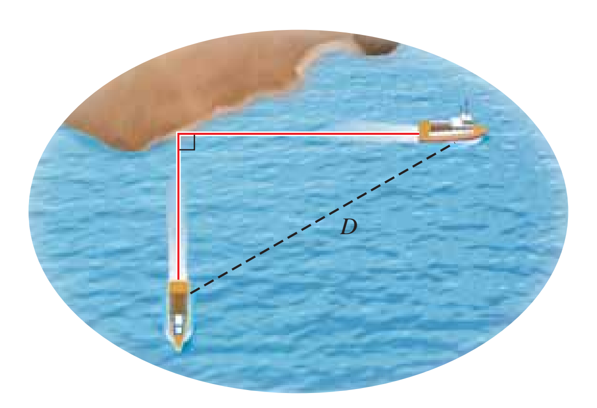
$$c^2 = a^2 + b^2$$

El recíproco del teorema de Pitágoras también es verdadero; es decir, un triángulo cuyos lados a, b y c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ es un triángulo rectángulo.

12. Longitud Una mujer de 5 pies de estatura está de pie cerca de un farol que tiene 12 pies de altura, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele la longitud L de su sombra en términos de su distancia d desde la base del farol.



13. Distancia Dos barcos zarpan al mismo tiempo. Uno navega al sur a 15 mi/h, el otro navega al este a 20 mi/h. Encuentre una función que modele la distancia D entre los barcos en términos del tiempo t (en horas) transcurrido desde su salida.

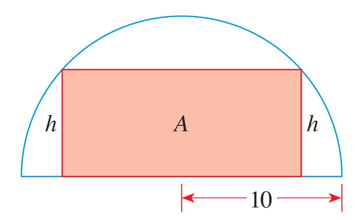


14. Producto La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto P en términos de x, uno de los números.

15. Área Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Encuentre una función que modele su área A en términos de la longitud de su base b.

16. Perímetro Un triángulo rectángulo tiene un cateto del doble de largo que el otro. Encuentre una función que modele el perímetro P en términos de la longitud x del cateto más corto.

17. Área Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10 como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele el área A del rectángulo en términos de su altura h.



18. Altura El volumen de un cono es 100 pulg^3. Encuentre una función que modele la altura h del cono en términos de su radio r.

19–32 ■ En estos problemas le pedimos que encuentre una función que modele una situación práctica, y que luego use el modelo para contestar preguntas en torno a la situación. Use las guías de la página 237 para ayudarse.



19. Maximizar un producto Considere el siguiente problema: encuentre dos números cuya suma 19 y cuyo producto es tan grande como sea posible.

***a*)** Experimente con el problema creando una tabla como la siguiente, que muestre el producto de diferentes pares de números que totalizan 19. Con base en la evidencia de la tabla estime la respuesta al problema.

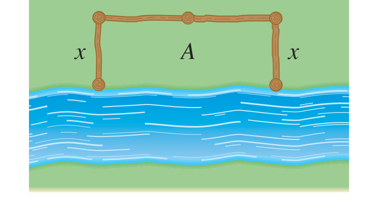
Primer número	Segundo número	Producto
1	18	18
2	17	34
3	16	48
⋮	⋮	⋮

***b*)** Encuentre una función que modele el producto en términos de uno de los dos números.

***c*)** Use su modelo para resolver el problema y compárelo con su respuesta al inciso *a*).



20. Minimizar una suma Encuentre dos números positivos cuya suma sea 100 y la suma de cuyos cuadrados sea mínima.



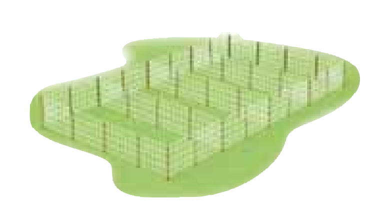


21. Cerca alrededor de un terreno Considere el siguiente problema: un agricultor tiene 2 400 pies de malla para cercar y desea cercar un campo rectangular que bordea un río recto. No necesita cercar el terreno a lo largo del río (véase la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del terreno de área máxima que puede cercar?

***a*)** Experimente con el problema trazando varios diagramas que ilustren la situación. Calcule el área de cada configuración y use sus resultados para estimar las dimensiones del campo más grande posible.

***b*)** Encuentre una función que modele el área del campo en términos de uno de sus lados.

***c*)** Use su modelo para resolver el problema y compárelo con su respuesta al inciso *a*).





22. Dividir un corral Un ranchero tiene 750 pies de malla con la que desea cercar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con cercas paralelas a un lado del rectángulo (véase la figura).

***a*)** Encuentre una función que modele el área total de los cuatro corrales.

***b*)** Encuentre el área total máxima posible de los cuatro corrales.

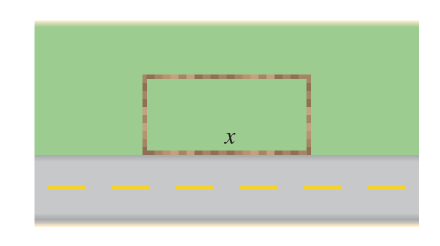


23. Cercar un terreno para jardín El dueño de una propiedad desea cercar un terreno para jardín adyacente a un camino como se muestra en la figura. La cerca junto al camino debe ser más resistente y cuesta 5 dólares por pie, pero la otra cerca cuesta sólo 3 dólares por pie. El jardín ha de tener un área de 1 200 pies^2.

***a*)** Encuentre una función que modele el costo de cercar el jardín.

***b*)** Encuentre las dimensiones del jardín que minimicen el costo de cercar el jardín.

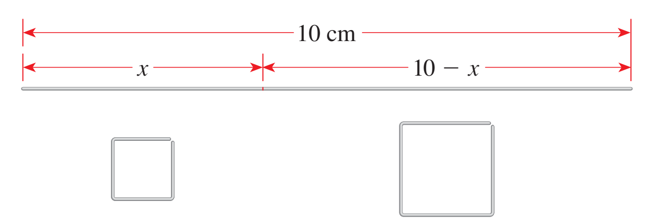
***c*)** Si el dueño tiene a lo sumo 600 dólares para gastar en la cerca encuentre el rango de longitudes que puede cercar a lo largo del camino.

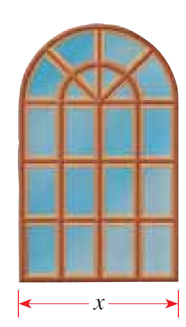


 **24. Maximizar un área** Un alambre de 10 cm de largo se corta en dos partes, una de longitud x y la otra de longitud $10 - x$ como se muestra en la figura. Cada pieza se dobla en forma de cuadrado.

a) Encuentre una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados.

b) Encuentre el valor de x que minimice el área total de los dos cuadrados.





 **25. Luz de una ventana** Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo, como se muestra en la figura de la izquierda. Se ha de construir una ventana normanda con perímetro de 30 pies.

a) Encuentre una función que modele el área de la ventana.

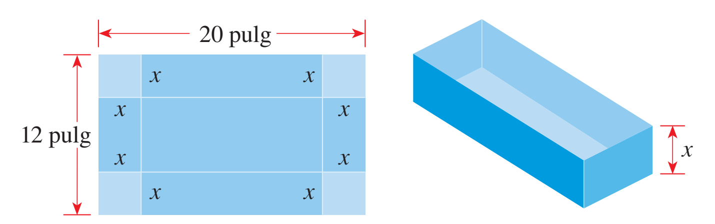
b) Encuentre las dimensiones de la ventana que deje pasar la máxima cantidad de luz.

26. Volumen de una caja De un corte rectangular de cartón con dimensiones de 12 por 20 pulg se debe construir una caja abierta de la parte superior. En cada esquina se cortan cuadrados iguales de lado x y luego se doblan los lados (véase la figura).

a) Encuentre una función que modele el volumen de la caja.

b) Encuentre los valores de x para los cuales el volumen es mayor a 200 pulg^3.

c) Encuentre el máximo volumen que puede tener la caja.

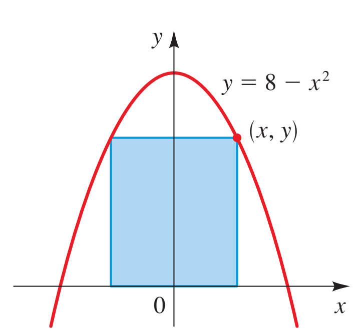


 **27. Área de una caja** Una caja sin tapa con base cuadrada ha de tener un volumen de 12 pies^3.

a) Encuentre una función que modele el área de la superficie de la caja.

b) Encuentre las dimensiones de caja que minimicen la cantidad de material utilizado.

 **28. Rectángulo inscrito** Encuentre las dimensiones que den la máxima área para el rectángulo que se muestra en la figura. Su base está sobre el eje x y los otros dos vértices están arriba del eje x, sobre la parábola $y = 8 - x^2$.



 **29. Minimizar costos** Un ranchero desea construir un corral rectangular con un área de 100 m^2.

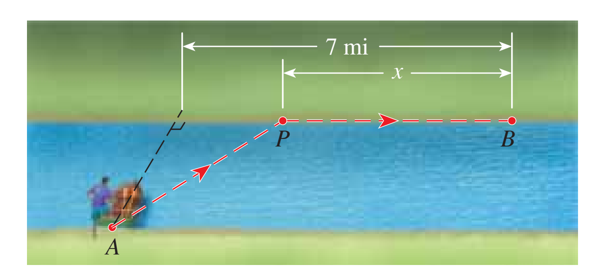
a) Encuentre una función que modele la longitud de la cerca requerida.

b) Encuentre las dimensiones del corral que requieran la mínima cantidad de malla para cercar.

30. Minimizar el tiempo Un hombre está de pie en el punto A, en la orilla de un río recto de 2 millas de ancho. Para llegar al punto B, que está a 7 millas aguas abajo en la orilla opuesta, él rema en su bote al punto P en la orilla opuesta y luego camina la distancia restante x hasta B, como se muestra en la figura. El hombre puede remar a una velocidad de 2 mi/h y caminar a una velocidad de 5 mi/h.

a) Encuentre una función que modele el tiempo necesario para el viaje.

b) ¿Dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible?



31. Vuelo de pájaro Se libera un ave desde el punto A en una isla, a 5 millas del punto B más cercano en una orilla recta. El ave vuela al punto C en la orilla y luego vuela a lo largo de la orilla a su zona de anidar D (véase la figura). Suponga que el ave requiere 10 kcal/milla de energía para volar sobre el suelo y 14 kcal/milla para volar sobre el agua.

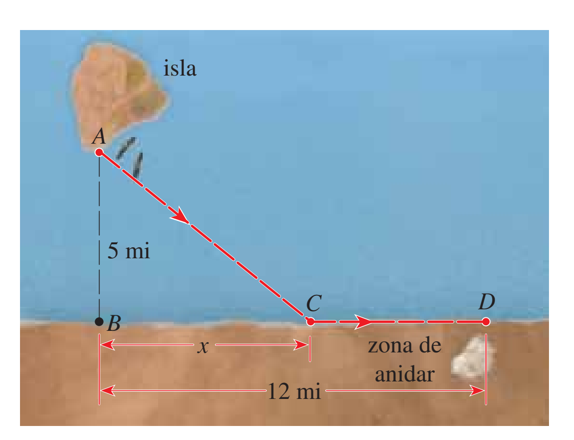
a) Use el dato de que

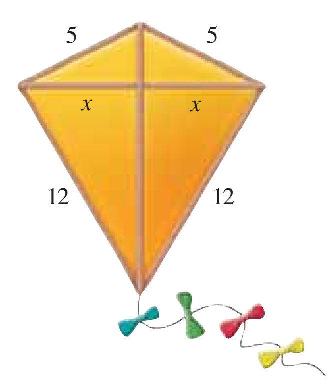
$$\text{energía empleada} = \text{energía por milla} \times \text{millas de vuelo}$$

para demostrar que la energía total empleada por el ave está modelada por la función

$$E(x) = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

b) Si el ave instintivamente escoge una trayectoria que minimiza su gasto de energía, ¿hacia qué punto vuela?





32. Área de una cometa El bastidor de una cometa se ha de construir con seis piezas de madera. Las cuatro piezas que forman su borde han sido cortadas a las longitudes indicadas en la figura. Sea x como se muestra en la figura.

a) Demuestre que el área de la cometa está dada por la función

$$A(x) = x(\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{144 - x^2})$$

b) ¿Cuál debe ser la longitud de los dos travesaños para maximizar el área de la cometa?



3 Funciones polinomiales y racionales

Las **funciones definidas por expresiones de polinomios** se denominan *funciones polinomiales.* Las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos crestas y valles. Esta propiedad las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, la propietaria de una fábrica observa que, si aumenta el número de trabajadores aumenta la productividad, pero si hay demasiados trabajadores entonces la productividad empieza a disminuir. Esta situación está modelada por una función polinomial de grado 2 (una función cuadrática). El crecimiento de muchas especies animales sigue un patrón predecible, empezando por un periodo de crecimiento rápido, seguido de un periodo de crecimiento lento y luego una etapa de crecimiento acelerado. Esta variabilidad del crecimiento se modela con un polinomio de grado 3.

En el *Enfoque sobre modelado* al final de este capítulo se exploran diferentes maneras de utilizar funciones polinómicas para modelar situaciones del mundo real.

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

■ Trazar la gráfica de funciones cuadráticas usando la forma estándar ■ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ■ Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Estas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1 x + a_0$, respectivamente, cuyas graficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

En esta sección veremos la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

■ Trazar la gráfica de funciones cuadráticas usando la forma estándar

Para una definición geométrica de parábolas, vea la sección 11.1.

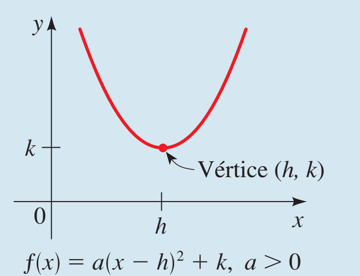
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$ cuya gráfica es la parábola graficada en el ejemplo 1 de la sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ mediante las transformaciones dadas en la sección 2.6.

FORMA ESTÁNDAR DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

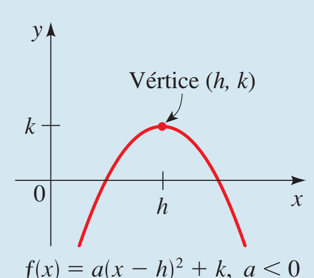
Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a < 0$

EJEMPLO 1 ■ Forma estándar de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$.

***a*)** Exprese f en forma estándar.
***b*)** Encuentre el vértice y las intersecciones x y y de f.
***c*)** Trace la gráfica de f.
***d*)** Encuentre el dominio y el rango de f.

SOLUCIÓN

***a*)** Dado que el coeficiente de x^2 no es 1 debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 12x + 13 \\
&= 2(x^2 - 6x) + 13 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\
&= 2(x^2 - 6x + 9) + 13 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis y reste } 2\cdot 9 \text{ fuera del paréntesis} \\
&= 2(x - 3)^2 - 5 && \text{Factorice y simplifique}
\end{aligned}
$$

En la sección 1.5 se estudió completar el cuadrado.

La forma estándar es $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$.

***b*)** De la forma estándar de f podemos ver que el vértice de f es $(3, -5)$. La intersección y es $f(0) = 13$. Para encontrar la intersección x hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos la ecuación resultante. Se puede resolver una ecuación cuadrática con cualquiera de los métodos estudiados en la sección 1.5. En este caso se resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática.

$$
\begin{aligned}
0 &= 2x^2 - 12x + 13 && \text{Haga } f(x) = 0 \\
x &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 2\cdot 13}}{4} && \text{Encuentre } x \text{ usando la fórmula cuadrática} \\
x &= \frac{6 \pm \sqrt{10}}{2} && \text{Simplifique}
\end{aligned}
$$

Entonces las intersecciones x son $x = (6 \pm \sqrt{10})/2$. Por lo que las intersecciones son aproximadamente 1.42 y 4.58.

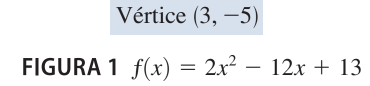


FIGURA 1 $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$

***c*)** La forma estándar nos indica que se obtiene la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, estirándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. En la figura 1 se presenta una gráfica de f, incluyendo las intersecciones x y y que se determinaron en el inciso *b*).

***d*)** El dominio de f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$. De la gráfica se observa que el rango f es $[-5, \infty)$.



Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

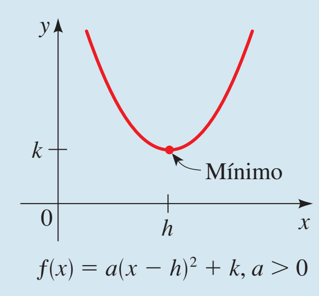
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba, y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función cuadrática cuya gráfica está en la figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice $(3, 5)$ es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

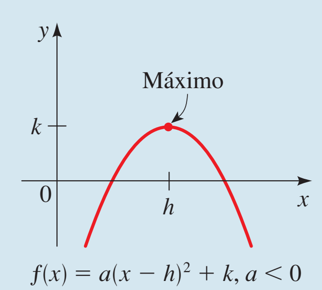
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f se presenta en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

EJEMPLO 2 ■ Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

a) Exprese f en forma estándar.

b) Trace la gráfica de f.

c) Encuentre el valor mínimo de f.

SOLUCIÓN

a) Para expresar esta función cuadrática en forma estándar completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de los términos con } x \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

b) La gráfica es la parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba como se muestra en la figura 2.

c) Dado que el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

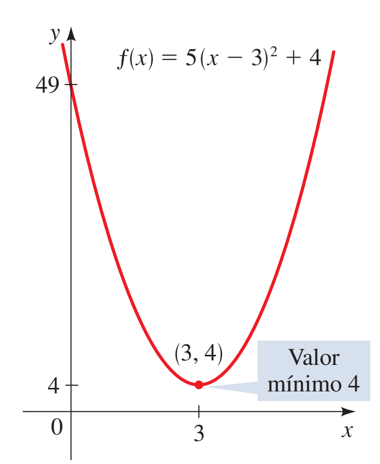


FIGURA 2

Ahora trate de hacer el ejercicio 27 ■

EJEMPLO 3 ■ Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Exprese f en forma estándar.

b) Trace la gráfica de f.

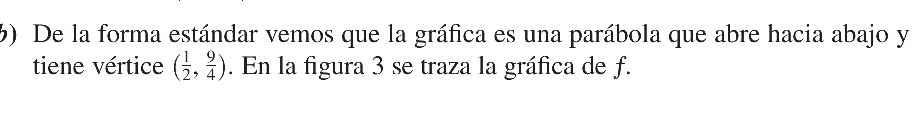
c) Encuentre el valor máximo de f.

SOLUCIÓN

a) Para expresar esta función cuadrática en forma estándar completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos } x \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro del paréntesis, reste afuera } (-1)\tfrac{1}{4} \\ &= -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

En el ejemplo 3 puede verificar que las intersecciones x de la parábola son -1 y 2. Estas se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.



b) De la forma estándar vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$. En la figura 3 se traza la gráfica de f.

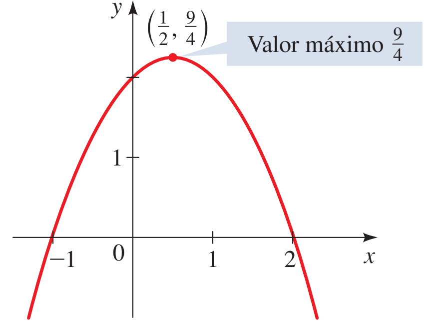


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

c) Puesto que el coeficiente de x^2 es negativo f tiene un valor máximo que es $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

Expresar una función cuadrática en forma estándar nos ayuda a trazar su gráfica, así como a encontrar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en encontrar el valor máximo o mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad \text{Factorice } a \text{ de los términos } x$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \qquad \text{Complete el cuadrado: al sumar } \frac{b^2}{4a^2} \text{ dentro del paréntesis, reste fuera } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \qquad \text{Factorice}$$

Esta ecuación está en forma estándar con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Dado que el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

E1 valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 4 ■ Encontrar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

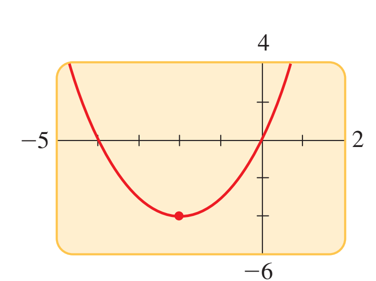
SOLUCIÓN

a) Esta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Dado que $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



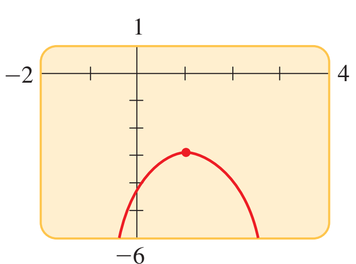
El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

b) Esta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$



E1 valor máximo ocurre en $x = 1$.

Ahora intente realizar los ejercicios 35 y 37 ■

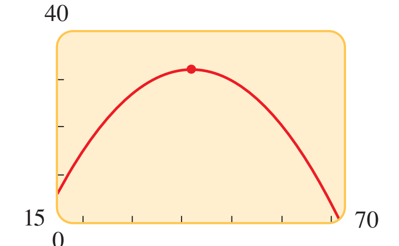
Modelado con funciones cuadráticas

Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicaciones* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 ■ Rendimiento máximo en kilometraje de un automóvil

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31 \qquad 15 \leq s \leq 70$$



El rendimiento máximo de gasolina ocurre a 42 mi/h.

donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-\frac{1}{28})} = 42$$

El valor máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

EJEMPLO 6 ■ Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15 000 espectadores. Con el precio del boleto a 14 dólares, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9 500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1 000.

***a*)** Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

***b*)** Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

***c*)** ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

***a*)** **Expresar verbalmente el modelo.** El modelo que buscamos es una función que da el ingreso para cualquier precio del boleto:

ingreso = precio del boleto × asistencias

PROYECTO DE DESCUBRMIENTO

Ley de Torricelli



Evangelista Torricelli (1608-1647) es mejor conocido por su invención del barómetro. También descubrió que la rapidez con la que un fluido sale del fondo de un tanque se relaciona con la altura del líquido en el tanque (un principio que ahora se llama Ley de Torricelli). En este proyecto llevamos a cabo un experimento simple para recolectar datos de la rapidez del agua que se escapa por un agujero en la parte inferior de una botella grande de refresco. Luego encontramos una expresión algebraica para la ley de Torricelli ajustando una función cuadrática a los datos que se obtuvieron. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Elegir la variable. Hay dos cantidades que varían: el precio del boleto y la asistencia. Dado que la función que buscamos depende del precio, hacemos que

$$x = \text{precio del boleto}$$

Luego, expresamos la asistencia en términos de x.

Verbalmente	**En álgebra**
Precio del boleto	x
Cantidad que baja el precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1\,000(14 - x)$
Asistencia	$9\,500 + 1\,000(14 - x)$

Formular el modelo. E1 modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\boxed{\text{ingreso}} = \boxed{\text{precio del boleto}} \times \boxed{\text{asistencias}}$$

$$R(x) = x \times [9\,500 + 1\,000(14 - x)]$$

$$R(x) = x(23\,500 - 1\,000x)$$

$$R(x) = 23\,500x - 1\,000x^2$$

b) **Utilizar el modelo.** Dado que R es función cuadrática con $a = -1\,000$ y $b = 23\,500$, el máximo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23\,500}{2(-1\,000)} = 11.75$$

Por tanto, el precio de boleto de 11.75 dólares da el máximo ingreso.

c) **Utilizar el modelo.** Deseamos encontrar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

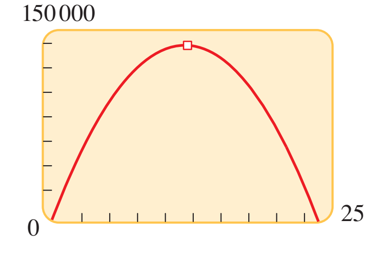
$$23\,500x - 1\,000x^2 = 0 \quad \text{Haga que } R(x) = 0$$

$$23.5x - x^2 = 0 \quad \text{Divida entre } 1\,000$$

$$x(23.5 - x) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \quad \text{Despeje } x$$

Por tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de 23.50 dólares es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie irá a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es de 11.75 dólares.

Ahora intente realizar el ejercicio 65 ■

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma estándar completamos el ________.

2. La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma estándar.

a) La gráfica de f es una parábola con vértice (____, ____).

b) Si $a > 0$ la gráfica de f abre hacia ________. En este caso $f(h) = k$ es el valor ________ de f.

c) Si $a < 0$ la gráfica de f abre hacia ________. En este caso $f(h) = k$ es el valor ________ de f.

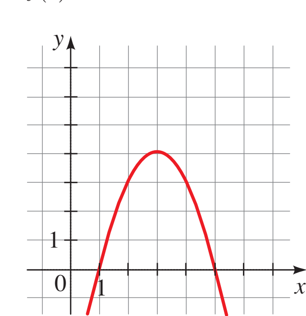
3. La gráfica de $f(x) = 3(x - 2)^2 - 6$ es una parábola que abre hacia ________, con su vértice en (____, ____), y $f(2) =$ ________ es el valor (mínimo/máximo) ________ de f.

4. La gráfica de $f(x) = -3(x - 2)^2 - 6$ es una parábola que abre hacia ________, con su vértice en (____, ____), y $f(2) =$ ________ es el valor (mínimo/máximo) ________ de f.

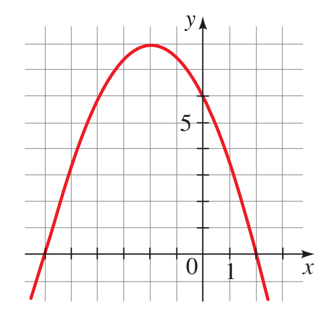
HABILIDADES

5–8 ■ Gráficas de funciones cuadráticas Se da la gráfica de una función cuadrática f. ***a)*** Encuentre las coordenadas del vértice y las intersecciones x y y. ***b)*** Encuentre el valor máximo o mínimo de f. ***c)*** Encuentre el dominio y rango de f.

5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

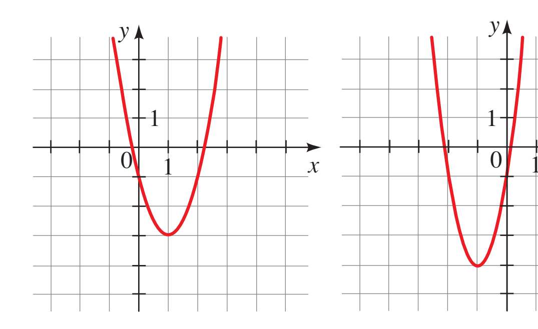


6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$

8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9–24 ■ Trazar la gráfica de funciones cuadráticas Se da una función cuadrática. ***a)*** Exprese f en la forma estándar. ***b)*** Encuentre su vértice y sus intersecciones x y y de f. ***c)*** Trace una gráfica de f. ***d)*** Encuentre el dominio y rango de f.

9. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

10. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

11. $f(x) = x^2 - 6x$

12. $f(x) = x^2 + 8x$

13. $f(x) = 3x^2 + 6x$

14. $f(x) = -x^2 + 10x$

15. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

16. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

17. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

18. $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

19. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

20. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

21. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

22. $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$

23. $f(x) = -4x^2 - 12x + 1$

24. $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$

25–34 ■ Valores máximos y mínimos Se da una función cuadrática. ***a)*** Exprese la función cuadrática en forma estándar. ***b)*** Trace su gráfica. ***c)*** Encuentre los valores máximo o mínimo de f.

25. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

26. $f(x) = x^2 - 8x + 8$

27. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

28. $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

29. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

30. $f(x) = 1 - 6x - x^2$

31. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$

32. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

33. $h(x) = 1 - x - x^2$

34. $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

35–44 ■ Fórmula para los valores máximos y mínimos Encuentre los valores máximos o mínimos de la función.

35. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

36. $f(x) = 3 - 4x - x^2$

37. $f(t) = -3 + 80t - 20t^2$

38. $f(x) = 6x^2 - 24x - 100$

39. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$

40. $g(x) = 100x^2 - 1\,500x$

41. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

42. $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

43. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$

44. $g(x) = 2x(x - 4) + 7$



45–46 ■ Valores máximos y mínimos Se da una función cuadrática. ***a)*** Utilice un dispositivo para trazar gráficas para encontrar los valores máximos o mínimos de la función cuadrática f, redondeada a dos decimales. ***b)*** Encuentre los valores máximos o mínimos exactos de f, y compárelos con sus respuestas del inciso *a*).

45. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

46. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

HABILIDADES Plus

47–48 ■ Encontrar funciones cuadráticas Determine una función f cuya gráfica es una parábola con el vértice dado y que pasa por el punto dado.

47. Vértice $(2, -3)$; punto $(3, 1)$

48. Vértice $(-1, 5)$; punto $(-3, -7)$

49. Máximo de un polinomio de cuarto grado Determine el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + 4x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* Haga que $t = x^2$.]

50. Mínimo de un polinomio de sexto grado Determine el valor mínimo de la función

$$f(x) = 2 + 16x^3 + 4x^6$$

[*Sugerencia:* Haga que $t = x^3$.]

APLICACIONES

51. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

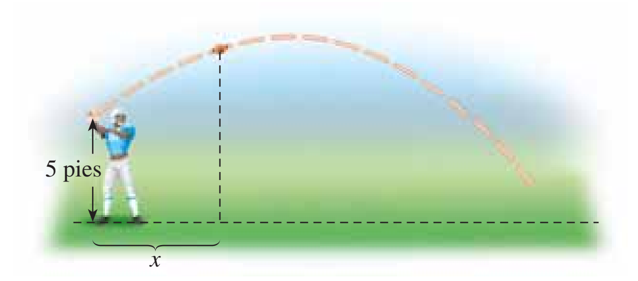
52. Trayectoria de un balón Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45° con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



53. Ingresos Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

54. Ventas Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que, si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1\,800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

55. Publicidad La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que, si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

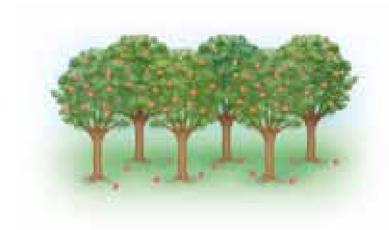
donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

56. Productos farmacéuticos Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

57. Agricultura El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con la que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



58. Agricultura En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce aproximadamente 10 libras de uvas en una temporada cuando están plantadas alrededor de 700 vides por acre. Por cada vid individual que se planta la producción disminuye alrededor de 1 por ciento. Por tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

59–62 ■ Máximos y mínimos Use las fórmulas de esta sección para dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque sobre modelado: modelado con funciones* en las paginas 237-244.

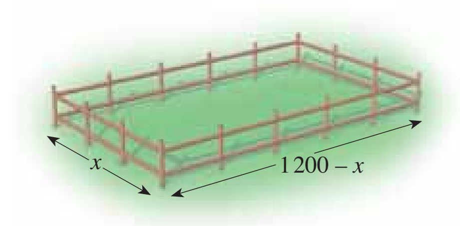
59. Problema 21 **60.** Problema 22

61. Problema 25 **62.** Problema 24

63. Cercar un corral para caballos Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.

b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

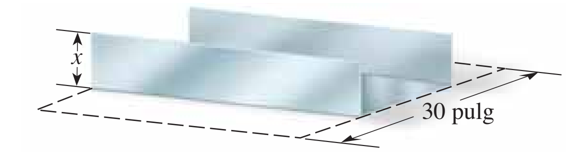


64. Hacer un canal para agua de lluvia Un canal para agua de lluvia se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se muestra en la figura.

a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x.

b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de la sección transversal del canal.

c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



65. Ingresos en un estadio Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55000 espectadores. Con el precio del boleto en 10 dólares, el promedio de asistencia en recientes partidos ha sido de 27000 personas. Un estudio de mercado indica que por cada dó1ar que baje el precio del boleto, la asistencia aumentará en 3000 personas.

a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

b) Encuentre el precio que maximiza los ingresos por la venta de boletos.

c) ¿Qué precio del boleto será tan alto como para no generar ingresos?

66. Maximizar utilidades Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende sencillos comederos para las aves para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan 6 dólares, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a $10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que, por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.

a) Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por comedero.

b) ¿Qué precio debe tener cada comedero para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

67. DESCUBRIMIENTO: Vértice y puntos de intersección *x* Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección x de la gráfica de f? ¿Puede el lector saber de su gráfica cuál es la coordenada x del vértice en términos de m y n? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al desarrollar y usar las fórmulas de esta sección.

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

■ Funciones polinomiales ■ Trazar la gráfica de funciones polinomiales básicas ■ Gráficas de funciones polinomiales: comportamiento final ■ Uso de ceros para trazar la gráfica de polinomios ■ Forma de la gráfica cerca de un cero ■ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

■ Funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado. Pero antes de trabajar con estas debemos agregar cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal** y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3

Grado 5

Término constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$

Coeficientes 3, 6, -2, 1, 7 y -6

La tabla lista algunos ejemplos más polinomios.

Polinomio	Grado	Término principal	Término constante
$P(x) = 4x - 7$	1	$4x$	-7
$P(x) = x^2 + x$	2	x^2	0
$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 10$	3	$2x^3$	10
$P(x) = -5x^4 + x - 2$	4	$-5x^4$	-2

Si un polinomio tiene exactamente un solo término, entonces se llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son monomios.

Trazar la gráfica de funciones polinomiales básicas

Las funciones polinomiales más sencillas son los monomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se muestran en la figura 1. Como indica la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ cuando n es par y la misma forma general que la gráfica de $y = x^3$ cuando n es impar. Sin embargo, conforme el grado n se hace más grande, las gráficas se hacen más planas alrededor del origen y más pronunciadas en otros lugares.

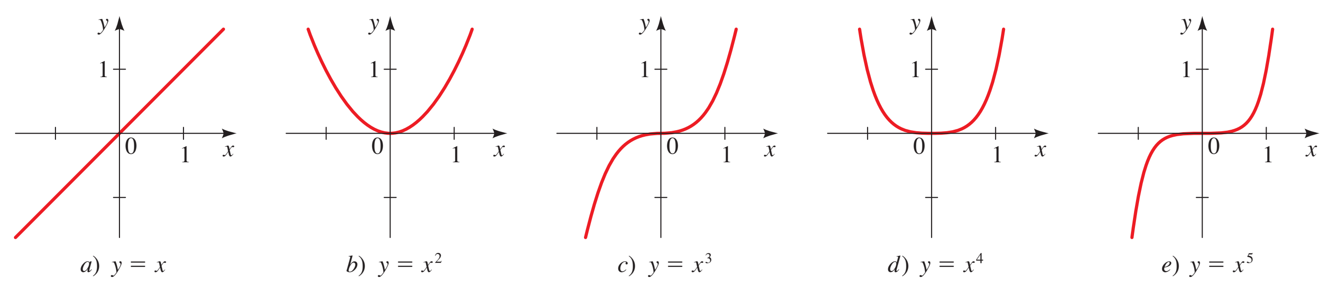


FIGURA 1 Gráficas de monomios

EJEMPLO 1 ■ Transformaciones de monomios

Trace las gráficas de las funciones siguientes.

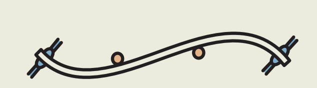
a) $P(x) = -x^3$ ***b)*** $Q(x) = (x - 2)^4$

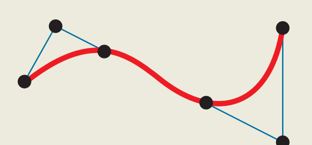
c) $R(x) = -2x^5 + 4$

Las matemáticas en el mundo moderno

Curvas paramétricas







Una curva paramétrica es una larga tira de madera que se curva al mismo tiempo que se mantiene fija en ciertos puntos. En el pasado los constructores de barcos empleaban curvas paramétricas para crear la forma curva del casco de un bote y también se usan para hacer las curvas de un piano, de un violín o la boca de salida de una tetera.

Los matemáticos descubrieron que se pueden obtener formas de curvas paramétricas al unir piezas de polinomios. Por ejemplo, se puede hacer que la gráfica de un polinomio cúbico se ajuste a puntos dados si se ajustan los coeficientes del polinomio (vea el ejemplo 10, página 265).

Las curvas obtenidas en esta forma reciben el nombre de curvas paramétricas cúbicas. En los modernos programas de diseño por computadora, como Adobe Illustrator® o Microsoft Paint®, se puede trazar una curva al fijar dos puntos y luego usar el ratón para arrastrar uno o más puntos de ancla. Mover los puntos de ancla significa ajustar los coeficientes de un polinomio cúbico.

SOLUCIÓN Usamos las gráficas de la figura 1 y las transformamos usando las técnicas de la sección 2.6.

a) La gráfica de $P(x) = -x^3$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^3$ en el eje x, como se muestra en la figura 2*a*).

b) La gráfica de $Q(x) = (x - 2)^4$ es la gráfica de $y = x^4$ desplazada 2 unidades a la derecha, como se muestra en la figura 2*b*).

c) Empezamos con la gráfica de $y = x^5$. La gráfica de $y = -2x^5$ se obtiene estirando la gráfica verticalmente y reflejándola en el eje x (vea la gráfica azul punteada de la figura 2*c*)). Por último, la gráfica de $R(x) = -2x^5 + 4$ se obtiene al desplazar 4 unidades hacia arriba (vea la gráfica roja en la figura 2*c*)).

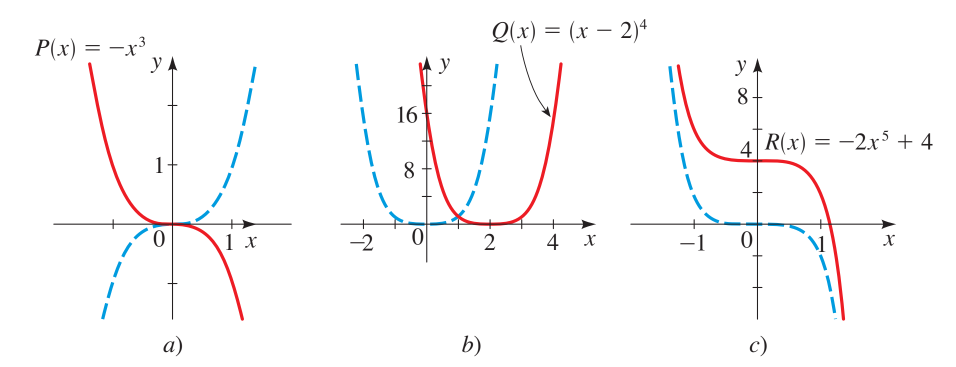
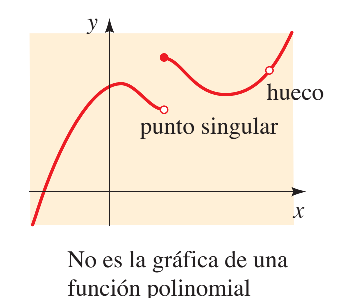


FIGURA 2

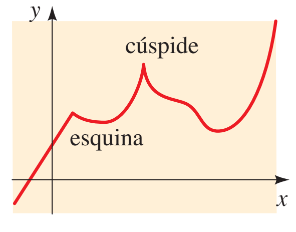
Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

Gráficas de funciones polinomiales: comportamiento final

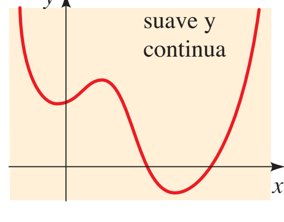
Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas (secciones 1.10 y 2.5) y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas (sección 3.1). Mientras mayor sea el grado de un polinomio más complicada puede ser su gráfica. No obstante, la gráfica de una función polinomial es **continua**. Esto significa que la gráfica no tiene puntos singulares ni huecos (vea la figura 3). Además, la gráfica de una función polinomial es una curva suave; esto es, no tiene esquinas ni puntos agudos (cúspides) como se muestra en la figura 3.



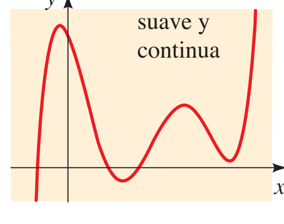
No es la gráfica de una función polinomial



No es la gráfica de una función polinomial



Es la gráfica de una función polinomial



Es la gráfica de una función polinomial

FIGURA 3

El dominio de una función polinomial es el conjunto de todos los números reales, por lo que podemos trazar sólo una pequeña parte de la gráfica. Sin embargo, para valores de x fuera de la parte de la gráfica que hemos dibujado podemos describir el comportamiento de la gráfica.

El **comportamiento final** de un polinomio es una descripción de lo que pasa cuando x se hace grande en la dirección positiva o negativa. Para describir el comportamiento final utilizamos la siguiente **notación de flecha**.

Símbolo	Significado
$x \to \infty$	x se aproxima a infinito, es decir, x crece sin límite
$x \to -\infty$	x se aproxima a infinito negativo, es decir, x decrece sin límite

Por ejemplo, el monomio $y = x^2$ en la figura 1*b*) tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

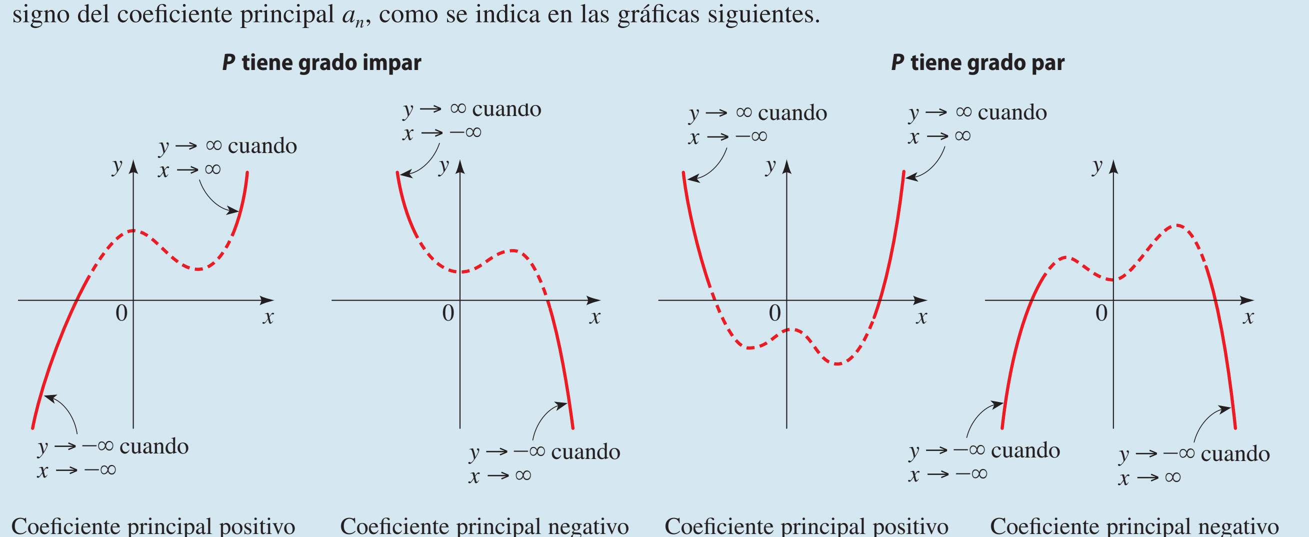
El monomio $y = x^3$ en la figura 1*c*) tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Para cualquier polinomio *el comportamiento final está determinado por el término que contiene la mayor potencia de* x, porque cuando x es grande los otros términos son relativamente insignificantes en magnitud. El cuadro siguiente muestra los cuatro posibles tipos de comportamiento final, con base en la potencia superior y el signo de su coeficiente.

COMPORTAMIENTO FINAL DE POLINOMIOS

El comportamiento final del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n, como se indica en las gráficas siguientes.



Coeficiente principal positivo — Coeficiente principal negativo — Coeficiente principal positivo — Coeficiente principal negativo

EJEMPLO 2 ■ Comportamiento final de un polinomio

Determine el comportamiento final del polinomio

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$$

SOLUCIÓN El polinomio P tiene grado 4 y coeficiente principal -2. Por tanto, P tiene grado *par* y coeficiente principal *negativo*, de modo que tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

La gráfica de la figura 4 muestra el comportamiento final de P.

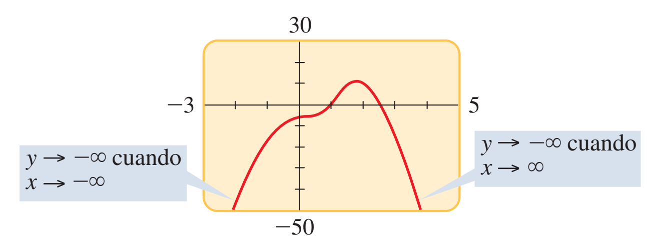


FIGURA 4 $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

EJEMPLO 3 ■ Comportamiento final de un polinomio

a) Determine el comportamiento final del polinomio $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$.

b) Confirme que P y su término principal $Q(x) = 3x^5$ tienen el mismo comportamiento final al trazar la gráfica de estas funciones juntas.

SOLUCIÓN

a) Dado que P tiene grado impar y coeficiente principal positivo tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

b) La figura 5 muestra las gráficas de P y Q en rectángulos de vista progresivamente más grandes. Mientras más grande sea el rectángulo de vista más se parecen las gráficas. Esto confirma que tienen el mismo comportamiento final.

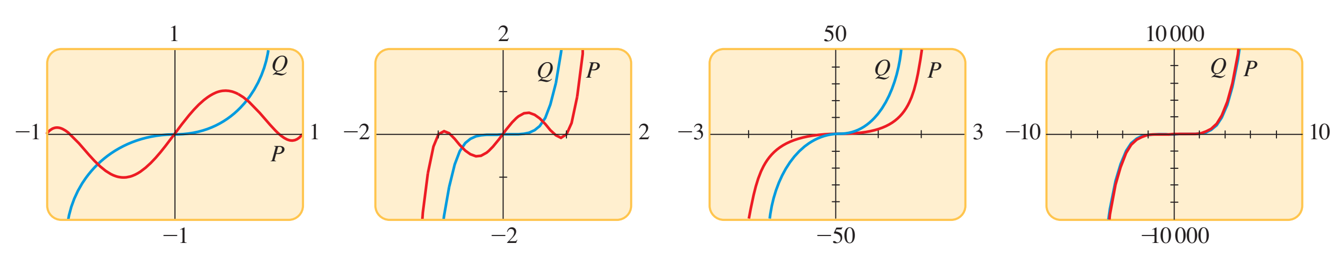


FIGURA 5
$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
$Q(x) = 3x^5$

Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

Para ver algebraicamente por qué P y Q del ejemplo 3 tienen el mismo comportamiento final factorice P como sigue y compárelo con Q.

$$P(x) = 3x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) \qquad Q(x) = 3x^5$$

Cuando x es grande, los términos $5/(3x^2)$ y $2/(3x^4)$ están cercanos a 0 (vea el ejercicio 83 en la página 12). Entonces, para x grande, tenemos

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 - 0) = 3x^5 = Q(x)$$

Por tanto, cuando x es grande, P y Q tienen aproximadamente los mismos valores. También podemos ver esto numéricamente si hacemos una tabla como la siguiente.

x	$P(x)$	$Q(x)$
15	2 261 280	2 278 125
30	72 765 060	72 900 000
50	936 875 100	937 500 000

Por el mismo razonamiento podemos demostrar que el comportamiento final de *cualquier* polinomio está determinado por su término principal.

■ Uso de ceros para trazar la gráfica de polinomios

Si P es una función polinomial, entonces c se denomina **cero** o raíz de P si $P(c) = 0$. En otras palabras, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Observe que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de P tiene un punto de intersección x en $x = c$, de modo que los puntos de intersección x de la gráfica son los ceros de la función.

CEROS REALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si P es un polinomio y c es un número real, entonces los siguientes son equivalentes:

1. c es un cero de P.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. c es un punto de intersección x de la gráfica de P.

Para encontrar los ceros de un polinomio P factorizamos y usamos la propiedad del producto cero (véase la página 48). Por ejemplo, para encontrar los ceros de $P(x) = x^2 + x - 6$, factorizamos P para obtener

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)$$

Desde esta forma factorizada podemos ver fácilmente que

1. 2 es un cero de P.
2. $x = 2$ es una solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.
3. $x - 2$ es un factor de $x^2 + x - 6$.
4. 2 es un punto de intersección x de la gráfica de P.

Los mismos hechos son verdaderos para el otro cero, -3.

El siguiente teorema tiene numerosas e importantes consecuencias. (Vea, por ejemplo, el *Proyecto de descubrimiento* de la página 276.) Aquí lo usamos para ayudarnos a trazar la gráfica de funciones polinomiales.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES POLINOMIALES

Si P es una función polinomial y $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe al menos un valor de c entre a y b para el cual $P(c) = 0$.

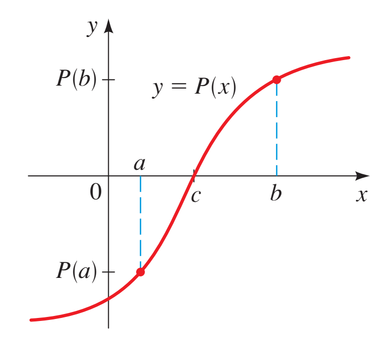


FIGURA 6

No demostraremos este teorema, pero la figura 6 muestra por qué es intuitivamente plausible.

Una consecuencia importante de este teorema es que, entre cualesquier dos ceros sucesivos, los valores de un polinomio son todos positivos o todos negativos. Esto es, entre dos ceros sucesivos la gráfica de un polinomio se encuentra *enteramente arriba* o *enteramente abajo* del eje x. Para ver por qué, suponga que c_1 y c_2 son ceros sucesivos de P. Si P tiene valores positivos y negativos entre c_1 y c_2, entonces por el teorema del valor intermedio, P debe tener otro cero entre c_1 y c_2. Pero eso no es posible porque c_1 y c_2 son ceros sucesivos. Esta observación nos permite usar la siguiente guía para graficar funciones polinomiales.

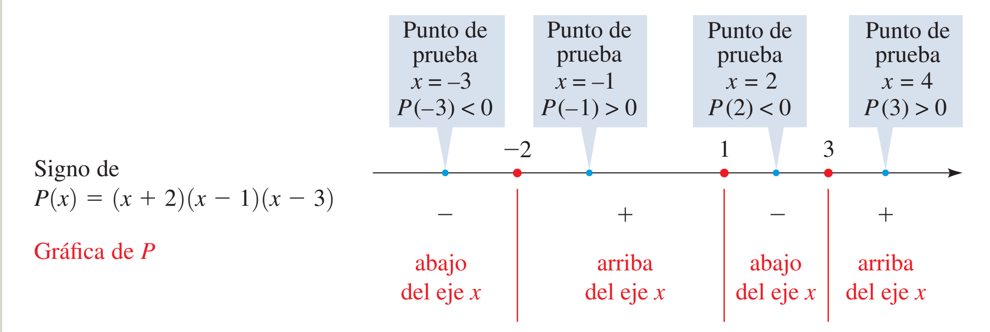
GUÍA PARA TRAZAR LA GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES

1. **Ceros.** Factorice el polinomio para encontrar todos sus ceros reales; estos son los puntos de intersección x de la gráfica.
2. **Puntos de prueba.** Haga una tabla de valores para el polinomio. Incluya puntos de prueba para determinar si la gráfica del polinomio se encuentra arriba o abajo del eje x sobre los intervalos determinados por los ceros. Incluya el punto de intersección y en la tabla.
3. **Comportamiento final.** Determine el comportamiento final del polinomio.
4. **Trazar la gráfica.** Coloque los puntos de intersección y otros puntos que se encuentren en la tabla. Trace una curva suave que pase por estos puntos y que tenga el comportamiento final requerido.

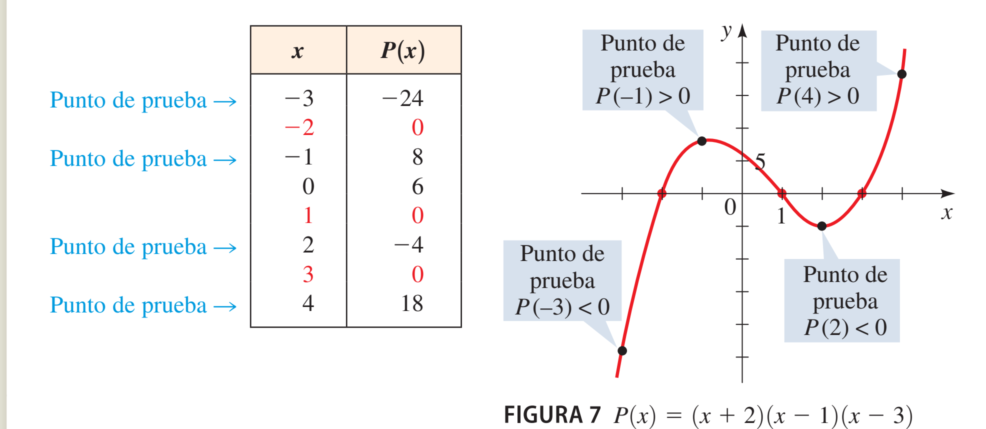
EJEMPLO 4 ■ Usar ceros para trazar la gráfica de una función polinomial

Trace la gráfica de la función polinomial $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

SOLUCIÓN Los ceros son $x = -2$, 1 y 3. Estos determinan los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, \infty)$. Usando puntos de prueba en estos intervalos obtenemos la información en el siguiente diagrama de signos (vea la sección 1.8).



Colocar unos cuantos puntos adicionales y unirlos con una curva suave nos ayuda a completar la gráfica de la figura 7.



	x	$P(x)$
Punto de prueba →	−3	−24
	−2	0
Punto de prueba →	−1	8
	0	6
	1	0
Punto de prueba →	2	−4
	3	0
Punto de prueba →	4	18

FIGURA 7 $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

EJEMPLO 5 ■ Encontrar ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

a) Encuentre los ceros de P. ***b)*** Trace una gráfica de P.

SOLUCIÓN

a) Para encontrar los ceros factorizamos completamente.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x \\ &= x(x^2 - 2x - 3) && \text{Factorice } x \\ &= x(x - 3)(x + 1) && \text{Factorice la cuadrática} \end{aligned}$$

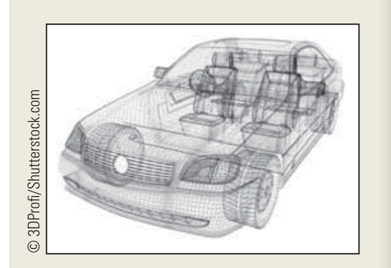
Entonces, los ceros son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$.

b) Los puntos de intersección x son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$. El punto de intersección y es $P(0) = 0$. Hacemos una tabla de valores de $P(x)$, asegurándonos de escoger puntos de prueba entre ceros sucesivos (a la derecha y a la izquierda de estos).

Dado que P es de grado impar y su coeficiente principal es positivo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Las matemáticas en el mundo moderno



Diseño automotriz

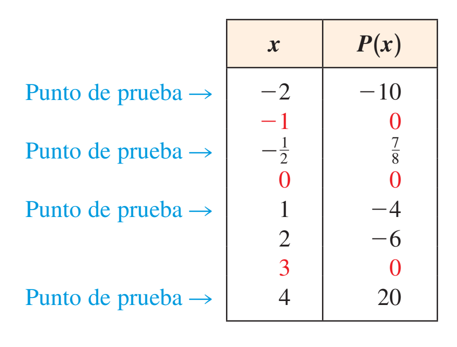
El diseño asistido por computadora (CAD) ha cambiado por completo la forma en que las compañías fabricantes de automotores diseñan y fabrica estos vehículos. Antes de la década de 1980 los ingenieros de diseño construirían un modelo de "tuercas y tornillos" a escala completa de un nuevo auto propuesto; esta era realmente la única forma de conocer si el diseño era factible. Hoy en día, los ingenieros automotrices construyen un modelo matemático que existe sólo en la memoria de una computadora. El modelo incorpora todas las características principales de diseño del auto. Ciertas curvas polinomiales, llamadas *curvas paramétricas*, se usan para dar forma a la carrocería del auto. El "auto matemático" resultante se puede probar en cuanto a su estabilidad estructural, manejo, aerodinámica, respuesta de suspensión y más; todas estas pruebas se realizan antes de construir un prototipo. Como es de suponerse, el CAD ahorra millones de dólares cada año a los fabricantes y, lo que es más importante, el CAD da a los ingenieros de diseño mucha más flexibilidad en el diseño, pues los cambios deseados se pueden crear y probar en segundos. Con ayuda de las gráficas por computadora los diseñadores pueden ver qué tan bien se verá un "auto matemático" antes de construir uno real. Además, el auto matemático puede ser visto desde cualquier perspectiva; puede moverse, se puede girar y se le puede ver desde el interior. Estas manipulaciones del auto en el monitor de una computadora se convierten matemáticamente en grandes sistemas de ecuaciones lineales para resolver.

Colocamos los puntos en la tabla y los unimos con una curva suave para completar la gráfica, como se muestra en la figura 8.

Una tabla de valores se calcula más fácilmente usando una calculadora programable o una calculadora graficadora. Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84* para tener instrucciones específicas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.



	x	$P(x)$
Punto de prueba →	-2	-10
	-1	0
Punto de prueba →	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
	0	0
Punto de prueba →	1	-4
	2	-6
	3	0
Punto de prueba →	4	20

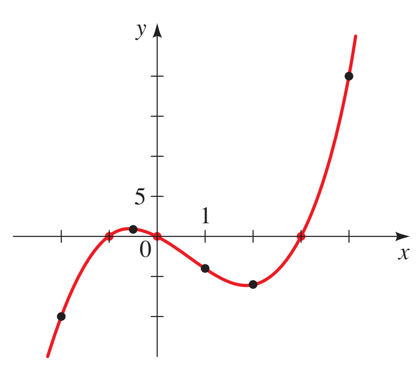


FIGURA 8 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

EJEMPLO 6 ■ Encontrar ceros y trazar la gráfica de una función polinomial

Sea $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$.

a) Encuentre los ceros de P. ***b***) Trace una gráfica de P.

SOLUCIÓN

a) Para encontrar los ceros factorizamos completamente.

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^4 - x^3 + 3x^2 \\ &= -x^2(2x^2 + x - 3) && \text{Factorizar } -x^2 \\ &= -x^2(2x + 3)(x - 1) && \text{Factorice la cuadrática} \end{aligned}$$

Entonces, los ceros son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$.

b) Los puntos de intersección x son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$. El punto de intersección y es $P(0) = 0$. Hacemos una tabla de valores de $P(x)$, asegurándonos de escoger puntos de prueba entre ceros sucesivos (a la derecha e y a la izquierda).

Dado que P es de grado par y su coeficiente principal es negativo tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Colocamos los puntos de la tabla y unimos los puntos con una curva suave para completar la gráfica de la figura 9.

x	$P(x)$
-2	-12
-1.5	0
-1	2
-0.5	0.75
0	0
0.5	0.5
1	0
1.5	-6.75

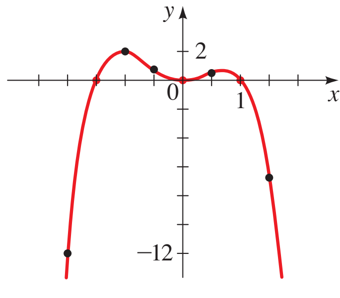


FIGURA 9 $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

EJEMPLO 7 ■ Encontrar ceros y trazar la gráfica de una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

***a*)** Encuentre los ceros de P. ***b*)** Trace una gráfica de P.

SOLUCIÓN

***a*)** Para encontrar los ceros factorizamos completamente.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \\ &= x^2(x-2) - 4(x-2) && \text{Agrupar y factorizar} \\ &= (x^2 - 4)(x-2) && \text{Factorizar } x - 2 \\ &= (x+2)(x-2)(x-2) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x+2)(x-2)^2 && \text{Simplificar} \end{aligned}$$

Entonces, los ceros son $x = -2$ y $x = 2$.

***b*)** Los puntos de intersección x son $x = -2$ y $x = 2$. El punto de intersección y es $P(0) = 8$. La tabla da valores adicionales de $P(x)$.

Dado que P es de grado impar y su coeficiente principal es positivo tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Unimos los puntos con una curva suave y completamos la gráfica de la figura 10.

x	$P(x)$
−3	−25
−2	0
−1	9
0	8
1	3
2	0
3	5

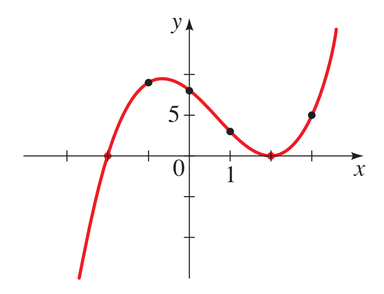


FIGURA 10
$P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

■ Forma de la gráfica cerca de un cero

Aun cuando $x = 2$ es un cero del polinomio en el ejemplo 7, la gráfica no cruza el eje x en el punto de intersección 2. Esto es porque el factor $(x - 2)^2$ correspondiente a ese cero está elevado a una potencia par, de modo que no cambia de signo cuando probamos puntos en cualquiera de los lados de 2. De la misma forma, la gráfica no cruza el eje x en $x = 0$ en el ejemplo 6.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Ciencia en un puente

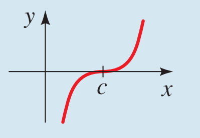
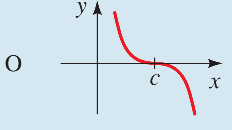
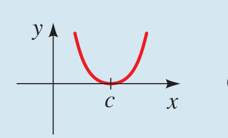
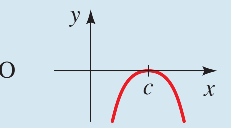
Si usted quiere construir un puente ¿cómo puede estar seguro de que su diseño del mismo es lo suficientemente fuerte como para soportar los autos que lo recorrerán? En este proyecto realizamos un experimento simple usando “puentes de papel” para recopilar datos sobre el peso que pueden soportar nuestros puentes. Modelamos los datos con funciones lineales y de potencia para determinar el modelo que mejor se ajusta a ellos. El modelo que obtenemos nos permite predecir la fuerza de un gran puente *antes* de que se construya. Puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

En general, si c es un cero de P, y el correspondiente factor $x - c$ se presenta exactamente m veces en la factorización de P, entonces decimos que c es un **cero de multiplicidad m**. Si consideramos puntos de prueba en cualquiera de los lados del punto c de la intersección x, concluimos que la gráfica cruza el eje x en c si la multiplicidad m es impar y no cruza el eje x si m es par. Además, se puede demostrar mediante cálculo que cerca de $x = c$ la gráfica tiene la misma forma general que la gráfica de $y = A(x - c)^m$.

FORMA DE LA GRÁFICA CERCA DE UN CERO DE MULTIPLICIDAD *m*

Si c es un cero de P de multiplicidad m, entonces la forma de la gráfica de P cerca de c es como sigue.

Multiplicidad de *c*	**Forma de la gráfica de *P* cerca del punto de intersección *x*, *c***
m impar, $m > 1$	 O 
m par, $m > 1$	 O 

EJEMPLO 8 ■ Trazar la gráfica de una función polinomial usando sus ceros

Trace la gráfica del polinomio $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$.

SOLUCIÓN Los ceros de P son -1, 0 y 2 con multiplicidades 2, 4 y 3, respectivamente:

0 es un cero de multiplicidad 4

2 es un cero de multiplicidad 3

–1 es un cero de multiplicidad 2

$$P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$$

El cero 2 tiene multiplicidad *impar*, de modo que la gráfica cruza el eje x en el punto de intersección x, 2. Pero los ceros 0 y -1 tienen multiplicidad *par*, de modo que la gráfica no cruza el eje x en los puntos de intersección 0 y -1.

Puesto que P es un polinomio de grado 9 y tiene coeficiente principal positivo tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Con esta información y una tabla de valores trazamos la gráfica de la figura 11.

x	$P(x)$
-1.3	-9.2
-1	0
-0.5	-3.9
0	0
1	-4
2	0
2.3	8.2

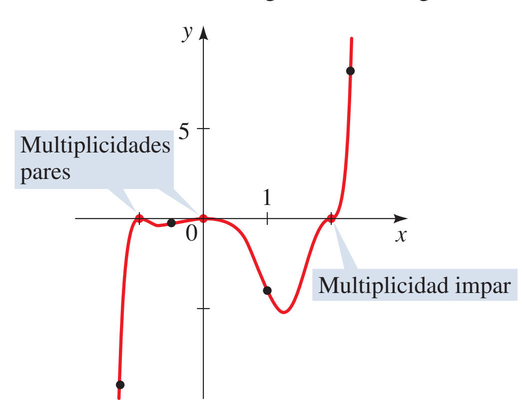


FIGURA 11 $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$

Ahora intente realizar el ejercicio 29

Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

Recuerde de la sección 2.3 que si el punto $(a, f(a))$ es el más alto en la gráfica de f dentro de algún rectángulo de vista, entonces $f(a)$ es un valor máximo local de f, y si $(b, f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de f dentro de un rectángulo de vista, entonces $f(b)$ es un valor mínimo local (vea la figura 12). Decimos que tal punto $(a, f(a))$ es un **punto máximo local** en la gráfica y que $(b, f(b))$ es un **punto mínimo local**. Los puntos máximos y mínimos locales en la gráfica de una función se denominan **extremos locales**.

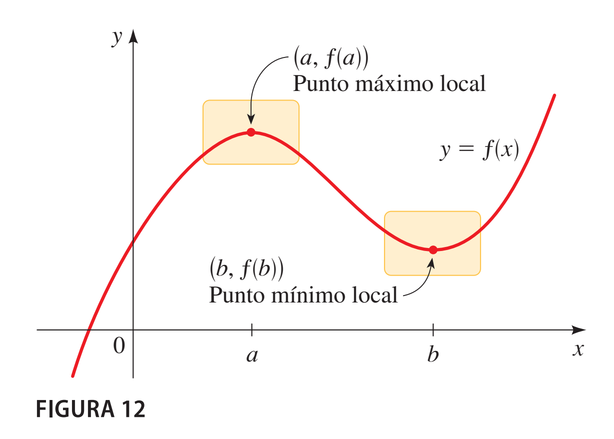


FIGURA 12

Para una función polinomial el número de extremos locales debe ser menor que el grado, como indica el siguiente principio. (Una prueba de este principio requiere cálculo.)

EXTREMOS LOCALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado n, entonces la gráfica de P tiene a lo más $n - 1$ extremos locales.

En efecto, un polinomio de grado n puede tener menos de $n - 1$ extremos locales. Por ejemplo, $P(x) = x^5$ (graficado en la figura 1) no tiene extremos locales, aun cuando es de grado 5. El principio precedente nos dice sólo que un polinomio de grado n no puede tener más de $n - 1$ extremos locales.



EJEMPLO 9 ■ El número de extremos locales

Trace la gráfica del polinomio y determine cuántos extremos locales tiene este.

a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

b) $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$

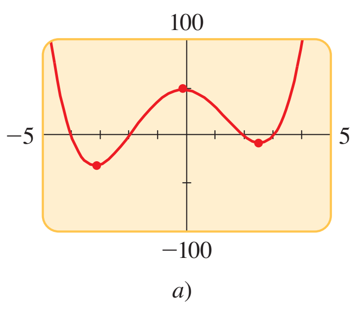
c) $P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

SOLUCIÓN Las gráficas se muestran en la figura 13.

a) P_1 tiene dos puntos mínimos locales y un punto máximo local para un total de tres extremos locales.

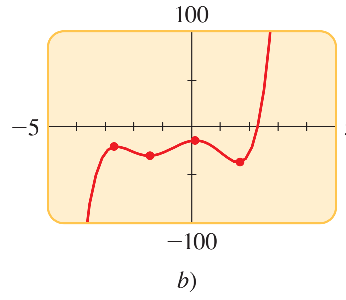
b) P_2 tiene dos puntos mínimos locales y dos puntos máximos locales para un total de cuatro extremos locales.

c) P_3 tiene sólo un extremo local y un mínimo local.



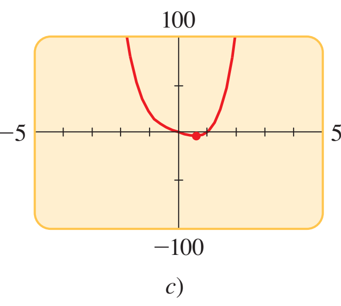
a)

$P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$



b)

$P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$



c)

$P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

FIGURA 13

Ahora intente realizar los ejercicios 65 y 67 ■

Con una calculadora graficadora podemos rápidamente trazar las gráficas de numerosas funciones a la vez, en la misma pantalla de vista. Esto nos permite ver de qué modo afecta la forma de su gráfica el hecho de cambiar un valor en la definición de las funciones. En el siguiente ejemplo aplicamos este principio a una familia de polinomios de tercer grado.

EJEMPLO 10 ■ Una familia de polinomios

Trace la familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$ para $c = 0, 1, 2$ y 3. ¿Cómo afecta a la gráfica cambiar el valor de c?

SOLUCIÓN Los polinomios

$$P_0(x) = x^3 \qquad P_1(x) = x^3 - x^2$$
$$P_2(x) = x^3 - 2x^2 \qquad P_3(x) = x^3 - 3x^2$$

están graficados en la figura 14. Vemos que aumentar el valor de c hace que la gráfica desarrolle un “valle” cada vez más profundo a la derecha del eje y, creando un máximo local en el origen y un mínimo local en un punto en el IV cuadrante. Este mínimo local se mueve más abajo y a más distancia a la derecha cuando c aumenta. Para ver por qué ocurre esto factorice $P(x) = x^2(x - c)$. El polinomio P tiene ceros en 0 y en c y, cuanto más grande se haga c, a más distancia a la derecha estará el mínimo entre 0 y c.

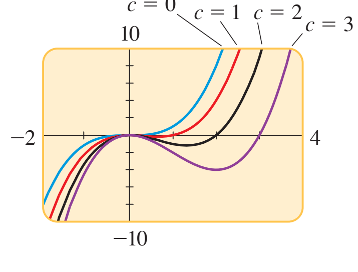


FIGURA 14 Una familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$

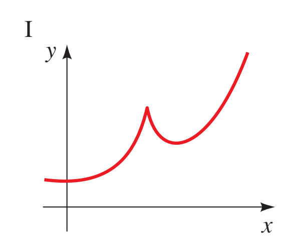
Ahora intente realizar el ejercicio 75 ■

3.2 EJERCICIOS

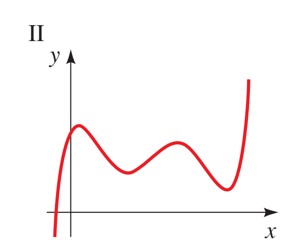
CONCEPTOS

1. Sólo una de las gráficas siguientes podría ser la gráfica de una función polinomial. ¿Cuál? ¿Por qué las otras no son gráficas de polinomios?

I



II



III

IV

2. Describa el comportamiento final de cada polimonio.

a) $y = x^3 - 8x^2 + 2x - 15$

Comportamiento final: $y \to$ ________ cuando $x \to \infty$

$y \to$ ________ cuando $x \to -\infty$

b) $y = -2x^4 + 12x + 100$

Comportamiento final: $y \to$ ________ cuando $x \to \infty$

$y \to$ ________ cuando $x \to -\infty$

3. Si c es un cero del polinomio P, entonces

a) $P(c) =$ ________.

b) $x - c$ es un ________ de $P(x)$.

c) c es una intersección ______ de la gráfica de P.

4. ¿Cuál de los siguientes enunciados podría no ser verdadero acerca de la función polinomial P?

a) P tiene grado 3, dos máximos locales y dos mínimos locales.

b) P tiene grado 3 y no tiene máximos ni mínimos locales.

c) P tiene grado 4, un máximo local y no tiene mínimos locales.

HABILIDADES

5–8 ■ Transformaciones de monomios Trace la gráfica de cada función al transformar la gráfica de una función apropiada de la forma $y = x^n$ de la figura 1. Indique todas las intersecciones x y y en cada gráfica.

5. *a*) $P(x) = x^2 - 4$ *b*) $Q(x) = (x - 4)^2$
c) $P(x) = 2x^2 + 3$ *d*) $P(x) = -(x + 2)^2$

6. *a*) $P(x) = x^4 - 16$ *b*) $P(x) = -(x + 5)^4$
c) $P(x) = -5x^4 + 5$ *d*) $P(x) = (x - 5)^4$

7. *a*) $P(x) = x^3 - 8$ *b*) $Q(x) = -x^3 + 27$
c) $R(x) = -(x + 2)^3$ *d*) $S(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^3 + 4$

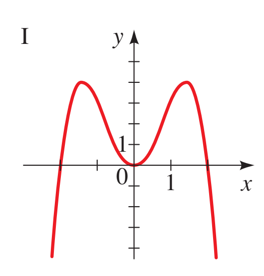
8. *a*) $P(x) = (x + 3)^5$ *b*) $Q(x) = 2(x + 3)^5 - 64$
c) $R(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5$ *d*) $S(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5 + 16$

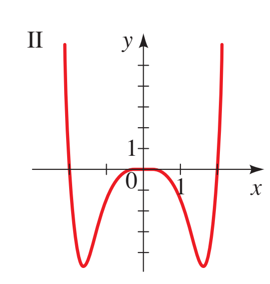
9–14 ■ Comportamiento final Se da una función polinomial. *a*) Describa el comportamiento final de la función polinomial. *b*) Relacione la función polinomial con una de las gráficas I-VI.

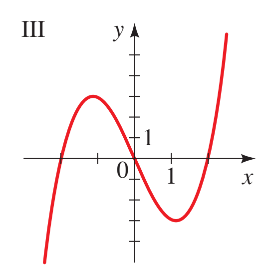
9. $P(x) = x(x^2 - 4)$ **10.** $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

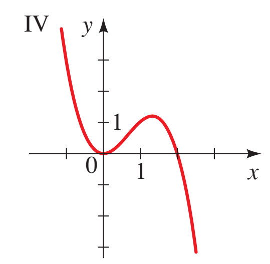
11. $R(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$ **12.** $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$

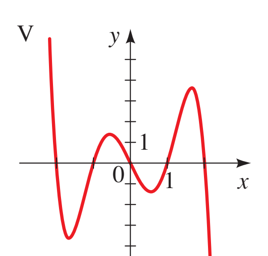
13. $T(x) = x^4 + 2x^3$ **14.** $U(x) = -x^3 + 2x^2$

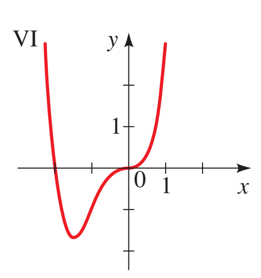












15–30 ■ Trazar la gráfica de los polinomios factorizados Trace la gráfica de la función polinomial. Asegúrese de que su gráfica muestre todos los puntos de intersección y exhiba el comportamiento final apropiado.

15. $P(x) = (x - 1)(x + 2)$

16. $P(x) = (2 - x)(x + 5)$

17. $P(x) = -x(x - 3)(x + 2)$

18. $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$

19. $P(x) = -2(x - 1)(x + 1)(x + 3)$

20. $P(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

21. $P(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

22. $P(x) = x(x + 1)(x - 1)(2 - x)$

23. $P(x) = -2x(x - 2)^2$

24. $P(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

25. $P(x) = (x + 2)(x + 1)^2(2x - 3)$

26. $P(x) = -(x + 1)^2(x - 1)^3(x - 2)$

27. $P(x) = \frac{1}{12}(x + 2)^2(x - 3)^2$

28. $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

29. $P(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$

30. $P(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$

31–44 ■ Trazar gráficas de polinomios Factorice el polinomio y use la forma factorizada para encontrar los ceros. Trace la gráfica.

31. $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$ **32.** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

33. $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$ **34.** $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$

35. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ **36.** $P(x) = x^5 - 9x^3$

37. $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

38. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

39. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

40. $P(x) = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)^2$

41. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

42. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$

43. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ **44.** $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$

45–50 ■ Comportamiento final Determine el comportamiento final de P. Compare las gráficas de P y Q en rectángulos de vista grandes y pequeños, como en el ejemplo 3*b*).

45. $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$; $Q(x) = 3x^3$

46. $P(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 12x$; $Q(x) = -\frac{1}{8}x^3$

47. $P(x) = x^4 - 7x^2 + 5x + 5$; $Q(x) = x^4$

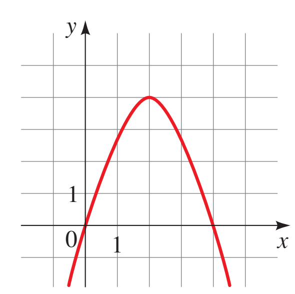
48. $P(x) = -x^5 + 2x^2 + x; \quad Q(x) = -x^5$

49. $P(x) = x^{11} - 9x^9; \quad Q(x) = x^{11}$

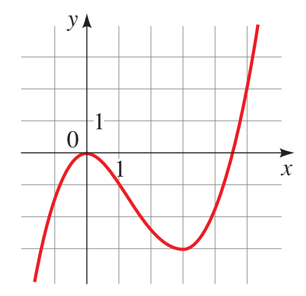
50. $P(x) = 2x^2 - x^{12}; \quad Q(x) = -x^{12}$

51–54 ■ Extremos locales Se da la gráfica de una función polinomial. Encuentre en la gráfica ***a*)** los puntos de intersección de x y y, y ***b*)** las coordenadas de todos los extremos locales.

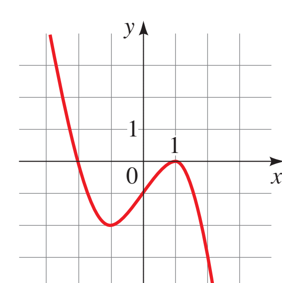
51. $P(x) = -x^2 + 4x$



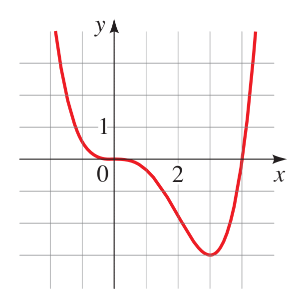
52. $P(x) = \frac{2}{9}x^3 - x^2$



53. $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$



54. $P(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3$



 **55–62 ■ Extremos locales** Trace la gráfica del polinomio en el rectángulo de vista dado. Encuentre las coordenadas de todos los extremos locales. Exprese su respuesta redondeada a dos lugares decimales. Indique el dominio y el rango.

55. $y = -x^2 + 8x, \quad [-4, 12]$ por $[-50, 30]$

56. $y = x^3 - 3x^2, \quad [-2, 5]$ por $[-10, 10]$

57. $y = x^3 - 12x + 9, \quad [-5, 5]$ por $[-30, 30]$

58. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 32, \quad [-5, 5]$ por $[-60, 30]$

59. $y = x^4 + 4x^3, \quad [-5, 5]$ por $[-30, 30]$

60. $y = x^4 - 18x^2 + 32, \quad [-5, 5]$ por $[-100, 100]$

61. $y = 3x^5 - 5x^3 + 3, \quad [-3, 3]$ por $[-5, 10]$

62. $y = x^5 - 5x^2 + 6, \quad [-3, 3]$ por $[-5, 10]$

 **63–72 ■ Número de extremos locales** Trace la gráfica del polinomio y determine cuántos máximos y mínimos locales tiene.

63. $y = -2x^2 + 3x + 5$

64. $y = x^3 + 12x$

65. $y = x^3 - x^2 - x$

66. $y = 6x^3 + 3x + 1$

67. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

68. $y = 1.2x^5 + 3.75x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 18x$

69. $y = (x - 2)^5 + 32$

70. $y = (x^2 - 2)^3$

71. $y = x^8 - 3x^4 + x$

72. $y = \frac{1}{3}x^7 - 17x^2 + 7$

 **73–78 ■ Familia de polinomios** Trace la gráfica de la familia de polinomios en el mismo rectángulo de vista, usando los valores dados de c. Explique la forma en que al cambiar el valor de c se afecta la gráfica.

73. $P(x) = cx^3; \quad c = 1, 2, 5, \frac{1}{2}$

74. $P(x) = (x - c)^4; \quad c = -1, 0, 1, 2$

75. $P(x) = x^4 + c; \quad c = -1, 0, 1, 2$

76. $P(x) = x^3 + cx; \quad c = 2, 0, -2, -4$

77. $P(x) = x^4 - cx; \quad c = 0, 1, 8, 27$

78. $P(x) = x^c; \quad c = 1, 3, 5, 7$

HABILIDADES Plus

79. Puntos de intersección de dos polinomios

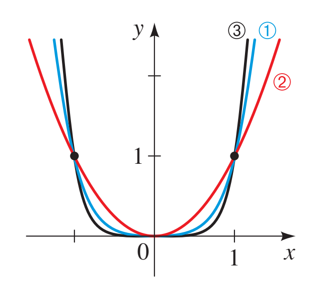
***a*)** En los mismos ejes de coordenadas trace las gráficas (tan precisamente como sea posible) de las funciones.

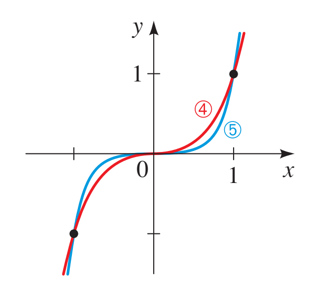
$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 \qquad \text{y} \qquad y = -x^2 + 5x + 2$$

***b*)** Con base en el trazo que haya hecho en el inciso *a*), ¿en cuántos puntos parecen cruzarse las dos graficas?

***c*)** Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección.

80. Funciones de potencia En la figura siguiente están localizadas partes de las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ y $y = x^6$. Determine qué función pertenece a cada gráfica.





81. Funciones pares e impares Recuerde que una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ o *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x real.

***a*)** Demuestre que una función polinomial $P(x)$ que contenga sólo potencias impares de x es una función impar.

***b*)** Demuestre que una función polinomial $P(x)$ que contenga sólo potencias pares de x es una función par.

c) Demuestre que si una función polinomial $P(x)$ contiene potencias impares y pares de x, entonces no es función ni impar ni par.

***d*)** Exprese la función

$$P(x) = x^5 + 6x^3 - x^2 - 2x + 5$$

como la suma de una función impar y una función par.

 **82. Número de intersecciones y extremos locales**

***a*)** ¿Cuántos puntos de intersección x, y cuántos extremos locales tiene el polinomio $P(x) = x^3 - 4x$?

***b*)** ¿Cuántos puntos de intersección x, y cuántos extremos locales tiene el polinomio $Q(x) = x^3 + 4x$?

***c*)** Si $a > 0$, ¿cuántos puntos de intersección x y cuántos extremos locales tiene cada uno de los polinomios $P(x) = x^3 - ax$ y $Q(x) = x^3 + ax$? Explique su respuesta.

83–86 ■ Extremos locales Estos ejercicios implican máximos y mínimos locales de funciones polinomiales.



83. ***a)*** Trace la gráfica de la función $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ y todos los extremos locales, redondeados al décimo más cercano.

b) Trace la gráfica de la función

$$Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4) + 5$$

y utilice sus respuestas del inciso *a*) para encontrar todos los extremos locales, redondeadas al décimo más cercano.



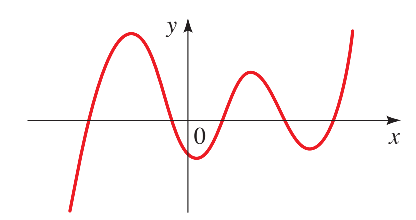
84. ***a)*** Trace la gráfica de la función $P(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$ y determine cuántos extremos locales tiene.

b) Si $a < b < c$, explique por qué la función

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

debe tener dos extremos locales.

85. Número máximo de extremos locales ¿Cuál es el grado más pequeño posible que puede tener el polinomio cuya gráfica se muestra? Explique.



86. ¿Situación imposible? ¿Es posible que un polinomio tenga dos máximos locales y ningún mínimo local? Explique.

APLICACIONES



87. Estudio de mercado Un analista de mercado que trabaja para un fabricante de aparatos electrodomésticos pequeños encuentra que, si la compañía produce y vende x licuadoras al año, su utilidad total (en dólares) es

$$P(x) = 8x + 0.3x^2 - 0.0013x^3 - 372$$

Trace la gráfica de la función P en un rectángulo de observación apropiado y use la gráfica para contestar las siguientes preguntas.

a) Cuando se fabrican sólo unas cuantas licuadoras, la compañía pierde dinero (utilidad negativa). (Por ejemplo $P(10) = -263.3$ de modo que la compañía pierde 263.30 doláres si produce y vende sólo 10 licuadoras.) ¿Cuántas licuadoras debe producir la compañía para alcanzar el punto de equilibrio (no pierde ni gana)?

b) Entre más licuadoras se produzcan y se vendan ¿se incrementa infinitamente la ganancia? Si no es así ¿cuál es la mayor ganancia posible que la firma puede tener?



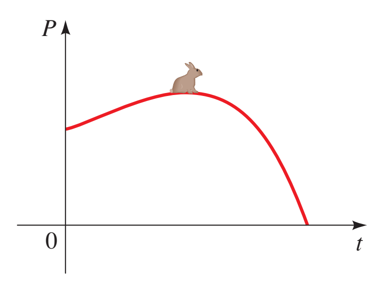
88. Cambio de población Se observa que la población de conejos en una pequeña isla está dada por la función

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1\,000$$

donde t es el tiempo (en meses) desde que se iniciaron las observaciones de la isla.

a) ¿Cuándo se alcanza la máxima población y cuál es la máxima población?

b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?



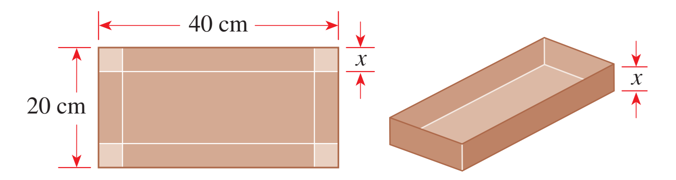
89. Volumen de una caja Se ha de construir una caja con una pieza de cartón de 20 por 40 cm, cortando cuadrados de longitud x de lado de cada esquina y doblando los lados, como se muestra en la figura.

a) Exprese el volumen V de la caja como función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)



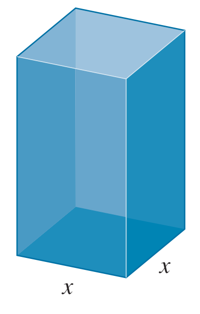
c) Trace una gráfica de la función V y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.



90. Volumen de una caja Una caja de cartón tiene base cuadrada y cada una de sus aristas mide de longitud x pulgadas, como se muestra en la figura. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 144 pulgadas.

a) Demuestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = 2x^2(18 - x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)





c) Trace una gráfica de la función V y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

91. DESCUBRIMIENTO: Gráficas de potencias grandes Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = x^5$, para $-1 \leq x \leq 1$, en los mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo piensa usted que se verá la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo? ¿Qué se puede decir de $y = x^{101}$? Haga una tabla de valores para confirmar sus respuestas.

92. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Número posible de extremos locales ¿Será posible que un polinomio de tercer grado tenga exactamente un extremo local? ¿Puede tener un polinomio de cuarto grado exactamente dos extremos locales? ¿Cuántos extremos locales pueden tener polinomios de tercero, cuarto, quinto y sexto grados? (Considere el comportamiento final de esos polinomios.) Luego dé un ejemplo de un polinomio que tenga seis extremos locales.

3.3 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

■ División larga de polinomios ■ División sintética ■ Los teoremas del residuo y factor

Hasta aquí en este capítulo hemos estudiado funciones polinomiales *gráficamente*. En esta sección empezaremos a estudiar polinomios *algebraicamente*. La mayor parte de nuestro trabajo se dedicará a factorizar polinomios y para factorizar necesitamos conocer cómo dividir polinomios.

División larga de polinomios

La división de polinomios es muy parecida al proceso conocido de dividir números. Cuando dividimos 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Escribimos

$$\frac{38}{7} = 5 + \frac{3}{7}$$

Dividendo (38), Divisor (7), Cociente (5), Residuo (3)

Para dividir polinomios usamos división larga, como sigue.

ALGORITMO DE DIVISIÓN

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios, con $D(x) \neq 0$, entonces existen los polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de un grado menor que el grado de $D(x)$, tal que

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \qquad \text{o} \qquad P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Dividendo ($P(x)$), Divisor ($D(x)$), Cociente ($Q(x)$), Residuo ($R(x)$)

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **residuo**.

EJEMPLO 1 ■ División larga de polinomios

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$. Exprese el resultado en cada una de las dos formas mostradas en el cuadro anterior.

SOLUCIÓN El *dividendo* es $6x^2 - 26x + 12$ y el *divisor* es $x - 4$. Empezamos por acomodarlos como sigue.

$$x - 4 \overline{)6x^2 - 26x + 12}$$

Luego dividimos el término principal del dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $6x^2/x = 6x$. Luego multiplicamos el divisor por $6x$ y restamos el resultado del dividendo.

$$\begin{array}{rll} & 6x & \quad \text{Dividiendo los términos principales: } \frac{6x^2}{x} = 6x \\ x - 4 \,\big) & 6x^2 - 26x + 12 & \\ & \underline{6x^2 - 24x} & \quad \text{Multiplique: } 6x(x-4) = 6x^2 - 24x \\ & -2x + 12 & \quad \text{Reste y "baje" 12} \end{array}$$

Repetimos el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como el dividendo.

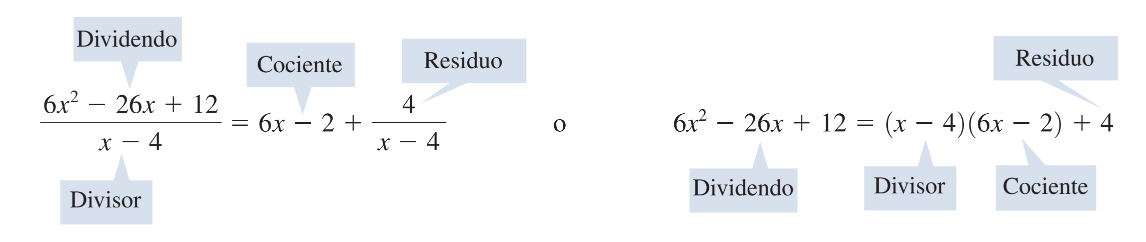
$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x - 2 \\
x - 4 & 6x^2 - 26x + 12 \\
 & \underline{6x^2 - 24x} \\
 & \qquad -2x + 12 \\
 & \qquad \underline{-2x + 18} \\
 & \qquad\qquad 4
\end{array}
$$

Dividiendo los términos principales: $\dfrac{-2x}{x} = -2$

Multiplique: $-2(x - 4) = -2x + 8$

Reste

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. El último renglón contiene al *residuo* y el renglón superior contiene al *cociente*. El resultado de la división se puede interpretar en cualquiera de dos formas:



✎ **Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 9** ■

EJEMPLO 2 ■ División larga de polinomios

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

SOLUCIÓN Usamos una división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas queden alineadas correctamente.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 + 2x \\
2x^2 - x + 2 & 8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1 \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} \\
 & \qquad 4x^3 - 2x^2 - 3x \\
 & \qquad \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} \\
 & \qquad\qquad -7x + 1
\end{array}
$$

Multiplique el divisor por $4x^2$

Reste

Multiplique el divisor por $2x$

Reste

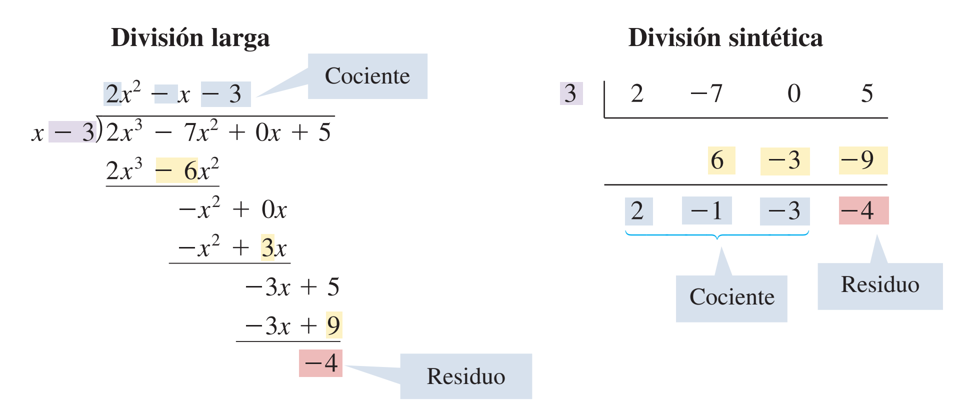
El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga anterior vemos que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, de modo que

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$

✎ **Ahora intente realizar el ejercicio 19** ■

■ División sintética

La **división sintética** es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor es de la forma $x - c$. En la división sintética escribimos sólo las partes esenciales de la división larga. Compare las siguientes divisiones, larga y sintética, en las que dividimos $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$. (Explicaremos cómo realizar la división sintética en el ejemplo 3.)



Observe que en la división sintética abreviamos $2x^3 - 7x^2 + 5$ al escribir sólo los coeficientes: 2 −7 0 5 y en lugar de $x - 3$ escribimos simplemente 3. (Escribir 3 en lugar de −3 nos permite sumar en lugar de restar, pero esto cambia el signo de todos los números que aparecen en las cajas color oro.)

El siguiente ejemplo muestra cómo se realiza la división sintética.

EJEMPLO 3 ■ División sintética

Use división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo:

Divisor $x - 3$ → 3 | 2 −7 0 5 ← Dividendo $2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$

Bajamos el 2, multiplicamos $3 \cdot 2 = 6$ y escribimos el resultado en el renglón de en medio. Luego sumamos.

3	2	−7	0	5	
		6			Multiplique: $3 \cdot 2 = 6$
	2	−1			Sume: $-7 + 6 = -1$

Repetimos este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

3	2	−7	0	5	
		6	−3		Multiplique: $3(-1) = -3$
	2	−1	−3		Sume: $0 + (-3) = -3$

3	2	−7	0	5	
		6	−3	−9	Multiplique: $3(-3) = -9$
	2	−1	−3	−4	Sume: $5 + (-9) = -4$

Cociente $2x^2 - x - 3$ — Residuo -4

Del último renglón de la división sintética vemos que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es −4. Por tanto,

$$2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$$

Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

Los teoremas del residuo y del factor

El siguiente teorema muestra la forma en que la división sintética se puede usar para evaluar polinomios fácilmente.

TEOREMA DEL RESIDUO

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

Demostración Si el divisor del algoritmo de división es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser constante (porque el grado del residuo es menor que el grado del divisor). Si a esta constante la llamamos r, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Al sustituir x por c en esta ecuación obtenemos $P(c) = (c - c) \cdot Q(c) + r = 0 + r = r$, esto es, $P(c)$ es el residuo r. ■

EJEMPLO 4 ■ Uso del teorema del residuo para encontrar el valor de un polinomio

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

***a*)** Encuentre el cociente y el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

***b*)** Use el teorema del residuo para encontrar $P(-2)$.

SOLUCIÓN

***a*)** Dado que $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma:

−2	3	5	−4	0	7	3
		−6	2	4	−8	2
	3	−1	−2	4	−1	5

El residuo es 5, entonces $P(-2) = 5$

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, y el residuo es 5.

***b*)** Por el teorema del residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. Del inciso *a*) el residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$.

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

El siguiente teorema dice que los *ceros* de los polinomios corresponden a *factores*. utilizamos este dato en la sección 3.2 para trazar la gráfica de polinomios.

TEOREMA DEL FACTOR

c es cero de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

Demostración Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c)Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c)Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

Inversamente, si $P(c) = 0$, entonces por el teorema del residuo

$$P(x) = (x - c)Q(x) + 0 = (x - c)Q(x)$$

de modo que $x - c$ es un factor de $P(x)$. ■

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x - 1\overline{)x^3 + 0x^2 - 7x + 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \quad\quad\quad\quad \\ x^2 - 7x \quad\quad \\ \underline{x^2 - x} \quad\quad \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

EJEMPLO 5 ■ Factorizar un polinomio usando el teorema del factor

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Demuestre que $P(1) = 0$ y use este hecho para factorizar $P(x)$ completamente.

SOLUCIÓN Al sustituir vemos que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el teorema del factor esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando división sintética o larga (que se muestra al margen), vemos que

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 && \text{Polinomio dado} \\ &= (x-1)(x^2 + x - 6) && \text{Vea al margen} \\ &= (x-1)(x-2)(x+3) && \text{Factorice la cuadrática } x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 53 y 57 ■

EJEMPLO 6 ■ Encontrar un polinomio con ceros especificados

Encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga ceros −3, 0, 1 y 5, y que el coeficiente de x^3 sea −6.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor, $x - (-3)$, $x - 0$, $x - 1$ y $x - 5$ deben ser todos factores del polinomio deseado. Sea

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+3)(x-0)(x-1)(x-5) \\ &= x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x \end{aligned}$$

El polinomio $P(x)$ es de grado 4, con los ceros deseados, pero el coeficiente de x^3 es −3 y no −6. La multiplicación por una constante diferente de cero no cambia el grado, por lo que el polinomio deseado es un múltiplo constante de $P(x)$. Si multiplicamos $P(x)$ por la constante 2, obtenemos

$$Q(x) = 2x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 30x$$

que es un polinomio con todas las propiedades deseadas. En la figura 1 se presenta la gráfica de Q. Observe que los ceros corresponden a los puntos de intersección x de la gráfica.

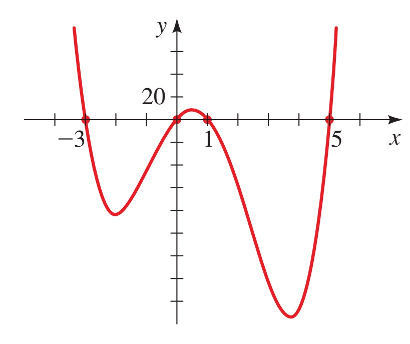


FIGURA 1
$Q(x) = 2x(x+3)(x-1)(x-5)$ tiene ceros en −3, 0, 1 y 5 y el coeficiente de x^3 es −6.

Ahora intente realizar los ejercicios 63 y 67 ■

3.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si dividimos el polinomio P entre el factor $x - c$ y obtenemos la ecuación $P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$ entonces decimos que $x - c$ es el divisor, $Q(x)$ es el ________, y $R(x)$ es el ________.

2. ***a)*** Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de 0, entonces sabemos que c es un ________ de P.

b) Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de k, entonces sabemos que $P(c) =$ ________.

HABILIDADES

3–8 ■ División de polinomios Se dan dos polinomios P y D. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$ y exprese el cociente $P(x)/D(x)$ en la forma

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

3. $P(x) = 2x^2 - 5x - 7$, $\quad D(x) = x - 2$

4. $P(x) = 3x^3 + 9x^2 - 5x - 1$, $\quad D(x) = x + 4$

5. $P(x) = 4x^2 - 3x - 7$, $\quad D(x) = 2x - 1$

6. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5$, $\quad D(x) = 3x - 4$

7. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2$, $\quad D(x) = x^2 + 4$

8. $P(x) = 2x^5 + x^3 - 2x^2 + 3x - 5$, $\quad D(x) = x^2 - 3x + 1$

9–14 ■ División de polinomios Se dan dos polinomios P y D. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y expresar P en la forma

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

9. $P(x) = -x^3 - 2x + 6, \quad D(x) = x + 1$

10. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 10x, \quad D(x) = x - 3$

11. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x, \quad D(x) = 2x - 3$

12. $P(x) = 4x^3 + 7x + 9, \quad D(x) = 2x + 1$

13. $P(x) = 8x^4 + 4x^3 + 6x^2, \quad D(x) = 2x^2 + 1$

14. $P(x) = 27x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 3, \quad D(x) = 3x^2 - 3x + 1$

15–24 ■ División larga de polinomios Encuentre el cociente y el residuo usando la división larga.

15. $\dfrac{x^2 - 3x + 7}{x - 2}$

16. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x + 3}$

17. $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$

18. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{3x + 6}$

19. $\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x + 3}$

20. $\dfrac{x^4 - 3x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 1}$

21. $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$

22. $\dfrac{9x^2 - x + 5}{3x^2 - 7x}$

23. $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

24. $\dfrac{2x^5 - 7x^4 - 13}{4x^2 - 6x + 8}$

25–38 ■ División sintética de polinomios Encuentre el cociente y el residuo usando división sintética.

25. $\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x - 3}$

26. $\dfrac{-x^2 + x - 4}{x + 1}$

27. $\dfrac{3x^2 + x}{x + 1}$

28. $\dfrac{4x^2 - 3}{x - 2}$

29. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

30. $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$

31. $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$

32. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$

33. $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$

34. $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$

35. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - \frac{1}{2}}$

36. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + \frac{2}{3}}$

37. $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

38. $\dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$

39–51 ■ Teorema del residuo Use división sintética y el teorema del residuo para evaluar $P(c)$.

39. $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

40. $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

41. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

42. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 5, \quad c = -1$

43. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7, \quad c = -2$

44. $P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 9x - 200, \quad c = 11$

45. $P(x) = 5x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 36x + 14, \quad c = -7$

46. $P(x) = 6x^5 + 10x^3 + x + 1, \quad c = -2$

47. $P(x) = x^7 - 3x^2 - 1, \quad c = 3$

48. $P(x) = -2x^6 + 7x^5 + 40x^4 - 7x^2 + 10x + 112, \quad c = -3$

49. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad c = \frac{2}{3}$

50. $P(x) = x^3 - x + 1, \quad c = \frac{1}{4}$

51. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 8, \quad c = 0.1$

52. Teorema del residuo Sea

$$P(x) = 6x^7 - 40x^6 + 16x^5 - 200x^4 - 60x^3 - 69x^2 + 13x - 139$$

Calcule $P(7)$ ***a)*** usando división sintética y ***b)*** sustituyendo $x = 7$ en la función polinomial y evaluando directamente.

53–56 ■ Teorema del factor Use el Teorema del factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $P(x)$ para el valor o los valores dados de c.

53. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad c = 1$

54. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \quad c = 2$

55. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5, \quad c = \frac{1}{2}$

56. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 27x + 63, \quad c = 3, -3$

57–62 ■ Teorema del factor Demuestre que el valor o los valores dados de c son ceros de $P(x)$, y encuentre todos los otros ceros de $P(x)$.

57. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18, \quad c = -2$

58. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 10, \quad c = 5$

59. $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15, \quad c = 3$

60. $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6, \quad c = -2, \frac{1}{3}$

61. $P(x) = 3x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 31x + 6, \quad c = -2, 3$

62. $P(x) = 2x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 37x + 15, \quad c = -1, 3$

63–66 ■ Encontrar un polinomio con ceros específicos Encuentre un polinomio del grado especificado que tenga los ceros dados.

63. Grado 3; ceros $-1, 1, 3$

64. Grado 4; ceros $-2, 0, 2, 4$

65. Grado 4; ceros $-1, 1, 3, 5$

66. Grado 5; ceros $-2, -1, 0, 1, 2$

67–70 ■ Encontrar un polinomio con ceros específicos Encuentre un polinomio del grado especificado que satisfaga las condiciones dadas.

67. Grado 4; ceros $-2, 0, 1, 3$; el coeficiente de x^3 es 4

68. Grado 4; ceros $-1, 0, 2, \frac{1}{2}$; el coeficiente de x^3 es 3

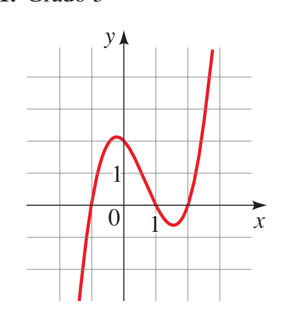
69. Grado 4; ceros $-1, 1, \sqrt{2}$; coeficientes enteros y término constante 6

70. Grado 5; ceros $-2, -1, 2, \sqrt{5}$; coeficientes enteros y término constante 40

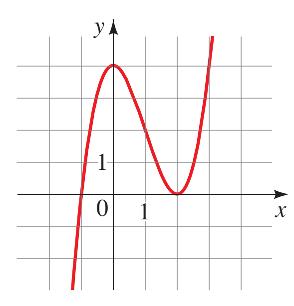
HABILIDADES Plus

71–74 ■ Encontrar un polinomio a partir de una gráfica Encuentre el polinomio del grado especificado cuya gráfica se muestra.

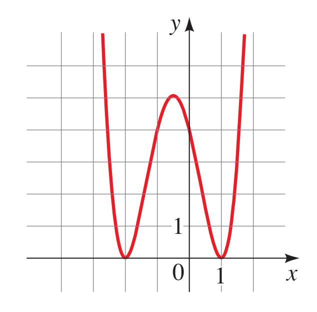
71. Grado 3



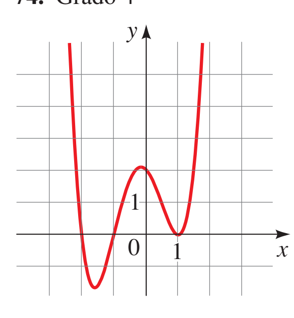
72. Grado 3



73. Grado 4



74. Grado 4



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

75. DISCUSIÓN: ¿División imposible? Suponga que le piden resolver los siguientes dos problemas en un examen:

A. Encuentre el residuo cuando $6x^{1000} - 17x^{562} + 12x + 26$ se divide entre $x + 1$.

B. ¿Es $x - 1$ un factor de $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$?

Obviamente, es imposible resolver estos problemas al hacer una división porque los polinomios son de grado muy alto. Use uno o más de los teoremas de esta sección para resolver estos problemas *sin* hacer realmente la división.

76. DESCUBRIMIENTO: Forma anidada de un polinomio Desarrolle Q para demostrar que los polinomios P y Q son iguales.

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 5$$

$$Q(x) = (((3x - 5)x + 1)x - 3)x + 5$$

Trate de evaluar $P(2)$ y $Q(2)$ mentalmente, usando las formas dadas. ¿Cuál es más fácil? Ahora escriba el polinomio $R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ en forma "anidada", como el polinomio Q. Use la forma anidada para encontrar $R(3)$ mentalmente.

¿Nota usted cómo para calcular con la forma anidada se siguen los mismos pasos aritméticos que para calcular el valor de un polinomio usando división sintética?

3.4 CEROS REALES DE POLINOMIOS

■ Ceros racionales de polinomios ■ Regla de los signos de Descartes ■ Teorema de los límites superior e inferior ■ Uso de álgebra y calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones con polinomios

El teorema del factor nos dice que encontrar los ceros de un polinomio es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección estudiamos algunos métodos algebraicos que nos ayudan a encontrar los ceros reales de un polinomio y, por tanto, factorizar el polinomio. Empezamos con los ceros *racionales* de un polinomio.

■ Ceros racionales de polinomios

Para ayudarnos a entender el siguiente teorema consideremos el polinomio

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4) \quad \text{Forma factorizada}$$

$$= x^3 - x^2 - 14x + 24 \quad \text{Forma desarrollada}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de P son 2, 3 y -4. Cuando se desarrolla el polinomio, la constante 24 se obtiene al multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto significa que los ceros del polinomio son todos ellos factores del término constante. Lo siguiente generaliza esta observación.

TEOREMA DE CEROS RACIONALES

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros (donde $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$), entonces todo cero racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p y q son enteros y

p es un factor del coeficiente constante a_0

q es un factor del coeficiente principal a_n

Demostración Si p/q es un cero racional, en términos más sencillos, de la función polinomial P, entonces tenemos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{Multiplique por } q^n$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \qquad \text{Reste } a_0 q^n \text{ y factorice el lado izquierdo}$$

Ahora p es un factor del lado izquierdo, de modo que también debe ser un factor del lado derecho. Como p/q está en sus términos más sencillos, p y q no tienen factor en común, de modo que p debe ser un factor de a_0. Una demostración similar muestra que q es un factor de a_n. ■

Vemos del teorema de ceros racionales que si el coeficiente principal es 1 o -1, entonces los ceros racionales deben ser factores del término constante.

EJEMPLO 1 ■ Uso del teorema de ceros racionales

Encuentre los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

SOLUCIÓN Dado que el coeficiente principal es 1, cualquier cero racional debe ser un divisor del término constante 2. Entonces los ceros racionales posibles son ± 1 y ± 2. Probamos cada una de estas posibilidades.

$$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$
$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$
$$P(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 4$$
$$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$$

Los ceros racionales de P son 1 y -2.

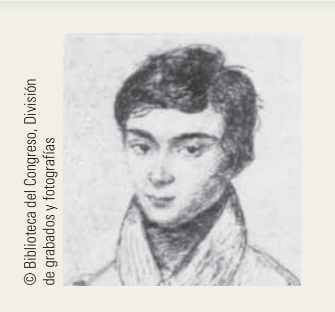
Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Apuntando a un cero

Hemos aprendido cómo encontrar los ceros de una función polinómica algebraicamente y gráficamente. En este proyecto se investiga un método *numérico* para encontrar los ceros de un polinomio. Con este método podemos aproximar los ceros de un polinomio con tantos decimales como queramos. El método consiste en encontrar intervalos cada vez más pequeños que puedan acercarse a un cero de un polinomio. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.



EVARISTE GALOIS (1811-1832) es uno de los muy pocos matemáticos que tienen toda una teoría a la que se le ha dado nombre en su honor. Murió cuando todavía no cumplía 21 años, pero ya había resuelto por completo el problema central de la teoría de ecuaciones al describir un criterio que revela si una ecuación con polinomios se puede resolver con operaciones algebraicas. Galois fue uno de los más grandes matemáticos de su tiempo aunque poco conocido. En diversas ocasiones envió su trabajo a los eminentes matemáticos Cauchy y Poisson quienes o bien perdieron las cartas o no entendieron sus ideas. Galois escribía en un estilo escueto e incluía pocos detalles, lo cual probablemente influyó para que no aprobara los exámenes de admisión a la Ecole Polytechnique de París. Político radical, Galois pasó varios meses en prisión debido a sus actividades revolucionarias. Su corta vida tuvo un trágico fin al morir durante un duelo debido a un lío de faldas. La noche anterior al duelo, y ante la posibilidad de perder la vida, Galois escribió la esencia de sus ideas y se las confió a su amigo Auguste Chevalier. Concluyó escribiendo "habrá, espero, personas que encuentren ventaja en descifrar todo este desorden". El matemático Camille Jordan hizo justamente esto 14 años después.

En el siguiente recuadro se explica cómo usar el teorema de ceros racionales con división sintética para factorizar un polinomio.

ENCONTRAR LOS CEROS RACIONALES DE UN POLINOMIO

1. **Hacer una lista de los ceros posibles.** Haga una lista de todos los ceros racionales posibles, usando el teorema de los ceros racionales.
2. **Dividir.** Use la división sintética para evaluar el polinomio de cada uno de los candidatos para los ceros racionales que usted encontró en el paso 1. Cuando el residuo sea 0 observe el cociente que haya obtenido.
3. **Repetir.** Repita los pasos 1 y 2 para el cociente. Deténgase cuando obtenga un cociente que sea cuadrático o que se factorice con facilidad, y use la fórmula cuadrática o factorice para encontrar los ceros restantes.

EJEMPLO 2 ■ Encontrar ceros racionales

Factorice el polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ y encuentre todos sus ceros.

SOLUCIÓN Por el teorema de ceros racionales, los ceros racionales de P son de la forma

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de término constante}}{\text{factor de coeficiente principal}}$$

El término constante es 6 y el coeficiente principal es 2, entonces

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de 6}}{\text{factor de 2}}$$

Los factores de 6 son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ y los factores de 2 son $\pm1, \pm2$. Por tanto, los posibles ceros racionales de P son

$$\pm\frac{1}{1},\quad \pm\frac{2}{1},\quad \pm\frac{3}{1},\quad \pm\frac{6}{1},\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{2}{2},\quad \pm\frac{3}{2},\quad \pm\frac{6}{2}$$

Simplificando las fracciones y eliminando duplicados, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales:

$$\pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\quad \pm6,\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{3}{2}$$

Para comprobar cuál de estos *posibles* ceros en realidad *son* ceros, necesitamos evaluar P en cada uno de estos números. Una forma eficiente de hacerlo es mediante la división sintética.

Pruebe con 1 como cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 2 & 3 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -10 & -4 \end{array}$$

El residuo *no* es 0, por lo que 1 *no* es un cero

Pruebe si 2 es un cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

El residuo *es* 0, por lo que 2 *es* un cero

De la última división sintética vemos que 2 es un cero de P y P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 && \text{Polinomio dado} \\ &= (x - 2)(2x^2 + 5x - 3) && \text{De la división sintética} \\ &= (x - 2)(2x - 1)(x + 3) && \text{Factorice } 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de P son 2, $\frac{1}{2}$ y –3.

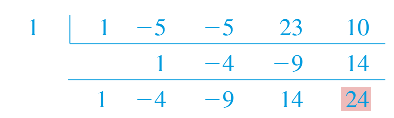
Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

EJEMPLO 3 ■ Uso del teorema de ceros racionales y la fórmula cuadrática

Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$.

a) Encuentre los ceros de P. ***b)*** Trace la gráfica de P.

SOLUCIÓN



1	1	−5	−5	23	10
		1	−4	−9	14
	1	−4	−9	14	24

2	1	−5	−5	23	10
		2	−6	−22	2
	1	−3	−11	1	12

5	1	−5	−5	23	10
		5	0	−25	−10
	1	0	−5	−2	0

a) El coeficiente principal de P es 1, de modo que todos los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 10. Entonces, los posibles candidatos son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$$

Usando la división sintética (vea al margen) encontramos que 1 y 2 no son ceros pero que 5 es un cero y P se factoriza como

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x - 5)(x^3 - 5x - 2)$$

Ahora tratamos de factorizar el cociente $x^3 - 5x - 2$. Sus posibles ceros son los divisores de -2, es decir,

$$\pm 1, \quad \pm 2$$

Como ya sabemos que 1 y 2 no son ceros del polinomio original P, no necesitamos probarlos otra vez. Al verificar los candidatos restantes, -1 y -2, vemos que -2 es un cero (vea al margen), y P se factoriza como

−2	1	0	−5	−2
		−2	4	2
	1	−2	−1	0

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 &= (x - 5)(x^3 - 5x - 2) \\ &= (x - 5)(x + 2)(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

Ahora use la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de P:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los ceros de P son 5, -2, $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$.

b) Ahora que conocemos los ceros de P podemos usar los métodos de la sección 3.2 para trazar la gráfica. Si deseamos usar una calculadora graficadora, conocer los ceros nos permite escoger un rectángulo de vista apropiado que sea lo suficiente ancho como para contener todos los puntos de intersección x de P. Las aproximaciones numéricas de los ceros de P son

$$5, \quad -2, \quad 2.4, \quad -0.4$$

Por tanto, en este caso escogemos el rectángulo $[-3, 6]$ por $[-50, 50]$ y trazamos la gráfica como se muestra en la figura 1.

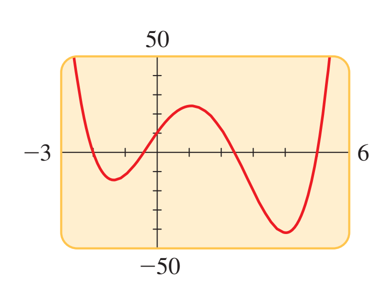


FIGURA 1
$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$

Ahora intente realizar los ejercicios 45 y 55 ■

■ Regla de los signos de Descartes

En algunos casos la regla siguiente, descubierta por el filósofo y matemático francés René Descartes hacia 1637 (véase la página 201), es útil para eliminar candidatos de largas listas de posibles raíces racionales. Para describir esta regla necesitamos el con-

Polinomio	Variaciones en signo
$x^2 + 4x + 1$	0
$2x^3 + x - 6$	1
$x^4 - 3x^2 - x + 4$	2

cepto de *variación en signo*. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, escrito con potencias descendentes de x (y omitiendo potencias con coeficiente 0), entonces una **variación en signo** se presenta siempre que coeficientes adyacentes tengan signos contrarios. Por ejemplo,

$$P(x) = 5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$$

tiene tres variaciones en signos.

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Sea P un polinomio con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(-x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.

La multiplicidad se estudia en la página 263.

En la regla de signos de Descartes un cero con multiplicidad m se cuenta m veces. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene dos cambios de signo y tiene el cero positivo $x = 1$. Pero este cero se cuenta dos veces porque tiene multiplicidad 2.

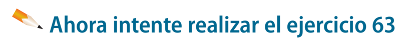
EJEMPLO 4 ■ Uso de la regla de Descartes

Use la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos del polinomio

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

SOLUCIÓN El polinomio tiene una variación en signo, de modo que tiene un cero positivo. Ahora

$$P(-x) = 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3$$



$$= 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3$$

Por tanto, $P(-x)$ tiene tres variaciones en signo. Entonces $P(x)$ tiene ya sea tres o un cero negativos, haciendo un total de dos o de cuatro ceros reales.

Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■

■ Teorema de los límites superior e inferior

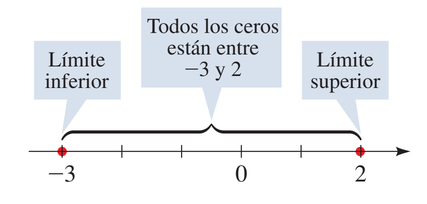
Decimos que a es un **límite inferior** y b es un **límite superior** para los ceros de un polinomio si todo cero real c del polinomio satisface $a \le c \le b$. El siguiente teorema nos ayuda a encontrar esos límites para los ceros de un polinomio.

TEOREMA DE LOS LÍMITES SUPERIOR E INFERIOR

Sea P un polinomio con coeficientes reales.

1. Si dividimos $P(x)$ entre $x - b$ (con $b > 0$) usando división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo no tiene una entrada negativa, entonces b es un límite superior para los ceros reales de P.
2. Si dividimos $P(x)$ entre $x - a$ (con $a < 0$) usando división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo tiene entradas que se alternan negativas y positivas, entonces a es un límite inferior para los ceros reales de P.

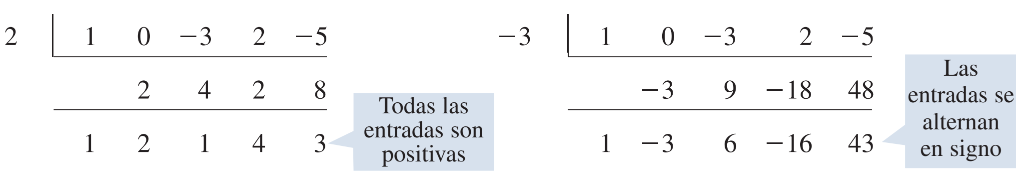
Una demostración de este teorema está sugerida en el ejercicio 109. La frase "que se alternan negativas y positivas" simplemente quiere decir que los signos de los números se alternan, con 0 considerado como positivo o negativo según se requiera.



EJEMPLO 5 ■ Límites superior e inferior para los ceros de un polinomio

Demuestre que todos los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ se encuentran entre -3 y 2.

SOLUCIÓN Dividimos $P(x)$ entre $x - 2$ y $x + 3$ usando división sintética:



2	1	0	−3	2	−5
		2	4	2	8
	1	2	1	4	3

−3	1	0	−3	2	−5
		−3	9	−18	48
	1	−3	6	−16	43

Por el teorema de los límites superior e inferior -3 es un límite inferior y 2 es un límite superior para los ceros. Dado que ni -3 ni 2 son un cero (los residuos no son 0 en la tabla de división) todos los ceros reales están entre estos números.


Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

EJEMPLO 6 ■ Límite inferior para ceros de un polinomio

Demuestre que todos los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 7x - 5$ son mayores o iguales a -4.

SOLUCIÓN Dividimos $P(x)$ entre $x + 4$ usando división sintética:

−4	1	4	3	7	−5
		−4	0	−12	20
	1	0	3	−5	15

Se alterna positivo y negativo

Dado que 0 se puede considerar positivo o negativo, el signo de las entradas se alterna. Entonces -4 es un límite inferior de los ceros reales de P.


Ahora intente realizar el ejercicio 73 ■

EJEMPLO 7 ■ Factorizar un polinomio de quinto grado

Factorice completamente el polinomio

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

SOLUCIÓN Los posibles ceros racionales de P son $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 3, +\frac{9}{2}$ y ± 9. Verificamos primero los candidatos positivos, empezando con el más pequeño:

$\frac{1}{2}$	2	5	−8	−14	6	9
		1	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{33}{4}$	$-\frac{9}{8}$
	2	6	−5	$-\frac{33}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{63}{8}$

$\frac{1}{2}$ no es un cero

1	2	5	−8	−14	6	9
		2	7	−1	−15	−9
	2	7	−1	−15	−9	0

$P(1) = 0$

Entonces 1 es un cero, y $P(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9)$. Continuamos factorizando el cociente. Todavía tenemos la misma lista de posibles ceros excepto que $\frac{1}{2}$ se ha eliminado.

1	2	7	−1	−15	−9
		2	9	8	−7
	2	9	8	−7	−16

1 no es un cero

$\frac{3}{2}$	2	7	−1	−15	−9
		3	15	21	9
	2	10	14	6	0

$P(\frac{3}{2}) = 0$, todas las entradas son positivas

Vemos que $\frac{3}{2}$ es un cero y un límite superior para los ceros de $P(x)$, de modo que no necesitamos verificar más para ceros positivos porque todos los candidatos restantes son mayores que $\frac{3}{2}$.

$$P(x) = (x - 1)(x - \tfrac{3}{2})(2x^3 + 10x^2 + 14x + 6) \qquad \text{Por división sintética}$$
$$= (x - 1)(2x - 3)(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \qquad \text{Factorice 2 del último factor, multiplíquelo dentro del segundo factor}$$

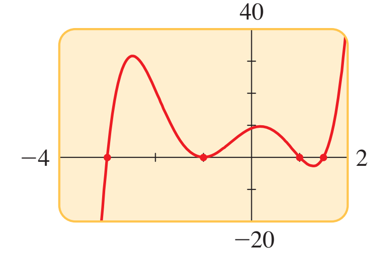


FIGURA 2
$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$
$= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3)$

Por la regla de los signos de Descartes, $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ no tiene cero positivo, de modo que sus únicos ceros racionales posibles son -1 y -3:

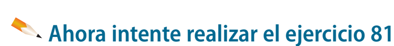
−1	1	5	7	3
		−1	−4	−3
	1	4	3	0

$P(-1) = 0$

Por tanto,

$$P(x) = (x - 1)(2x - 3)(x + 1)(x^2 + 4x + 3) \qquad \text{De la división sintética}$$
$$= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3) \qquad \text{Al factorizar la cuadrática}$$

Esto significa que los ceros de P son 1, $\frac{3}{2}$, -1 y -3. En la figura 2 se muestra la gráfica del polinomio.



Uso de álgebra y calculadoras gratificadoras para resolver ecuaciones con polinomios

En la sección 1.11 utilizamos calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones gráficamente. Ahora, para seleccionar un rectángulo de vista apropiado, cuando resolvamos gráficamente una ecuación con polinomios, podemos usar las técnicas algebraicas que hemos aprendido.

EJEMPLO 8 ■ Resolver gráficamente una ecuación de cuarto grado

Encuentre todas las soluciones reales de la siguiente ecuación, redondeadas al décimo más cercano:

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

SOLUCIÓN Para resolver gráficamente la ecuación graficamos

$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

Usamos el teorema de los límites superior e inferior para ver dónde pueden encontrarse las soluciones.

Primero usamos el teorema de los límites superior e inferior para encontrar dos números entre los cuales deben estar todas las soluciones. Esto nos permite escoger un rectángulo de vista que seguramente contiene todos los puntos de intersección x de P. Usamos división sintética y procedemos por prueba y error.

Para encontrar un límite superior intentamos los números enteros, 1, 2, 3, . . . , como candidatos potenciales. Vemos que 2 es un límite superior para las soluciones:

2	3	4	−7	−2	−3
		6	20	26	48
	3	10	13	24	45

Todos son positivos

Ahora buscamos un límite inferior intentando con los números −1, −2 y −3 como potenciales candidatos. Vemos que −3 es un límite inferior para las soluciones:

−3	3	4	−7	−2	−3
		−9	15	−24	78
	3	−5	8	−26	75

Las entradas se alternan en signo

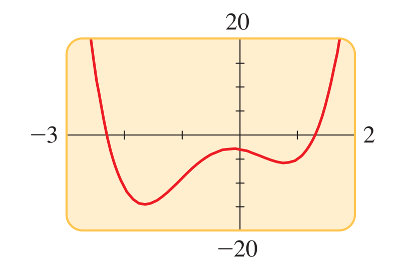


FIGURA 3
$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Entonces, todas las soluciones se encuentran entre −3 y 2. Por tanto, el rectángulo de vista $[-3, 2]$ por $[-20, 20]$ contiene todos los puntos de intersección x de P. La gráfica de la figura 3 tiene dos puntos de intersección x, uno entre −3 y −2 y el otro entre 1 y 2. Si hacemos un acercamiento (*zoom*) encontramos que las soluciones de la ecuación, al décimo más cercano, son −2.3 y 1.3.

Ahora intente realizar el ejercicio 95 ■

EJEMPLO 9 ■ Determinar el tamaño de un tanque de combustible

Un tanque de combustible está formado por una sección cilíndrica central de 4 pies de largo y dos secciones hemisféricas de extremo, como se muestra en la figura 4. Si el tanque tiene un volumen de 100 pies^3, ¿cuál es el radio r que se muestra en la figura, redondeado al centésimo de pie más cercano?

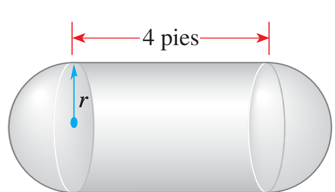
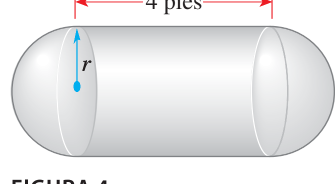



FIGURA 4

Volumen de un cilindro $V = \pi r^2 h$

Volumen de una esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

SOLUCIÓN Usando la fórmula del volumen, que se encuentra en el formulario* de la obra, vemos que el volumen de la sección cilíndrica del tanque es

$$\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

Las dos partes semiesféricas juntas forman una esfera completa cuyo volumen es

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Debido a que el volumen total del tanque es de 100 pies^3 obtenemos la siguiente ecuación:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 = 100$$

Una solución negativa para r no tendría sentido en esta situación física, y por sustitución podemos verificar que $r = 3$ conduce a un tanque que tiene más de 226 pies^3 de volumen, mucho mayor que el requerido de 100 pies^3. Por tanto, sabemos que el radio correcto está entre 0 y 3 pies, de modo que usamos un rectángulo de vista de $[0, 3]$ por $[50, 150]$ para graficar la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ como se muestra en la figura 5. Puesto que buscamos que el valor de esta función sea 100, también se traza la gráfica de la recta horizontal $y = 100$ en el mismo rectángulo de vista. El radio correcto será la coordenada x del punto de intersección de la curva y la recta. Usando el cursor y haciendo un acercamiento (*zoom*), vemos que en el punto de intersección $x \approx 2.15$, redondeado a dos lugares decimales. Entonces el tanque tiene un radio de aproximadamente 2.15 pies.

150
0 50 3

FIGURA 5
$y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ y $y = 100$

Ahora intente realizar el ejercicio 99 ■

Observe que podríamos haber resuelto la ecuación del ejemplo 9 al escribirla primero como

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100 = 0$$

y luego encontrar el punto de intersección x de la función $y = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100$.

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

3.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si la función polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes enteros, entonces los únicos números que posiblemente podrían ser ceros racionales de P son todos los de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es un factor de ________ y q es un factor de ________. Los posibles ceros racionales de $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 19x - 10$ son

____________________.

2. Usando la regla de los signos de Descartes podemos decir que el polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 8$ tiene

________, ________ o ________ ceros reales positivos y

________ ceros reales negativos.

3. *¿Verdadero o falso?* Si c es un cero real del polinomio P, entonces todos los otros ceros de P son ceros de $P(x)/(x - c)$.

4. *¿Verdadero o falso?* Si a es un límite superior para los ceros reales del polinomio P, entonces $-a$ es necesariamente un límite inferior para los ceros reales de P.

HABILIDADES

5–10 ■ Posibles ceros racionales Haga una lista de todos los posibles ceros racionales dados por el teorema de ceros racionales (pero no verifique cuáles son realmente ceros).

5. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

6. $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 8$

7. $R(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 - 8$

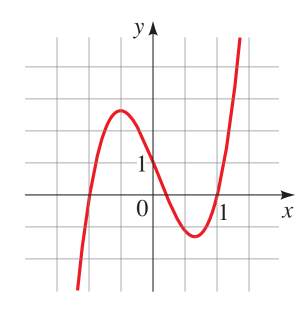
8. $S(x) = 6x^4 - x^2 + 2x + 12$

9. $T(x) = 4x^4 - 2x^2 - 7$

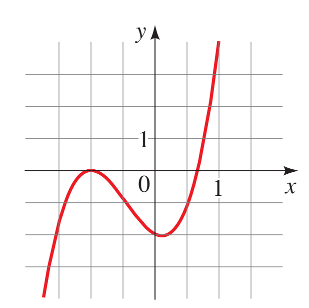
10. $U(x) = 12x^5 + 6x^3 - 2x - 8$

11–14 ■ Posibles ceros racionales Se dan una función polinomial P y su gráfica. ***a)*** Haga una lista de todos los posibles ceros racionales de P dados por el teorema de ceros racionales. ***b)*** De la gráfica determine cuáles de los posibles ceros racionales en realidad resultan ser ceros.

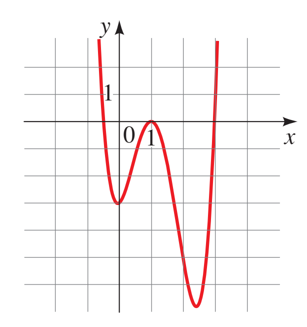
11. $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$



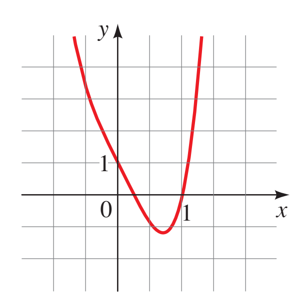
12. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$



13. $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$



14. $P(x) = 4x^4 - x^3 - 4x + 1$



15–28 ■ Ceros enteros Todos los ceros reales del polinomio dado son enteros. Encuentre todos los ceros, y escriba el polinomio en su forma factorizada.

15. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

16. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 19x - 14$

17. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

18. $P(x) = x^3 - 3x - 2$

19. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

20. $P(x) = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

21. $P(x) = x^3 - 19x - 30$

22. $P(x) = x^3 + 11x^2 + 8x - 20$

23. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

24. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

25. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

26. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

27. $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

28. $P(x) = x^4 - x^3 - 23x^2 - 3x + 90$

29–44 ■ Ceros racionales Encuentre todos los ceros racionales del polinomio y escríbalo en forma factorizada.

29. $P(x) = 4x^4 - 37x^2 + 9$

30. $P(x) = 6x^4 - 23x^3 - 13x^2 + 32x + 16$

31. $P(x) = 3x^4 - 10x^3 - 9x^2 + 40x - 12$

32. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

33. $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

34. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

35. $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$

36. $P(x) = 12x^3 - 25x^2 + x + 2$

37. $P(x) = 24x^3 + 10x^2 - 13x - 6$

38. $P(x) = 12x^3 - 20x^2 + x + 3$

39. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$

40. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$

41. $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 31x^2 + 36$

42. $P(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24$

43. $P(x) = 3x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 43x + 10$

44. $P(x) = 2x^6 - 3x^5 - 13x^4 + 29x^3 - 27x^2 + 32x - 12$

45–54 ■ Ceros reales de un polinomio Encuentre todos los ceros reales del polinomio. Use la fórmula cuadrática si es necesario, como en el ejemplo 3*a*).

45. $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x - 4$

46. $P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 7x + 15$

47. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x + 4$

48. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

49. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 3x - 9$

50. $P(x) = x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 + 2x - 4$

51. $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$

52. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8x - 2$

53. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x - 1$

54. $P(x) = 4x^5 - 18x^4 - 6x^3 + 91x^2 - 60x + 9$

55–62 ■ Ceros reales de un polinomio Se da un polinomio *P*. ***a)*** Encuentre todos los ceros reales de *P*. ***b)*** Trace la gráfica de *P*.

55. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

56. $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

57. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$

58. $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$

59. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

60. $P(x) = -x^4 + 10x^2 + 8x - 8$

61. $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$

62. $P(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3$

63–68 ■ Regla de los signos de Descartes Use la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y cuántos negativos puede tener el polinomio. Luego determine el posible número total de ceros reales.

63. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 3$

64. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$

65. $P(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$

66. $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$

67. $P(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 + 6x$

68. $P(x) = x^8 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

69–76 ■ Límites superior e inferior Demuestre que los valores dados para *a* y *b* son límites inferior y superior para los ceros reales del polinomio.

69. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2; \quad a = -3, b = 1$

70. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8; \quad a = -3, b = 5$

71. $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - 39x + 9; \quad a = -3, b = 2$

72. $P(x) = 3x^4 - 17x^3 + 24x^2 - 9x + 1; \quad a = 0, b = 6$

73. $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1; \quad a = -2, b = 1$

74. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x - 7; \quad a = -4, b = 2$

75. $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x + 3; \quad a = -1, b = 3$

76. $P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x - 1; \quad a = -1, b = 2$

77–80 ■ Límites superior e inferior Encuentre enteros que sean límites superiores e inferiores para los ceros reales del polinomio.

77. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

78. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$

79. $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2$

80. $P(x) = x^5 - x^4 + 1$

81–86 ■ Ceros de un polinomio Encuentre todos los ceros racionales del polinomio y luego encuentre los ceros irracionales, si los hay. Siempre que sea apropiado use el teorema de ceros racionales, el teorema de los límites superiores e inferiores, la regla de los signos de Descartes, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización.

81. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

82. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 20x + 4$

83. $P(x) = 4x^4 - 21x^2 + 5$

84. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x$

85. $P(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 50x + 24$

86. $P(x) = 8x^5 - 14x^4 - 22x^3 + 57x^2 - 35x + 6$

87–90 ■ Polinomios sin ceros racionales Demuestre que el polinomio no tiene ningún cero racional.

87. $P(x) = x^3 - x - 2$

88. $P(x) = 2x^4 - x^3 + x + 2$

89. $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 12$

90. $P(x) = x^{50} - 5x^{25} + x^2 - 1$



91–94 ■ Verificar ceros usando una calculadora graficadora Las soluciones reales de la ecuación dada son racionales. Haga una lista de todas las posibles raíces racionales usando el teorema de ceros racionales, y luego trace la gráfica del polinomio en el rectángulo de vista dado para determinar qué valores son soluciones realmente. (Todas las soluciones se pueden ver en el rectángulo de vista.)

91. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-15, 15]$

92. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-30, 30]$

93. $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 5x + 12 = 0$; $[-2, 5]$ por $[-40, 40]$

94. $3x^3 + 8x^2 + 5x + 2 = 0$; $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$



95–98 ■ Encontrar ceros usando una calculadora graficadora Use una calculadora graficadora para encontrar todas las soluciones reales de la ecuación, redondeada a dos lugares decimales.

95. $x^4 - x - 4 = 0$

96. $2x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0$

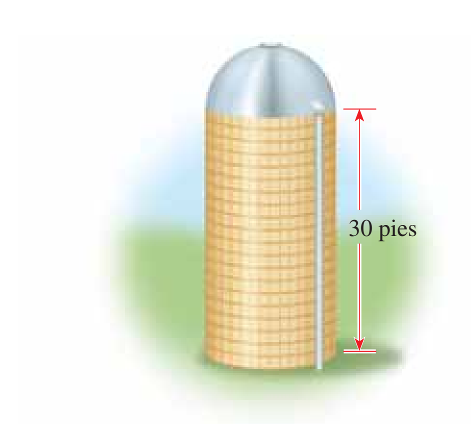
97. $4.00x^4 + 4.00x^3 - 10.96x^2 - 5.88x + 9.09 = 0$

98. $x^5 + 2.00x^4 + 0.96x^3 + 5.00x^2 + 10.00x + 4.80 = 0$

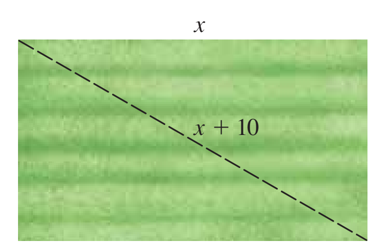
APLICACIONES



99. Volumen de un silo Un silo para granos está formado por una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Si el volumen total del silo (incluyendo la parte dentro de la sección del techo) es de 15 000 pies^3 y la parte cilíndrica es de 30 pies de altura, ¿cuál es el radio del silo, redondeado al décimo de pie más cercano?



100. Dimensiones de un lote Una parcela rectangular de tierra tiene un área de 5 000 pies^2. Una diagonal entre esquinas opuestas se mide de 10 pies más larga que un lado de la parcela. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno, redondeadas al pie mis cercano?





101. Profundidad de una nevada Empezó a caer nieve al mediodía de un domingo. La cantidad de nieve en el suelo en cierto lugar en el tiempo t está dada por la función

$$h(t) = 11.60t - 12.41t^2 + 6.20t^3 - 1.58t^4 + 0.20t^5 - 0.01t^6$$

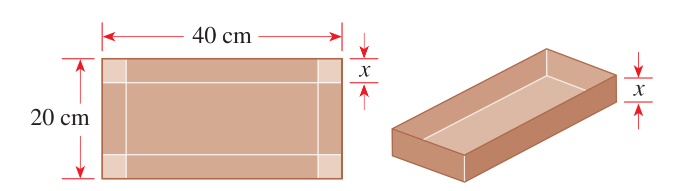
donde t se mide en días desde el comienzo de la nevada y $h(t)$ es la profundidad de la nieve en pulgadas. Trace una gráfica de esta función y use su gráfica para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Qué ocurrió poco después del mediodía del martes?

b) ¿Hubo más de 5 pulgadas de nieve? Si fue así, ¿qué día(s)?

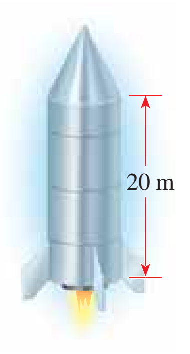
c) ¿Qué día y a qué hora (a la hora más cercana) desapareció por completo la nieve?

102. Volumen de una caja Una caja abierta con volumen de 1 500 cm^3 ha de construirse tomando una pieza de cartón de 20 por 40 cm, cortando cuadrados con lados de longitud de x cm en cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Demuestre que esto puede hacerse de dos formas diferentes y encuentre las dimensiones exactas de la caja en cada caso.





103. Volumen de un cohete Un cohete está formado por un cilindro circular recto de 20 m de altura, rematado por un cono cuyos altura y diámetro son iguales y cuyo radio es igual que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser este radio (redondeado a dos lugares decimales) si el volumen total ha de ser de $500\pi/3$ m^3?

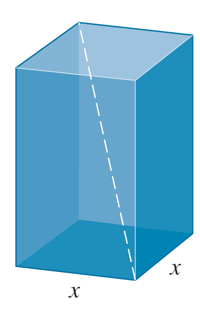


104. Volumen de una caja Una caja rectangular con volumen de $2\sqrt{2}$ pies^3 tiene una base cuadrada como se muestra en la figura siguiente. La diagonal de la caja (entre dos esquinas opuestas) es 1 pie más larga que cada lado de la base.

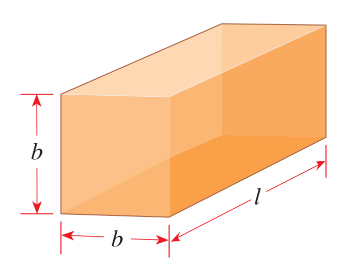
a) Si la caja tiene lados de x pies de longitud, demuestre que

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 8 = 0$$

b) Demuestre que dos cajas diferentes satisfacen las condiciones dadas. Encuentre las dimensiones en cada caso, redondeadas al centésimo de pie más cercano.



105. Perímetro de una caja Una caja con base cuadrada tiene longitud más perímetro de 108 pulgadas. (Perímetro es la distancia "alrededor" de la caja.) ¿Cuál será la longitud de la caja si su volumen es de 2200 pulg^3?



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

106. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: ¿Cuántos ceros reales puede tener un polinomio? Dé ejemplos de polinomios que tengan las siguientes propiedades o explique por qué es imposible encontrar ese polinomio.

a) Un polinomio de grado 3 que no tiene ceros reales

b) Un polinomio de grado 4 que no tiene ceros reales

c) Un polinomio de grado 3 que no tiene tres ceros reales, y sólo uno de los cuales es racional

d) Un polinomio de grado 3 que no tiene cuatro ceros reales, y ninguno de los cuales es racional

¿Qué debe ser verdadero acerca del grado de un polinomio con coeficientes enteros si no tiene ceros reales?

107. DISCUSIÓN ■ DEMOSTRACIÓN: La cúbica deprimida La ecuación cúbica más general (tercer grado) con coeficientes racionales se puede escribir como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

a) Demuestre que si sustituimos x por $X - a/3$ y simplificamos, terminamos con una ecuación que no tiene término en X^2, es decir, una ecuación de la forma

$$X^3 + pX + q = 0$$

Esta se llama *cúbica deprimida*, porque "no tiene" el término cuadrático.

b) Use el procedimiento descrito en el inciso *a*) para deprimir la ecuación $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$.

108. DISCUSIÓN: La fórmula cúbica Se puede usar la fórmula cuadrática para resolver cualquier ecuación cuadrática (o de segundo grado). El estudiante puede preguntarse si existen esas fórmulas para ecuaciones cúbicas (de tercer grado), cuadráticas (de cuarto grado) y de grado superior. Para la cúbica deprimida $x^3 + px + q = 0$, Cardano (página 292) encontró la siguiente fórmula para una solución:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Una fórmula para ecuaciones cuárticas (de cuarto grado) fue descubierta por el matemático italiano Ferrari en 1540. En 1824 el matemático noruego Niels Henrik Abel demostró que es imposible escribir una fórmula quíntica, es decir, una fórmula para ecuaciones de quinto grado. Finalmente, Galois (página 277) dio un criterio para determinar cuáles ecuaciones se pueden resolver mediante una fórmula que contenga radicales.

Utilice la fórmula cúbica para encontrar una solución para las siguientes ecuaciones. Luego resuelva las ecuaciones usando los métodos que aprendió en esta sección. ¿Cuál método es más fácil?

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

b) $x^3 - 27x - 54 = 0$

c) $x^3 + 3x + 4 = 0$

109. DEMOSTRACIÓN: Teorema de los límites superiores e inferiores Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales y sea $b > 0$. Use el algoritmo de división para escribir

$$P(x) = (x - b) \cdot Q(x) + r$$

Suponga que $r \geq 0$ y que todos los coeficientes en $Q(x)$ son positivos. Sea $z > b$.

a) Demuestre que $P(z) > 0$.

b) Demuestre la primera parte del teorema de los límites superior e inferior.

c) Use la primera parte del teorema de los límites superior e inferior para demostrar la segunda parte. [*Sugerencia:* demuestre que si $P(x)$ satisface la segunda parte del teorema, entonces $P(-x)$ satisface la primera parte.]

110. DEMOSTRACIÓN: Número de raíces racionales e irracionales Demuestre que la ecuación

$$x^5 - x^4 - x^3 - 5x^2 - 12x - 6 = 0$$

tiene exactamente una raíz racional, luego demuestre que debe tener ya sea dos o cuatro raíces irracionales.

3.5 CEROS COMPLEJOS Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

■ El teorema fundamental del álgebra y factorización completa ■ Ceros y sus multiplicidades ■ Los ceros complejos se presentan en pares conjugados ■ Factores lineales y cuadráticos

Ya hemos visto que un polinomio de grado n puede tener como máximo n ceros reales. En el sistema de números complejos un polinomio de grado n tiene exactamente n ceros y por tanto se puede factorizar en exactamente n factores lineales. Este hecho es una consecuencia del teorema fundamental del álgebra, que fue demostrado por el matemático alemán C. F. Gauss en 1799 (véase la página 290).

El teorema fundamental del álgebra y factorización completa

El siguiente teorema es la base para gran parte de nuestro trabajo de factorizar polinomios y resolver ecuaciones con polinomios.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA

Todo polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1,\ a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo.

En la sección 1.6 se estudian los números complejos.

Debido a que cualquier número real también es un número complejo, el teorema también se aplica a polinomios con coeficientes reales.

Juntos, el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor demuestran que un polinomio se puede factorizar completamente en factores lineales, como lo demostramos a continuación.

TEOREMA DE FACTORIZACIÓN COMPLETA

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (con $a \neq 0$) tal que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Demostración Por el teorema fundamental del álgebra, P tiene al menos un cero. Llamémosle c_1. Por el teorema del factor (véase la página 272), $P(x)$ se puede factorizar como

$$P(x) = (x - c_1)Q_1(x)$$

donde $Q_1(x)$ es de grado $n - 1$. La aplicación del teorema fundamental al cociente $Q_1(x)$ nos da la factorización

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)\, Q_2(x)$$

donde $Q_2(x)$ es de grado $n - 2$ y c_2 es un cero de $Q_1(x)$. Al continuar este proceso para n pasos, obtenemos un cociente final $Q_n(x)$ de grado 0, una constante diferente de cero a la que llamaremos a. Esto significa que P ha sido factorizado como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$ ■

Para encontrar realmente los ceros complejos de un polinomio de grado n, por lo general factorizamos primero tanto como sea posible y luego usamos la fórmula cuadrática en partes que no se puedan factorizar más.

EJEMPLO 1 ■ Factorizar un polinomio completamente

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

a) Encuentre todos los ceros de P.

b) Encuentre la factorización completa de P.

SOLUCIÓN

a) Primero factorizamos P como sigue.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 + x - 3 && \text{Dado} \\ &= x^2(x-3) + (x-3) && \text{Agrupar términos} \\ &= (x-3)(x^2+1) && \text{Factorizar } x - 3 \end{aligned}$$

Encontramos los ceros de P al igualar a 0 cada factor:

$$P(x) = (x-3)(x^2+1)$$

Este factor es 0 cuando $x = 3$ | Este factor es 0 cuando $x = i$ o $-i$

Haciendo que $x - 3 = 0$, vemos que $x = 3$ es un cero. Haciendo que $x^2 + 1 = 0$ obtenemos $x^2 = -1$, por lo que $x = \pm i$. Por tanto los ceros de P son 3, i y $-i$.

b) Dado que los ceros son 3, i y $-i$, la factorización completa de P es

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(x-i)[x-(-i)] \\ &= (x-3)(x-i)(x+i) \end{aligned}$$


Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

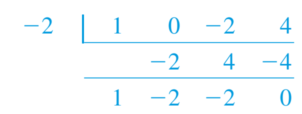
EJEMPLO 2 ■ Factorizar completamente un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 2x + 4$.

a) Encuentre todos los ceros de P.

b) Encuentre la factorización completa de P.

SOLUCIÓN



−2	1	0	−2	4
		−2	4	−4
	1	−2	−2	0

a) Los posibles ceros racionales son los factores de 4, que son ± 1, ± 2, ± 4. Usando división sintética (vea el texto al margen), encontramos que -2 es un cero y factorizamos el polinomio como

$$P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$$

Este factor es 0 cuando $x = -2$ | Use la fórmula cuadrática para encontrar cuándo este factor es 0

Para encontrar los ceros, igualamos a 0 cada factor. Por supuesto, $x + 2 = 0$ significa que $x = -2$. Usamos la fórmula cuadrática para encontrar cuándo el otro factor es 0.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= 0 && \text{Iguale a 0 el factor} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} && \text{Fórmula cuadrática} \\ x &= \frac{2 \pm 2i}{2} && \text{Saque raíz cuadrada} \\ x &= 1 \pm i && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

Por tanto, los ceros de P son -2, $1 + i$ y $1 - i$.

b) Puesto que los ceros son -2, $1 + i$ y $1 - i$, por el teorema de factorización completa, P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= [x - (-2)][x - (1 + i)][x - (1 - i)] \\ &= (x + 2)(x - 1 - i)(x - 1 + i) \end{aligned}$$



Ceros y sus multiplicidades

En el teorema de factorización completa los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los ceros de P. Estos ceros no necesitan ser todos diferentes. Si el factor $x - c$ aparece k veces en la factorización completa de $P(x)$, entonces decimos que c es un cero de **multiplicidad *k*** (véase la página 263). Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(x + 3)^5$$

tiene los siguientes ceros:

1 (multiplicidad 3) $\qquad$ -2 (multiplicidad 2) $\qquad$ -3 (multiplicidad 5)

El polinomio P tiene el mismo número de ceros que su grado: tiene grado 10 y tiene 10 ceros, siempre que contemos las multiplicidades. Esto es verdadero para todos los polinomios como se demuestra en el siguiente teorema.

TEOREMA DE CEROS

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros, siempre que un cero de multiplicidad k se cuente k veces.

Demostración Sea P un polinomio de grado n. Por el teorema de factorización completa

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Ahora supongamos que c es un cero de P. Entonces

$$P(c) = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n) = 0$$

Así, por la propiedad del producto cero, uno de los factores $c - c_i$ debe ser 0, por lo que $c = c_i$ para alguna i. Se deduce que P tiene exactamente n ceros $c_1, c_2, \ldots, c_n$. ■

EJEMPLO 3 ■ Factorización de un polinomio con ceros complejos

Encuentre la factorización completa y los cinco ceros del polinomio

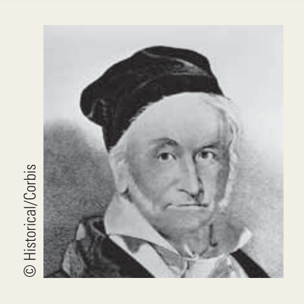
$$P(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x$$

SOLUCIÓN Dado que $3x$ es un factor común tenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x(x^4 + 8x^2 + 16) \\ &= 3x(x^2 + 4)^2 \end{aligned}$$

Este factor es 0 cuando $x = 0$

Este factor es 0 cuando $x = 2i$ o $x = -2i$


© Historical/Corbis

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) es considerado el más grande matemático de los tiempos modernos. Sus contemporáneos lo llamaban "príncipe de las matemáticas". Nació en una familia pobre; su padre se ganaba la vida como albañil. Cuando era aún muy pequeño, Gauss encontró un error de cálculo en las cuentas de su padre, el primero de muchos incidentes que dieron evidencia de su precocidad matemática. (Vea también página 854.) Cuando tenía 19 años, Gauss demostró que el polígono regular de 17 lados se puede construir usando sólo escuadra y compás, algo notable porque desde los tiempos de Euclides se pensaba que los únicos polígonos regulares que se podían construir de esta forma eran el triángulo y el pentágono. Debido a este descubrimiento Gauss decidió buscar una carrera en matemáticas en lugar de idiomas, su otra pasión. En su tesis de doctorado, escrita a la edad de 22 años, Gauss demostró el teorema fundamental del álgebra: "Un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces". Sus otros logros abarcan todas las ramas de las matemáticas, así como la física y la astronomía.

Para factorizar $x^2 + 4$ observe que $2i$ y $-2i$ son ceros de este polinomio. Así $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$, por lo que

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x[(x - 2i)(x + 2i)]^2 \\ &= 3x(x - 2i)^2(x + 2i)^2 \end{aligned}$$

0 es un cero de multiplicidad 1 | $2i$ es un cero de multiplicidad 2 | $-2i$ es un cero de multiplicidad 2

Los ceros de P son 0, $2i$ y $-2i$. Dado que los factores $x - 2i$ y $x + 2i$ se presentan cada uno dos veces en la factorización completa de P, los ceros $2i$ y $-2i$ son de multiplicidad 2 (o *dobles* ceros). Por tanto, hemos encontrado los cinco ceros.

Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

La tabla siguiente presenta más ejemplos de polinomios con sus factorizaciones completas y sus ceros.

Grado	Polinomio	Cero(s)	Número de ceros
1	$P(x) = x - 4$	4	1
2	$P(x) = x^2 - 10x + 25$ $= (x - 5)(x - 5)$	5 (multiplicidad 2)	2
3	$P(x) = x^3 + x$ $= x(x - i)(x + i)$	0, i, $-i$	3
4	$P(x) = x^4 + 18x^2 + 81$ $= (x - 3i)^2(x + 3i)^2$	$3i$ (multiplicidad 2), $-3i$ (multiplicidad 2)	4
5	$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$ $= x^3(x - 1)^2$	0 (multiplicidad 3), 1 (multiplicidad 2)	5

EJEMPLO 4 ■ Encontrar polinomios con ceros dados

a) Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado 4, con ceros i, $-i$, 2 y -2, y con $P(3) = 25$

b) Encuentre un polinomio $Q(x)$ de grado 4, con ceros -2 y 0, donde -2 es un cero de multiplicidad 3.

SOLUCIÓN

a) El polinomio requerido tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x - i)(x - (-i))(x - 2)(x - (-2)) \\ &= a(x^2 + 1)(x^2 - 4) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= a(x^4 - 3x^2 - 4) && \text{Multiplique} \end{aligned}$$

Sabemos que $P(3) = a(3^4 - 3 \cdot 3^2 - 4) = 50a = 25$, entonces $a = \frac{1}{2}$. Por lo que

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2$$

b) Requerimos que

$$\begin{aligned} Q(x) &= a[x - (-2)]^3(x - 0) \\ &= a(x + 2)^3x \\ &= a(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)x && \text{Fórmula 4 de productos notables (sección 1.3)} \\ &= a(x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x) \end{aligned}$$

Dado que no nos dan información acerca de Q que no sean sus ceros y su multiplicidad, podemos escoger cualquier número por a. Si usamos $a = 1$, obtenemos

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

EJEMPLO 5 ■ Encontrar todos los ceros de un polinomio

Encuentre todos los ceros de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$.

SOLUCIÓN Mediante el teorema de ceros racionales de la sección 3.4 obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$. Al comprobarlos usando división sintética encontramos que 2 y $-\frac{1}{3}$ son ceros y obtenemos la siguiente factorización.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 \\ &= (x-2)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2) && \text{Factorice } x - 2 \\ &= (x-2)(x + \tfrac{1}{3})(3x^2 + 3x + 6) && \text{Factorice } x + \tfrac{1}{3} \\ &= 3(x-2)(x + \tfrac{1}{3})(x^2 + x + 2) && \text{Factorice 3} \end{aligned}$$

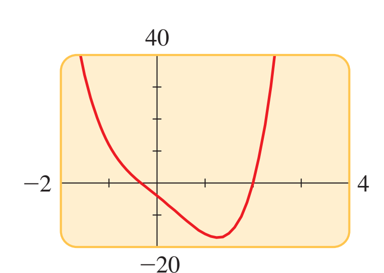


FIGURA 1
$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$

En la figura 1 se muestra la gráfica del polinomio P del ejemplo 5. Los puntos de intersección x corresponden a los ceros reales de P. Los ceros imaginarios no se pueden determinar de la gráfica.

Los ceros del factor cuadrático son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

por tanto, los ceros de $P(x)$ son

$$2, \qquad -\frac{1}{3}, \qquad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

Los ceros complejos se presentan en pares conjugados

Como seguramente el lector ya ha observado, por los ejemplos dados hasta este punto los ceros complejos de los polinomios con coeficientes reales se presentan en pares. Siempre que $a + bi$ es un cero, su complejo conjugado $a - bi$ también es un cero.

TEOREMA DE CEROS CONJUGADOS

Si el polinomio P tiene coeficientes reales y si el número complejo z es un cero de P, entonces su complejo conjugado $\bar{z}$ también es un cero de P.

Demostración Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde cada coeficiente es real. Suponga que $P(z) = 0$. Debemos demostrar que $P(\bar{z}) = 0$. Usamos los hechos de que el complejo conjugado de una suma de dos números complejos es la suma de los conjugados y que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\begin{aligned} P(\bar{z}) &= a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} && \text{Porque los coeficientes son reales} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Esto indica que $\bar{z}$ también es un cero de $P(x)$, lo que demuestra el teorema. ■



GEROLAMO CARDANO (1501-1576) es ciertamente una de las figuras más pintorescas en la historia de las matemáticas. Fue el médico más conocido en la Europa de su tiempo, pero toda su vida se vio atormentado por numerosas enfermedades, incluyendo fracturas, hemorroides y un temor irracional de encontrarse con perros rabiosos. Fue un padre afectuoso, pero sus amados hijos lo descorazonaron: su hijo favorito fue decapitado por asesinar a su propia esposa. Cardano también fue un jugador compulsivo; de hecho, su vicio lo llevó a escribir *Book on Games of Chance* (Libro de juegos y oportunidades), su primer estudio de la probabilidad desde un punto de vista matemático.

En su obra matemática más importante, la *Ars Magna*, Cardano detalla la solución de las ecuaciones generales de tercer y cuarto grados. Cuando se publicó, los matemáticos se sintieron incómodos incluso respecto a los números negativos, pero las fórmulas de Cardano facilitaron el camino para la aceptación no sólo de los números negativos, sino también de los números imaginarios, dado que ocurrían de manera natural para resolver ecuaciones con polinomios. Por ejemplo, para la ecuación cúbica

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

una de sus fórmulas da la solución

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

(Vea la página 286, ejercicio 108). Este valor de x en realidad resulta ser el *entero* 4, pero para encontrarlo Cardano tuvo que usar el número imaginario $\sqrt{-121} = 11i$.

EJEMPLO 6 ■ Un polinomio con un cero complejo dado

Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado 3 que tenga coeficientes enteros y ceros $\frac{1}{2}$ y $3 - i$.

SOLUCIÓN Dado que $3 - i$ es un cero, entonces por el teorema de ceros conjugados también lo es $3 + i$. Esto significa que $P(x)$ debe tener la siguiente forma.

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x - \tfrac{1}{2})[x - (3 - i)][x - (3 + i)] \\ &= a(x - \tfrac{1}{2})[(x - 3) + i][(x - 3) - i] && \text{Reagrupe} \\ &= a(x - \tfrac{1}{2})[(x - 3)^2 - i^2] && \text{Fórmula de diferencia de cuadrados} \\ &= a(x - \tfrac{1}{2})(x^2 - 6x + 10) && \text{Desarrolle} \\ &= a(x^3 - \tfrac{13}{2}x^2 + 13x - 5) && \text{Desarrolle} \end{aligned}$$

Para hacer enteros todos los coeficientes hacemos que $a = 2$ y tenemos

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 10$$

Cualquier otro polinomio que satisfaga los requisitos dados debe ser un múltiplo entero de este.

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

■ Factores lineales y cuadráticos

Hemos visto que un polinomio se factoriza completamente en factores lineales si usamos números complejos. Si no usamos números complejos, entonces un polinomio con coeficientes reales siempre puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos. Se usó esta propiedad en la sección 10.7 cuando estudiamos fracciones parciales. Un polinomio cuadrático sin ceros reales se denomina **irreducible** en los números reales. Dicho polinomio no puede ser factorizado sin usar números complejos.

TEOREMA DE FACTORES LINEALES Y CUADRÁTICOS

Todo polinomio con coeficientes reales puede ser factorizado como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

Demostración Primero observamos que si $c = a + bi$ es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned} (x - c)(x - \bar{c}) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \\ &= [(x - a) - bi][(x - a) + bi] \\ &= (x - a)^2 - (bi)^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

La última expresión es una cuadrática con coeficientes *reales*.

Ahora, si P es un polinomio con coeficientes reales, entonces por el teorema de factorización completa

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Puesto que las raíces complejas se presentan en pares conjugados podemos multiplicar los factores correspondientes a cada uno de tales pares para obtener un factor cuadrático con coeficientes reales. Esto da como resultado que P se factorice en factores lineales y cuadráticos irreducibles. ■

EJEMPLO 7 ■ Factorizar un polinomio en factores lineales y cuadráticos

Sea $P(x) = x^4 + 2x^2 - 8$.

a) Factorice P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

b) Factorice P completamente en factores lineales con coeficientes reales.

SOLUCIÓN

a)

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^2 - 8 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \end{aligned}$$

El factor $x^2 + 4$ es irreducible porque no tiene ceros reales.

b) Para obtener la factorización completa factorizamos el factor cuadrático restante:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 67 ■

3.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El polinomio $P(x) = 5x^2(x - 4)^3(x + 7)$ tiene grado ________. Tiene ceros 0, 4 y ________. El cero 0 tiene multiplicidad ________, y el cero 4 tiene multiplicidad ________.

2. ***a***) Si a es un cero del polinomio P, entonces ________ debe ser un factor de $P(x)$.

b) Si a es un cero de multiplicidad m del polinomio P, entonces ________ debe ser un factor de $P(x)$ cuando factorizamos P completamente.

3. Un polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente ________ ceros si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces.

4. Si la función polinomial P tiene coeficientes reales y si $a + bi$ es un cero de P, entonces ________ es también un cero de P. Así, si $3 + i$ es un cero de P, entonces ________ también es un cero de P.

5–6 ■ *¿Verdadero o falso?* Si es *falso*, explique.

5. Sea $P(x) = x^4 + 1$.

a) El polinomio P tiene cuatro ceros complejos.

b) El polinomio P se puede factorizar en factores lineales con coeficientes complejos.

c) Algunos de los ceros de P son reales.

6. Sea $P(x) = x^3 + x$.

a) El polinomio P tiene tres ceros reales.

b) El polinomio P tiene al menos un cero real.

c) El polinomio P se puede factorizar en factores lineales con coeficientes reales.

HABILIDADES

7–18 ■ **Factorización completa** Se da un polinomio P. ***a***) Encuentre todos los ceros de P, reales y complejos. ***b***) Factorice P completamente.

7. $P(x) = x^4 + 4x^2$

8. $P(x) = x^5 + 9x^3$

9. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

10. $P(x) = x^3 + x^2 + x$

11. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

12. $P(x) = x^4 - x^2 - 2$

13. $P(x) = x^4 - 16$

14. $P(x) = x^4 + 6x^2 + 9$

15. $P(x) = x^3 + 8$

16. $P(x) = x^3 - 8$

17. $P(x) = x^6 - 1$

18. $P(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

19–36 ■ **Factorización completa** Factorice el polinomio completamente y encuentre todos sus ceros. Indique la multiplicidad de cada cero.

19. $P(x) = x^2 + 25$

20. $P(x) = 4x^2 + 9$

21. $Q(x) = x^2 + 2x + 2$

22. $Q(x) = x^2 - 8x + 17$

23. $P(x) = x^3 + 4x$

24. $P(x) = x^3 - x^2 + x$

25. $Q(x) = x^4 - 1$

26. $Q(x) = x^4 - 625$

27. $P(x) = 16x^4 - 81$

28. $P(x) = x^3 - 64$

29. $P(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$

30. $P(x) = x^6 - 729$

31. $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

32. $Q(x) = x^4 + 10x^2 + 25$

33. $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$

34. $P(x) = x^5 + 7x^3$

35. $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$

36. $P(x) = x^6 + 16x^3 + 64$

37–46 ■ Encontrar un polinomio con ceros dados Encuentre un polinomio con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones dadas.

37. P tiene grado 2 y ceros $1 + i$ y $1 - i$.

38. P tiene grado 2 y ceros $1 + i\sqrt{2}$ y $1 - i\sqrt{2}$.

39. Q tiene grado 3 y ceros 3, $2i$ y $-2i$.

40. Q tiene grado 3 y ceros 0 e i.

41. P tiene grado 3 y ceros 2 e i.

42. Q tiene grado 3 y ceros -3 y $1 + i$.

43. R tiene grado 4 y ceros $1 - 2i$ y 1, con 1 un cero de multiplicidad 2.

44. S tiene grado 4 y ceros $2i$ y $3i$.

45. T tiene grado 4, ceros i y $1 + i$, y término constante 12.

46. U tiene grado 5, ceros $\frac{1}{2}$, -1 y $-i$, y coeficiente principal 4; el cero -1 tiene multiplicidad 2.

47–64 ■ Encontrar ceros complejos Encuentre todos los ceros del polinomio.

47. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

48. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$

49. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

50. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 18x + 18$

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

52. $P(x) = x^3 - x - 6$

53. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 12x + 9$

54. $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$

55. $P(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

56. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

57. $P(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 12x - 12$

58. $P(x) = x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$ [*Sugerencia:* factorizar por agrupamiento.]

59. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36$

60. $P(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$

61. $P(x) = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

62. $P(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

63. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 28x^2 + 27x - 9$

64. $P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

65–70 ■ Factores lineales y cuadráticos Se da un polinomio P. ***a)*** Factorice P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales. ***b)*** Factorice P completamente en factores lineales con coeficientes complejos.

65. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

66. $P(x) = x^3 - 2x - 4$

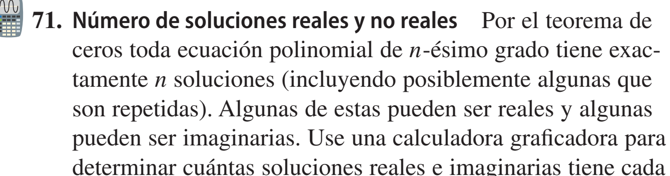
67. $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$

68. $P(x) = x^4 + 8x^2 + 16$

69. $P(x) = x^6 - 64$

70. $P(x) = x^5 - 16x$

HABILIDADES Plus



71. Número de soluciones reales y no reales Por el teorema de ceros toda ecuación polinomial de n-ésimo grado tiene exactamente n soluciones (incluyendo posiblemente algunas que son repetidas). Algunas de estas pueden ser reales y algunas pueden ser imaginarias. Use una calculadora graficadora para determinar cuántas soluciones reales e imaginarias tiene cada ecuación.

a) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x - 5 = 0$

c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 40 = 0$

72–74 ■ Coeficientes reales y no reales Hasta este punto hemos trabajado sólo con polinomios que tienen coeficientes reales. Estos ejercicios contienen polinomios con coeficientes reales e imaginarios.

72. Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

a) $2x + 4i = 1$ ***b)*** $x^2 - ix = 0$

c) $x^2 + 2ix - 1 = 0$ ***d)*** $ix^2 - 2x + i = 0$

73. *a)* Demuestre que $2i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1 + i)x + (2 + 2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados $-2i$ y $1 + i$ no lo son.

b) Explique por qué el resultado del inciso *a*) no viola el teorema de ceros conjugados.

74. *a)* Encuentre el polinomio con coeficientes *reales* del grado más bajo posible para el que i y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

b) Encuentre el polinomio con coeficientes *complejos* del grado más pequeño posible para el que i y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

75. DISCUSIÓN: Polinomios de grado impar El teorema de ceros conjugados dice que los ceros complejos de una función polinomial con coeficientes reales se presentan en pares conjugados complejos. Explique la forma en que este hecho demuestra que una función polinomial con coeficientes reales y grado impar tiene al menos un cero real.

76. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Raíces de la unidad Hay dos raíces cuadradas de 1, es decir, 1 y -1. Estas son las soluciones de $x^2 = 1$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$ o $x^4 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay? Encuéntrelas. Las raíces cúbicas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^3 = 1$ o $x^3 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 hay? Encuéntrelas. ¿Cómo hallaría usted las raíces sextas de 1? ¿Cuántas hay? Haga una conjetura acerca del número de raíces n-ésimas de 1.

3.6 FUNCIONES RACIONALES

■ Funciones racionales y asíntotas ■ Transformaciones de $y = 1/x$ ■ Asíntotas de funciones racionales ■ Gráficas de funciones racionales ■ Factores comunes en el numerador y en el denominador ■ Asíntotas inclinadas y comportamiento final ■ Aplicaciones

Una función racional es una función de la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Suponemos que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aun cuando las funciones racionales se construyen a partir de polinomios, sus gráficas tienen un aspecto muy diferente del de las gráficas de funciones polinomiales.

■ Funciones racionales y asíntotas

En la sección 1.4 se estudian los dominios de expresiones racionales.

El *dominio* de una función racional está formado por todos los números reales x excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Al hacer la gráfica de una función racional debemos poner especial atención al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores x. Empezamos por trazar la gráfica de una función racional muy sencilla.

EJEMPLO 1 ■ Una función racional sencilla

Trace la gráfica la función racional $f(x) = 1/x$, y exprese el dominio y el rango.

SOLUCIÓN La función f no está definida para $x = 0$. Las tablas siguientes muestran que cuando x es cercana a cero el valor de $|f(x)|$ es grande, y cuanto más se acerca x a cero, más grande se hace $|f(x)|$.

Para números positivos reales,

$$\frac{1}{\text{NÚMERO GRANDE}} = \text{número pequeño}$$

$$\frac{1}{\text{número pequeño}} = \text{NÚMERO GRANDE}$$

x	$f(x)$
−0.1	−10
−0.01	−100
−0.00001	−100 000
Se aproxima a 0^-	Se aproxima a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	100 000
Se aproxima a 0^+	Se aproxima a ∞

Describimos este comportamiento en palabras y en símbolos como sigue. La primera tabla muestra que cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ decrecen sin límite. En símbolos,

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^-$$ "y se aproxima al infinito negativo cuando x se aproxima a 0 por la izquierda"


© silver-john/Shutterstock.com

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Administración del tráfico

Un ingeniero de tráfico quiere determinar la velocidad óptima para la conducción segura en una carretera. A mayor límite de velocidad más cantidad de autos en la carretera, pero la seguridad requiere mayor distancia de seguimiento a velocidades más altas. En este proyecto encontramos una función racional que modela la capacidad de carga de una carretera con una velocidad de tráfico dada. El modelo se puede utilizar para determinar el límite de velocidad de la carretera con capacidad de carga máxima. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

La segunda tabla muestra que cuando x se aproxima a 0 por la derecha, los valores de $f(x)$ aumentan sin límite. En símbolos,

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^{+}$$ "y se aproxima al infinito cuando x se aproxima a 0 por la derecha"

Las dos tablas siguientes muestran cómo cambia $f(x)$ cuando $|\,x\,|$ se hace grande.

x	$f(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100\,000$	-0.00001

Se aproxima a $-\infty$ — Se aproxima a 0

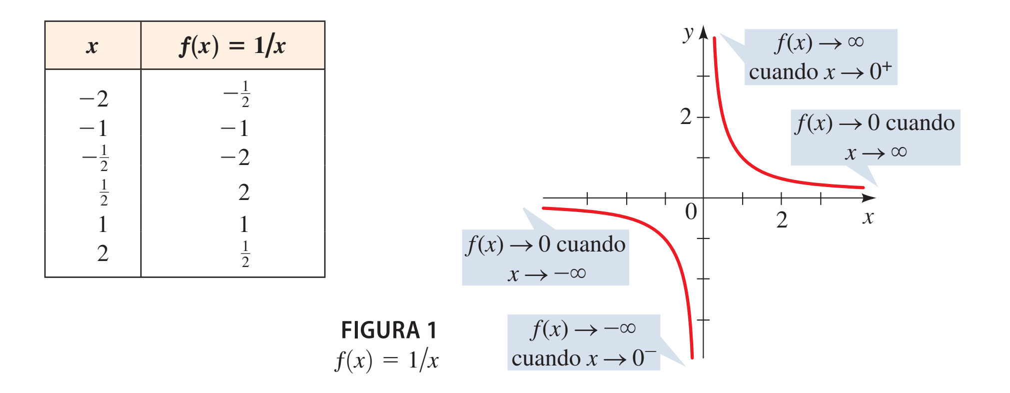
x	$f(x)$
10	0.1
100	0.01
100 000	0.00001

Se aproxima a ∞ — Se aproxima a 0

Estas tablas muestran que cuando $|\,x\,|$ se hace grande, el valor de $f(x)$ se aproxima y está cerca de cero. Describimos esta situación simbólicamente al anotar

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Usando la información de estas tablas y al colocar unos cuantos puntos adicionales obtenemos la gráfica de la figura 1.



x	$f(x) = 1/x$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

FIGURA 1
$f(x) = 1/x$

En la sección 2.3, página 171, se explica cómo obtener el dominio y el rango de una función a partir de su gráfica.

La función f está definida para todos los valores de x que no sean 0, de modo que el dominio $\{x|\ x \neq 0\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y|\ y \neq 0\}$.



Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

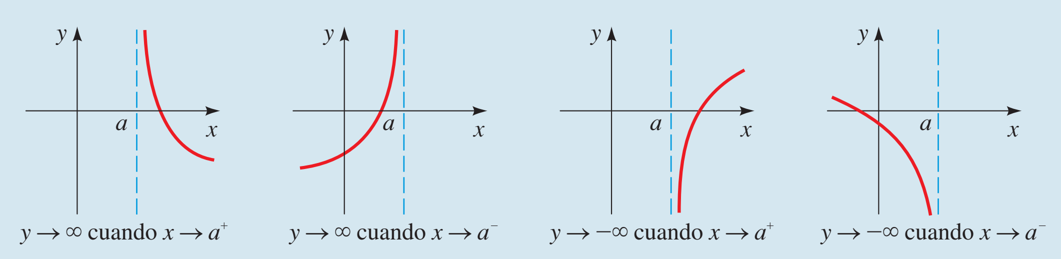
En el ejemplo 1 utilizamos la siguiente **notación de flechas**.

Símbolo	Significado
$x \to a^{-}$	x se aproxima a a por la izquierda
$x \to a^{+}$	x se aproxima a a por la derecha
$x \to -\infty$	x se aproxima al infinito negativo, es decir, x decrece sin límite
$x \to \infty$	x se aproxima al infinito, es decir, x crece sin límite

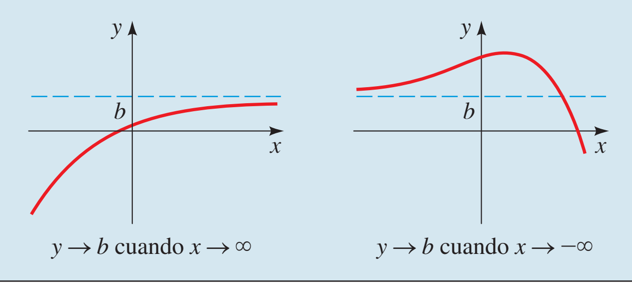
La recta $x = 0$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de la figura 1, y la recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*. Informalmente hablando, una asíntota de una función es una recta a la cual la gráfica de la función se acerca cada vez más cuando nos movemos a lo largo de la recta.

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICAL Y HORIZONTAL

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a $\pm\infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda.



2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



Recuerde que para una función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ se supone que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen ningún factor en común.

Una función racional tiene asíntotas verticales donde la función no está definida, es decir, donde el denominador es cero.

■ Transformaciones de $y = 1/x$

Mediante las transformaciones estudiadas en la sección 2.6 se puede trazar la gráfica de una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

al desplazar, estirar o reflejar la gráfica de $f(x) = 1/x$ que se muestra en la figura 1. (Estas funciones se denominan *transformaciones fraccionarias lineales*.)

EJEMPLO 2 ■ Usar transformaciones para trazar la gráfica de funciones racionales

Trace la gráfica de cada función racional e indique el dominio y el rango.

a) $r(x) = \dfrac{2}{x - 3}$ ***b)*** $s(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$

SOLUCIÓN

a) Sea $f(x) = 1/x$. Entonces podemos expresar r en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{2}{x-3} \\ &= 2\left(\frac{1}{x-3}\right) && \text{Factorice 2} \\ &= 2(f(x-3)) && \text{Dado que } f(x) = 1/x \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la gráfica de r se obtiene de la gráfica de f al desplazar 3 unidades a la derecha y estirar verticalmente en un factor de 2. Entonces r tiene asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 0$. En la figura 2 se muestra la gráfica de r.

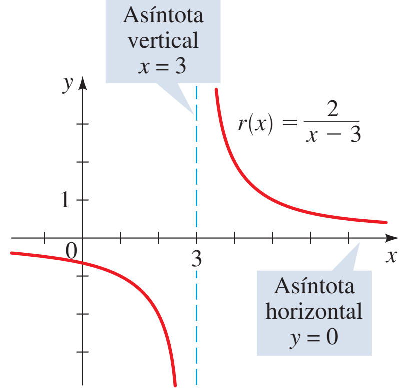


FIGURA 2

La función r está definida para toda x, que no sea 3, por lo que el dominio es $\{x \mid x \neq 3\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 0\}$.

$$\begin{array}{r} 3 \\ x + 2\overline{)3x + 5} \\ \underline{3x + 6} \\ -1 \end{array}$$

***b*)** Usando división larga (vea al margen) obtenemos $s(x) = 3 - \dfrac{1}{x + 2}$. Entonces, podemos expresar s en términos de f como sigue.

$$\begin{aligned} s(x) &= 3 - \frac{1}{x + 2} \\ &= -\frac{1}{x + 2} + 3 && \text{Reacomodando términos} \\ &= -f(x + 2) + 3 && \text{Dado que } f(x) = 1/x \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la gráfica de s se obtiene de la gráfica de f al desplazar 2 unidades a la izquierda, reflejar en el eje x y desplazar hacia arriba 3 unidades. Entonces s tiene una asíntota vertical $x = -2$ y asíntota horizontal $y = 3$. La gráfica de s se muestra en la figura 3.

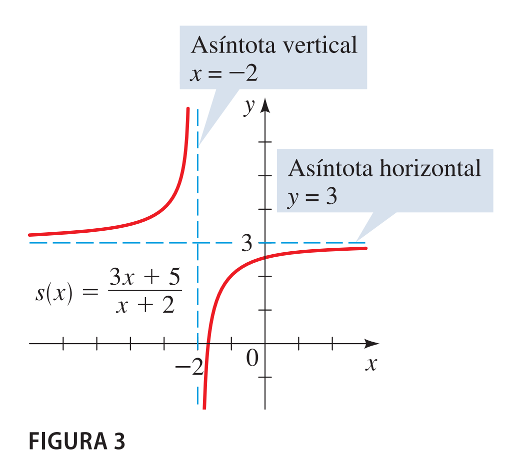


FIGURA 3

La función s está definida para toda x que no sea -2, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 3\}$.

Ahora intente realizar los ejercicios 15 y 17 ■

■ Asíntotas de funciones racionales

Los métodos del ejemplo 2 se cumplen sólo para funciones racionales simples. Para trazar la gráfica de funciones más complicadas necesitamos dar una mirada más rigurosa al comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas vertical y horizontal.

EJEMPLO 3 ■ Asíntotas de una función racional

Trace la gráfica de $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$, e indique el dominio y el rango.

SOLUCIÓN

Asíntota vertical. Primero factorizamos el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x - 1)^2}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical porque el denominador de r es cero cuando $x = 1$.

$y \to \infty$ cuando $x \to 1^-$

$y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$

FIGURA 4

Para ver cuál es el aspecto de la gráfica de r cerca de la asíntota vertical hacemos tablas de valores para valores x a la izquierda y a la derecha de 1. De las tablas que se muestran a continuación vemos que

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^+$$

$x \to 1^-$

x	y
0	5
0.5	14
0.9	302
0.99	30002

Se aproxima a 1^- — Se aproxima a ∞

$x \to 1^+$

x	y
2	5
1.5	14
1.1	302
1.01	30002

Se aproxima a 1^+ — Se aproxima a ∞

Entonces cerca de la asíntota vertical $x = 1$, la gráfica de r tiene la forma que se muestra en la figura 4.

Asíntota horizontal. La asíntota horizontal es el valor que alcanza y cuando $x \to \pm\infty$. Para ayudarnos a encontrar este valor dividimos el numerador y el denominador entre x^2, la potencia superior de x que aparece en la expresión:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \frac{2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Las expresiones fraccionarias $\frac{4}{x}, \frac{5}{x^2}, \frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ tienden a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (vea el ejercicio 90, sección 1.1, página 12). Por tanto, cuando $x \to \pm\infty$, tenemos

Estos términos tienden a 0

$$y = \frac{2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Estos términos tienden a 0

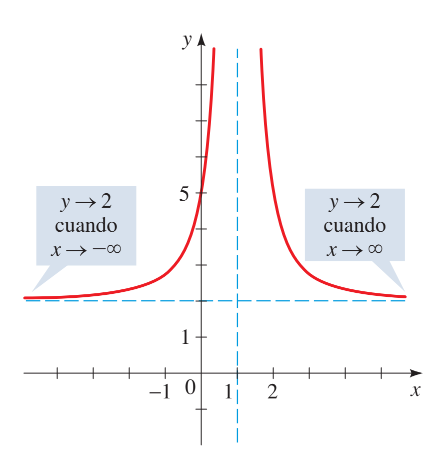


FIGURA 5

$r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

Entonces la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Puesto que la gráfica debe aproximarse a la asíntota horizontal podemos terminarla como se muestra en la figura 5.

Dominio y rango. La función r está definida para todos los valores de x que no sean 1, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq 1\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y > 2\}$.



Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

Del ejemplo 3 vemos que la asíntota horizontal está determinada por los coeficientes principales del numerador y el denominador porque después de dividir todo entre x^2 (la potencia superior de x), todos los otros términos tienden a cero. En general, si

$r(x) = P(x)/Q(x)$ y los grados de P y Q son iguales (ambos n, por ejemplo), entonces dividir entre x^n tanto numerador como denominador muestra que la asíntota horizontal es

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

En el siguiente recuadro se resume el procedimiento para encontrar asíntotas.

Recuerde que para una función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ hemos supuesto que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores en común. (Vea la página 295.)

ENCONTRAR ASÍNTOTAS DE FUNCIONES RACIONALES

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.

2. ***a)*** Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.

c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

EJEMPLO 4 ■ Asíntotas de una función racional

Encuentre las asíntotas vertical y horizontal de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

SOLUCIÓN

Asíntotas verticales. Primero factorizamos

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$$

Este factor es 0 cuando $x = \frac{1}{2}$

Este factor es 0 cuando $x = -2$

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

Asíntota horizontal. Los grados del numerador y el denominador son iguales, y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{3}{2}$$

Entonces la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

Para confirmar nuestros resultados graficamos r usando una calculadora graficadora (vea la figura 6).

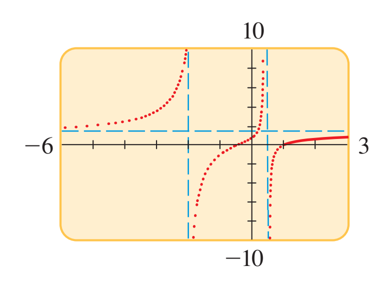


FIGURA 6

$r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

La gráfica se traza usando modo dot para evitar líneas extrañas.

Ahora intente realizar los ejercicios 33 y 35

Gráficas de funciones racionales

Hemos visto que las asíntotas son importantes cuando se trazan las gráficas de funciones racionales. En general usamos las siguientes guías para trazar la gráfica de funciones racionales.

TRAZADO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

1. **Factorizar.** Factorice el numerador y el denominador.
2. **Puntos de intersección.** Encuentre los puntos de intersección x al determinar los ceros del numerador, así como los puntos de intersección y a partir del valor de la función en $x = 0$.
3. **Asíntotas verticales.** Encuentre las asíntotas verticales al determinar los ceros del denominador y, luego vea si $y \to \infty$ o si $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical mediante el uso de valores de prueba.
4. **Asíntota horizontal.** Encuentre la asíntota horizontal (si la hay) usando el procedimiento descrito en el recuadro de la página 300.
5. **Trazar la gráfica.** Trace la gráfica de la información dada por los primeros cuatro pasos. Luego coloque tantos puntos adicionales como sea necesario para llenar el resto de la gráfica de la función.

Una fracción es 0 solamente si su numerador es 0.

EJEMPLO 5 ■ Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de $r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$ e indique el rango y el dominio.

SOLUCIÓN Factorizamos el numerador y el denominador, encontramos los puntos de intersección y las asíntotas y trazamos la gráfica.

Factorizar. $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$

Puntos de intersección x. Los puntos de intersección x son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

Puntos de intersección y. Para encontrar el punto de intersección y sustituimos $x = 0$ en la forma original de la función.

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) - 4}{(0)^2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

El punto de intersección y es 2.

Asíntotas verticales. Las asíntotas verticales se presentan donde el denominador es 0, es decir, donde la función no está definida. De la forma factorizada vemos que las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = -2$.

Al elegir los valores de prueba debemos asegurarnos de que no hay un punto de intersección x entre el punto de prueba y la asíntota vertical.

Comportamiento cerca de asíntotas verticales. Necesitamos saber si $y \to \infty$ o si $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de y para valores x cerca de las asíntotas verticales usamos valores de prueba. Por ejemplo, cuando $x \to 1^-$, usamos un valor de prueba cercano y a la izquierda de 1 ($x = 0.9$, por ejemplo) para comprobar si y es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$.

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9) - 1)((0.9) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \quad \text{(negativo)}$$

Entonces $y \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$. Por otra parte, cuando $x \to 1^+$, usamos un valor de prueba cercano y a la derecha de 1 (por ejemplo, $x = 1.1$) para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \quad \text{(positivo)}$$

Entonces $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Las otras entradas de la tabla siguiente se calculan de manera semejante.

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	1^-	1^+
el signo de $y = \dfrac{(2x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ es	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞

Asíntota horizontal. Los grados del numerador y el denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Gráfica. Usamos la información que hemos encontrado junto con algunos valores adicionales para trazar la gráfica de la figura 7.

x	y
-6	0.93
-3	-1.75
-1	4.50
1.5	6.29
2	4.50
3	3.50

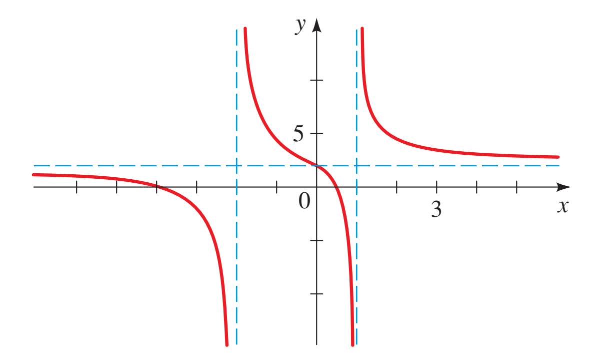


FIGURA 7
$r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$

Dominio y rango. El dominio es $\{x \mid x \neq 1, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango son todos los números reales.

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

EJEMPLO 6 ■ Gráfica de una función racional

Trace la gráfica de $r(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + 2x}$, e indique el dominio y el rango.

SOLUCIÓN

Factorizar. $y = \dfrac{(x+2)(x-2)}{2x(x+1)}$.

Punto de intersección x. -2 y 2, de $x + 2 = 0$ y $x - 2 = 0$

Punto de intersección y. No hay porque $r(0)$ no está definido

Asíntota vertical. $x = 0$ y $x = -1$, de los ceros del denominador

Las matemáticas en el mundo moderno

Códigos indescifrables

Si usted lee novelas de espías sabe de códigos secretos y cómo es que el héroe los "descifra". Hoy en día los códigos secretos tienen un uso mucho más común. La mayor parte de la información almacenada en computadoras está codificada para evitar su uso por personas no autorizadas. Por ejemplo, los registros bancarios, los historiales médicos, los datos escolares y otros similares están codificados. Un sinnúmero de teléfonos celulares e inalámbricos codifican la señal que lleva la voz para que nadie más pueda oírla. Por fortuna y gracias a los recientes avances en matemáticas los códigos de la actualidad son "indescifrables".

Los códigos modernos están basados en un principio sencillo: factorizar es mucho más difícil que multiplicar. Por ejemplo, trate de multiplicar 78 por 93; ahora trate de factorizar 9991. Lleva tiempo factorizar 9991 porque es un producto de los dos números primos 97×103, de manera que para factorizarlos tenemos que encontrar uno de estos primos. Ahora imagine tratar de factorizar un número N que es producto de dos primos p y q, cada uno de ellos de 200 dígitos de largo. Incluso las computadoras más potentes tardarían millones de años en factorizar ese número. Pero la misma computadora tardaría menos de un segundo en multiplicar esos dos números. Este dato fue utilizado por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman en la década de 1970 para idear el código RSA. Su código utiliza un número extremadamente grande para codificar un mensaje, pero exige que conozcamos sus factores para descifrarlo. Como se puede ver, ese código es particularmente indescifrable.

El código RSA es un ejemplo de código de "cifrado público clave". En dichos códigos cualquiera puede cifrar un mensaje usando un procedimiento conocido públicamente basado en N, pero para decodificar el mensaje deben conocer p y q, los factores de N. Cuando se desarrolló el código RSA se pensó que un número de 80 dígitos cuidadosamente seleccionado daría un código indescifrable, pero es curioso que recientes avances en el estudio de la factorización hayan hecho necesarios números mucho más grandes.

Comportamiento cerca de la asíntota vertical.

Cuando $x \to$	-1^-	-1^+	0^-	0^+
el signo de $y = \dfrac{(x+2)(x-2)}{2x(x+1)}$ es	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$

Asíntota horizontal. $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador y el grado del denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

Gráfica. Utilizamos la información que hemos encontrado junto con algunos valores adicionales para trazar la gráfica de la figura 8.

x	y
-0.9	17.72
-0.5	7.50
-0.45	7.67
-0.4	8.00
-0.3	9.31
-0.1	22.17

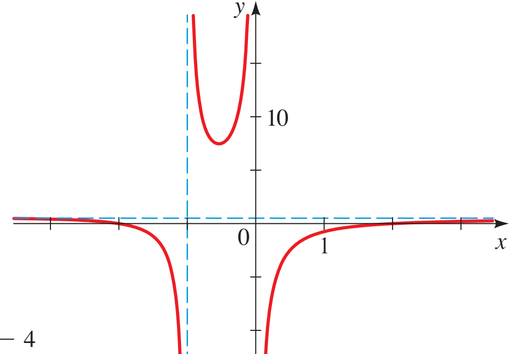


FIGURA 8

$r(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + 2x}$

Dominio y rango. El dominio es $\{x \mid x \neq 0, x \neq -1\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{x \mid x < \frac{1}{2}$ o $x > 7.5\}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

EJEMPLO 7 ■ Gráfica de una función racional

Trace la gráfica de $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$ e indique el dominio y el rango.

SOLUCIÓN

Factorizar. $y = \dfrac{5x + 21}{(x+5)^2}$

Punto de intersección *x*. $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

Punto de intersección *y*. $\dfrac{21}{25}$, ya que $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25}$

$$= \frac{21}{25}$$

Asíntota vertical. $x = -5$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de la asíntota vertical.

Cuando $x \to$	-5^-	-5^+
el signo de $y = \dfrac{5x + 21}{(x+5)^2}$ es	$\dfrac{(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	$-\infty$

Asíntota horizontal. $y = 0$, ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Gráfica. Utilizamos la información que hemos encontrado junto con algunos valores adicionales para trazar la gráfica de la figura 9.

x	y
-15	-0.5
-10	-1.2
-3	1.5
-1	1.0
3	0.6
5	0.5
10	0.3

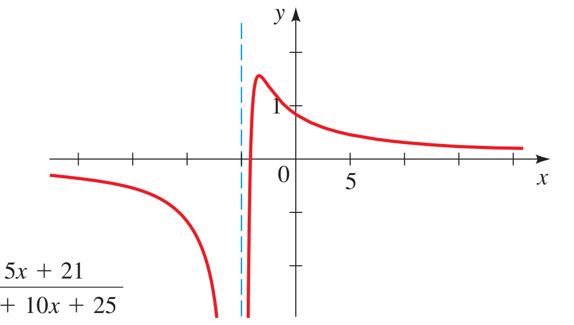


FIGURA 9
$r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$

Dominio y rango. El dominio es $\{x \mid x \neq -5\}$. De la gráfica vemos que el rango es aproximadamente el intervalo $(-\infty, 1.6]$.

Ahora intente realizar el ejercicio 59 ■



De la gráfica en la figura 9 vemos que, contrariamente a la creencia común, una gráfica sí puede cruzar una asíntota horizontal. La gráfica de la figura 9 cruza el eje x (la asíntota horizontal) desde de abajo, alcanza un valor máximo cerca de $x = -3$ y luego se acerca al eje x desde arriba cuando $x \to \infty$.

Factores comunes en el numerador y en el denominador

Hemos adoptado la convención de que el numerador y el denominador de una función racional no tienen factores comunes. Si $s(x) = p(x)/q(x)$ y si p y q tienen un factor en común entonces podemos eliminar ese factor, pero sólo para aquellos valores de x para los que ese factor *no sea cero* (porque no está definida la división entre cero). Puesto que s no está definida en esos valores de x, su gráfica tiene un "**hueco**" en esos puntos como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 ■ Factor común en el numerador y en el denominador

Trace la gráfica las siguientes funciones.

a) $s(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}$ ***b)*** $t(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

SOLUCIÓN

a) Factorizamos el numerador y el denominador:

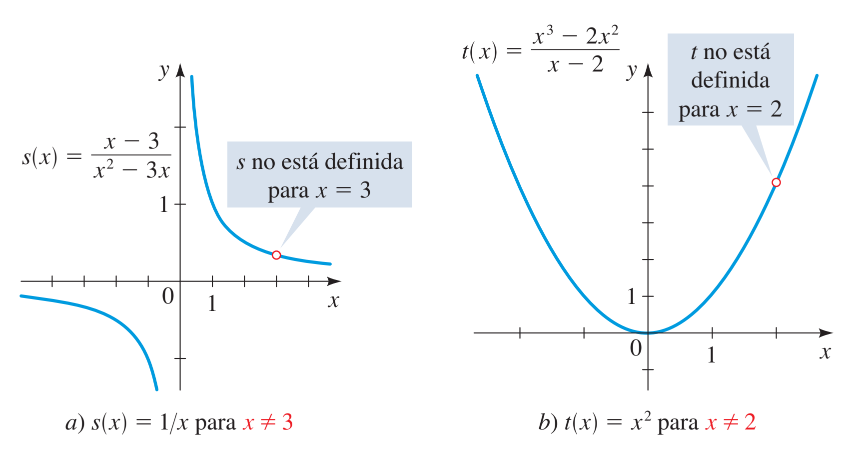
$$s(x) = \frac{x-3}{x^2 - 3x} = \frac{\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}} = \frac{1}{x} \quad \text{para } x \neq 3$$

Por tanto s tiene la misma gráfica que la función racional $r(x) = 1/x$ pero con un "hueco" cuando x es igual a 3, como se muestra en la figura 10*a*).

b) Factorizamos el numerador y el denominador:

$$t(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2 \quad \text{para } x \neq 2$$

Por tanto, la gráfica de t es igual que la gráfica de $r(x) = x^2$ pero con un "hueco" cuando x es igual a 2 como se muestra en la figura10*b*).



a) $s(x) = 1/x$ para $x \neq 3$

b) $t(x) = x^2$ para $x \neq 2$

FIGURA 10 Gráfica con "huecos"



Asíntotas inclinadas y comportamiento final

Si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional en la que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador podemos usar el algoritmo de división para expresar la función en la forma

$$r(x) = ax + b + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de R es menor que el grado de Q y $a \neq 0$. Esto significa que cuando $x \to \pm\infty$, $R(x)/Q(x) \to 0$ de modo que para valores grandes de $|x|$ la gráfica de $y = r(x)$ se aproxima a la gráfica de $y = ax + b$. En esta situación decimos que $y = ax + b$ es una **asíntota inclinada** o una **asíntota oblicua**.

EJEMPLO 9 ■ Una función racional con una asíntota inclinada

Trace la gráfica de la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

SOLUCIÓN

Factorizar. $y = \dfrac{(x+1)(x-5)}{x-3}$

Puntos de intersección *x*. -1 y 5, de $x + 1 = 0$ y $x - 5 = 0$

Puntos de intersección *y*. $\dfrac{5}{3}$, ya que $r(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 - 5}{0 - 3} = \dfrac{5}{3}$

Asíntota vertical. $x = 3$, del cero del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical. $y \to \infty$ cuando $x \to 3^-$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$

Asíntota horizontal. Ninguna porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ x - 3\overline{)x^2 - 4x - 5} \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -x - 5 \\ \underline{-x + 3} \\ -8 \end{array}$$

Asíntota inclinada. Dado que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la función tiene una asíntota inclinada. Dividiendo (vea al margen), obtenemos

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

Por tanto $y = x - 1$ es la asíntota inclinada.

Gráfica. Usamos la información que hemos encontrado junto con algunos valores adicionales para trazar la gráfica de la figura 11.

x	y
-2	-1.4
1	4
2	9
4	-5
6	2.33

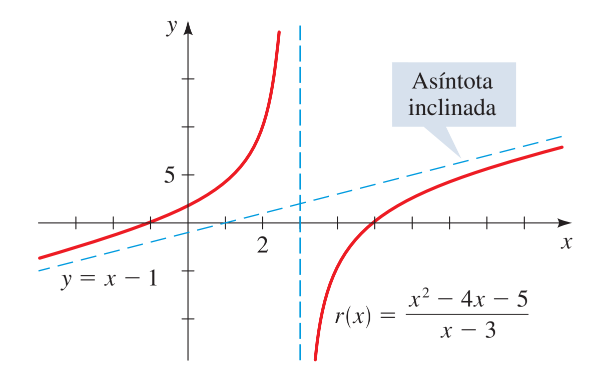


FIGURA 11

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

Hasta este punto hemos considerado sólo asíntotas horizontales y diagonales como comportamientos finales para funciones racionales. En el siguiente ejemplo graficamos una función cuyo comportamiento final es como el de una parábola.

EJEMPLO 10 ■ Comportamiento final de una función racional

Trace la gráfica de la función racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}.$$

y describa su comportamiento final.

SOLUCIÓN

Factorizar. $y = \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 3)}{x - 2}$

Puntos de intersección *x*. -1, de $x + 1 = 0$ (El otro factor del numerador no tiene ceros reales.)

Puntos de intersección *y*. $-\frac{3}{2}$, porque $r(0) = \dfrac{0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3}{0 - 2} = -\dfrac{3}{2}$

Asíntota vertical. $x = 2$, del cero del denominador.

Comportamiento cerca de la asíntota vertical. $y \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$ y $y \to \infty$ cuando $x \to 2^+$

Asíntota horizontal. Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

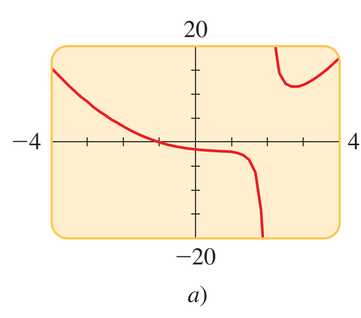
$$\begin{array}{r} x^2 \\ x - 2\overline{)x^3 - 2x^2 + 0x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 3 \end{array}$$

Comportamiento final. Dividiendo (vea al margen) tenemos

$$r(x) = x^2 + \frac{3}{x - 2}$$

Esto demuestra que el comportamiento final de r es como el de la parábola $y = x^2$ porque $3/(x - 2)$ es pequeño cuando $|x|$ es grande. Esto es, $3/(x - 2) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto significa que la gráfica de r estará cercana de la gráfica de $y = x^2$ para $|x|$ grande.

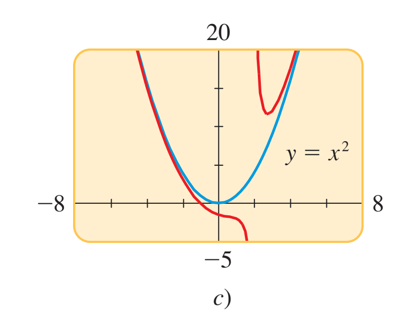
Gráfica. En la figura 12*a*) graficamos r en un rectángulo de vista pequeño; podemos ver los puntos de intersección, las asíntotas verticales y el mínimo local. En la figura 12*b*) hacemos la gráfica r en un rectángulo de vista más grande; aquí la gráfica se ve casi como la gráfica de una parábola. En la figura 12*c*) graficamos tanto $y = r(x)$ como $y = x^2$; estas gráficas están muy cercanas entre sí excepto cerca de la asíntota vertical.



a)

200
−30
30
−200

b)



c)

FIGURA 12
$r(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$

Ahora intente realizar el ejercicio 77 ■

■ Aplicaciones

Con frecuencia se presentan funciones racionales en aplicaciones científicas de álgebra. En el ejemplo siguiente analizamos la gráfica de una función de la teoría de la electricidad.

EJEMPLO 11 ■ Resistencia eléctrica

Cuando dos resistores con resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo su resistencia combinada R está dada por la fórmula

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

Suponga que un resistor fijo de 8 ohms está conectado en paralelo con un resistor variable, como se muestra en la figura 13. Si la resistencia del resistor variable está denotada por x, entonces la resistencia combinada R es una función de x. Trace la gráfica de R y dé una interpretación física de la gráfica.

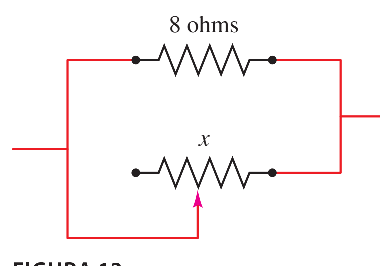


FIGURA 13

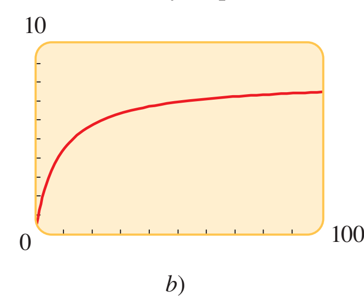
SOLUCIÓN Al sustituir $R_1 = 8$ y $R_2 = x$ en la fórmula dará la función

$$R(x) = \frac{8x}{8 + x}$$

Dado que la resistencia no puede ser negativa esta función tiene significado físico sólo cuando $x > 0$. La función está graficada en la figura 13*a*) usando el rectángulo de vista $[0, 20]$ por $[0, 10]$. La función no tiene asíntota vertical cuando x está restringida a valores positivos. La resistencia combinada R aumenta cuando la resistencia variable x aumenta. Si ampliamos el rectángulo de vista a $[0, 100]$ por $[0, 10]$, obtenemos la gráfica de la figura 14*b*). Para x grande la resistencia combinada R se nivela, acercándose más y más a la asíntota horizontal $R = 8$. Sin importar lo grande que sea la resistencia variable x, la resistencia combinada nunca es mayor que 8 ohms.

10
0
20

a)



b)

FIGURA 14
$R(x) = \dfrac{8x}{8 + x}$

Ahora intente realizar el ejercicio 87 ■

3.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si la función racional $y = r(x)$ tiene la asíntota vertical $x = 2$ entonces cuando $x \to 2^+$ ya sea que $y \to$ ________ o que $y \to$ ________.

2. Si la función racional $y = r(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = 2$ entonces $y \to$ ________ cuando $x \to \pm\infty$.

3–6 ■ Las preguntas siguientes son acerca de la función racional

$$r(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$

3. La función r tiene puntos de intersección x ________ y ________.

4. La función r tiene punto de intersección y ________.

5. La función r tiene asíntotas verticales $x =$ ________ y $x =$ ________.

6. La función r tiene asíntota horizontal $y =$ ________.

7–8 ■ *¿Verdadero o falso?*

7. Sea $r(x) = \dfrac{x^2 + x}{(x+1)(2x-4)}$. La gráfica de r tiene

a) asíntota vertical $x = -1$.
b) asíntota vertical $x = 2$.
c) asíntota horizontal $y = 1$.
d) asíntota horizontal $y = \frac{1}{2}$.

8. La gráfica de una función racional puede atravesar una asíntota horizontal.

HABILIDADES

9–12 ■ **Tabla de valores** Se da una función racional. *a*) Complete cada tabla de la función. *b*) Describa el comportamiento de la función cerca de la asíntota vertical con base en las tablas 1 y 2. *c*) Determine la asíntota horizontal con base en las tablas 3 y 4.

TABLA 1

x	$r(x)$
1.5	
1.9	
1.99	
1.999	

TABLA 2

x	$r(x)$
2.5	
2.1	
2.01	
2.001	

TABLA 3

x	$r(x)$
10	
50	
100	
1 000	

TABLA 4

x	$r(x)$
−10	
−50	
−100	
−1 000	

9. $r(x) = \dfrac{x}{x-2}$ **10.** $r(x) = \dfrac{4x+1}{x-2}$

11. $r(x) = \dfrac{3x-10}{(x-2)^2}$ **12.** $r(x) = \dfrac{3x^2+1}{(x-2)^2}$

13–20 ■ **Trazar la gráfica de funciones racionales usando transformaciones** Use transformaciones de la gráfica de $y = 1/x$ para trazar la gráfica de la función racional e indique el dominio y el rango, como en el ejemplo 2.

13. $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **14.** $r(x) = \dfrac{1}{x+4}$

15. $s(x) = \dfrac{3}{x+1}$ **16.** $s(x) = \dfrac{-2}{x-2}$

17. $t(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$ **18.** $t(x) = \dfrac{3x-3}{x+2}$

19. $r(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ **20.** $r(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$

21–26 ■ **Intersecciones de funciones racionales** Determine los puntos de intersección x y y de la función racional.

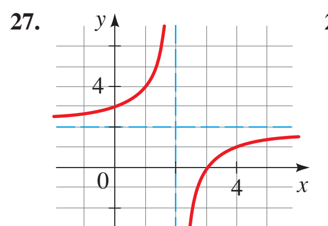
21. $r(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$ **22.** $s(x) = \dfrac{3x}{x-5}$

23. $t(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-6}$ **24.** $r(x) = \dfrac{2}{x^2+3x-4}$

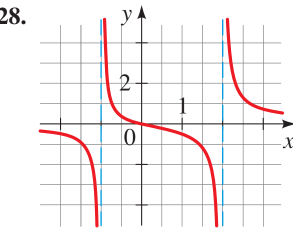
25. $r(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$ **26.** $r(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2+4}$

27–30 ■ **Obtener la información de una gráfica** De la gráfica determine los puntos de intersección x y y y las asíntotas verticales y horizontales.

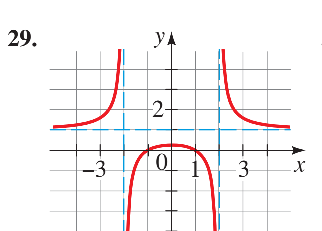
27.



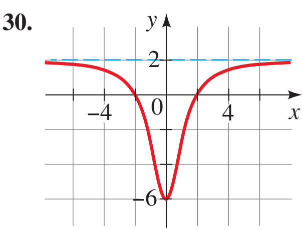
28.



29.



30.



31–42 ■ **Asíntotas** Encuentre todas las asíntotas horizontales y verticales (si las hay).

31. $r(x) = \dfrac{5}{x-2}$ **32.** $r(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-1}$

33. $r(x) = \dfrac{3x + 1}{4x^2 + 1}$

34. $r(x) = \dfrac{3x^2 + 5x}{x^4 - 1}$

35. $s(x) = \dfrac{6x^2 + 1}{2x^2 + x - 1}$

36. $s(x) = \dfrac{8x^2 + 1}{4x^2 + 2x - 6}$

37. $r(x) = \dfrac{(x + 1)(2x - 3)}{(x - 2)(4x + 7)}$

38. $r(x) = \dfrac{(x - 3)(x + 2)}{(5x + 1)(2x - 3)}$

39. $r(x) = \dfrac{6x^3 - 2}{2x^3 + 5x^2 + 6x}$

40. $r(x) = \dfrac{5x^3}{x^3 + 2x^2 + 5x}$

41. $t(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$

42. $r(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 4}$

43–62 ■ Trazar gráficas de funciones racionales Encuentre los puntos de intersección y las asíntotas y luego trace una gráfica de la función racional e indique el dominio y el rango. Use una calculadora graficadora para confirmar su respuesta.

43. $r(x) = \dfrac{4x - 4}{x + 2}$

44. $r(x) = \dfrac{2x + 6}{-6x + 3}$

45. $r(x) = \dfrac{3x^2 - 12x + 13}{x^2 - 4x + 4}$

46. $r(x) = \dfrac{-2x^2 - 8x - 9}{x^2 + 4x + 4}$

47. $r(x) = \dfrac{-x^2 + 8x - 18}{x^2 - 8x + 16}$

48. $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 4x + 2}$

49. $s(x) = \dfrac{4x - 8}{(x - 4)(x + 1)}$

50. $s(x) = \dfrac{6}{x^2 - 5x - 6}$

51. $s(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 + x - 2}$

52. $s(x) = \dfrac{x + 2}{(x + 3)(x - 1)}$

53. $r(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 3)}$

54. $r(x) = \dfrac{2x^2 + 10x - 12}{x^2 + x - 6}$

55. $r(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x}$

56. $r(x) = \dfrac{3x^2 + 6}{x^2 - 2x - 3}$

57. $s(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2}$

58. $r(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x}$

59. $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

60. $r(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x - 3}$

61. $r(x) = \dfrac{5x^2 + 5}{x^2 + 4x + 4}$

62. $t(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x - 2}$

63–68 ■ Funciones racionales con huecos Encuentre los factores que son comunes en el numerador y en el denominador. Luego determine las intersecciones y las asíntotas y trace una gráfica de la función racional. Indique el dominio y el rango de la función.

63. $r(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2}$

64. $r(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{(x + 1)(x - 3)(x + 5)}$

65. $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

66. $r(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x - 3}$

67. $r(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x + 1}$

[*Sugerencia:* verifique que $x + 1$ es un factor del numerador.]


68. $r(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + 7x^2 + 10x}$

69–76 ■ Asíntotas inclinadas Encuentre la asíntota inclinada, las asíntotas verticales y trace una gráfica de la función.

69. $r(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

70. $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$

71. $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

72. $r(x) = \dfrac{3x - x^2}{2x - 2}$

73. $r(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x - 3}$

74. $r(x) = \dfrac{x^3 + 4}{2x^2 + x - 1}$

75. $r(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$

76. $r(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

HABILIDADES Plus


77–80 ■ Comportamiento final Trace la gráfica de la función racional f y determine todas las asíntotas verticales a partir de su gráfica. Luego trace la gráfica de f y g en un rectángulo de vista suficientemente grande para demostrar que tienen el mismo comportamiento final.

77. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 6}{x + 3}, \quad g(x) = 2x$

78. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - 2x}, \quad g(x) = -x + 4$

79. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 16}{x - 2}, \quad g(x) = x^2$

80. $f(x) = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 2x}{(x - 1)^2}, \quad g(x) = 1 - x^2$


81–86 ■ Comportamiento final Trace la gráfica de la función racional y encuentre todas las asíntotas verticales, puntos de intersección x y y, y los extremos locales corregidos al decimal más cercano. Luego use división larga para encontrar un polinomio que tenga el mismo comportamiento final que la función racional y trace la gráfica de ambas funciones en un rectángulo de vista suficientemente grande como para verificar que los comportamientos finales del polinomio y de la función racional son iguales.

81. $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{2x + 3}$

82. $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x}$

83. $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$

84. $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

85. $r(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 6}{x - 3}$

86. $r(x) = \dfrac{4 + x^2 - x^4}{x^2 - 1}$

APLICACIONES


87. Crecimiento poblacional Suponga que la población de conejos de la granja del Sr. Jenkin sigue la fórmula

$$p(t) = \frac{3000t}{t+1}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde principios de año.

***a*)** Trace una gráfica de la población de conejos.

***b*)** ¿Qué le ocurre finalmente a la población de conejos?


88. Concentración de medicamento Después de que se le inyecta cierto medicamento a un paciente, se vigila la concentración c del medicamento en el flujo sanguíneo. Al tiempo $t \geq 0$ (en minutos desde que se inyectó), la concentración (en mg/L) está dada por

$$c(t) = \frac{30t}{t^2+2}$$

***a*)** Trace una gráfica de la concentración del medicamento.

***b*)** ¿Qué ocurre finalmente a la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo?


89. Concentración de medicamento Se le administra un medicamento a un paciente y se vigila la concentración del mismo en su flujo sanguíneo. Al tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó el medicamento) la concentración (en mg/L) está dada por

$$c(t) = \frac{5t}{t^2+1}$$

Trace la gráfica de la función c con una calculadora graficadora.

***a*)** ¿Cuál es la concentración más alta de medicamento que se alcanza en el flujo sanguíneo del paciente?

***b*)** ¿Qué le ocurre a la concentración de medicamento después de un tiempo prolongado?

***c*)** ¿Cuánto tarda la concentración en bajar a menos de 0.3 mg/L?


90. Vuelo de un cohete Suponga que un cohete es disparado hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v (medida en metros por segundo). Entonces la máxima altura h (en metros) alcanzada por el cohete está dada por la función

$$h(v) = \frac{Rv^2}{2gR - v^2}$$

donde $R = 6.4 \times 10^6$ m es el radio de la Tierra y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración debida a la gravedad. Use calculadora graficadora para trazar una gráfica de la función h. (Observe que h y v deben ser positivas, de modo que no es necesario que el rectángulo de observación contenga valores negativos.) ¿Qué representa físicamente la asíntota vertical?


91. El efecto Doppler Cuando un tren se acerca a un observador (vea la figura) el tono de su silbato le suena más alto al observador de lo que le sonaría si el tren estuviera en reposo porque las crestas de las ondas de sonido están comprimidas más cerca unas de otras. Este fenómeno se conoce como *efecto Doppler*. El tono observado P es una función de la velocidad v del tren y está dado por

$$P(v) = P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$$

donde P_0 es el paso real del silbato en la fuente y $s_0 = 332$ m/s es la velocidad del sonido en el aire. Suponga que un tren tiene un silbato con tono en $P_0 = 440$ Hz. Trace la gráfica de la función $y = P(v)$ usando una calculadora graficadora. ¿Cómo se puede interpretar físicamente la asíntota vertical de esta función?




92. Distancia de enfoque Para que una cámara con un lente de longitud focal F fija se enfoque en un objeto situado a una distancia x desde el lente la película debe ser colocada a una distancia y detrás del lente, donde F, x y y están relacionadas por

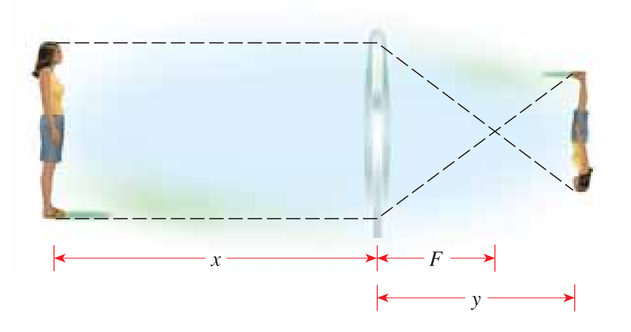
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$$

(Vea la figura.) Suponga que la cámara tiene un lente de ($F = 55$).

***a*)** Exprese y como función de x, y trace la gráfica de la función.

***b*)** ¿Qué le ocurre a la distancia de enfoque y cuando el objeto se aleja del lente?

***c*)** ¿Qué le ocurre a la distancia de enfoque y cuando el objeto se acerca al lente?



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN


93. DISCUSIÓN: Construcción de una función racional a partir de sus asíntotas Dé un ejemplo de una función racional que tiene asíntota vertical $x = 3$. Luego dé un ejemplo de una que tenga asíntota vertical $x = 3$ y *también* asíntota horizontal $y = 2$. Ahora dé un ejemplo de una función racional con asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$, y punto de intersección x de 4.

94. DISCUSIÓN: Una función racional sin asíntota Explique cómo se puede decir (sin trazar su gráfica) que la función

$$r(x) = \frac{x^6 + 10}{x^4 + 8x^2 + 15}$$

no tiene punto de intersección x y tampoco tiene asíntotas horizontal, vertical ni diagonal. ¿Cuál es su comportamiento final?

95. DESCUBRIMIENTO: Transformaciones de $y = 1/x^2$ En el ejemplo 2 vimos que algunas funciones racionales simples se pueden graficar al desplazar, estirar o reflejar la gráfica de $y = 1/x^2$. En este ejercicio consideramos funciones racionales que se pueden graficar al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$.

***a*)** Trace la gráfica de la función

$$r(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$.

***b*)** Use división larga y factorización para demostrar que la función

$$s(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x + 1}$$

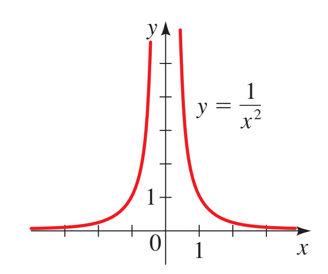
se puede escribir como

$$s(x) = 2 + \frac{3}{(x+1)^2}$$

Luego trace la gráfica de s al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$.

***c*)** Una de las siguientes funciones se puede graficar al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$; la otra no se puede graficar. Use transformaciones para graficar la que se puede y explique por qué este método no aplica para la otra función.

$$p(x) = \frac{2 - 3x^2}{x^2 - 4x + 4} \qquad q(x) = \frac{12x - 3x^2}{x^2 - 4x + 4}$$



3.7 DESIGUALDADES POLINOMIALES Y RACIONALES

■ Desigualdades de polinomios ■ Desigualdades de funciones racionales

En la sección 1.8 resolvimos desigualdades básicas. En esta sección resolvemos desigualdades más avanzadas utilizando los métodos que aprendimos en la sección 3.4 para factorizar y trazar las gráficas de polinomios.

■ Desigualdades de polinomios

Una consecuencia importante del teorema de valor intermedio (página 259) es que los valores de una función polinomial P no cambian de signo entre ceros sucesivos. En otras palabras, los valores de P entre ceros sucesivos son todos positivos o todos negativos. Gráficamente esto significa que entre los puntos de intersección x, la gráfica de P está totalmente arriba o abajo del eje x. La figura 1 muestra esta propiedad de polinomios, misma que nos permite resolver **desigualdades de polinomios** como $P(x) \geq 0$ al encontrar los ceros del polinomio y utilizar los puntos de prueba entre ceros sucesivos para determinar los intervalos que satisfacen la desigualdad. Utilizamos las siguientes directrices.

$P(x) = 4(x - 2)(x + 1)(x - 0.5)(x + 2)$

y, 20, 0, 1, x

FIGURA 1 $P(x) > 0$ o $P(x) < 0$ cuando x se encuentra entre ceros sucesivos de P

RESOLVER DESIGUALDADES DE POLINOMIOS

1. **Pasar todos los términos a un lado.** Reescriba la desigualdad de manera que todos los términos diferentes de cero se encuentren en un lado del símbolo de desigualdad.
2. **Factorizar el polinomio.** Factorice el polinomio en factores irreducibles y encuentre los **ceros reales** del polinomio.
3. **Encontrar los intervalos.** Haga una lista de los intervalos determinados por los ceros reales.
4. **Hacer una tabla o diagrama.** Utilice los valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. El último renglón de la tabla determina el signo del polinomio en ese intervalo.
5. **Resolver.** Determine las soluciones de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla. Verifique si los **puntos finales** de estos intervalos satisfacen la desigualdad. (Esto puede suceder si la desigualdad implica $\leq$ o $\geq$.)

EJEMPLO 1 ■ Resolver una desigualdad de polinomios

Resuelva la desigualdad $2x^3 + x^2 + 6 \geq 13x$.

SOLUCIÓN Seguimos la guía anterior.

Pasar todos los términos a un lado. Pasamos todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad para obtener

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 \geq 0$$

El lado izquierdo es un polinomio.

Factorizar el polinomio. Este polinomio está factorizado en el ejemplo 2, sección 3.4, en la página 277. Obtenemos

$$(x - 2)(2x - 1)(x + 3) \geq 0$$

Los ceros del polinomio son $-3, \frac{1}{2}$ y 2.

Encontrar los intervalos. Los intervalos determinados por los ceros del polinomio son

$$(-\infty, -3), (-3, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 2), (2, \infty)$$

Crear una tabla o diagrama. Haga un diagrama que indique el signo de cada factor en cada intervalo.

		-3		$\frac{1}{2}$		2	
Signo de $x - 2$	$-$		$-$		$-$		$+$
Signo de $2x - 1$	$-$		$-$		$+$		$+$
Signo de $x + 3$	$-$		$+$		$+$		$+$
Signo de $(x - 2)(2x - 1)(x + 3)$	$-$		$+$		$-$		$+$

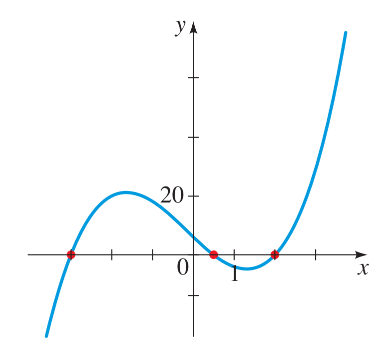


FIGURA 2

Resolver. En el diagrama vemos que la desigualdad se cumple en los intervalos de $(-3, \frac{1}{2})$ y $(2, \infty)$. Al comprobar los puntos finales vemos que $-3, \frac{1}{2}$ y 2 satisfacen la desigualdad, por lo que la solución es $[-3, \frac{1}{2}] \cup [2, \infty)$. La gráfica en la figura 2 confirma nuestra solución.

Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

EJEMPLO 2 ■ Resolver una desigualdad de polinomios

Resolver la desigualdad $3x^4 - x^2 - 4 < 2x^3 + 12x$.

SOLUCIÓN Seguimos la guía anterior.

Pasar todos los términos a un lado. Pasamos todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad para obtener

$$3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 < 0$$

El lado izquierdo es un polinomio.

Factorizar el polinomio. Este polinomio se factoriza en factores lineales y cuadráticos irreducibles en el ejemplo 5, sección 3.5, página 291. Se obtiene

$$(x - 2)(3x + 1)(x^2 + x + 2) < 0$$

De los dos primeros factores se tienen los ceros 2 y $-\frac{1}{3}$. El tercer factor no tiene ceros reales.

Encontrar los intervalos. Los intervalos determinados por los ceros del polinomio son

$$\left(-\infty, -\tfrac{1}{3}\right), \left(-\tfrac{1}{3}, 2\right), (2, \infty)$$

Crear una tabla o diagrama. Haga un diagrama que indique el signo de cada factor en cada intervalo.

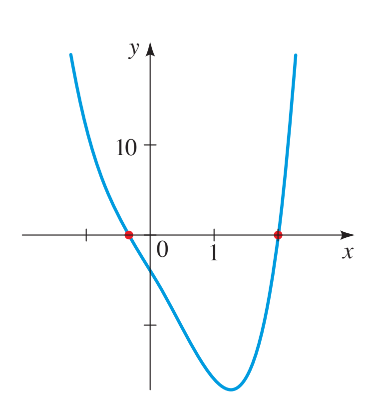
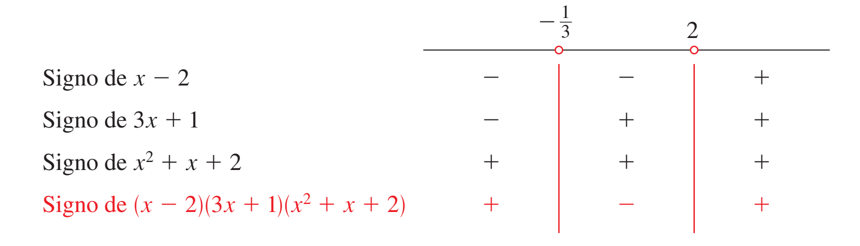


FIGURA 3



		$-\frac{1}{3}$		2	
Signo de $x - 2$	$-$		$-$		$+$
Signo de $3x + 1$	$-$		$+$		$+$
Signo de $x^2 + x + 2$	$+$		$+$		$+$
Signo de $(x - 2)(3x + 1)(x^2 + x + 2)$	$+$		$-$		$+$

Resolver. En el diagrama vemos que la desigualdad se cumple en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$. Usted puede verificar que los dos puntos finales no satisfacen la desigualdad, por lo que la solución es $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$. La gráfica de la figura 3 confirma nuestra solución.


Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

Desigualdades de funciones racionales

A diferencia de las funciones polinomiales las funciones racionales no son necesariamente continuas. Las asíntotas verticales de una función racional r dividen la gráfica en diferentes "ramas". Por tanto, los intervalos en los cuales r no cambia están determinados por las asíntotas verticales, así como por los ceros de r. Esta es la razón de la siguiente definición: si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional, los **puntos de corte** de r son los valores de x para los cuales se satisface ya sea $P(x) = 0$ o $Q(x) = 0$. En otras palabras, los puntos de corte de r son los ceros del numerador y los ceros del denominador (vea la figura 4). Para resolver una **desigualdad racional** como $r(x) \geq 0$, utilizamos los puntos de prueba entre los sucesivos puntos de corte para determinar los intervalos que satisfacen la desigualdad. Usamos la siguiente guía.

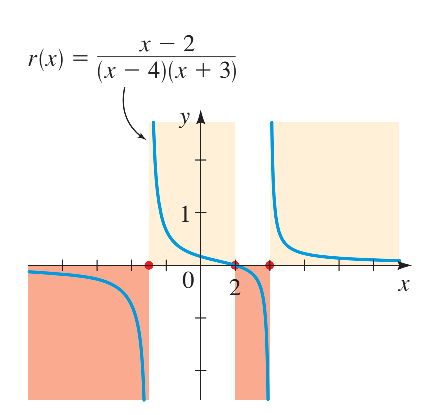


FIGURA 4 $r(x) > 0$ o $r(x) < 0$ para x entre puntos de corte sucesivos de r

RESOLVER DESIGUALDADES RACIONALES

1. **Pasar todos los términos a un lado.** Reescriba la desigualdad de manera que todos los términos estén en un lado del símbolo de desigualdad. Ponga todos los cocientes con un denominador común.
2. **Factorizar el numerador y el denominador.** Factorice el numerador y el denominador en factores irreducibles y luego encuentre los **puntos de corte**.
3. **Encontrar los intervalos.** Haga una lista de los intervalos determinados por los puntos de corte.
4. **Crear una tabla o diagrama.** Utilice valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo de la función racional en ese intervalo.
5. **Resolver.** Determine la solución de la desigualdad del último renglón de la tabla. Verifique si los **puntos finales** de estos intervalos satisfacen la desigualdad. (Esto puede suceder si la desigualdad tiene $\leq$ o $\geq$.)

EJEMPLO 3 ■ Resolver una desigualdad racional

Resuelva la desigualdad

$$\frac{1 - 2x}{x^2 - 2x - 3} \geq 1$$

SOLUCIÓN Seguimos la guía anterior.

Pasar todos los términos a un lado. Movemos todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad.

$$\frac{1-2x}{x^2-2x-3} - 1 \geq 0 \qquad \text{Mueva todos los términos al lado izquierdo}$$

$$\frac{(1-2x)-(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3} \geq 0 \qquad \text{Común denominador}$$

$$\frac{4-x^2}{x^2-2x-3} \geq 0 \qquad \text{Simplifique}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es una función racional.

Factorizar el numerador y el denominador. Al factorizar el numerador y el denominador obtenemos

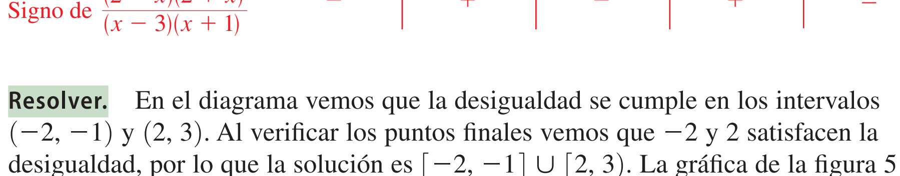
$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x-3)(x+1)} \geq 0$$

Los ceros del numerador son 2 y -2, y los ceros del denominador son -1 y 3, entonces los puntos de corte son -2, -1, 2 y 3.

Encontrar los intervalos. Los intervalos determinados por los puntos de corte son

$$(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

Crear una tabla o diagrama. Hacemos un diagrama de signos.



	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
Signo de $2-x$	+	+	+	−	−
Signo de $2+x$	−	+	+	+	+
Signo de $x-3$	−	−	−	−	+
Signo de $x+1$	−	−	+	+	+
Signo de $\frac{(2-x)(2+x)}{(x-3)(x+1)}$	−	+	−	+	−

Resolver. En el diagrama vemos que la desigualdad se cumple en los intervalos $(-2, -1)$ y $(2, 3)$. Al verificar los puntos finales vemos que -2 y 2 satisfacen la desigualdad, por lo que la solución es $[-2, -1] \cup [2, 3)$. La gráfica de la figura 5 confirma nuestra solución.

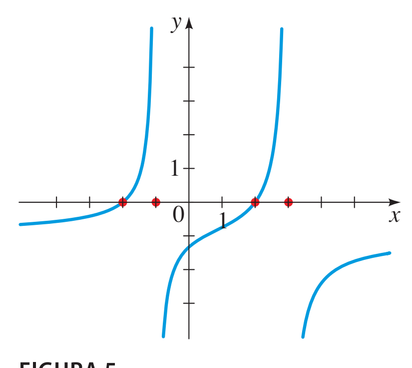


FIGURA 5

Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

EJEMPLO 4 ■ Resolver una desigualdad racional

Resuelva la desigualdad

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5} \geq 0$$

SOLUCIÓN Puesto que todos los términos ya están a un lado del símbolo de desigualdad, comenzamos por factorizar.

Factorizar el numerador y el denominador. Al factorizar el numerador y el denominador obtenemos

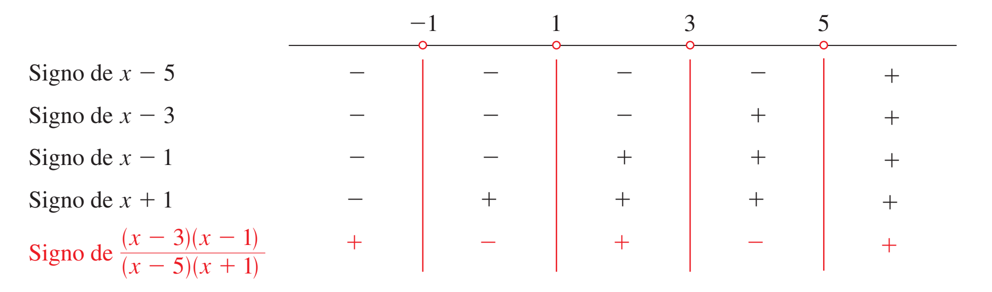
$$\frac{(x-3)(x-1)}{(x-5)(x+1)} \geq 0$$

Los puntos de corte son -1, 1, 3 y 5.

Encontrar los intervalos. Los intervalos determinados por los puntos de corte son

$$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, 3), (3, 5), (5, \infty)$$

Crear una tabla o diagrama. Hacemos un diagrama de signos.



	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,5)$	$(5,\infty)$
Signo de $x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
Signo de $\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

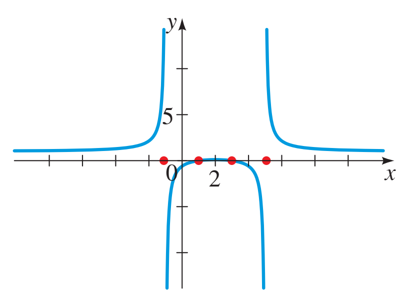


FIGURA 6

Resolver. En el diagrama vemos que la desigualdad se cumple en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(1, 3)$ y $(5, \infty)$. Al verificar los puntos finales vemos que 1 y 3 satisfacen la desigualdad por lo que la solución es $(-\infty, -1) \cup [1, 3] \cup (5, \infty)$. La gráfica de la figura 6 confirma nuestra solución.

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

También podemos resolver gráficamente desigualdades de polinomios y racionales (vea las páginas 120 y 172). En el siguiente ejemplo trazamos la gráfica de cada lado de la desigualdad y comparamos gráficamente los valores de los lados izquierdo y derecho.

EJEMPLO 5 ■ Resolver una desigualdad racional

Dos fuentes de luz están a 10 m de distancia. Una es tres veces más intensa que la otra. La intensidad de la luz L (en lux) en un punto a x metros de la fuente más débil está dada por

$$L(x) = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2}$$

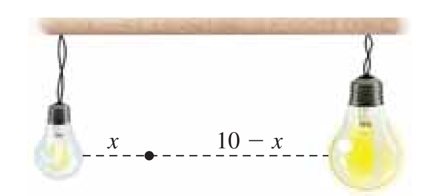


FIGURA 7

(Vea la figura 7.) Encuentre los puntos en que la intensidad de luz es 4 lux o menos.

SOLUCIÓN Tenemos que resolver la desigualdad

$$\frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2} \le 4$$

Resolvemos la desigualdad gráficamente trazando las gráficas de las dos funciones

$$y_1 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2} \qquad \text{y} \qquad y_2 = 4$$

Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para tener instrucciones específicas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponble en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

En este problema físico los valores posibles de x están entre 0 y 10, por lo que trazamos las gráficas de las dos funciones en un rectángulo de visión con valores de x entre 0 y 10, como se muestra en la figura 8. Queremos los valores de x para los que $y_1 \le y_2$. Haciendo un acercamiento (*zoom*) o utilizando la instrucción `intersect`, encontramos que las gráficas se intersecan en $x \approx 1.67431$ y $x \approx 7.19272$, y entre estos valores de x la gráfica de y_1 se encuentra debajo de la gráfica de y_2. Por tanto, la solución de la desigualdad es el intervalo (1.67, 7.19), redondeado a dos decimales. Entonces la intensidad de luz es menor o igual a 4 lux cuando la distancia desde la fuente más débil está entre 1.67 y 7.19 m.

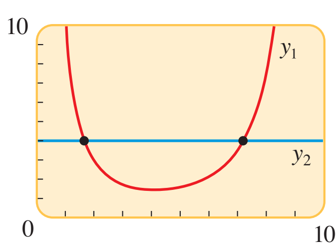


FIGURA 8



Ahora intente realizar los ejercicios 45 y 55 ■

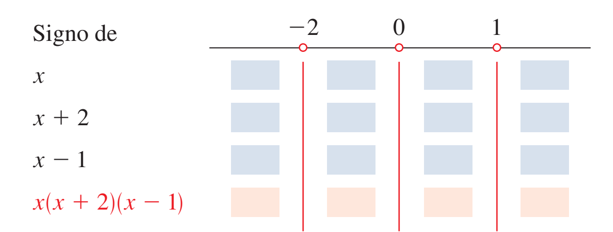
3.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para resolver una desigualdad de polinomios se factoriza el polinomio en factores irreducibles y se encuentran todos los ________ reales del polinomio. Luego se encuentran los intervalos determinados por los ________ reales y se utilizan puntos de prueba de cada intervalo para determinar el signo del polinomio en ese intervalo. Sea

$$P(x) = x(x + 2)(x - 1)$$

Complete el siguiente diagrama para encontrar los intervalos en los que $P(x) \geq 0$.

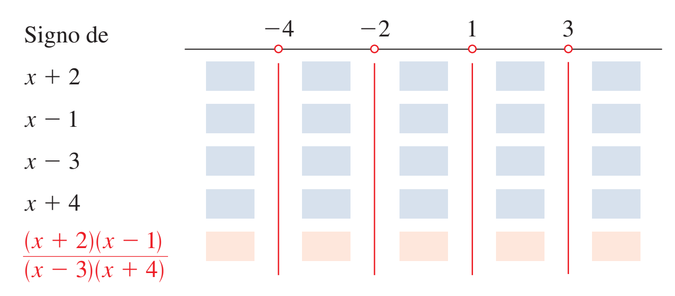


En el diagrama anterior vemos que $P(x) \geq 0$ en los intervalos ________ y ________.

2. Para resolver una desigualdad racional se factorizan el numerador y el denominador en factores irreducibles. Los puntos de corte son los ________ reales del numerador y los ________ reales del denominador. Luego se encuentran los intervalos determinados por los ________ ________, y se utilizan los puntos de prueba para encontrar el signo de la función racional en cada intervalo. Sea

$$r(x) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 3)(x + 4)}$$

Complete el siguiente diagrama para encontrar los intervalos en los que $r(x) \geq 0$.



Del diagrama vemos que $r(x) \geq 0$ en los intervalos ________, ________ y ________.

HABILIDADES

3–16 ■ Desigualdades de polinomios Resuelva la desigualdad.

3. $(x - 3)(x + 5)(2x + 5) < 0$

4. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) \geq 0$

5. $(x + 5)^2(x + 3)(x - 1) > 0$

6. $(2x - 7)^4(x - 1)^3(x + 1) \leq 0$

7. $x^3 + 4x^2 \geq 4x + 16$

8. $2x^3 - 18x < x^2 - 9$

9. $2x^3 - x^2 < 9 - 18x$

10. $x^4 + 3x^3 < x + 3$

11. $x^4 - 7x^2 - 18 < 0$

12. $4x^4 - 25x^2 + 36 \leq 0$

13. $x^3 + x^2 - 17x + 15 \geq 0$

14. $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4 < 0$

15. $x(1 - x^2)^3 > 7(1 - x^2)^3$

16. $x^2(7 - 6x) \leq 1$

17–36 ■ Desigualdades racionales Resuelva la desigualdad.

17. $\dfrac{x - 1}{x - 10} < 0$

18. $\dfrac{3x - 7}{x + 2} \leq 0$

19. $\dfrac{2x + 5}{x^2 + 2x - 35} \geq 0$

20. $\dfrac{4x^2 - 25}{x^2 - 9} \leq 0$

21. $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 2} \leq 0$

22. $\dfrac{x + 1}{2x^2 - 4x + 1} > 0$

23. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 7x - 6} > 0$

24. $\dfrac{x - 1}{x^3 + 1} \geq 0$

25. $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x + 4} \leq 0$

26. $\dfrac{x^2 - 16}{x^4 - 16} < 0$

27. $\dfrac{x - 3}{2x + 5} \geq 1$

28. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} < \dfrac{2}{x + 2}$

29. $2 + \dfrac{1}{1 - x} \leq \dfrac{3}{x}$

30. $\dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{1}{x + 2} \geq \dfrac{2x}{x^2 + x - 2}$

31. $\dfrac{(x - 1)^2}{(x + 1)(x + 2)} > 0$

32. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \leq 0$

33. $\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{6}{x} \geq 1$

34. $\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{5}{x + 1} + 4$

35. $\dfrac{x + 2}{x + 3} < \dfrac{x - 1}{x - 2}$

36. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} \leq \dfrac{1}{x + 3}$

37–40 ■ Gráficas de dos funciones Encuentre todos los valores de x para los que la gráfica de f se encuentra arriba de la gráfica de g.

37. $f(x) = x^2; \quad g(x) = 3x + 10$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

39. $f(x) = 4x; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

40. $f(x) = x^2 + x; \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

41–44 ■ Dominio de una función Encuentre el dominio de la función dada.

41. $f(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$

42. $g(x) = \sqrt{\dfrac{5 + x}{5 - x}}$

43. $h(x) = \sqrt[4]{x^4 - 1}$

44. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}$

45–50 ■ Resolver desigualdades gráficamente Utilice una calculadora graficadora para resolver la desigualdad como en el ejemplo 5. Exprese su respuesta usando notación de intervalos con los puntos finales redondeados a dos decimales.

45. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$

46. $2x^3 + x^2 - 8x - 4 \leq 0$

47. $2x^3 - 3x + 1 < 0$

48. $x^4 - 4x^3 + 8x > 0$

49. $5x^4 < 8x^3$

50. $x^5 + x^3 \geq x^2 + 6x$

HABILIDADES Plus

51–52 ■ Resolver desigualdades Resuelva la desigualdad. (Estos ejercicios implican expresiones que surgen en cálculo.)

51. $\dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} \geq 4\sqrt{x}(x-1)$

52. $\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+2)^{1/2} + \frac{1}{2}x^{2/3}(x+2)^{-1/2} < 0$

53. Desigualdad general de polinomios Resuelva la desigualdad

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \geq 0$$

donde $a < b < c < d$.

54. Desigualdad general racional Resuelva la desigualdad

$$\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x+c} \leq 0$$

donde $0 < a < b < c$.

APLICACIONES

55. Temperatura de una fogata En las cercanías de una fogata la temperatura T (en °C) a una distancia de x metros del centro del fuego está dada por

$$T(x) = \frac{500\,000}{x^2 + 400}$$

¿Para qué intervalo de distancias desde el centro del fuego la temperatura es menor a 300 °C?

56. Distancia de frenado Para un determinado modelo de auto d la distancia necesaria para detener el vehículo si está viajando a v mi/h está dada por la función

$$d(t) = v + \frac{v^2}{25}$$

donde d se mide en pies. Kerry desea que su distancia de frenado no exceda los 175 pies. ¿En qué intervalo de velocidades puede viajar?



57. Administración de tráfico Una ingeniera de tráfico desarrolla una fórmula para estimar el número de autos que pueden viajar de manera segura en una determinada autopista a una velocidad dada. Ella encuentra que el número N de vehículos que puede pasar un punto por minuto se modela mediante la función

$$N(x) = \frac{88x}{17 + 17\left(\dfrac{x}{20}\right)^2}$$

Trace la gráfica de la función en el rectángulo de visión $[0, 100]$ por $[0, 60]$. Si el número de autos que pasan por el punto dado es mayor de 40, ¿en qué intervalo de velocidades pueden viajar los autos?



58. Cálculo de ganancias de paneles solares Un fabricante de paneles solares calcula que la ganancia y (en dólares) generada por la producción de x paneles solares por mes está dada por la ecuación

$$S(x) = 8x + 0.8x^2 - 0.002x^3 - 4\,000$$

Trace la gráfica de la función en el rectángulo de visión $[0, 400]$ de $[-10\,000, 20\,000]$. ¿Para qué rango de valores de x la ganancia de la empresa es de más de 12 000 dólares?

CAPÍTULO 3 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Funciones cuadráticas (pp. 246-251)

Una **función cuadrática** es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Puede expresarse en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

completando el cuadrado.

La gráfica de una función cuadrática en forma estándar es una parábola con **vértice** (h, k).

Si $a > 0$ entonces la función cuadrática f tiene el **valor mínimo** k en $x = h = -b/(2a)$.

Si $a < 0$ entonces la función cuadrática f tiene el **valor máximo** k en $x = h = -b/(2a)$.

Funciones polinomiales (p. 254)

Una **función polinomial** de **grado** n es una función P de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(donde $a_n \neq 0$). Los números a_i son los **coeficientes** del polinomio; a_n es el **coeficiente principal** y a_0 es el **coeficiente constante** (o **término constante**).

La gráfica de una función polinomial es una curva suave y continua.

Ceros reales de polinomios (p. 259)

Un **cero** de un polinomio P es un número c para que $P(c) = 0$. Los siguientes son maneras equivalentes de describir los ceros reales de los polinomios:

1. c es un cero real de P.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. c es una intersección x de la gráfica de P.

Multiplicidad de un cero (pp. 262-263)

Un cero de un polinomio P tiene multiplicidad m si m es la mayor potencia para la que $(x - c)^m$ es un factor de $P(x)$.

Máximos y mínimos locales (p. 264)

Una función polinomial P de grado n tiene $n - 1$ o menos **extremos locales** (es decir, máximos y mínimos locales).

División de polinomios (p. 269)

Si P y D son polinomios (con $D(x) \neq 0$), entonces podemos dividir P entre D ya sea con **división larga** o (si D es lineal) con **división sintética**. El resultado de la división se puede expresar en una de las siguientes formas equivalentes:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

En esta división, P es el **dividendo**, D es el **divisor**, Q es el **cociente** y R es el **residuo**. Cuando la división se continúa hasta completarla el grado de R será menor que el grado de D (o $R(x) = 0$).

Teorema del residuo (p. 272)

Cuando $P(x)$ se divide entre el divisor lineal $D(x) = x - c$, el **residuo** es una constante $P(c)$. Así que una forma de **evaluar** una función polinomial P en c es utilizar división sintética para dividir $P(x)$ entre $x - c$ y observar el valor del residuo.

Ceros racionales de polinomios (pp. 275-277)

Si el polinomio P dado por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes enteros entonces todos los **ceros racionales** de P tienen la forma

$$x = \pm\frac{p}{q}$$

donde p es un divisor del término constante a_0 y q es un divisor del coeficiente principal a_n.

Por tanto, para encontrar todos los ceros racionales de un polinomio hacemos una lista de todos los ceros racionales *posibles* dados por este principio y luego verificamos que *realmente* sean ceros usando división sintética.

Regla de los signos de Descartes (pp. 278-279)

Sea P un polinomio con coeficientes reales. Entonces:

El número de ceros reales positivos de P, o es el número de **cambios de signo** en los coeficientes de $P(x)$ o es menor que este por un número par.

El número de ceros reales negativos de P o es el número de **cambios de signo** en los coeficientes de $P(-x)$ o es menor que este por un número par.

Teorema de los límites superior e inferior (p. 279)

Supongamos que dividimos el polinomio P entre la expresión lineal $x - c$ y se obtiene el resultado

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Si $c > 0$ y los coeficientes de Q, seguidos por r, son todos positivos, entonces c es un **límite superior** de los ceros de P.

Si $c < 0$ y los coeficientes de Q, seguidos por r (incluyendo coeficientes iguales a cero) son alternadamente positivos y negativos, entonces c es un **límite inferior** de los ceros de P.

Teorema fundamental del álgebra, factorización completa y teorema de los ceros (p. 287)

Todo polinomio P de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n ceros complejos, siempre que cada cero de multiplicidad m sea contado m veces. P se factoriza en n factores lineales como sigue:

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

donde a es el coeficiente principal de P y $c_1, c_1, \ldots, c_n$ son los ceros de P.

Teorema de ceros conjugados (p. 291)

Si el polinomio P tiene coeficientes reales y si $a + bi$ es un cero de P, entonces su conjugado complejo de $a - bi$ también es un cero de P.

Teorema de factores lineales y cuadráticos (p. 292)

Todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

Funciones racionales (p. 295)

Una **función racional** r es un cociente de funciones:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Generalmente suponemos que los polinomios P y Q no tienen factores en común.

Asíntotas (pp. 296-297)

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si

$$y \to \infty \quad \text{o} \quad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^+ \quad \text{o} \quad x \to a^-$$

La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si

$$y \to b \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o} \quad x \to -\infty$$

Asíntotas de funciones racionales (pp. 298-300)

Sea $r(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional.

La asíntota vertical de r son las rectas $x = a$ donde a es un cero de Q.

Si el grado de P es menor que el grado de Q, entonces la asíntota horizontal de r es la recta $y = 0$.

Si los grados de P y Q son iguales, entonces la asíntota horizontal de r es la recta $y = b$, donde

$$b = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

Si el grado de P es mayor que el grado de Q, entonces r no tiene asíntota horizontal.

Desigualdades de polinomios y racionales (pp. 311, 313)

Una **desigualdad polinomial** es una desigualdad de la forma $P(x) \geq 0$, donde P es un polinomio. Resolvemos $P(x) \geq 0$ al encontrar los ceros de P y utilizar los puntos de prueba entre ceros sucesivos para determinar los intervalos que satisfacen la desigualdad.

Una **desigualdad racional** es una desigualdad de la forma $r(x) \geq 0$, donde

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

es una función racional. Los puntos de corte de r son los valores de x en los que $P(x) = 0$ o $Q(x) = 0$. Resolvemos $r(x) \geq 0$ busando puntos de prueba entre los puntos de corte sucesivos para determinar los intervalos que satisfacen la desigualdad.

■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a***) ¿Cuál es el grado de una función cuadrática f? ¿Cuál es la forma estándar de una función cuadrática? ¿Cómo se escribe una función cuadrática de forma estándar?

b) La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en su forma estándar. La gráfica de f es una parábola. ¿Cuál es el vértice de la gráfica de f? ¿Cómo se determina si $f(h) = k$ es un valor máximo o mínimo?

c) Exprese $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en forma estándar. Encuentre el vértice de la gráfica y el valor máximo o mínimo de f.

2. ***a***) Dé la forma general de una función polinomial P de grado n.

b) ¿Qué significa decir que c es un cero de P? Dé dos condiciones equivalentes que nos indiquen que c es un cero de P.

3. Trace gráficas que muestren los posibles comportamientos finales de un polinomio de grado impar y uno de grado par.

4. ¿Qué pasos seguiría usted para trazar manualmente la gráfica de una función polinomial P?

5. ***a***) ¿Qué significa un punto máximo local o un punto mínimo local de un polinomio P?

b) ¿Cuántos extremos locales puede tener un polinomio P de grado n?

6. Cuando dividimos un polinomio $P(x)$ entre un divisor $D(x)$ el algoritmo de la división nos dice que siempre podemos obtener un cociente $Q(x)$ y un residuo $R(x)$. Indique dos formas en las que se puede escribir el resultado de esta división.

7. ***a***) Exprese el teorema del residuo.

b) Exprese el teorema del factor.

c) Exprese el teorema de los ceros racionales.

8. Qué pasos seguiría para encontrar los ceros racionales de un polinomio P?

9. Sea $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 15$.

a) Explique cómo se utiliza la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de raíces reales positivas y negativas de P.

b) ¿Qué significa decir que a es un límite inferior y b es un límite superior para los ceros de un polinomio?

c) Explique cómo se utiliza el teorema de los límites superior e inferior para mostrar que todos los ceros reales de P se encuentran entre -3 y 3.

10. ***a***) Exprese el teorema fundamental del álgebra.

b) Exprese el teorema de factorización completa.

c) Exprese el teorema de los ceros.

d) Exprese el teorema de los ceros conjugados.

11. ***a***) ¿Qué es una función racional?

b) ¿Qué significa decir que $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$?

c) ¿Qué significa decir que $y = b$ is es una asíntota horizontal de $y = f(x)$?

d) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de

$$f(x) = \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

12. ***a***) ¿Cómo encontrar asíntotas verticales de funciones racionales?

b) Sea s la función racional

$$s(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

¿Cómo encontrar la asíntota horizontal de s?

13. ***a***) ¿Bajo qué circunstancias una función racional tiene una asíntota inclinada?

b) ¿Cómo se determina el comportamiento final de una función racional?

14. ***a***) Explique cómo se resuelve una desigualdad de polinomios.

b) ¿Cuáles son los puntos de corte de una función racional? Explique cómo resolver una desigualdad racional.

c) Resuelva la desigualdad $x^2 - 9 \leq 8x$.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–4 ■ Gráficas de funciones cuadráticas Se da una función cuadrática. ***a)*** Exprese la función en forma estándar. ***b)*** Trace la gráfica de la función.

1. $f(x) = x^2 + 6x + 2$ **2.** $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

3. $f(x) = 1 - 10x - x^2$ **4.** $g(x) = -2x^2 + 12x$

5–6 ■ Valores máximos y mínimos Encuentre el valor máximo o mínimo de la función cuadrática.

5. $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ **6.** $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$

7. Altura de una piedra Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio. Su altura (en pies) arriba del suelo después de t segundos está dada por la función $h(t) = -16t^2 + 48t + 32$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

8. Utilidad La utilidad P (en dólares) generada por vender x unidades de cierta mercancía está dada por la función

$$P(x) = -1\,500 + 12x - 0.004x^2$$

¿Cuál es la utilidad máxima y cuántas unidades deben ser vendidas para generarla?

9–14 ■ Transformaciones de monomios Trace la gráfica del polinomio al transformar una gráfica apropiada de la forma $y = x^n$. Muestre claramente todos los puntos de intersección x y y.

9. $P(x) = -x^3 + 64$ **10.** $P(x) = 2x^3 - 16$

11. $P(x) = 2(x + 1)^4 - 32$ **12.** $P(x) = 81 - (x - 3)^4$

13. $P(x) = 32 + (x - 1)^5$ **14.** $P(x) = -3(x + 2)^5 + 96$

15–18 ■ Trazar la gráfica de polinomios en forma factorizada Se da un polinomio P. ***a)*** Describa el comportamiento final. ***b)*** Trace una gráfica de P. Asegúrese de que su gráfica muestre todas las intersecciones.

15. $P(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 5)$

16. $P(x) = -(x - 5)(x^2 - 9)(x + 2)$

17. $P(x) = -(x - 1)^2(x - 4)(x + 2)^2$

18. $P(x) = x^2(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

19–20 ■ Trazar la gráfica de polinomios Se da una función polinomial P. ***a)*** Determine la multiplicidad de cada cero de P. ***b)*** Trace una gráfica de P.

19. $P(x) = x^3(x - 2)^2$ **20.** $P(x) = x(x + 1)^3(x - 1)^2$



21–24 ■ Trazar la gráfica de polinomios Use calculadora graficadora para trazar la gráfica del polinomio. Encuentre los puntos de intersección x y y y las coordenadas de todos los extremos locales, redondeados al decimal más cercano. Describa el comportamiento final del polinomio.

21. $P(x) = x^3 - 4x + 1$ **22.** $P(x) = -2x^3 + 6x^2 - 2$

23. $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 10x - 1$

24. $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x + 3$

25. Resistencia de una viga La resistencia S de una viga de madera de ancho x y profundidad y está dada por la fórmula $S = 13.8xy^2$. Se debe cortar una viga de un tronco de 10 pulgadas de diámetro como se muestra en la figura.

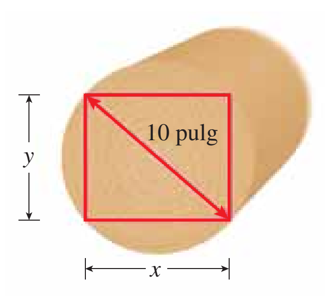
a) Exprese la resistencia S de esta viga como función sólo de x.

b) ¿Cuál es el dominio de la función S?



c) Trace una gráfica de S.

d) ¿Qué ancho hará que la viga sea más fuerte?



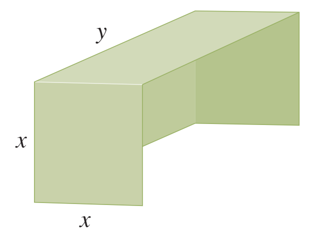
26. Volumen Se debe construir un pequeño cobertizo para plantas delicadas, con material plástico delgado. Tendrá extremos cuadrados y parte superior y posterior rectangulares, con fondo y frente abiertos como se muestra en la figura. El área total de los cuatro lados de plástico debe ser de 1 200 pulg^2.

a) Exprese el volumen V del cobertizo como función de la profundidad x.



b) Trace una gráfica de V.

c) ¿Qué dimensiones harán máximo el volumen del cobertizo?



27–34 ■ División de polinomios Encuentre el cociente y el residuo.

27. $\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x - 3}$ **28.** $\dfrac{3x^2 + x - 5}{x + 2}$

29. $\dfrac{2x^3 - x^2 + 3x - 4}{x + 5}$ **30.** $\dfrac{-x^3 + 2x + 4}{x - 7}$

31. $\dfrac{x^4 - 8x^2 + 2x + 7}{x + 5}$ **32.** $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - 12}{x + 4}$

33. $\dfrac{2x^3 + x^2 - 8x + 15}{x^2 + 2x - 1}$ **34.** $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 7x}{x^2 - x + 3}$

35–38 ■ Teorema del residuo En estos ejercicios utilice el teorema del residuo.

35. Si $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 13$, encuentre $P(5)$.

36. Si $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 15$, encuentre $Q(-3)$.

37. ¿Cuál es el residuo cuando el polinomio $P(x) = x^{500} + 6x^{101} - x^2 - 2x + 4$ se divide entre $x - 1$?

38. ¿Cuál es el residuo cuando el polinomio $Q(x) = x^{101} - x^4 + 2$ se divide entre $x + 1$?

39–40 ■ Teorema del factor Use el teorema del factor para demostrar que $x + 4$ es un factor del polinomio.

39. Demuestre que $\frac{1}{2}$ es un cero del polinomio

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 10x - 4$$

40. Demuestre que $x + 4$ es un factor del polinomio

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 23x^2 + 23x + 12$$

41–44 ■ Número de posibles ceros Se da un polinomio P. ***a***) Haga una lista de todos los posibles ceros racionales (sin probar si en realidad son ceros). ***b***) Determine el posible número de ceros reales positivos y negativos usando la regla de los signos de Descartes.

41. $P(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 + 2x + 18$

42. $P(x) = 6x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 4$

43. $P(x) = 3x^7 - x^5 + 5x^4 + x^3 + 8$

44. $P(x) = 6x^{10} - 2x^8 - 5x^3 + 2x^2 + 12$

45–52 ■ Encontrar ceros reales y trazar la gráfica de polinomios Se da un polinomio P. ***a***) Encuentre todos los ceros reales de P y exprese sus multiplicidades. ***b***) Trace la gráfica de P.

45. $P(x) = x^3 - 16x$

46. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

47. $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$

48. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

49. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

50. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

51. $P(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

52. $P(x) = 9x^5 - 21x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

53–56 ■ Polinomios con ceros dados Encuentre un polinomio con coeficientes reales del grado dado que satisface las condiciones dadas.

53. Grado 3; ceros $-\frac{1}{2}, 2, 3$; coeficiente constante 12

54. Grado 4; ceros 4 (multiplicidad 2) en $3i$; coeficientes enteros; el coeficiente de x^2 es -25

55. Ceros complejos de polinomios ¿Existe un polinomio de grado 4 con coeficientes enteros que tenga ceros i, $2i$, $3i$ y $4i$? Si es así encuéntrelo. Si no, explique por qué.

56. Polinomios con raíces no reales Demuestre que la ecuación $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ no tiene raíces reales.

57–68 ■ Encontrar ceros reales y complejos de polinomios Encuentre todos los ceros racionales, irracionales y complejos (y sus multiplicidades). Utilice la regla de los signos de Descartes, el teorema de los límites superior e inferior, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización para ayudarse siempre que sea posible.

57. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

58. $P(x) = x^3 - 8$

59. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

60. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$

61. $P(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 28x + 20$

62. $P(x) = x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 17x - 20$

63. $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$

64. $P(x) = x^4 - 81$

65. $P(x) = x^6 - 64$

66. $P(x) = 18x^3 + 3x^2 - 4x - 1$

67. $P(x) = 6x^4 - 18x^3 + 6x^2 - 30x + 36$

68. $P(x) = x^4 + 15x^2 + 54$

69–72 ■ Resolver polinomios gráficamente Utilice una calculadora graficadora para encontrar todas las soluciones reales de la ecuación.

69. $2x^2 = 5x + 3$

70. $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

71. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 9x - 2 = 0$

72. $x^5 = x + 3$

73–74 ■ Factorización completa Se da una función polinomial P. Encuentre todos los ceros reales de P y factorice P completamente en factores lineales e irreducibles cuadráticos con coeficientes reales.

73. $P(x) = x^3 - 2x - 4$

74. $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$

75–78 ■ Transformaciones de $y = 1/x$ Se da una función racional. ***a***) Encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales, todas las intersecciones x y y e indique el dominio y el rango. ***b***) Utilice las transformaciones de la gráfica de $y = 1/x$ para trazar la gráfica de la función racional e indique el dominio y el rango de r.

75. $r(x) = \dfrac{3}{x + 4}$

76. $r(x) = \dfrac{-1}{x - 5}$

77. $r(x) = \dfrac{3x - 4}{x - 1}$

78. $r(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 2}$

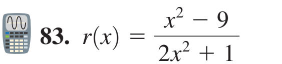
79–84 ■ Trazar gráficas de las funciones racionales Trace la gráfica de la función racional. Muestre claramente las intersecciones x y y, las asíntotas e indique el dominio y el rango de r.

79. $r(x) = \dfrac{3x - 12}{x + 1}$

80. $r(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

81. $r(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 8}$

82. $r(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 4}$

83.  $r(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 1}$

84. $r(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 7}{x - 4}$

85–88 ■ Funciones racionales con huecos Encuentre los factores comunes del numerador y del denominador de la función racional. Luego encuentre las intersecciones y las asíntotas y trace una gráfica. Indique el dominio y el rango.

85. $r(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}$

86. $r(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 10x}{x + 2}$

87. $r(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 8x + 15}$



88. $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^3 + 4x^2 - 7x - 10}$



89–92 ■ Trace la gráfica de funciones racionales Utilice una calculadora graficadora para analizar la gráfica de la función racional. Encuentre todas las intersecciones x y y todas las asíntotas verticales, horizontales e inclinadas. Si la función no tiene asíntota horizontal o inclinada encuentre un polinomio que tenga el mismo comportamiento final que la función racional

89. $r(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 6}$ **90.** $r(x) = \dfrac{2x - 7}{x^2 + 9}$

91. $r(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - x - 2}$ **92.** $r(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x + 1}$

93–96 ■ Desigualdades de polinomios Resuelva la desigualdad.

93. $2x^2 \geq x + 3$ **94.** $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \leq 0$

95. $x^4 - 7x^2 - 18 < 0$ **96.** $x^8 - 17x^4 + 16 > 0$

97–100 ■ Desigualdades de polinomios Resuelva la desigualdad.

97. $\dfrac{5}{x^3 - x^2 - 4x + 4} < 0$ **98.** $\dfrac{3x + 1}{x + 2} \leq \dfrac{2}{3}$

99. $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{2}{x + 3} \geq \dfrac{3}{x}$ **100.** $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{3}{x - 3} \leq \dfrac{4}{x}$

101–102 ■ Dominio de una función Encuentre el dominio de la función dada.

101. $f(x) = \sqrt{24 - x - 3x^2}$ **102.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x - x^4}}$

103–104 ■ Resolver desigualdades gráficamente Utilice una calculadora graficadora para resolver la desigualdad. Exprese su respuesta usando notación de intervalo, con los puntos finales de los intervalos redondeados a dos decimales.

103. $x^4 + x^3 \leq 5x^2 + 4x - 5$

104. $x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 12x + 2 > 0$

105. Aplicación de la regla de los signos de Descartes Utilizamos la regla de signos de Descartes para demostrar que un polinomio $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ no tiene ceros reales positivos.

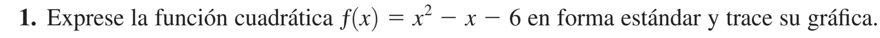
a) Demuestre que -1 es un cero del polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + x + 4$.

b) Utilice la información del inciso *a*) y la regla de signos de Descartes para demostrar que el polinomio $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ no tiene ceros reales. [*Sugerencia:* compare los coeficientes del último polinomio de su tabla de división sintética del inciso *a*).]

106. Puntos de intersección Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección de las gráficas de

$$y = x^4 + x^2 + 24x \quad \text{y} \quad y = 6x^3 + 20$$

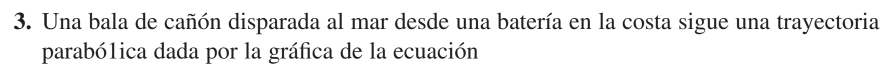
CAPÍTULO 3 EXAMEN



1. Exprese la función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 6$ en forma estándar y trace su gráfica.



2. Encuentre el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $g(x) = 2x^2 + 6x + 3$.



3. Una bala de cañón disparada al mar desde una batería en la costa sigue una trayectoria parabó1ica dada por la gráfica de la ecuación

$$h(x) = 10x - 0.01x^2$$

donde $h(x)$ es la altura de la bala de cañón sobre el agua cuando ha recorrido una distancia horizontal de x pies.



a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala de cañón?

b) ¿Qué distancia recorre horizontalmente la bala de cañón antes de caer al agua?

4. Trace la gráfica del polinomio $P(x) = -(x + 2)^3 + 27$, mostrando claramente todos los puntos de intersección x y y.

5. *a*) Use división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando $x^4 - 4x^2 + 2x + 5$ se divide entre $x - 2$.

b) Use división larga para encontrar el cociente y el residuo cuando $2x^5 + 4x^4 - x^3 - x^2 + 7$ se divide entre $2x^2 - 1$.

6. Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

a) Haga una lista de todos los ceros racionales posibles de P.

b) Encuentre la factorización completa de P.

c) Encuentre los ceros de P.

d) Trace la gráfica de P.

7. Encuentre todos los ceros reales y complejos de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$.

8. Encuentre la factorización completa de $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

9. Encuentre un polinomio de cuarto grado con coeficientes enteros que tenga ceros $3i$ y -1, con -1 un cero de multiplicidad 2.

10. Sea $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 - 18x + 3$.

a) Use la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y cuantos negativos puede tener P.

b) Demuestre que 4 es un límite superior y -1 es un límite inferior para los ceros reales de P.



c) Trace una gráfica de P y úsela para estimar los ceros reales de P, redondeados a dos lugares decimales.

d) Encuentre las coordenadas de todos los extremos locales de P, redondeadas a dos decimales.

11. Considere las siguientes funciones racionales:

$$r(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \qquad s(x) = \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4} \qquad t(x) = \frac{x^3 - 9x}{x + 2} \qquad u(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 25} \qquad w(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x + 3}$$

a) ¿Cuál de estas funciones racionales tiene una asíntota horizontal?

b) ¿Cuál de estas funciones tiene una asíntota inclinada?

c) ¿Cuál de estas funciones no tiene asíntota vertical?

d) ¿Cuál de estas funciones tiene un hueco?

e) ¿Cuáles son las asíntotas de la función $r(x)$?

f) Trace la gráfica de $y = u(x)$, mostrando claramente cualquier asíntota y puntos de intersección x y y que la función pueda tener.



g) Use división larga para encontrar un polinomio P que tenga el mismo comportamiento final que t. Trace la gráfica de P y t en la misma pantalla para verificar que tienen el mismo comportamiento final.

12. Resuelva la desigualdad racional $x \leq \dfrac{6 - x}{2x - 5}$.

13. Encuentre el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - 2x - x^2}}$.

14. ***a***) Elija un rectángulo de vista apropiado para ver la siguiente función y encuentre todas sus intersecciones x y extremos locales, redondeados a dos decimales.

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$$

b) Utilice la gráfica del inciso *a*) para resolver la desigualdad

$$x^4 - 4x^3 + 8x \geq 0$$

Exprese su respuesta en forma de intervalo con los puntos finales redondeados a dos decimales.

Ajuste de datos a curvas con funciones polinomiales

Hemos aprendido a ajustar datos a una recta (vea el *Enfoque sobre modelado*, página 139). La recta modela la tendencia creciente y decreciente en los datos. Si los datos exhiben más variabilidad, por ejemplo, un aumento seguido de una disminución entonces para modelar los datos necesitamos usar una curva más que una recta. La figura 1 muestra una gráfica de dispersión con tres posibles modelos que parecen ajustarse a los datos. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?

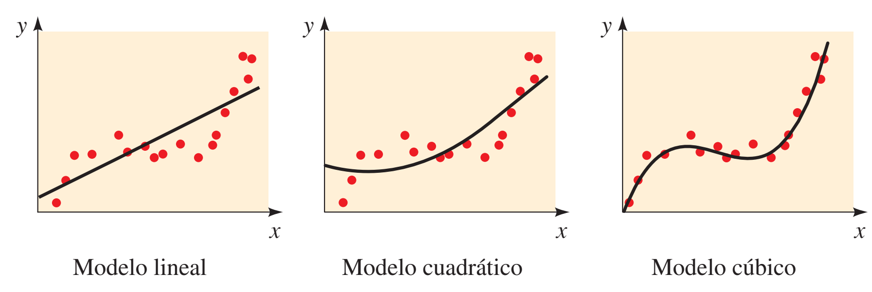


FIGURA 1

Funciones polinomiales como modelos

Las funciones polinomiales son ideales para modelar datos para los cuales la gráfica de dispersión tiene crestas o valles (esto es, máximos o mínimos locales). Por ejemplo, si los datos tienen una sola cresta como en la figura 2*a*) entonces puede ser apropiado usar un polinomio cuadrático para modelar los datos. Mientras más crestas o valles exhiban los datos, más alto es el grado necesario del polinomio para modelar los datos (vea la figura 2).

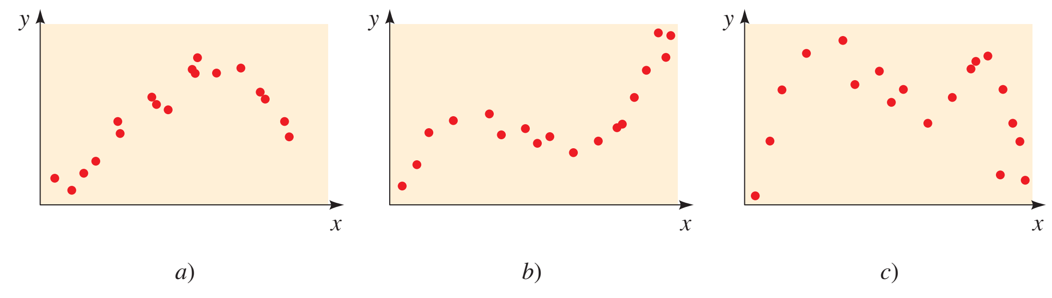
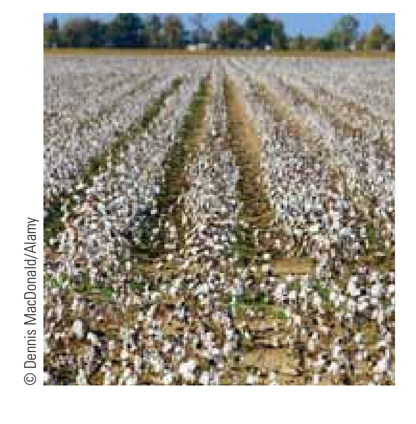


FIGURA 2

Las calculadoras graficadoras están programadas para encontrar el **polinomio de mejor ajuste** de un grado dado. Al igual que en el caso de las rectas (véase la página 140), un polinomio de un grado dado se ajusta *mejor* a los datos si la suma de los cuadrados de las distancias entre la gráfica del polinomio y los puntos de datos se minimizan.



© Dennis MacDonald/Alamy

EJEMPLO 1 ■ Lluvia y producción de cosechas

La lluvia es esencial para que crezcan las cosechas, pero demasiada lluvia puede disminuir la producción. Los datos siguientes dan la lluvia y la producción de algodón por acre para varias estaciones en cierto condado.

***a*)** Haga una gráfica de dispersión de los datos. ¿Qué grado de polinomio parece apropiado para modelar los datos?

***b*)** Use calculadora graficadora para encontrar el polinomio de mejor ajuste. Trace la gráfica del polinomio en la gráfica de dispersión.

***c*)** Use el modelo que haya encontrado para estimar la producción si hay 25 pulgadas de lluvia.

Estación	Lluvia (pulg)	Producción (kg/acre)
1	23.3	5 311
2	20.1	4 382
3	18.1	3 950
4	12.5	3 137
5	30.9	5 113
6	33.6	4 814
7	35.8	3 540
8	15.5	3 850
9	27.6	5 071
10	34.5	3 881

SOLUCIÓN

***a*)** En la figura 3 se muestra la gráfica de dispersión. Los datos parecen tener una cresta, de modo que es apropiado modelar los datos por medio de un polinomio cuadrático (grado 2).

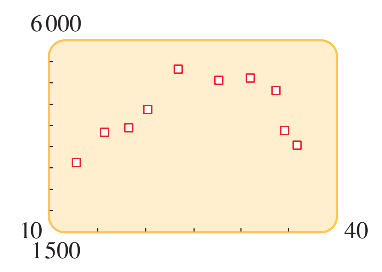


FIGURA 3 Gráfica de dispersión de producción contra datos de lluvia

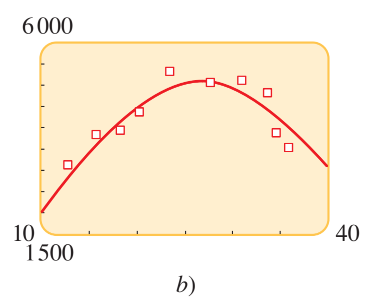
***b*)** Usando una calculadora graficadora encontramos que el polinomio cuadrático de mejor ajuste es

$$y = -12.6x^2 + 651.5x - 3\,283.2$$

En la figura 4 se muestran la salida de la calculadora y la gráfica de dispersión, junto con la gráfica del modelo cuadrático.

```
QuadReg
 y=ax²+bx+c
 a=-12.6271745
 b=651.5470392
 c=-3283.15741
```

a)



b)

FIGURA 4

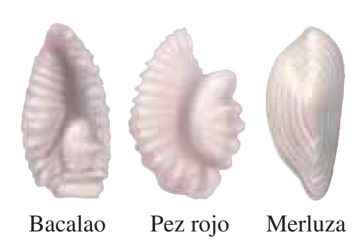
***c*)** Usando el modelo con $x = 25$, obtenemos

$$y = -12.6(25)^2 + 651.5(25) - 3\,283.2 \approx 5\,129.3$$

Estimamos que la producción es aproximadamente de 5 130 kg/acre. ■

EJEMPLO 2 ■ Datos de longitud de peces a cierta edad

Los otolitos ("orejas de piedra") son diminutas estructuras que se encuentran en la cabeza de los peces. Los anillos microscópicos de crecimiento en los otolitos, que no son diferentes de los anillos de crecimiento de un árbol, registran la edad de un pez. La tabla siguiente aporta las longitudes de los peces conocidos como perca de roca, capturados a diferentes edades, como lo determinan sus otolitos. Los científicos han propuesto un polinomio cúbico para modelar estos datos.



Otolitos para varias especies de peces

***a*)** Use una calculadora graficadora para encontrar el polinomio cúbico de mejor ajuste para los datos.

***b*)** Haga una gráfica de dispersión de los datos y trace la gráfica de la función polinomial del inciso *a*).

c) Un pescador captura una perca de roca de 20 pulgadas de largo. Use el modelo para estimar su edad.

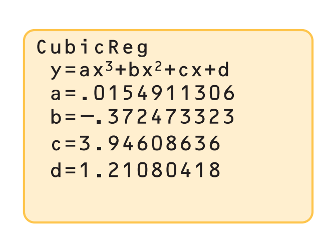
Edad (años)	Longitud (pulg)	Edad (años)	Longitud (pulg)
1	4.8	9	18.2
2	8.8	9	17.1
2	8.0	10	18.8
3	7.9	10	19.5
4	11.9	11	18.9
5	14.4	12	21.7
6	14.1	12	21.9
6	15.8	13	23.8
7	15.6	14	26.9
8	17.8	14	25.1

SOLUCIÓN

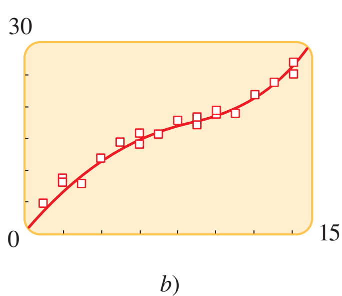
a) Usando una calculadora graficadora (vea la figura 5*a*)) encontramos el polinomio cúbico de mejor ajuste:

$$y = 0.0155x^3 - 0.372x^2 + 3.95x + 1.21$$

b) En la figura 5*b*) están graficados la gráfica de dispersión de los datos y el polinomio cúbico.



a)

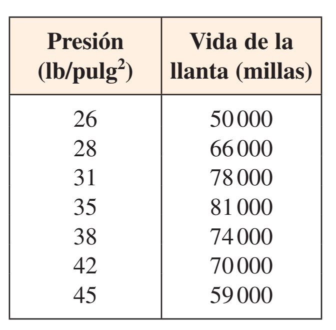


b)

FIGURA 5

c) Moviendo el cursor a lo largo de la gráfica del polinomio, encontramos que $y = 20$ cuando $x \approx 10.8$. Entonces, el pez tiene alrededor de 11 años de edad. ■

PROBLEMAS



Presión ($lb/pulg^2$)	Vida de la llanta (millas)
26	50 000
28	66 000
31	78 000
35	81 000
38	74 000
42	70 000
45	59 000

1. **Presión de inflado de llantas y desgaste de la superficie de rodamiento** Es necesario inflar correctamente las llantas de los autos. Una presión excesiva o demasiado baja pueden causar desgaste prematuro. Los datos al margen muestran la duración de una llanta para diferentes valores de inflado para cierto tipo de llanta.
   a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor se ajuste a los datos.
   b) Trace una gráfica del polinomio del inciso *a*) junto con una gráfica de dispersión de los datos.
   c) Use su resultado del inciso *b*) para estimar la presión que da la duración más larga.

2. **¿Demasiadas plantas de maíz por acre?** Mientras más maíz plante un agricultor por acre, mayor será la producción que este puede esperar, pero hasta cierto punto. Demasiadas plantas por acre pueden causar demasiada aglomeración y disminuir la producción. Los datos siguientes dan producciones por acre para varias densidades de plantación de maíz, como lo constataron los investigadores en una granja de una universidad.
   a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor se ajuste a los datos.
   b) Trace una gráfica del polinomio del inciso *a*) junto con una gráfica de dispersión de los datos
   c) Use su resultado del inciso *b*) para estimar la producción para 37 000 plantas por acre.

Densidad (plantas/acre)	15 000	20 000	25 000	30 000	35 000	40 000	45 000	50 000
Producción (bushels/acre)	43	98	118	140	142	122	93	67



3. ¿Con qué rapidez puede usted hacer una lista de sus cosas favoritas? Si se le pide hacer una lista de objetos en cierta categoría, la rapidez con la que pueda hacer esa lista sigue un modelo que se puede predecir. Por ejemplo, si trata de mencionar tantas hortalizas como pueda, es probable que piense en varias de ellas de inmediato, por ejemplo, zanahorias, chícharos, frijoles, maíz, etcétera. Después, tras cierta pausa, puede pensar en otras que consuma con menos frecuencia, quizá calabacines, berenjenas y espárragos. Finalmente, puede pensar en unas pocas legumbres exóticas como alcachofas, jícama, repollo chino u otras semejantes. Un psicólogo hace este experimento con varios individuos. La tabla siguiente da el número promedio de legumbres que las personas han citado en cierto número de segundos.

***a*)** Encuentre el polinomio cúbico que mejor se ajusta a los datos.

***b*)** Trace una gráfica del polinomio del inciso *a*) junto con una gráfica de dispersión de los datos.

***c*)** Use su resultado del inciso *b*) para estimar el número de legumbres que las personas podrían mencionar en 40 segundos.

***d*)** De acuerdo con el modelo, ¿cuánto tardaría una persona (al 0.1 s más cercano) en citar cinco legumbres?

Segundos	Número de legumbres
1	2
2	6
5	10
10	12
15	14
20	15
25	18
30	21

Tiempo (s)	Altura (pies)
0	4.2
0.5	26.1
1.0	40.1
1.5	46.0
2.0	43.9
2.5	33.7
3.0	15.8

4. Altura de una pelota de béisbol Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba y su altura se mide a intervalos de 0.5 segundos con una luz estroboscópica. Los datos resultantes se dan en la tabla siguiente.

***a*)** Trace una gráfica de dispersión de los datos. ¿Qué grado de polinomio es apropiado para modelar los datos?

***b*)** Encuentre un modelo de polinomio que mejor se ajuste a los datos y trace la gráfica de este sobre la gráfica de dispersión.

***c*)** Encuentre los tiempos en los que la pelota está a 20 pies sobre el suelo.

***d*)** ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota?

5. Ley de Torricelli El agua de un tanque escurrirá por un pequeño agujero del fondo con más rapidez cuando el tanque esté casi lleno que cuando esté casi vacío. De acuerdo con la ley de Torricelli, la altura $h(t)$ del agua restante en el tiempo t es una función cuártica de t.

Se llena con agua cierto tanque y se deja drenar. La altura del agua se mide en tiempos diferentes como se muestra en la tabla.

***a*)** Encuentre el polinomio cuadrático que mejor se ajuste a los datos.

***b*)** Trace una gráfica del polinomio del inciso *a*) junto con una gráfica de dispersión de los datos.

***c*)** Use su gráfica del inciso *b*) para estimar cuánto se tardará el tanque en vaciarse por completo.



Tiempo (min)	Altura (pies)
0	5.0
4	3.1
8	1.9
12	0.8
16	0.2



4 Funciones exponenciales y logarítmicas

En este capítulo estudiamos las *funciones exponenciales*. Estas son funciones, como $f(x) = 2^x$, donde la variable independiente está en el exponente. Las funciones exponenciales se usan para modelar numerosos fenómenos del mundo real, por ejemplo, el crecimiento de una población o el crecimiento de una inversión que gana interés compuesto, o la desintegración de una sustancia radiactiva. Una vez que se ha obtenido el modelo exponencial podemos usar el modelo para predecir el tamaño poblacional o calcular la cantidad de una inversión, o encontrar la cantidad de sustancia radiactiva que queda. Las funciones inversas de funciones exponenciales se llaman *funciones logarítmicas*. Con los modelos exponenciales y las funciones logarítmicas podemos responder a preguntas tales como ¿cuándo se verá mi ciudad tan congestionada como la calle que se ve en la foto? ¿Cuándo habrá en mi cuenta bancaria un millón de dólares? ¿Cuándo se desintegrará la radiación de un derrame radiactivo a un nivel seguro?

En el *Enfoque sobre modelado* al final del capítulo aprenderemos cómo ajustar curvas exponenciales y de potencia a los datos.

4.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

■ Funciones exponenciales ■ Gráficas de funciones exponenciales ■ Interés compuesto

En este capítulo estudiaremos una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Por ejemplo,

$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que aumentan los valores de esta función.

$$f(3) = 2^3 = 8$$
$$f(10) = 2^{10} = 1\,024$$
$$f(30) = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$$

Compare esta función con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. El punto es que cuando la variable está en el exponente, incluso un pequeño cambio en la variable puede causar un cambio muy grande en el valor de la función.

■ Funciones exponenciales

Para estudiar las funciones exponenciales primero debemos definir lo que queremos decir con la expresión a^x cuando x es cualquier número. En la sección 1.2 se definió a^x para $a > 0$ y x un número racional, pero aún no hemos definido potencias irracionales. Por tanto, ¿qué significa $5^{\sqrt{3}}$ o 2^π? Para definir a^x cuyo x es irracional aproximamos x mediante números racionales.

Por ejemplo, dado que

$$\sqrt{3} \approx 1.73205\ldots$$

es un número irracional, sucesivamente aproximamos $a^{\sqrt{3}}$ mediante las siguientes potencias racionales:

$$a^{1.7}, a^{1.73}, a^{1.732}, a^{1.7320}, a^{1.73205}, \ldots$$

Intuitivamente podemos ver que estas potencias racionales de a se acercan más y más a $a^{\sqrt{3}}$. Se puede demostrar mediante matemáticas avanzadas que hay exactamente un número al que estas potencias se aproximan. Definimos que $a^{\sqrt{3}}$ es este número.

Por ejemplo, usando calculadora, encontramos

$$5^{\sqrt{3}} \approx 5^{1.732}$$
$$\approx 16.2411\ldots$$

Mientras más lugares decimales de $\sqrt{3}$ usemos en nuestro cálculo, mejor será nuestra aproximación de $5^{\sqrt{3}}$.

En la página 14 se presentan las leyes de exponentes.

Se puede demostrar que las *leyes de exponentes siguen siendo ciertas cuando los exponentes son números reales*.

FUNCIONES EXPONENCIALES

La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Suponemos que $a \neq 1$ dado que la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante. A continuación se presentan algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 3x \qquad h(x) = 10^x$$

Base 2 Base 3 Base 10

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

a) $f(5)$ ***b)*** $f(-\frac{2}{3})$

c) $f(\pi)$ ***d)*** $f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para obtener los valores de f.

	Tecleo en calculadora	Salida
a) $f(5) = 3^5 = 243$	3 ^ 5 ENTER	243
b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

■ Gráficas de funciones exponenciales

Primero trazamos la gráfica de funciones exponenciales colocando puntos. Veremos que las gráficas de esas funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

EJEMPLO 2 ■ Trazar la gráfica de funciones exponenciales trazando puntos

Trace la gráfica de cada función.

a) $f(x) = 3^x$ ***b)*** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y colocamos puntos para trazar las gráficas de la figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−3	$\frac{1}{27}$	27
−2	$\frac{1}{9}$	9
−1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

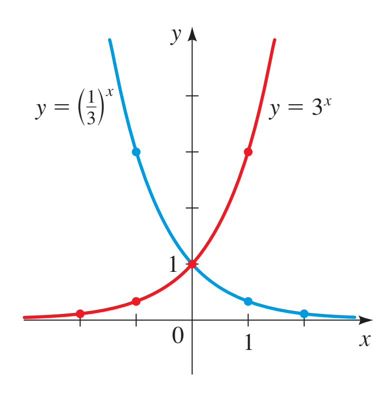


FIGURA 1

Observe que

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$$

La reflexión de gráficas se explica en la sección 2.6.

por tanto, hemos obtenido la gráfica de g a partir de la gráfica de f al reflejar en el eje y.

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

La figura 2 muestra las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para diferentes valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto $(0, 1)$ por-

Para ver la rapidez con la que aumenta $f(x) = 2^x$ realizaremos el siguiente experimento de pensamiento. Suponga que empezamos con un trozo de papel de un milésimo de pulgada de grueso y lo doblamos a la mitad 50 veces. Cada vez que doblamos el papel el grosor de la pila se duplica, de modo que el grosor de la pila resultante será $2^{50}/1\,000$ pulgadas. ¿De qué grosor piensa que es? Resulta que es de más de 17 millones de millas.

que $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$. De la figura 2 se puede ver que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a > 1$, la función crece rápidamente (vea nota al margen).

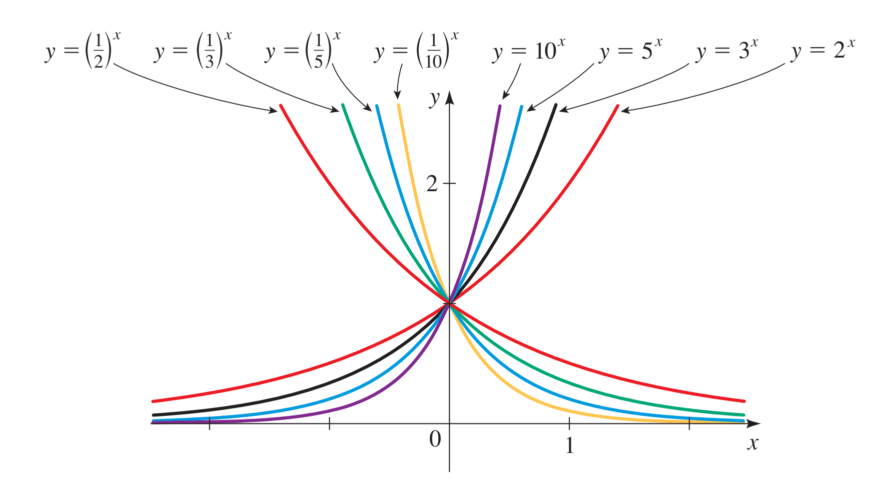


FIGURA 2 Una familia de funciones exponenciales

Vea la sección 3.6, página 295, donde se explica la "notación de flechas" empleada aquí.

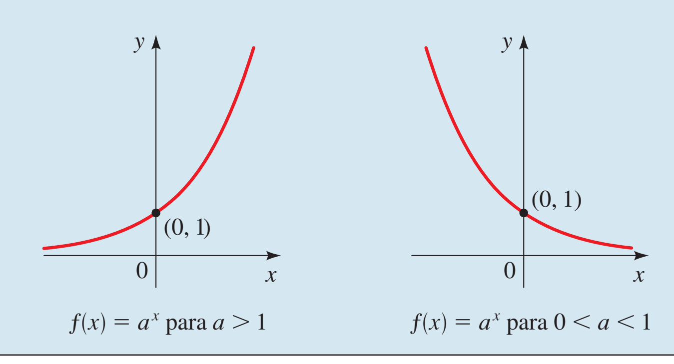
El eje x es una asíntota horizontal para la función exponencial $f(x) = a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$ tenemos que $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$ tenemos que $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (vea la figura 2). También, $a^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, de modo que la función $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Estas observaciones se resumen en el recuadro siguiente.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial

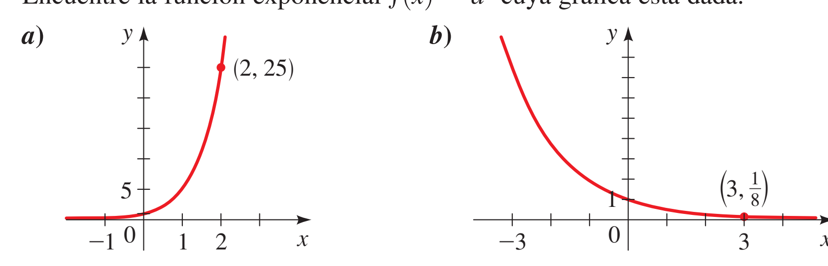
$$f(x) = a^x \qquad a > 0, a \neq 1$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.



EJEMPLO 3 ■ Identificar gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica está dada.



SOLUCIÓN

a) Dado que $f(2) = a^2 = 25$, vemos que la base es $a = 5$. Entonces $f(x) = 5^x$.

b) Dado que $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, vemos que la base es $a = \frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

En el siguiente ejemplo veremos cómo trazar la gráfica de ciertas funciones no colocando puntos, sino tomando las gráficas básicas de las funciones exponenciales de la figura 2 y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión de la sección 2.6.

EJEMPLO 4 ■ Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada función. Indique el dominio, el rango y la asíntota.

a) $g(x) = 1 + 2^x$ ***b)*** $h(x) = -2^x$ ***c)*** $k(x) = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN

En la sección 2.6 se explican el desplazamiento y la reflexión de gráficas.

a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y para obtener la gráfica que se muestra en la figura 3*a*) la desplazamos 1 unidad hacia arriba. De la gráfica vemos que el dominio de g es el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales, el rango es el intervalo $(1, \infty)$ y la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

b) De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ que se ve en la figura 3*b*). En la gráfica vemos que el dominio de h es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales, el rango es el intervalo $(-\infty, 0)$, y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

c) Esta vez empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos a la derecha 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ que se muestra en la figura 3*c*). De la gráfica vemos que el dominio de k es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales, el rango es el intervalo $(0, \infty)$, y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

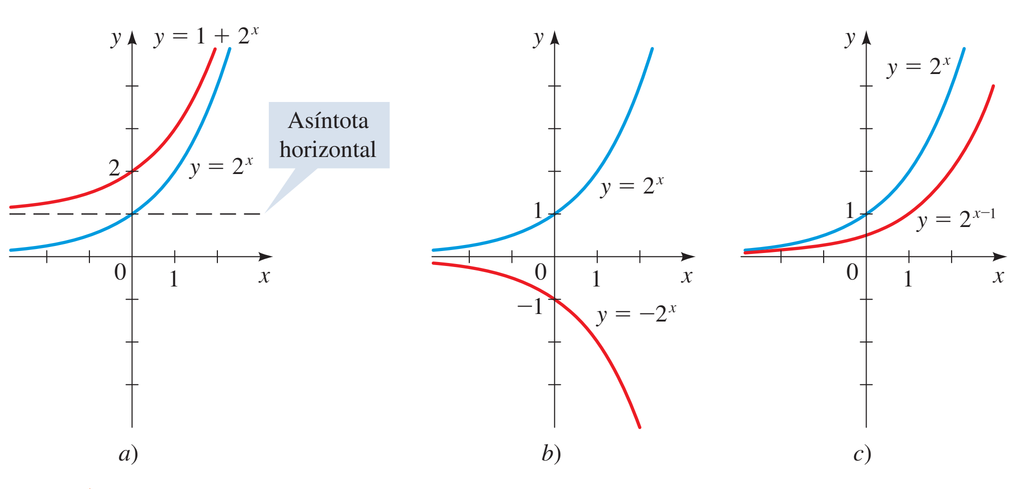


FIGURA 3

Ahora intente realizar los ejercicios 27, 29 y 31 ■

EJEMPLO 5 ■ Comparación de funciones exponenciales y de potencia

Compare la rapidez de crecimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencia $g(x) = x^2$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista.

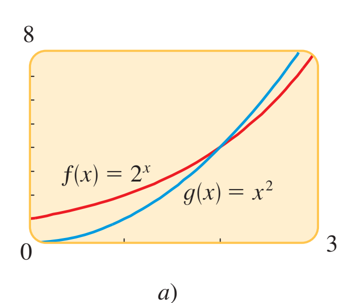
a) $[0, 3]$ por $[0, 8]$ ***b)*** $[0, 6]$ por $[0, 25]$ ***c)*** $[0, 20]$ por $[0, 1\,000]$

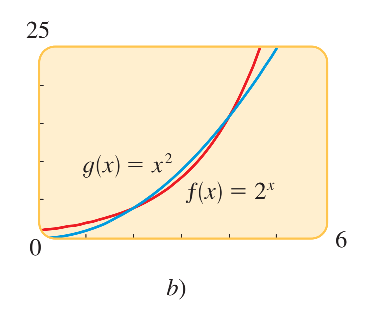
SOLUCIÓN

a) La figura 4*a*) muestra que la gráfica de $g(x) = x^2$ alcanza y hasta supera a la gráfica de $f(x) = 2^x$ en $x = 2$.

b) El rectángulo de vista más grande de la figura 4*b*) muestra que la gráfica de $f(x) = 2^x$ alcanza la de $g(x) = x^2$ cuando $x = 4$.

c) La figura 4*c*) da una vista más global y muestra que, cuando x es grande, $f(x) = 2^x$ es mucho mayor que $g(x) = x^2$.





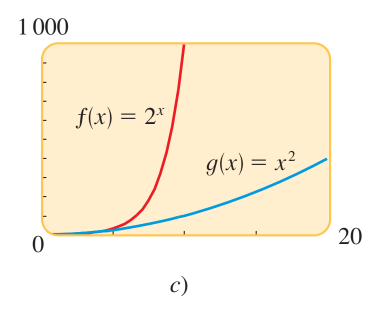


FIGURA 4 *a*) *b*) *c*)

Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

Interés compuesto

Las funciones exponenciales se presentan al calcular interés compuesto. Si una cantidad de dinero P, llamada el **principal** (capital inicial), se invierte a una tasa de interés i por periodo, entonces después de un periodo el interés es Pi, y la cantidad A de dinero es

$$A = P + Pi = P(1 + i)$$

Si el interés se reinvierte, entonces el nuevo principal es $P(1 + i)$, y la cantidad después de otro periodo es $A = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$. De modo similar, después de un tercer periodo la cantidad es $A = P(1 + i)^3$. En general, después de k periodos la cantidad es

$$A = P(1 + i)^k$$

Observe que esta es una función exponencial con base $1 + i$.

Si la tasa de interés anual es r y si el interés se capitaliza n veces por año, entonces en cada periodo la tasa de interés es $i = r/n$, y hay nt periodos en t años. Esto conduce a la siguiente fórmula para la cantidad después de t años.

INTERÉS COMPUESTO

El **interés compuesto** se calcula con la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde $A(t) =$ cantidad después de t años
$P =$ principal
$r =$ tasa de interés por año
$n =$ número de veces que el interés se capitaliza por año
$t =$ número de años

A veces r se conoce como *tasa nominal de interés anual*.

EJEMPLO 6 ■ Cálculo de interés compuesto

Se invierten 1 000 dólares a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza anual, semestral, trimestral, mensual y diariamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$.

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semestral	2	$1000\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diaria	365	$1000\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

Si una inversión gana interés compuesto, entonces el **rendimiento en porcentaje anual** (*annual percentage yield*, APY) es la tasa de interés *simple* que rinde la misma cantidad al término de un año.

EJEMPLO 7 ■ Cálculo del rendimiento en porcentaje anual

Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% por año, capitalizado diariamente.

SOLUCIÓN Después de un año un principal P crecerá a la cantidad

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

En la sección 1.7 se estudia el interés simple.

La fórmula para el interés simple es

$$A = P(1 + r)$$

Comparando, vemos que $1 + r = 1.06183$, entonces $r = 0.06183$. Por tanto, el rendimiento en porcentaje anual es 6.183.

Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

¿Conque quiere ser millonario?

En este proyecto se explora cómo aumentan rápidamente los valores de una función exponencial mediante el examen de algunas situaciones del mundo real. Por ejemplo, si guarda un centavo hoy, dos centavos mañana, cuatro centavos al día siguiente, y así sucesivamente, ¿cuánto tiempo tiene que seguir ahorrando de esta manera antes de volverse millonario? Usted puede encontrar la sorprendente respuesta para esta y otras preguntas al completar este proyecto de descubrimiento. Puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

4.1 EJERCICIOS

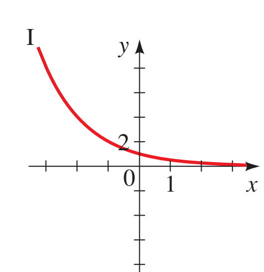
CONCEPTOS

1. La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base ________; $f(-2) =$ ________, $f(0) =$ ________, $f(2) =$ ________ y $f(6) =$ ________.

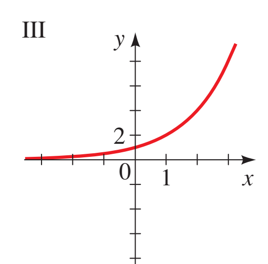
2. Relacione la función exponencial con una de las gráficas I, II, III o IV, que se muestran a continuación.

a) $f(x) = 2^x$ ***b)*** $f(x) = 2^{-x}$

c) $f(x) = -2^x$ ***d)*** $f(x) = -2^{-x}$

I


II

III


IV

3. ***a)*** Para obtener la gráfica de $g(x) = 2^x - 1$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos ____________ (hacia arriba/abajo) 1 unidad.

b) Para obtener la gráfica de $h(x) = 2^{x-1}$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos ____________ (a la izquierda/derecha) 1 unidad.

4. En la fórmula $A(t) = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ para interés compuesto las letras P, r, n y t representan ____________, ____________, ____________ y ____________, respectivamente, y $A(t)$ representa ____________. Por tanto, si se invierten 100 dólares a una tasa de interés de 6% capitalizado trimestralmente, entonces la cantidad después de 2 años es ____________.

5. La función exponencial $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ tiene la asíntota ____________ $y =$ ________. Esto significa que dado que $x \to \infty$, tenemos $(\frac{1}{2})^x \to$ ________.

6. La función exponencial $f(x) = (\frac{1}{2})^x + 3$ tiene la asíntota ____________ $y =$ ________. Esto significa que puesto que $x \to \infty$, tenemos que $(\frac{1}{2})^x + 3 \to$ ______.

HABILIDADES

7–10 ■ Evaluar funciones exponenciales Use calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

7. $f(x) = 4^x$; $f(\frac{1}{2}), f(\sqrt{5}), f(-2), f(0.3)$

8. $f(x) = 3^{x-1}$; $f(\frac{1}{2}), f(2.5), f(-1), f(\frac{1}{4})$

9. $g(x) = (\frac{1}{3})^{x+1}$; $g(\frac{1}{2}), g(\sqrt{2}), g(-3.5), g(-1.4)$

10. $g(x) = (\frac{4}{3})^{3x}$; $g(-\frac{1}{2}), g(\sqrt{6}), g(-3), f(\frac{4}{3})$

11–16 ■ Trazar la gráfica de funciones exponenciales Trace la gráfica de la función creando una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

11. $f(x) = 2^x$ **12.** $g(x) = 8^x$

13. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ **14.** $h(x) = (1.1)^x$

15. $g(x) = 3(1.3)^x$ **16.** $h(x) = 2(\frac{1}{4})^x$

17–20 ■ Trazar la gráfica de funciones exponenciales Trace la gráfica de ambas funciones en un conjunto de ejes.

17. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

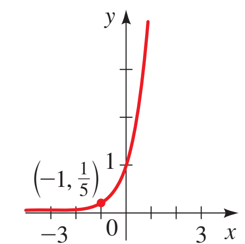
18. $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

19. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$

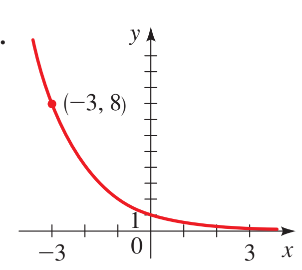
20. $f(x) = (\frac{3}{4})^x$ y $g(x) = 1.5^x$

21–24 ■ Funciones exponenciales a partir de una gráfica Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica está dada.

21.

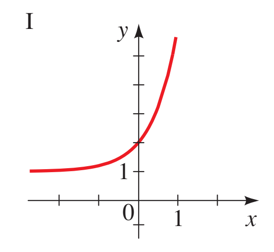
22.


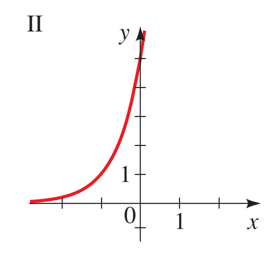
23.

24.


25–26 ■ Funciones exponenciales a partir de una gráfica Relacione la función exponencial con una de las gráficas marcadas I o II.

25. $f(x) = 5^{x+1}$ **26.** $f(x) = 5^x + 1$

I


II


27–40 ■ Funciones exponenciales a partir de una gráfica Trace la gráfica de la función no colocando puntos, sino empezando con las gráficas de la figura 2. Exprese el dominio, el rango y la asíntota.

27. $g(x) = 2^x - 3$ **28.** $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

29. $f(x) = -3^x$ **30.** $f(x) = 10^{-x}$

31. $f(x) = 10^{x+3}$ **32.** $g(x) = 2^{x-3}$

33. $y = 5^{-x} + 1$ **34.** $h(x) = 6 - 3^x$

35. $y = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **36.** $y = 5^{-x} - 3$

37. $h(x) = 2^{x-4} + 1$ **38.** $y = 3 - 10^{x-1}$

39. $f(x) = 1 - 3^{-x}$ **40.** $y = 3 - \left(\frac{1}{5}\right)^x$

41–42 ■ Comparar funciones exponenciales En estos ejercicios compare las gráficas de las dos funciones exponenciales.

41. ***a)*** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$.
b) ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

42. ***a)*** Trace las gráficas de $f(x) = 9^{x/2}$ y $g(x) = 3^x$.
b) Use las leyes de los exponentes para explicar la relación entre estas gráficas.

43–44 ■ Comparar funciones exponenciales y de potencia Compare las gráficas de las funciones de potencia f y de la función exponencial g evaluándolas en $x = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8$ y 10. Luego trace las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes.

43. $f(x) = x^3$; $g(x) = 3^x$ **44.** $f(x) = x^4$; $g(x) = 4^x$


45–46 ■ Comparar funciones exponenciales y de potencia En estos ejercicios utilice una calculadora graficadora para comparar las razones de crecimiento de las gráficas de una función de potencia y una función exponencial.

45. ***a)*** Compare la razón de crecimiento de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ al trazar las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de observación.
i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$
ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$
iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$
b) Encuentre las soluciones de la ecuación $2^x = x^5$ redondeadas a un lugar decimal.

46. ***a)*** Compare la rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista:
i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$
ii) $[0, 10]$ por $[0, 5\,000]$
iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$
b) Encuentre las soluciones de la ecuación $3^x = x^4$, redondeada a dos lugares decimales.

HABILIDADES Plus


47–48 ■ Familia de funciones Trace dos gráficas de la familia de funciones dada para $c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

47. $f(x) = c2^x$ **48.** $f(x) = 2^{cx}$


49–50 ■ Obtener información de una gráfica Encuentre, redondeados a dos lugares decimales, ***a)*** los intervalos en los que la función es creciente o decreciente y ***b)*** el rango de la función.

49. $y = 10^{x-x^2}$ **50.** $y = x2^x$

51–52 ■ Diferencia de cocientes Estos ejercicios implican una diferencia de cocientes para una función exponencial.

51. Si $f(x) = 10^x$, demuestre que
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10x\left(\frac{10^h - 1}{h}\right)$$

52. Si $f(x) = 3^{x-1}$, demuestre que
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3^{x-1}\left(\frac{3^h - 1}{h}\right)$$

APLICACIONES

53. Crecimiento de bacterias Un cultivo de bacterias contiene 1 500 bacterias inicialmente y se duplica cada hora.
a) Encuentre una función N que modele el número de bacterias después de t horas.
b) Encuentre el número de bacterias después de 24 horas.

54. Población de ratones Cierta raza de ratones fue introducida en una pequeña isla con una población inicial de 320 ratones. Los científicos estiman que la población de ratones se duplica cada año.
a) Encuentre una función N que modele el número de ratones después de t años.
b) Estime la población de ratones después de 8 años.

55–56 ■ Interés compuesto Una inversión de 5 000 dólares se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos o tasas de interés indicados.

55. $r = 4\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

56. $t = 5$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

57. Interés compuesto Se invierten 10 000 dólares a una tasa de interés de 3% al año, capitalizada semestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
a) 5 años ***b)*** 10 años ***c)*** 15 años

58. Interés compuesto Si se invierten 2 500 dólares a una tasa de interés de 2.5% por año, capitalizado a diario, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
a) 2 años ***b)*** 3 años ***c)*** 6 años

59. Interés compuesto Si se invierten 500 dólares a una tasa de interés de 3.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
a) 1 año ***b)*** 2 años ***c)*** 10 años

60. Interés compuesto Si se hace un préstamo de 4 000 dólares a una tasa de interés de 5.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre la cantidad que se adeudará al término del número dado de años.
a) 4 años ***b)*** 6 años ***c)*** 8 años

61–62 ■ Valor presente El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que debe ser invertida ahora, a una tasa de interés dada, para producir la suma deseada en una fecha posterior.

61. Encuentre el valor presente de 10 000 dólares, si se paga interés a razón de 9% al año, capitalizado semestralmente durante 3 años.

62. Encuentre el valor presente de 10 000 dólares si se paga interés a razón de 8% al año, capitalizado mensualmente durante 5 años.

63. Rendimiento en porcentaje anual Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana 8% por año, capitalizado mensualmente.

64. Rendimiento en porcentaje anual Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana $5\frac{1}{2}$% por año, capitalizado trimestralmente.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

65. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Crecimiento de una función exponencial Supongamos que al lector le ofrecen un trabajo que dura un mes y que estará muy bien pagado. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago le es más rentable?

a) Un millón de dólares al final del mes

b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día, y en general, 2^n centavos en el n-ésimo día

66. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Altura de la gráfica de una función exponencial Su profesor de matemáticas le pide que trace una gráfica de la función exponencial

$$f(x) = 2^x$$

para x entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades a 1 pulgada. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitará para trazar esta gráfica?

4.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

■ El número *e* ■ La función exponencial natural ■ Interés capitalizado continuamente

Cualquier número positivo se puede usar como base para una función exponencial. En esta sección estudiaremos la base especial e, que es conveniente para aplicaciones donde interviene el cálculo.



© iStockphoto.com/Kubrak78

El **Gateway Arch** en San Luis, Misuri, tiene la forma de una gráfica de una combinación de funciones exponenciales (no es una parábola como podría parecer al principio). Específicamente, es una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

(vea los ejercicios 17 y 19). Esta forma se escogió porque es óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo, los tramos de cable entre pares de postes telefónicos) cuelgan en forma de catenaria.

■ El número *e*

El número e se define como el valor al que $(1 + 1/n)^n$ se aproxima cuando n se hace grande. (En cálculo esta idea se hace más precisa mediante el concepto de un límite. La tabla siguiente muestra los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores de n cada vez más grandes.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1 000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

Es evidente que, redondeado a cinco lugares decimales, $e \approx 2.71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 lugares decimales es

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

Se puede demostrar que e es un número irracional, de modo que no podemos escribir su valor exacto en forma decimal.

La notación e fue escogida por Leonhard Euler (vea la página 63), probablemente debido a la primera letra de la palabra *exponencial.*

■ La función exponencial natural

El número e es la base para la función exponencial natural. ¿Por qué usamos una base tan extraña para una función exponencial? Podría parecer que con una base como 10 es más fácil trabajar. Sin embargo, veremos que en ciertas aplicaciones el número e es la

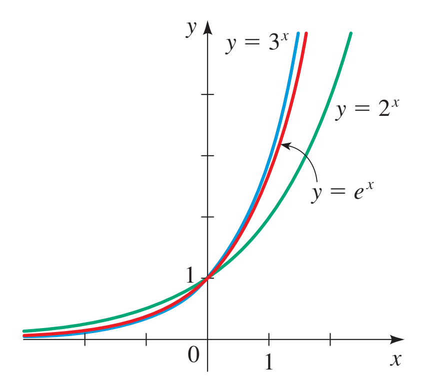


FIGURA 1 Gráfica de la función exponencial natural

mejor base posible. En esta sección estudiaremos cómo se presenta el número e en la descripción de interés compuesto.

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

con base e. Es frecuentemente llamada *la* función exponencial.

Dado que $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ como se ve en la figura 1.

Las calculadoras científicas tienen una tecla especial para la función $f(x) = e^x$. Usamos esta tecla en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de la función exponencial

Evalúe cada expresión redondeada a cinco lugares decimales.

a) e^3 ***b)*** $2e^{-0.53}$ ***c)*** $e^{4.8}$

SOLUCIÓN Usamos la tecla $\boxed{e^x}$ de una calculadora para evaluar la función exponencial.

a) $e^3 \approx 20.08554$ ***b)*** $2e^{-0.53} \approx 1.17721$ ***c)*** $e^{4.8} \approx 121.51042$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Transformaciones de la función exponencial

Trace la gráfica de cada función. Indique el dominio, el rango y la asíntota.

a) $f(x) = e^{-x}$ ***b)*** $g(x) = 3e^{0.5x}$

SOLUCIÓN

a) Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ y reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como en la figura 2. De la gráfica vemos que el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales, el rango es el intervalo $(0, \infty)$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

b) Calculamos varios valores, colocamos los puntos resultantes y luego los unimos con una curva suave. En la figura 3 se muestra la gráfica. En la gráfica vemos que el dominio de g es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales, el rango es el intervalo $(0, \infty)$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

FIGURA 2

x	$f(x) = 3e^{0.5x}$
-3	0.67
-2	1.10
-1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45

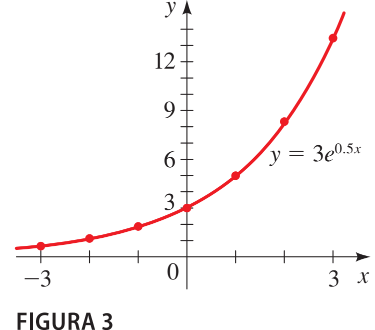


FIGURA 3

Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 7 ■

EJEMPLO 3 ■ Un modelo exponencial para la propagación de un virus

Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10 000 habitantes. Después de t días el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función

$$v(t) = \frac{10\,000}{5 + 1\,245e^{-0.97t}}$$

a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (tiempo $t = 0$)?

b) Encuentre el número de personas infectadas después de un día, dos días y cinco días.



c) Trace la gráfica de la función v y describa su comportamiento.

SOLUCIÓN

a) Dado que $v(0) = 10\,000/(5 + 1\,245e^0) = 10\,000/1\,250 = 8$, concluimos que inicialmente 8 personas tienen la enfermedad.

b) Usando calculadora evaluamos $v(1)$, $v(2)$ y $v(5)$ y luego redondeamos para obtener los siguientes valores.

Días	Personas infectadas
1	21
2	54
5	678

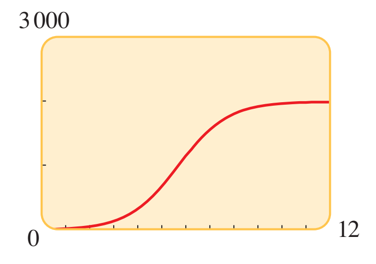
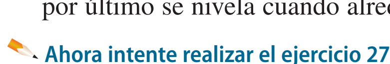


FIGURA 4

$$v(t) = \frac{10\,000}{5 + 1\,245e^{-0.97t}}$$

c) De la gráfica de la figura 4 vemos que el número de personas infectadas primero se incrementa lentamente, luego aumenta con rapidez entre el día 3 y el día 8 y por último se nivela cuando alrededor de 2 000 personas están infectadas.



Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

La gráfica de la figura 4 recibe el nombre de *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como esta se presentan con frecuencia en el estudio de crecimiento poblacional. (Vea los ejercicios 27-30.)

■ Interés capitalizado continuamente

En el ejemplo 6 de la sección 4.1 vimos que el interés que se paga aumenta cuando aumenta el número n de periodos de capitalización. Veamos qué ocurre cuando n aumenta indefinidamente. Si hacemos que $m = n/r$, entonces

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/t}\right]^{rt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recuerde que cuando m se hace grande, la cantidad $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número e. Entonces, la cantidad se aproxima a $A = Pe^{rt}$. Esta expresión da la cantidad cuando el interés se capitaliza "a cada instante".

INTERÉS CAPITALIZADO CONTINUAMENTE

El **interés capitalizado continuamente** se calcula con la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

donde $A(t)$ = cantidad después de t años

P = principal

r = tasa de interés por año

t = número de años

EJEMPLO 4 ■ Calcular interés capitalizado continuamente

Encuentre la cantidad después de 3 años si se invierten 1 000 dólares a una tasa de interés de 12% por año, capitalizado continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = \$1433.33$$

Compare esta cantidad con las cantidades del ejemplo 6 de la sección 4.1.

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

4.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función $f(x) = e^x$ se llama función exponencial ________. El número e es aproximadamente igual a ________.

2. En la fórmula $A(t) = Pe^{rt}$ para interés capitalizado continuamente las letras P, r y t representan ________, ________ y ________, respectivamente, y $A(t)$ representa ________. Por tanto, si se invierten 100 dólares a una tasa de interés de 6% capitalizado continuamente, entonces la cantidad después de 2 años es ________.

HABILIDADES

3–4 ■ Evaluar funciones exponenciales Use calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres lugares decimales.

3. $h(x) = e^x$; $h(1), h(\pi), h(-3), h(\sqrt{2})$

4. $h(x) = e^{-3x}$; $h(\frac{1}{3}), h(1.5), h(-1), h(-\pi)$

5–6 ■ Trazar la gráfica de funciones exponenciales Complete la tabla de valores redondeados a dos lugares decimales y trace una gráfica de la función.

5.

x	$f(x) = 1.5e^x$
−2	
−1	
−0.5	
0	
0.5	
1	
2	

6.

x	$f(x) = 4e^{-x/3}$
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

7–16 ■ Trazar gráficas de funciones exponenciales Trace la gráfica de la función no colocando los puntos, sino empezando con la gráfica de $y = e^x$. Exprese el dominio, el rango y la asíntota.

7. $g(x) = 2 + e^x$ **8.** $h(x) = e^{-x} - 3$

9. $f(x) = -e^x$ **10.** $y = 1 - e^x$

11. $y = e^{-x} - 1$ **12.** $f(x) = -e^{-x}$

13. $f(x) = e^{x-2}$ **14.** $y = e^{x-3} + 4$

15. $h(x) = e^{x+1} - 3$ **16.** $g(x) = -e^{x-1} - 2$

HABILIDADES Plus

17. Función coseno hiperbólico La *función coseno hiperbólico* está definida por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Trace las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes y use adición gráfica (vea la sección 2.7) para trazar la gráfica de $y = \cosh(x)$.

b) Use la definición para demostrar que $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

18. Función seno hiperbólico La *función seno hiperbólico* está definida por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

a) Trace la gráfica de esta función usando adición gráfica como en el ejercicio 17.

b) Use la definición para demostrar que $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$



19. Familias de funciones

a) Trace las gráficas de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

para $a = 0.5$, 1, 1.5 y 2.

b) ¿En qué forma un valor grande de a afecta la gráfica?



20. Definición de *e* Ilustre la definición del número e trazando la gráfica de la curva $y = (1 + 1/x)^x$ y la recta $y = e$ en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

21–22 ■ Extremos locales Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

21. $g(x) = x^x$, $x > 0$

22. $g(x) = e^x + e^{-2x}$

APLICACIONES

23. Medicamentos A un paciente se le administra cierto medicamento. La cantidad de medicamento en el flujo sanguíneo del paciente, en miligramos, después de t horas se modela por

$$D(t) = 50e^{-0.2t}$$

¿Cuántos miligramos de medicamento hay en el flujo sanguíneo del paciente después de 3 horas?

24. Desintegración radiactiva Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.

a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

b) ¿Cuánto de la masa queda después de 45 días?



25. Paracaidismo Una paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a la velocidad de la misma, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad hacia abajo de la paracaidista en el tiempo t está dada por

$$v(t) = 180(1 - e^{-0.2t})$$

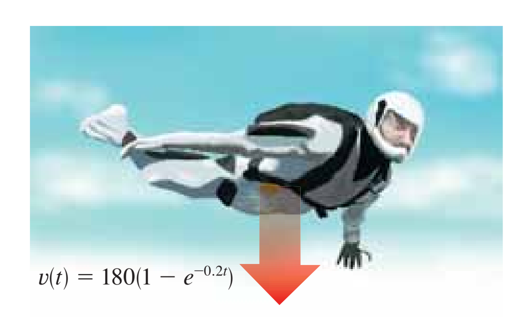
donde t se mide en segundos (s) y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).

a) Encuentre la velocidad inicial de la paracaidista.

b) Encuentre la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

c) Trace una gráfica de la función de velocidad $v(t)$.

d) La velocidad máxima de un cuerpo en caída con resistencia del viento se denomina *velocidad terminal*. De la gráfica del inciso *c*) encuentre la velocidad terminal de la paracaidista.



26. Mezclas y concentraciones Un barril de 50 galones se llena por completo de agua pura. A continuación, se le bombea al barril agua salada con concentración de 0.3 lb/gal, y la mezcla resultante se derrama con la misma rapidez. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t está dada por

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

a) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 5 minutos?

b) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 10 minutos?

c) Trace una gráfica de la función $Q(t)$.



d) Use la gráfica del inciso *c*) para determinar el valor al que se aproxima la cantidad de sal del barril cuando t se hace grande. ¿Es esto lo que usted esperaba?



$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$

27. Crecimiento logístico Las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un *modelo de crecimiento logístico*:

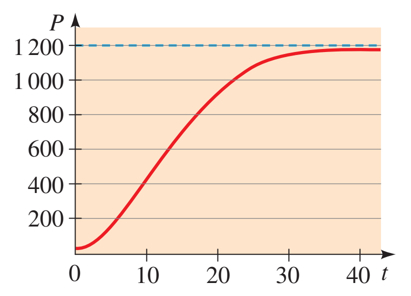
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque $d = 1\,200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

a) ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?

b) Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.

c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor se aproxima la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica siguiente confirma sus cálculos?





28. Población de aves La población de cierta especie de aves está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el siguiente modelo logístico de crecimiento

$$n(t) = \frac{5\,600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

donde t se mide en años.

a) Encuentre la población inicial de aves.

b) Trace una gráfica de la función $n(t)$.

c) ¿A qué tamaño se aproxima la población a medida que transcurre el tiempo?



29. Población mundial La tasa de crecimiento relativa de la población mundial ha estado disminuyendo continuamente en años recientes. Con base en esto, algunos modelos de población predicen que la población mundial se estabilizará finalmente en un nivel que el planeta pueda sostener. Uno de estos modelos logísticos es

$$P(t) = \frac{73.2}{6.1 + 5.9e^{-0.02t}}$$

donde $t = 0$ es el año 2000 y la población se mide en miles de millones.

a) ¿Qué población mundial predice este modelo para el año 2200? ¿Y para el año 2300?

b) Trace una gráfica de la función P para los años 2000 a 2500.

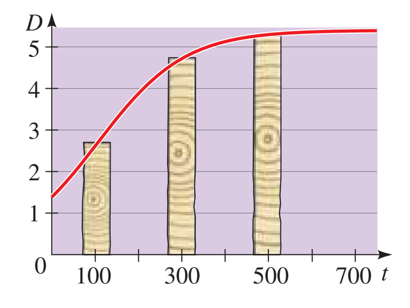
c) De acuerdo con este modelo, ¿a qué número parece aproximarse la población mundial conforme pasa el tiempo?



30. Diámetro de un árbol Para cierto tipo de árboles el diámetro D (en pies) depende de la edad t del árbol (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico siguiente

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Encuentre el diámetro de un árbol de 20 años de edad.



31–32 ■ Interés compuesto En una cuenta en la que el interés se capitaliza continuamente se deposita una inversión de 7 000 dólares. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos o tasas de interés indicados.

31. $r = 3\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

32. $t = 10$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

33. Interés compuesto Si se invierten 2 000 dólares a una tasa de interés de 3.5% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número de años dado.

a) 2 años

b) 4 años

c) 12 años

34. Interés compuesto Si se invierten 3 500 dólares a una tasa del 6.25% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número de años dado.

a) 3 años

b) 6 años

c) 9 años

35. Interés compuesto Si se invierten 600 dólares a una tasa de 2.5% al año, encuentre la cantidad de la inversión al término de 10 años para los siguientes métodos de capitalización.

a) Anualmente

b) Semestralmente

c) Trimestralmente

d) Continuamente

36. Interés compuesto Si se invierte 8 000 dólares en una cuenta para la cual el interés se capitaliza continuamente, encuentre la cantidad de la inversión al término de 12 años para las siguientes tasas de interés.

a) 2%

b) 3%

c) 4.5%

d) 7%

37. Interés compuesto ¿Cuáles de las tasas y periodos de capitalización dados darían la mejor inversión?

a) $2\frac{1}{2}\%$ al año, capitalizado semestralmente

b) $2\frac{1}{2}\%$ al año, capitalizado mensualmente

c) 2% al año, capitalizado continuamente

38. Interés compuesto ¿Cuáles de las tasas de interés y periodos de capitalización dados darían la mejor inversión?

a) $5\frac{1}{8}\%$ al año, capitalizado semestralmente

b) 5% al año, capitalizado continuamente



39. Inversión Se invierte una suma de 5 000 dólares a una tasa de interés de 9% al año, capitalizado continuamente.

a) Encuentre el valor $A(t)$ de la inversión después de t años.

b) Trace una gráfica de $A(t)$.

c) Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo esta inversión ascenderá a 25 000 dólares.

4.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

■ Funciones logarítmicas ■ Gráficas de funciones logarítmicas ■ Logaritmos comunes
■ Logaritmos naturales

En esta sección estudiamos las inversas de funciones exponenciales.

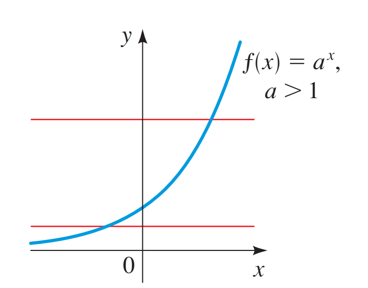


FIGURA 1 $f(x) = a^x$ es uno a uno.

■ Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función uno a uno por la prueba de la recta horizontal (vea la figura 1 para el caso $a > 1$) y, por tanto, tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Recuerde de la sección 2.8 que f^{-1} se define por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto conduce a la siguiente definición de la función logarítmica.

$\log_a x = y$ se lee como "log base a de x es y".

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base** $\boldsymbol{a}$, denotada por $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual se debe elevar la base a para obtener x.

Por tradición el nombre de la función logarítmica es $\log_a$, no sólo una letra. También, por lo general omitimos los paréntesis en la notación de función y escribimos

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$ es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma.

Forma logarítmica	Forma exponencial
Exponente	Exponente
$\log_a x = y$	$a^y = x$
Base	Base

EJEMPLO 1 ■ Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100\,000 = 5$	$10^5 = 100\,000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Este es el caso para todas las bases como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ Evaluación de logaritmos

a) $\log_{10} 1\,000 = 3$ porque $10^3 = 1\,000$

b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

Ahora intente realizar los ejercicios 9 y 11 ■

Propiedad de la función inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Cuando aplicamos la propiedad de la función inversa, descrita en la página 222, a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$ obtenemos

$$\log_a(a^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$$

Hacemos una lista de estas y otras propiedades de logaritmos que estudiamos en esta sección.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la que se debe elevar a para obtener x.

EJEMPLO 3 ■ Aplicar propiedades de logaritmos

Ilustramos las propiedades de logaritmos cuando la base es 5.

$\log_5 1 = 0$	Propiedad 1	$\log_5 5 = 1$	Propiedad 2
$\log_5 5^8 = 8$	Propiedad 3	$5^{\log_5 12} = 12$	Propiedad 4

Ahora intente realizar los ejercicios 25 y 31 ■

■ Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que, si una función uno a uno f tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Dado que la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$ concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. La figura 2 muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 1$ (vea el ejercicio 102).

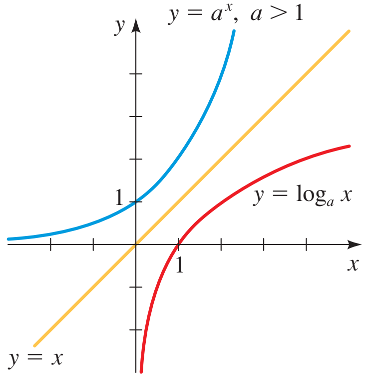


FIGURA 2 Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

Dado que $\log_a 1 = 0$, el punto de intersección x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

EJEMPLO 4 ■ Graficar una función logarítmica colocando puntos

Trace la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

SOLUCIÓN Para hacer una tabla de valores escogemos los valores x que sean potencias de 2 para que podamos encontrar fácilmente sus logaritmos. Colocamos estos puntos y los unimos con una curva suave como en la figura 3.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

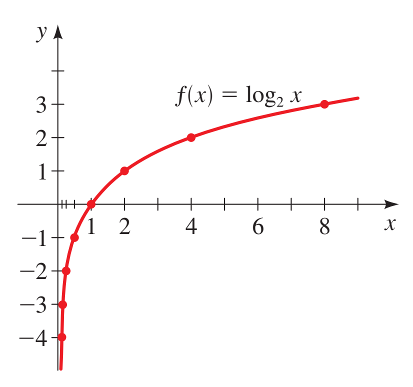


FIGURA 3

Ahora intente realizar el ejercicio 49 ■

La figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (vea la figura 2 en la sección 4.1) en la recta $y = x$. También podemos colocar puntos como ayuda para trazar estas gráficas como se ilustra en el ejemplo 4.

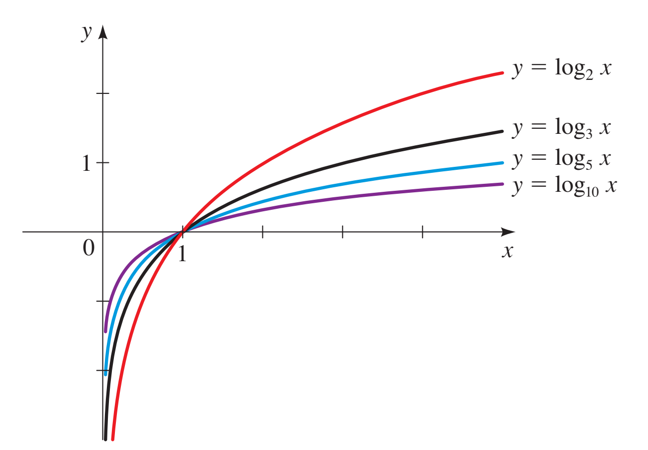


FIGURA 4 Una familia de funciones logarítmicas

En los siguientes dos ejemplos trazamos la gráfica de funciones logarítmicas, empezando con las gráficas básicas de la figura 4 y se usan las transformaciones de la sección 2.6.

EJEMPLO 5 ■ Reflejar gráficas de funciones logarítmicas

Trace la gráfica de cada función. Indique el dominio, el rango y la asíntota.

a) $g(x) = -\log_2 x$ ***b)*** $h(x) = \log_2(-x)$

SOLUCIÓN

a) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la figura 5*a*). De la gráfica vemos que el dominio de g es $(0, \infty)$, el rango es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

***b*)** Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la figura 5*b*). De la gráfica vemos que el dominio de h es $(-\infty, 0)$, el rango es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

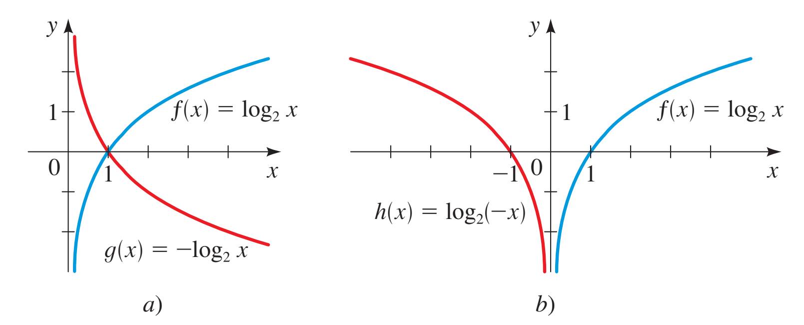


FIGURA 5

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

EJEMPLO 6 ■ Desplazar gráficas de funciones logarítmicas

Trace la gráfica de cada función. Encuentre el dominio, el rango y la asíntota.

***a*)** $g(x) = 2 + \log_5 x$ ***b*)** $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

SOLUCIÓN

***a*)** La gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (figura 4) al desplazar hacia arriba 2 unidades como se muestra en la figura 6. De la gráfica vemos que el dominio de g es $(0, \infty)$, el rango es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

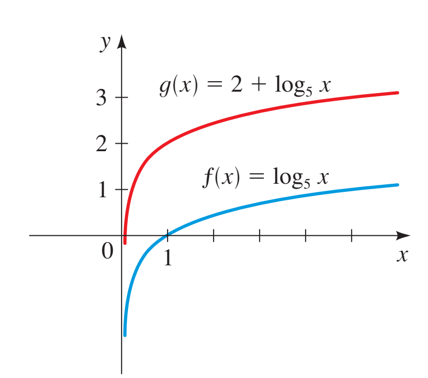


FIGURA 6

***b*)** La gráfica de h se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (figura 4) al desplazar a la derecha 3 unidades, como se muestra en la figura 7. De la gráfica vemos que el dominio de h es $(3, \infty)$, el rango es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales, y la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

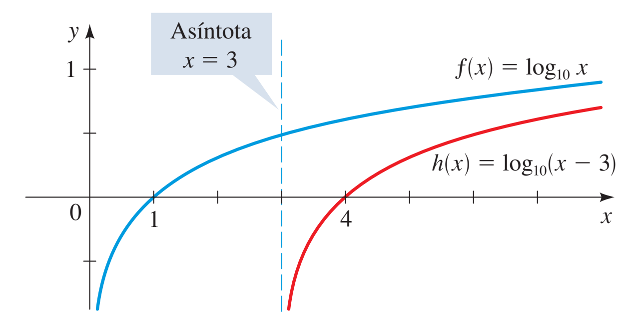


FIGURA 7

Ahora intente realizar los ejercicios 63 y 67 ■

Las matemáticas en el mundo moderno



© Bettmann/CORBIS

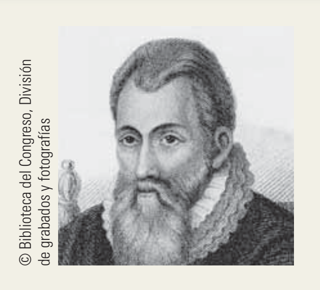


© Hulton-Deutsch Collection/Historical/Corbis

Aplicación de la ley

Las matemáticas ayudan a la aplicación de la ley en numerosas y sorprendentes formas, desde reconstruir la trayectoria de una bala hasta determinar la hora de una muerte para calcular la probabilidad de que la muestra de ADN sea de esa persona. Otro de sus usos en la búsqueda de personas desaparecidas. Una persona de la que no se sabe nada en años podría lucir muy diferente respecto de su última fotografía disponible. Lo anterior es particularmente cierto si se trata de un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado cómo se verá usted mismo dentro de 5, 10 o 15 años?

Los investigadores han encontrado que diferentes partes del cuerpo crecen más rápido que otras. Por ejemplo, sin duda usted ha observado que la cabeza de un bebé es mucho más grande respecto a su cuerpo de lo que es la cabeza de un adulto. Por ejemplo, la relación entre la longitud del brazo de una persona y su estatura es de $\frac{1}{3}$ en un niño, pero alrededor de $\frac{2}{5}$ en un adulto. Al recolectar datos y analizar las gráficas los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Al igual que en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan una función de importancia decisiva. Por ejemplo, la fórmula que relaciona la longitud l de un brazo con la estatura h es $l = ae^{kh}$ donde a y k son constantes. Al estudiar las diferentes características físicas de una persona, los biólogos matemáticos modelan cada una de las características con una función que describe la forma en la que cambian con el tiempo. Los modelos de características del rostro se pueden programar en una computadora para dar una imagen de cómo se transforma con el tiempo la apariencia de una persona. Estas imágenes ayudan a los encargados de la aplicación de la ley para localizar a personas extraviadas.



JOHN NAPIER (1550-1617) fue un terrateniente escocés para quien las matemáticas eran su pasatiempo favorito. Hoy lo conocemos por su invención clave: los logaritmos, que publicó en 1614 bajo el título de *A Description of the Marvelous Rule of Logarithms* (Una descripción de la maravillosa regla de los logaritmos). En la época de Napier los logaritmos eran utilizados exclusivamente para simplificar complicados cálculos. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes los escribiríamos como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261\,872\,564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (sólo sumamos sus exponentes). Napier produjo extensas tablas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde el advenimiento de las calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito, pero las funciones logarítmicas han encontrado numerosas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre innumerables temas. Una de sus obras más pintorescas es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John* (Los sencillos descubrimientos de la completa revelación de San Juan), en donde predijo que el mundo se acabaría en el año 1700.

Logaritmos comunes

Ahora estudiaremos logaritmos con base 10.

LOGARITMO COMÚN

El logaritmo común con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos fácilmente podemos encontrar que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero ¿cómo definimos log 50? Necesitamos encontrar el exponente y tal que $10^y = 50$. Claramente, 1 es demasiado pequeño y 2 es demasiado grande. Por tanto,

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación podemos experimentar para encontrar una potencia de 10 más cercana a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla LOG que directamente da valores de logaritmos comunes.

EJEMPLO 7 ■ Evaluar logaritmos comunes

Use calculadora para encontrar valores apropiados de $f(x) = \log x$ y utilice los valores para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN Hacemos una tabla de valores usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de x que no sean potencias de 10. Colocamos esos puntos y los unimos con una curva suave como en la figura 8.

x	$\log x$
0.01	−2
0.1	−1
0.5	−0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

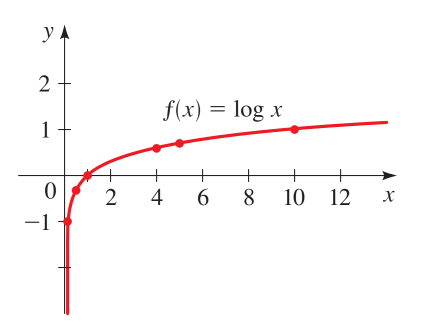


FIGURA 8

Ahora intente realizar el ejercicio 51 ■

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (sonido, luz o presión) mediante funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido debe aumentarse muchas veces antes de que "sintamos" que la intensidad simplemente se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde S es la intensidad subjetiva del estímulo, I es la intensidad física del estímulo, I_0 representa el umbral de intensidad física y k es una constante que es diferente para cada estímulo sensorial.



La respuesta humana al sonido y a la intensidad luminosa es logarítmica.

EJEMPLO 8 ■ Logaritmos comunes y sonido

En la sección 4.7 se estudia la escala de decibeles con más detalle.

La percepción de la intensidad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dada por

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

SOLUCIÓN Encontramos el nivel de decibeles B usando el hecho de que $I = 100I_0$.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de } B \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Elimine } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La intensidad del sonido es de 20 dB.

Ahora intente realizar el ejercicio 97 ■

■ Logaritmos naturales

De todas las posibles bases a para logaritmos resulta que la opción más cómoda para los propósitos de cálculo es el número e, que definimos en la sección 4.2.

La notación ln es una abreviatura del nombre latino *logarithmus naturalis*.

LOGARITMO NATURAL

El logaritmo con base e se denomina **logaritmo natural** y se denota con **ln**:

$$\ln x = \log_e x$$

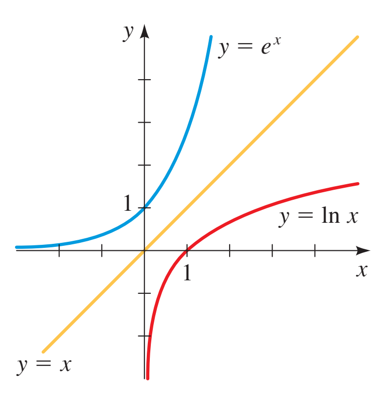


FIGURA 9 Gráfica de la función logaritmo natural

La función de logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial natural $y = e^x$. En la figura 9 se presentan las gráficas de ambas funciones. Por la definición de funciones inversas tenemos

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

Si sustituimos $a = e$ y escribimos "ln" por "$\log_e$" en las propiedades de logaritmos ya citadas antes, obtenemos las siguientes propiedades de logaritmos naturales.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS NATURALES

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la que e debe elevarse para obtener x.

Las calculadoras están equipadas con una tecla LN que directamente da los valores de logaritmos naturales.

EJEMPLO 9 ■ Evaluar la función de logaritmo natural

a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

b) $\ln\left(\frac{I}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla LN de su calculadora

Ahora intente realizar el ejercicio 47

EJEMPLO 10 ■ Encontrar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

SOLUCIÓN Igual que con cualquier función logarítmica, ln x está definida cuando $x > 0$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\}$$
$$= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

Ahora intente realizar el ejercicio 73

EJEMPLO 11 ■ Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función $y = x \ln(4 - x^2)$ y úsela para encontrar las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

SOLUCIÓN Tal como en el ejemplo 10 el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, de modo que escogemos el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. En la figura 10 se muestra la gráfica y de ella vemos que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

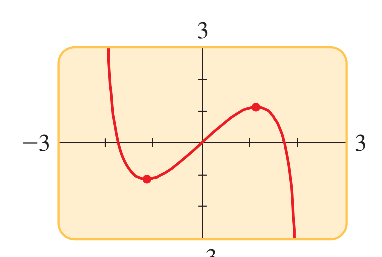


FIGURA 10
$y = x \ln(4 - x^2)$



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Órdenes de magnitud

En este proyecto exploramos cómo comparar los tamaños de objetos del mundo real usando logaritmos. Por ejemplo, ¿cuánto más grande es un elefante que una pulga? ¿Cuánto más pequeño es un hombre que un árbol de secuoya gigante? Es difícil comparar objetos de tantos tamaños enormemente diferentes. En este proyecto aprendemos cómo se pueden utilizar los logaritmos para definir el concepto de "orden de magnitud", que proporciona una manera sencilla y significativa de comparación. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de $x = 1$ y un punto mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Al hacer un acercamiento (*zoom*) y trazar a lo largo de la gráfica con el cursor encontramos que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando $x \approx 1.15$. Del mismo modo (o al observar que la función es impar) encontramos que el valor mínimo local es alrededor de -1.13 y se presenta cuando $x \approx -1.15$.

Ahora intente realizar el ejercicio 79 ■

4.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. log x es el exponente al cual la base 10 debe elevarse para obtener ________. Por tanto podemos completar la tabla siguiente para log x.

x	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$10^{1/2}$
log x								

2. La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base ________. Por tanto $f(9) =$ ________, $f(1) =$ ________, $f(\frac{1}{9}) =$ ________, $f(81) =$ ________ y $f(3) =$ ________.

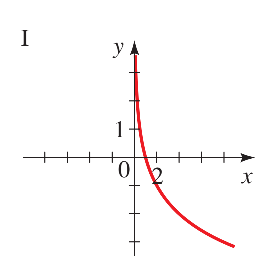
3. ***a)*** $5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square = \square$

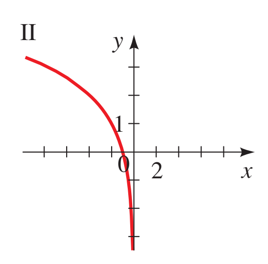
b) $\log_5 25 = 2$, entonces $\square^{\square} = \square$

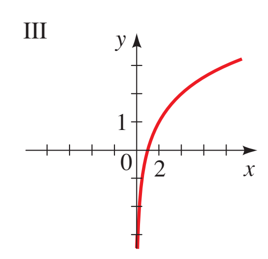
4. Relacione la función logarítmica con su gráfica.

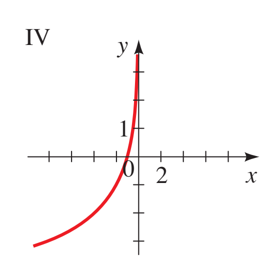
a) $f(x) = \log_2 x$ ***b)*** $f(x) = \log_2(-x)$

c) $f(x) = -\log_2 x$ ***d)*** $f(x) = -\log_2(-x)$









5. La función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ tiene la asíntota ______________ $x =$ ____.

6. La función logaritmo $f(x) = \ln(x - 1)$ tiene la asíntota ______________ $x =$ ____.

HABILIDADES

7–8 ■ Formas logarítmicas y exponenciales Complete la tabla al encontrar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación, como en el ejemplo 1.

7.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8(\frac{1}{8}) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

8.

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$4^3 = 64$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$4^{3/2} = 8$
$\log_4(\frac{1}{16}) = -2$	
$\log_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

9–16 ■ Forma exponencial Exprese la ecuación en forma exponencial.

9. ***a)*** $\log_3 81 = 4$ ***b)*** $\log_3 1 = 0$

10. ***a)*** $\log_5(\frac{1}{5}) = -1$ ***b)*** $\log_4 64 = 3$

11. ***a)*** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ ***b)*** $\log_{10} 0.01 = -2$

12. ***a)*** $\log_5(\frac{1}{125}) = -3$ ***b)*** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

13. ***a)*** $\log_3 5 = x$ ***b)*** $\log_7(3y) = 2$

14. ***a)*** $\log_6 z = 1$ ***b)*** $\log_{10} 3 = 2t$

15. ***a)*** $\ln 5 = 3y$ ***b)*** $\ln(t + 1) = -1$

16. ***a)*** $\ln(x + 1) = 2$ ***b)*** $\ln(x - 1) = 4$

17–24 ■ Forma logarítmica Exprese la ecuación en forma logarítmica.

17. ***a)*** $10^4 = 10\,000$ ***b)*** $5^{-2} = \frac{1}{25}$

18. ***a)*** $6^2 = 36$ ***b)*** $10^{-1} = \frac{1}{10}$

19. ***a)*** $8^{-1} = \frac{1}{8}$ ***b)*** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

20. ***a)*** $4^{-3/2} = 0.125$ ***b)*** $7^3 = 343$

21. ***a)*** $4^x = 70$ ***b)*** $3^5 = w$

22. ***a)*** $3^{2x} = 10$ ***b)*** $10^{-4x} = 0.1$

23. ***a)*** $e^x = 2$ ***b)*** $e^3 = y$

24. ***a)*** $e^{x+1} = 0.5$ ***b)*** $e^{0.5x} = t$

25–34 ■ Evaluar logaritmos Evalúe la expresión.

25. ***a)*** $\log_2 2$ ***b)*** $\log_5 1$ ***c)*** $\log_6 6^5$

26. ***a)*** $\log_3 3^7$ ***b)*** $\log_4 64$ ***c)*** $\log_5 125$

27. ***a)*** $\log_6 36$ ***b)*** $\log_9 81$ ***c)*** $\log_7 7^{10}$

28. ***a)*** $\log_2 32$ ***b)*** $\log_8 8^{17}$ ***c)*** $\log_6 1$

29. ***a)*** $\log_3(\frac{1}{27})$ ***b)*** $\log_{10} \sqrt{10}$ ***c)*** $\log_5 0.2$

30. ***a)*** $\log_5 125$ ***b)*** $\log_{49} 7$ ***c)*** $\log_9 \sqrt{3}$

31. ***a)*** $3^{\log_3 5}$ ***b)*** $5^{\log_5 27}$ ***c)*** $e^{\ln 10}$

32. ***a)*** $e^{\ln \sqrt{3}}$ ***b)*** $e^{\ln(1/\pi)}$ ***c)*** $10^{\log 13}$

33. ***a)*** $\log_8 0.25$ ***b)*** $\ln e^4$ ***c)*** $\ln(1/e)$

34. ***a)*** $\log_4 \sqrt{2}$ ***b)*** $\log_4(\frac{1}{2})$ ***c)*** $\log_4 8$

35–44 ■ Ecuaciones logarítmicas Use la definición de la función logarítmica para encontrar x.

35. ***a)*** $\log_4 x = 3$ ***b)*** $\log_{10} 0.01 = x$

36. ***a)*** $\log_3 x = -2$ ***b)*** $\log_5 125 = x$

37. ***a)*** $\ln x = 3$ ***b)*** $\ln e^2 = x$

38. ***a)*** $\ln x = -1$ ***b)*** $\ln(1/e) = x$

39. ***a)*** $\log_7(\frac{1}{49}) = x$ ***b)*** $\log_2 x = 5$

40. ***a)*** $\log_4 2 = x$ ***b)*** $\log_4 x = 2$

41. ***a)*** $\log_2(\frac{1}{2}) = x$ ***b)*** $\log_{10} x = -3$

42. ***a)*** $\log_x 1\,000 = 3$ ***b)*** $\log_x 25 = 2$

43. ***a)*** $\log_x 16 = 4$ ***b)*** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

44. ***a)*** $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ ***b)*** $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

45–48 ■ Evaluar logaritmos Use calculadora para evaluar la expresión, aproximada a cuatro lugares decimales.

45. ***a)*** $\log 2$ ***b)*** $\log 35.2$ ***c)*** $\log(\frac{2}{3})$

46. ***a)*** $\log 50$ ***b)*** $\log \sqrt{2}$ ***c)*** $\log(3\sqrt{2})$

47. ***a)*** $\ln 5$ ***b)*** $\ln 25.3$ ***c)*** $\ln(1 + \sqrt{3})$

48. ***a)*** $\ln 27$ ***b)*** $\ln 7.39$ ***c)*** $\ln 54.6$

49–52 ■ Trazar la gráfica de funciones logarítmicas Trace la gráfica de la función colocando puntos.

49. $f(x) = \log_3 x$ **50.** $g(x) = \log_4 x$

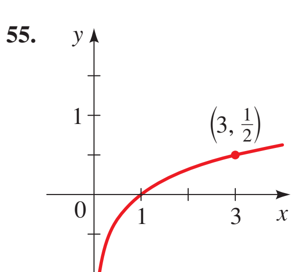
51. $f(x) = 2 \log x$ **52.** $g(x) = 1 + \log x$

53–56 ■ Encontrar funciones logarítmicas Encuentre la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica está dada.

53. (5, 1)

54. $(\frac{1}{2}, -1)$

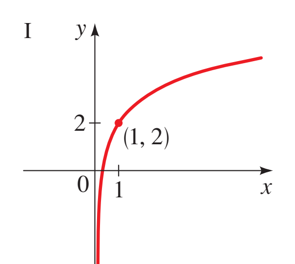
55.

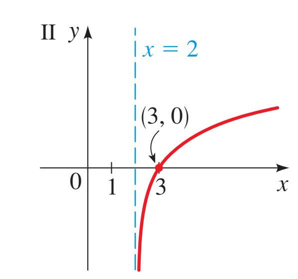


56. (9, 2)

57–58 ■ Trazar la gráfica de funciones logarítmicas Relacione la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I o II.

57. $f(x) = 2 + \ln x$ **58.** $f(x) = \ln(x - 2)$





59. Trazar la gráfica Trace la gráfica de $y = 4^x$, luego úsela para trazar la gráfica de $y = \log_4 x$.

60. Trazar la gráfica Trace la gráfica de $y = 3^x$, luego úsela para trazar la gráfica de $y = \log_3 x$.

61–72 ■ Trazar las gráficas de funciones logarítmicas Trace la gráfica de la función no colocando puntos sino empezando a partir de las gráficas de las figuras 4 y 9. Exprese el dominio, el rango y la asíntota.

61. $g(x) = \log_5(-x)$ **62.** $f(x) = -\log_{10} x$

63. $f(x) = \log_2(x - 4)$ **64.** $g(x) = \ln(x + 2)$

65. $h(x) = \ln(x + 5)$ **66.** $g(x) = \log_6(x - 3)$

67. $y = 2 + \log_3 x$ **68.** $y = 1 - \log_{10} x$

69. $y = \log_3(x - 1) - 2$ **70.** $y = 1 + \ln(-x)$

71. $y = |\ln x|$ **72.** $y = \ln|x|$

73–78 ■ Dominio Encuentre el dominio de la función.

73. $f(x) = \log_{10}(x + 3)$ **74.** $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

75. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **76.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

77. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

78. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$



79–84 ■ Trazar las gráficas de funciones logarítmicas Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado, y úsela para encontrar el dominio, las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

79. $y = \log_{10}(1 - x^2)$

80. $y = \ln(x^2 - x)$

81. $y = x + \ln x$

82. $y = x(\ln x)^2$

83. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

84. $y = x \log_{10}(x + 10)$

HABILIDADES Plus

85–88 ■ Dominio de una composición Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

85. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = x + 1$

86. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = x^2 + 1$

87. $f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = x - 2$

88. $f(x) = \log x, \quad g(x) = x^2$



89. Razones de crecimiento Compare las razones de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ al trazar sus gráficas en una pantalla común usando el rectángulo de vista $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.



90. Trazando las gráficas de las funciones

a) Trace las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de vista apropiado, demuestre que aun cuando una función logarítmica empieza más alta que una función de raíz, es finalmente superada por la función de raíz.

b) Encuentre las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$ redondeadas a dos decimales.



91–92 ■ Familias de funciones Se da una familia de funciones. ***a)*** Trace las gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y 4. ***b)*** ¿Cómo están relacionadas las gráficas del inciso *a*)?

91. $f(x) = \log(cx)$

92. $f(x) = c \log x$

93–94 ■ Función inversa Se da una función $f(x)$. ***a)*** Encuentre el dominio de la función f. ***b)*** Encuentre la función inversa de f.

93. $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$

94. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

95. Funciones inversas

a) Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

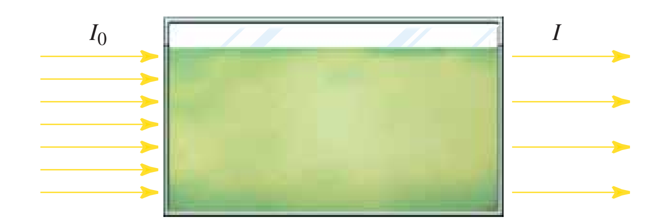
b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

APLICACIONES

96. Absorción de luz Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al hacer brillar una luz a través de ella y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si se conoce la cantidad de luz que es absorbida, podemos calcular la concentración de la muestra. Para cierta sustancia la concentración (en moles por litro) se encuentra usando la fórmula

$$C = -2\,500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente e I es la intensidad de la luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad I es 70% de I_0.



97. Determinación de la edad por carbono La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del artefacto (en años) está dada por

$$A = -8\,267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

98. Colonia de bacterias Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) necesario para que la colonia crezca a N bacterias está dado por

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

99. Inversión El tiempo necesario para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés r capitalizado continuamente está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Encuentre el tiempo necesario para duplicar una inversión al 6, 7 y 8 por ciento.

100. Carga de una batería La razón a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga C está dado por

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima C_0?

101. Dificultad de una tarea La dificultad en "lograr un objetivo" (por ejemplo, usar el ratón para hacer clic en un icono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia a la que está el objetivo y el tamaño de este. De acuerdo con la ley de Fitts el índice de dificultad (ID, por sus siglas en inglés)) está dado por

$$\text{ID} = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde W es el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un icono de 5 mm de ancho con hacer clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso suponga que el ratón está a 100 mm del icono.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

102. DISCUSIÓN: Altura de la gráfica de una función logarítmica Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ está trazada en un plano de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada.

a) Demuestre que a una distancia de 2 pies a la derecha del origen la altura de la gráfica es de unas 265 millas.

b) Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿a qué distancia a la derecha del origen tenemos que ir antes de que la altura de la curva llegue a 2 pies?

103. DISCUSIÓN: El Googolplex Un **googol** es 10^{100}, y un **googolplex** es 10^{googol}. Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \qquad \text{y} \qquad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

104. DISCUSIÓN: Comparación de logaritmos ¿Cuál es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento.

105. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Número de dígitos de un entero Compare log 1 000 con el número de dígitos de 1 000. Haga lo mismo para 10 000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1 000 y 10 000? ¿Entre cuáles dos valores debe encontrarse el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos de cualquier entero positivo x es $[\![\log x]\!] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la función entero mayor definida en la sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{100}?

4.4 LEYES DE LOGARITMOS

■ Leyes de logaritmos ■ Desarrollo y combinación de expresiones logarítmicas
■ Fórmula de cambio de base

En esta sección estudiamos las propiedades de logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones como veremos en las secciones 4.6 y 4.7.

■ Leyes de logaritmos

Dado que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes dan lugar a las leyes de los logaritmos.

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B, y C cualesquier números reales con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

Demostración Hacemos uso de la propiedad $\log_a a^x = x$ de la sección 4.3.

Ley 1 Sean $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. Cuando se escriben en forma exponencial, estas cantidades se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

por tanto

$$\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v})$$
$$= u + v = \log_a A + \log_a B$$

Ley 2 Usando la ley 1, tenemos

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

por tanto

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

Ley 3 Sean $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo que

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C\log_a A$$

■

EJEMPLO 1 ■ Uso de las leyes de logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe las expresiones siguientes.

a) $\log_4 2 + \log_4 32$

b) $\log_2 80 - \log_2 5$

c) $-\frac{1}{3}\log 8$

SOLUCIÓN

a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$ Ley 1

$= \log_4 64 = 3$ Porque $64 = 4^3$

b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2(\frac{80}{5})$ Ley 2

$= \log_2 16 = 4$ Porque $16 = 2^4$

c) $-\frac{1}{3}\log 8 = \log 8^{-1/3}$ Ley 3

$= \log(\frac{1}{2})$ Propiedad de exponentes negativos

≈ -0.301 Calculadora

Ahora intente realizar los ejercicios 9, 11 y 13 ■

■ Desarrollo y combinación de expresiones logarítmicas

Las leyes de logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *desarrollo* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ Desarrollo de expresiones logarítmicas

Use las leyes de logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones.

a) $\log_2(6x)$ ***b***) $\log_5(x^3y^6)$ ***c***) $\ln\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

SOLUCIÓN

a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ Ley 1

b) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ Ley 3

c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ Ley 3

Ahora intente realizar los ejercicios 23, 31 y 37 ■

Las leyes de logaritmos también nos permiten invertir el proceso de desarrollo que se hizo en el ejemplo 2. Es decir, podemos escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinar* expresiones logarítmicas, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 ■ Combinar expresiones logarítmicas

Utilice las leyes de los logaritmos para combinar cada expresión en un solo logaritmo.

a) $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1)$

b) $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1)$

SOLUCIÓN

a) $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1) = \log x^3 + \log(x+1)^{1/2}$ Ley 3

$= \log(x^3(x+1)^{1/2})$ Ley 1

b) $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) = \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2+1)^4$ Ley 3

$= \ln(s^3t^{1/2}) - \ln(t^2+1)^4$ Ley 1

$= \ln\left(\dfrac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right)$ Ley 2

Ahora intente realizar los ejercicios 51 y 53 ■

Advertencia Aun cuando las leyes de logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o un cociente, *no hay una regla correspondiente para el logaritmo de una suma o una diferencia*. Por ejemplo,



$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

De hecho, sabemos que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. Pero no simplifique incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,



$$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right) \quad \text{y} \quad (\log_2 x)^3 \neq 3\log_2 x$$

Se usan funciones logarítmicas para modelar diversas situaciones donde interviene el comportamiento humano, como puede ser la rapidez con la que olvidamos cosas que habíamos aprendido. Por ejemplo, si usted aprende álgebra a cierto nivel (por ejemplo 90% para un examen) y no vuelve a usar álgebra durante un tiempo, ¿cuánto habrá retenido después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley que se describe en el ejemplo siguiente.



Olvidar lo que hemos aprendido depende de cuánto tiempo hace que lo aprendimos.

EJEMPLO 4 ■ La ley del olvido

Si una tarea se aprende a cierto nivel P_0, después de cierto tiempo t el nivel de desempeño P satisface la ecuación

$$\log P = \log P_0 - c\log(t+1)$$

donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.

a) Despeje P.

b) Si su calificación en el examen de historia es 90, ¿qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0.2$.)

SOLUCIÓN

***a*)** Primero combinamos el lado derecho.

$$\log P = \log P_0 - c\log(t+1) \quad \text{Ecuación dada}$$

$$\log P = \log P_0 - \log(t+1)^c \quad \text{Ley 3}$$

$$\log P = \log\frac{P_0}{(t+1)^c} \quad \text{Ley 2}$$

$$P = \frac{P_0}{(t+1)^c} \quad \text{Porque log es uno a uno}$$

***b*)** Aquí $P_0 = 90$, $c = 0.2$ y t se mide en meses.

$$\text{En 2 meses:} \quad t = 2 \quad \text{y} \quad P = \frac{90}{(2+1)^{0.2}} \approx 72$$

$$\text{En un año:} \quad t = 2 \quad \text{y} \quad P = \frac{90}{(12+1)^{0.2}} \approx 54$$

Sus calificaciones esperadas después de dos meses y un año son 72 y 54, respectivamente.

Ahora intente realizar el ejercicio 73 ■

■ Fórmula de cambio de base

Para algunos propósitos encontramos útil cambiar de logaritmos en una base a logaritmos en otra base. Suponga que se da $\log_a x$ y deseamos encontrar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Escribimos esto en forma exponencial y tomamos el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$b^y = x \quad \text{Forma exponencial}$$

$$\log_a(b^y) = \log_a x \quad \text{Tome } \log_a \text{ de cada lado}$$

$$y\log_a b = \log_a x \quad \text{Ley 3}$$

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \text{Divida entre } \log_a b$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Podemos escribir la fórmula de cambio de base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Entonces $\log_b x$ sólo es un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\frac{1}{\log_a b}$.

FÓRMULA DE CAMBIO DE BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si ponemos $x = a$, entonces $\log_a a = 1$, y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora podemos evaluar un logaritmo a *cualquier base* con el uso de la fórmula de cambio de base para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales, y luego usar la calculadora.

EJEMPLO 5 ■ Evaluar logaritmos con la fórmula de cambio de base

Use la fórmula de cambio de base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, redondeado a cinco lugares decimales.

a) $\log_8 5$ ***b***) $\log_9 20$

SOLUCIÓN

a) Usamos la fórmula de cambio de base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_a 8} \approx 0.77398$$

b) Usamos la fórmula de cambio de base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

Ahora intente realizar los ejercicios 59 y 61 ■

EJEMPLO 6 ■ Usar la fórmula de cambio de base para trazar la gráfica de una función logarítmica

Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x) = \log_6 x$.

SOLUCIÓN Las calculadoras no tienen tecla para $\log_6$, de modo que usamos la fórmula de cambio de base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Dado que las calculadoras tienen una tecla LN podemos ingresar esta nueva forma de la función y trazar su gráfica. En la figura 1 se muestra la gráfica.

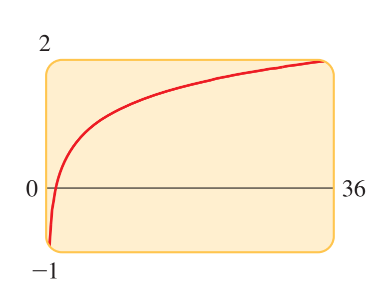


FIGURA 1
$f(x) = \log_6 x = \dfrac{\ln x}{\ln 6}$

Ahora intente realizar el ejercicio 67 ■

4.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El logaritmo de un producto de dos números es igual que la ________ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(25 \cdot 125) =$ ________ + ________.

2. El logaritmo de un cociente de dos números es igual que la ________ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(\frac{25}{125}) =$ ________ − ________.

3. El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual que la potencia ________ el logaritmo del número. Por tanto, $\log_5(25^{10}) =$ ________ · ________.

4. Podemos desarrollar $\log\left(\dfrac{x^2y}{z}\right)$ para obtener ____________.

5. Podemos combinar $2\log x + \log y - \log z$ para obtener ________.

6. ***a***) La mayoría de las calculadoras pueden encontrar logaritmos con base ________ y base ________. Para encontrar logaritmos con bases diferentes usamos la fórmula ____________. Para encontrar $\log_7 12$, escribimos

$$\log_7 12 = \frac{\log \blacksquare}{\log \blacksquare} \approx ______$$

b) ¿Obtendremos la misma respuesta si hacemos el cálculo del inciso *a*) usando ln en lugar de log?

7–8 ■ *¿Verdadero o falso?*

7. ***a***) $\log(A + B)$ es igual a $\log A + \log B$.

b) $\log AB$ es igual que $\log A + \log B$.

8. ***a***) $\log \dfrac{A}{B}$ es igual a $\log A - \log B$.

b) $\dfrac{\log A}{\log B}$ es igual a $\log A - \log B$.

HABILIDADES

9–22 ■ Evaluar logaritmos Utilice las leyes de los logaritmos para evaluar la expresión.

9. $\log 50 + \log 200$

10. $\log_6 9 + \log_6 24$

11. $\log_2 60 - \log_2 15$

12. $\log_3 135 - \log_3 45$

13. $\frac{1}{4}\log_3 81$

14. $-\frac{1}{3}\log_3 27$

15. $\log_5 \sqrt{5}$

16. $\log \dfrac{1}{\sqrt{125}}$

17. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

18. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

19. $\log_4 16^{100}$

20. $\log_2 8^{33}$

21. $\log(\log 10^{10\,000})$

22. $\ln(\ln e^{e^{200}})$

23–48 ■ Ampliar las expresiones logarítmicas Use las leyes de logaritmos para desarrollar la expresión.

23. $\log_3 8x$

24. $\log_6 7r$

25. $\log_3 2xy$

26. $\log_5 4st$

27. $\ln a^3$

28. $\log \sqrt{t^5}$

29. $\log_2(xy)^{10}$

30. $\ln \sqrt{ab}$

31. $\log_2(AB^2)$

32. $\log_3(x\sqrt{y})$

33. $\log_3 \dfrac{2x}{y}$

34. $\ln \dfrac{r}{3s}$

35. $\log_5\left(\dfrac{3x^2}{y^3}\right)$

36. $\log_2\left(\dfrac{s^5}{7t^2}\right)$

37. $\log_3 \dfrac{\sqrt{3x^5}}{y}$

38. $\log \dfrac{y^3}{\sqrt{2x}}$

39. $\log\left(\dfrac{x^3y^4}{z^6}\right)$

40. $\log_a\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$

41. $\log \sqrt{x^4 + 2}$

42. $\log \sqrt[3]{x^2 + 4}$

43. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{x}{z}}\right)$

44. $\ln \dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$

45. $\log \sqrt[4]{x^2 + y^2}$

46. $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x}}\right)$

47. $\log\sqrt{\dfrac{x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^3 - 7)^2}}$

48. $\log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

49–58 ■ Combinar expresiones logarítmicas Use las leyes de los logaritmos para combinar la expresión.

49. $\log_4 6 + 2\log_4 7$

50. $\frac{1}{2}\log_2 5 - 2\log_2 7$

51. $2\log x - 3\log(x + 1)$

52. $3\ln 2 + 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x + 4)$

53. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2 + 1) + 2\log(x - 1)$

54. $\log_5(x^2 - 1) - \log_5(x - 1)$

55. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2\ln c$

56. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

57. $\frac{1}{3}\log(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

58. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

59–66 ■ Fórmula de cambio de base Use la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

59. $\log_2 5$

60. $\log_5 2$

61. $\log_3 16$

62. $\log_6 92$

63. $\log_7 2.61$

64. $\log_6 532$

65. $\log_4 125$

66. $\log_{12} 2.5$

67. Fórmula de cambio de base Use la fórmula de cambio de base para demostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

Luego use este dato para trazar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

HABILIDADES Plus

68. Familia de funciones Trace gráficas de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2, e, 5$ y 10 en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

69. Fórmula de cambio de base Use la fórmula de cambio de base para demostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

70. Fórmula de cambio de base Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

71. Una identidad logarítmica Demuestre que

$$-\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

APLICACIONES

72. Olvido Use la ley del olvido (ejemplo 4) para estimar la calificación de un estudiante en un examen de biología, dos años después de que obtuvo una calificación de 80 en un examen similar. Suponga que $c = 0.3$ y t se mide en meses.

73. Distribución de riqueza Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país es propiedad de unos cuantos miembros de la población. El **principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k\log W$$

donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas de la población que tienen esa cantidad de dinero.

a) De esa ecuación despeje P.

b) Suponga que $k = 2.1$ y $c = 8000$, y W se mide en millones de dólares. Use el inciso *a)* para encontrar el número de personas que tienen 2 millones de dólares o más. ¿Cuántas personas tienen 10 millones de dólares o más?

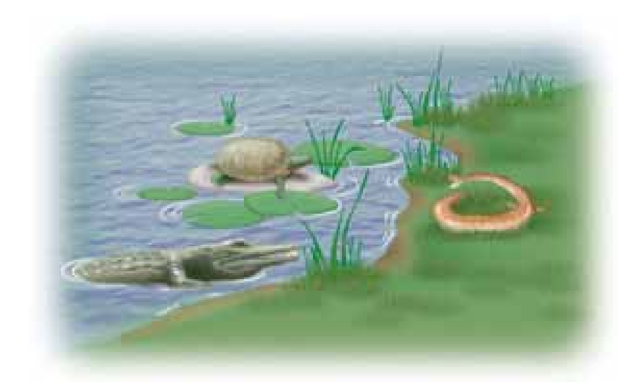
74. Biodiversidad Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (por ejemplo, una isla) con la relación especies-área

$$\log S = \log c + k \log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especie y del hábitat.

a) De la ecuación despeje S.

b) Use el inciso *a*) para demostrar que si $k = 3$, entonces duplicar el área aumenta ocho veces el número de especies.



75. Magnitud de estrellas La magnitud M de una estrella es una medida del brillo que una estrella parece tener a la vista del hombre. Está definida como

$$M = -2.5 \log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde B es el brillo real de la estrella y B_0 es una constante.

a) Desarrolle el lado derecho de la ecuación.

b) Use el inciso *a*) para demostrar que mientras más brillante es una estrella, menor es su magnitud.

c) Betelgeuse es alrededor de 100 veces más brillante que Albiero. Use el inciso *a*) para demostrar que Betelgeuse es 5 magnitudes menos brillante que Albiero.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

76. DISCUSIÓN: ¿Verdadero o falso? Discuta cada una de las ecuaciones siguientes y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore los valores de las variables para las que cualquier término no esté definido.)

a) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

b) $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

c) $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

d) $\log 2^z = z \log 2$

e) $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

f) $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

g) $(\log_2 7)^x = x \log_2 7$

h) $\log_a a^a = a$

i) $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

j) $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

77. DISCUSIÓN: Encuentre el error ¿Qué está mal en el siguiente argumento?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

78. DESCUBRIMIENTO: Desplazamiento, contracción y estiramiento de gráficas de funciones Sea $f(x) = x^2$. Demuestre que $f(2x) = 4f(x)$ y explique la forma en que esto demuestra que la reducción de la gráfica de f horizontalmente, tiene el mismo efecto que estirarla verticalmente. Luego use las identidades $e^{2+x} = e^2e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para demostrar que para $g(x) = e^x$ un desplazamiento horizontal es igual que un estiramiento vertical; y que para $h(x) = \ln x$ una reducción horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

4.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

■ Ecuaciones exponenciales ■ Ecuaciones logarítmicas ■ Interés compuesto

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas aplicados.

■ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en que la variable aparece en el exponente. Algunas ecuaciones exponenciales se pueden resolver usando el hecho de que las funciones exponenciales son uno a uno. Esto significa que

$$a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Utilizamos esta propiedad en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 ■ Ecuaciones exponenciales

Resuelva la ecuación exponencial.

a) $5^x = 125$ ***b***) $5^{2x} = 5^{x+1}$

SOLUCIÓN

a) Primero expresamos 125 como una potencia de 5 y luego usamos el hecho de que la función exponencial $f(x) = 5^x$ es uno a uno.

$5^x = 125$	Ecuación dada
$5^x = 5^3$	Porque $125 = 5^3$
$x = 3$	Propiedad uno a uno

La solución es $x = 3$.

b) Primero utilizamos el hecho de que la función $f(x) = 5^x$ es uno a uno.

$5^{2x} = 5^{x+1}$	Ecuación dada
$2x = x + 1$	Propiedad uno a uno
$x = 1$	Despeje x

La solución es $x = 1$.

 **Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 7** ■

Law 3: $\log_a A^C = C \log_a A$

Las ecuaciones en el ejemplo 1 se resolvieron mediante la comparación de exponentes. Este método no es adecuado para resolver una ecuación como $5^x = 160$ porque 160 no se expresa fácilmente como una potencia de base 5. Para resolver estas ecuaciones tomamos el logaritmo de cada lado y usamos la ley 3 de los logaritmos para "bajar el exponente". Las siguientes directrices describen el proceso.

GUÍA PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

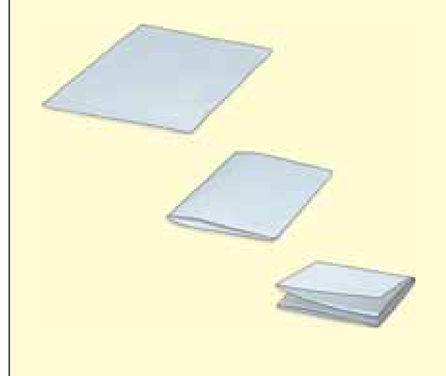
1. Despeje la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y después use las leyes de logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 2 ■ Resolver una ecuación exponencial

Considere la ecuación exponencial $3^{x+2} = 7$.

a) Encuentre la solución exacta de la ecuación expresada en términos de logaritmos.

b) Utilice una calculadora redondeada a seis lugares decimales.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Superorigami

Origami es el tradicional arte japonés de doblar papel para crear figuras. En este proyecto exploramos algunos experimentos pensados sobre el plegado de papel. Supongamos que se dobla una hoja de papel por la mitad, luego se dobla por la mitad otra vez y se vuelve a doblar el papel por la mitad. ¿Cuántos dobleces son necesarios para obtener una pila de papel de una milla de alto? Para responder a esta pregunta tenemos que resolver una ecuación exponencial. En este proyecto utilizamos logaritmos para responder a esta y otras preguntas pensadas acerca de doblar papel. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

SOLUCIÓN

a) Tomamos el logaritmo común de cada lado y utilizamos la ley 3.

$3^{x+2} = 7$	Ecuación dada
$\log(3^{x+2}) = \log 7$	Tome log de cada lado
$(x + 2)\log 3 = \log 7$	Ley 3 (bajar exponente)
$x + 2 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$	Divida entre log 3
$x = \dfrac{\log 7}{\log 3} - 2$	Reste 2

La solución exacta es $x = \dfrac{\log 7}{\log 3} - 2$.

b) Usando una calculadora encontramos la aproximación decimal $x \approx -0.228756$.

Podríamos haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7$$ 

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

EJEMPLO 3 ■ Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

SOLUCIÓN Primero dividimos entre 8 para despejar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$8e^{2x} = 20$	Ecuación dada
$e^{2x} = \frac{20}{8}$	Divida entre 8
$\ln e^{2x} = \ln 2.5$	Tome ln de cada lado
$2x = \ln 2.5$	Propiedad de ln
$x = \dfrac{\ln 2.5}{2}$	Divida entre 2 (solución exacta)
≈ 0.458	Calculadora (solución aproximada)

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Al sustituir $x = 0.458$ dentro de la ecuación original y usando una calculadora, obtenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20$$ ✓

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

EJEMPLO 4 ■ Resolver una ecuación exponencial de forma algebraica y gráfica

Resolver la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de forma algebraica y gráfica.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Dado que la base del término exponencial es e usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$e^{3-2x} = 4$	Ecuación dada
$\ln(e^{3-2x}) = \ln 4$	Tome ln de cada lado
$3 - 2x = \ln 4$	Propiedad de ln
$-2x = -3 + \ln 4$	Reste 3
$x = \frac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807$	Multiplique por $-\frac{1}{2}$

Es necesario verificar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

5

$y = 4$

$y = e^{3-2x}$

0 2

FIGURA 1

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Trazamos las gráficas de las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de vista como en la figura 1. Las soluciones se presentan donde las gráficas se intersecan. Si hacemos un acercamiento (zoom) en el punto de intersección de las dos gráficas vemos que $x \approx 0.81$.

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

EJEMPLO 5 ■ Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Para despejar el término exponencial factorizamos.

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \quad \text{Ley de exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \quad \text{Factorice (una cuadrática en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad e^x + 2 = 0 \quad \text{Propiedad del producto cero}$$

$$e^x = 3 \qquad e^x = -2$$

Si hacemos que $w = e^x$ obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

La ecuación $e^x = 3$ conduce a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Entonces $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisface la ecuación original.

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

EJEMPLO 6 ■ Una ecuación que implica funciones exponenciales

Resolver la ecuación exponencial $3xe^x + x^2e^x = 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \quad \text{Factorizamos factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \quad \text{Dividimos entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0\text{)}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \quad \text{Propiedad del producto cero}$$

Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✓

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✓

Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

■ Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo

$$\log_a x = \log_a y \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Usaremos esta propiedad en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 ■ Solución de una ecuación logarítmica

Resolver la ecuación $\log(x^2 + 1) = \log(x - 2) + \log(x + 3)$.

SOLUCIÓN Primero se combinan los logaritmos del lado derecho y luego se utiliza la propiedad uno a uno de los logaritmos.

$\log_5(x^2+1) = \log_5(x-2) + \log_5(x+3)$	Ecuación dada
$\log_5(x^2+1) = \log_5[(x-2)(x+3)]$	Ley 1: $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
$\log_5(x^2+1) = \log_5(x^2+x-6)$	Desarrolle
$x^2+1 = x^2+x-6$	log es uno a uno (o eleve a la 5 cada lado)
$x = 7$	Despeje x

La solución es $x = 7$. (Puede comprobar que $x = 7$ satisface la ecuación original.)


Ahora intente realizar el ejercicio 49

El método del ejemplo 7 no es adecuado para resolver una ecuación como $\log_5 x = 13$ ya que el lado derecho no se expresa como un logaritmo (base 5). Para resolver estas ecuaciones utilizamos las directrices siguientes.

GUÍA PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Despeje el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o eleve la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 8 ■ Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación despeje x.

a) $\ln x = 8$

b) $\log_2(25 - x) = 3$

SOLUCIÓN

a)

$\ln x = 8$	Ecuación dada
$x = e^8$	Forma exponencial

Por tanto $x = e^8 \approx 2981$.

También podemos resolver este problema de otra forma.

$\ln x = 8$	Ecuación dada
$e^{\ln x} = e^8$	Eleve e a cada lado
$x = e^8$	Propiedad de ln

b) El primer paso es volver a escribir la ecuación en forma exponencial.

$\log_2(25 - x) = 3$	Ecuación dada
$25 - x = 2^3$	Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)
$25 - x = 8$	
$x = 25 - 8 = 17$	

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 17$, tenemos

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✓

Ahora intente realizar los ejercicios 55 y 59

EJEMPLO 9 ■ Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

SOLUCIÓN Primero despejamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$4 + 3\log(2x) = 16 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$3\log(2x) = 12 \quad \text{Reste 4}$$
$$\log(2x) = 4 \quad \text{Divida entre 3}$$
$$2x = 10^4 \quad \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)}$$
$$x = 5000 \quad \text{Divida entre 2}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 5000$, obtenemos

$$4 + 3\log 2(5000) = 4 + 3\log 10000$$
$$= 4 + 3(4)$$
$$= 16 \checkmark$$

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

EJEMPLO 10 ■ Resolver algebraica y gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos usando las leyes de logaritmos.

$$\log[(x + 2)(x - 1)] = 1 \quad \text{Ley 1}$$
$$(x + 2)(x - 1) = 10 \quad \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)}$$
$$x^2 + x - 2 = 10 \quad \text{Desarrolle el lado izquierdo}$$
$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{Reste 10}$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0 \quad \text{Factorice}$$
$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = 3$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -4$:

$$\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1)$$
$$= \log(-2) + \log(-5)$$
$$\text{indefinidos} \; ✗$$

$x = 3$:

$$\log(3 + 2) + \log(3 - 1)$$
$$= \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2)$$
$$= \log 10 = 1 \checkmark$$

Verificamos estas soluciones potenciales en la ecuación original y encontramos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de números negativos no están definidos), pero $x = 3$ sí es una solución. (Vea *Verifique sus respuestas*.)

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Primero pasamos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

Luego trazamos la gráfica de

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la figura 2. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Entonces, la única solución es $x \approx 3$.

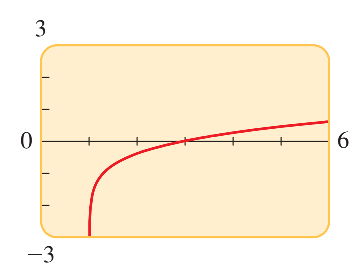


FIGURA 2

Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■

EJEMPLO 11 ■ Resolver gráficamente una ecuación logarítmica

En el ejemplo 11 no es posible despejar x algebraicamente, así que debemos resolver la ecuación gráficamente.

Resuelva la ecuación $x^2 = 2\ln(x + 2)$.

SOLUCIÓN Primero pasamos todos los términos a un lado de la ecuación.

$$x^2 - 2\ln(x + 2) = 0$$

Entonces graficamos

$$y = x^2 - 2\ln(x + 2)$$

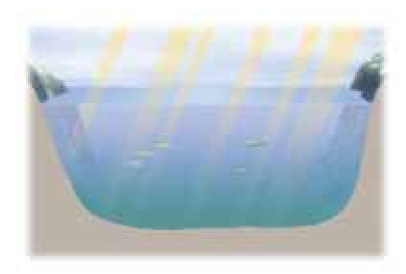
FIGURA 3

como en la figura 3. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Si hacemos *zoom* en los puntos de intersección x vemos que hay dos soluciones:

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

Se usan ecuaciones logarítmicas para determinar la cantidad de luz que llega a diversas profundidades en un lago. (Esta información ayuda a los biólogos a determinar los tipos de fauna que un lago puede soportar.) Cuando pasa luz por el agua (o por otros materiales transparentes como vidrio o plástico) parte de la luz es absorbida. Es fácil ver que cuanto más turbia es el agua, más luz se absorbe. En el siguiente ejemplo se describe la relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material.



La intensidad de la luz en un lago disminuye con la profundidad.

EJEMPLO 12 ■ Transparencia de un lago

Si I_0 e I denotan la intensidad de luz antes y después de pasar por un material y x es la distancia (en pies) que la luz se desplaza en el material, entonces, de acuerdo con la **ley Beer-Lambert**,

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde k es una constante que depende del tipo de material.

a) Despeje I de la ecuación.

b) Para cierto lago $k = 0.025$, y la intensidad de la luz es $I_0 = 14$ lumens (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

SOLUCIÓN

a) Primero despejamos el término logarítmico.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) &= x && \text{Ecuación dada} \\ \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) &= -kx && \text{Multiplique por } -k \\ \frac{I}{I_0} &= e^{-kx} && \text{Forma exponencial} \\ I &= I_0 e^{-kx} && \text{Multiplique por } I_0 \end{aligned}$$

b) Encontramos I usando la fórmula del inciso *a*).

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-kx} && \text{Del inciso } a) \\ &= 14e^{(-0.025)(20)} && I_0 = 14,\ k = 0.025,\ x = 20 \\ &\approx 8.49 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

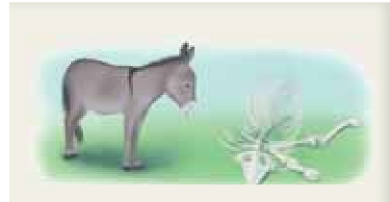
La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es alrededor de 8.5 lm.

Ahora intente realizar el ejercicio 99 ■

■ Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para interés que encontramos en la sección 4.1. Si un principal P se invierte a una tasa de interés r durante un tiempo de t años, entonces la cantidad A de la inversión está dada por

$$\begin{aligned} A &= P(1 + r) && \text{Interés simple (para un año)} \\ A(t) &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{Interés capitalizado } n \text{ veces por año} \\ A(t) &= Pe^{rt} && \text{Interés capitalizado continuamente} \end{aligned}$$



Determinación de la edad mediante radiocarbono Este es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de los objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de unos 5 730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre ^{14}C y ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Cuando un organismo muere deja de asimilar ^{14}C y la cantidad de ^{14}C en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de ^{14}C que tiene.

Por ejemplo, si el hueso de un burro que murió hace t años contiene 73% del ^{14}C que tenía estando con vida, entonces por la fórmula para la desintegración radiactiva (sección 4.6)

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para encontrar $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene unos 2 600 años de antigüedad.

Podemos usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en aumentar a una cantidad dada.

EJEMPLO 13 ■ Encontrar el tiempo para que una inversión se duplique

Se invierte una suma de 5 000 dólares a una tasa de interés de 5% al año. Encuentre el tiempo necesario para que el dinero se duplique si el interés se capitaliza de acuerdo con el siguiente método.

a) Semestralmente ***b)*** Continuamente

SOLUCIÓN

a) Usamos la fórmula para interés compuesto con $P = \$5000$, $A(t) = \$10000$, $r = 0.05$ y $n = 2$, y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} = 10000 \qquad P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = A$$

$$(1.025)^{2t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5 000}$$

$$\log 1.025^{2t} = \log 2 \qquad \text{Tome log de cada lado}$$

$$2t \log 1.025 = \log 2 \qquad \text{Ley 3 (baje el exponente)}$$

$$t = \frac{\log 2}{2 \log 1.025} \qquad \text{Divida entre 2 log 1.025}$$

$$t \approx 14.04 \qquad \text{Calculadora}$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

b) Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$5000$, $A(t) = \$10000$ y $r = 0.05$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$5000e^{0.05t} = 10000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.05t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5 000}$$

$$\ln e^{0.05t} = \ln 2 \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$0.05t = \ln 2 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.05} \qquad \text{Divida entre 0.05}$$

$$t \approx 13.86 \qquad \text{Calculadora}$$

El dinero se duplicará en 13.86 años.

Ahora intente realizar el ejercicio 89 ■

EJEMPLO 14 ■ Tiempo necesario para crecer una inversión

Se invierte una suma de 1 000 dólares a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a 4 000 dólares si el interés se capitaliza continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $A(t) = \$4000$ y $r = 0.04$ y de la ecuación exponencial resultante se despeja t.

$$1000e^{0.04t} = 4000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.04t} = 4 \qquad \text{Divida entre 1 000}$$

$$0.04t = \ln 4 \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln 4}{0.04} \qquad \text{Divida entre 0.04}$$

$$t \approx 34.66 \qquad \text{Calculadora}$$

La cantidad será 4 000 dólares en 34 años y 8 meses.

Ahora intente realizar el ejercicio 91 ■

4.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial $2e^x = 50$.
   a) Primero, despejamos e^x para obtener la ecuación equivalente ________.
   b) Luego tomamos ln de cada lado para obtener la ecuación equivalente ________________.
   c) Ahora usamos una calculadora para encontrar $x \approx$ ________.

2. Resolvamos la ecuación logarítmica

$$\log 3 + \log(x - 2) = \log x$$

   a) Primero combinamos los logaritmos en el LI para obtener la ecuación equivalente ________________.
   b) Luego escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente ________________.
   c) Ahora encontramos $x =$ ________.

HABILIDADES

3–10 ■ Ecuaciones exponenciales Encuentre la solución de la ecuación exponencial como en el ejemplo 1.

3. $5^{x-1} = 125$
4. $e^{x^2} = e^9$
5. $5^{2x-3} = 1$
6. $10^{2x-3} = \frac{1}{10}$
7. $7^{2x-3} = 7^{6+5x}$
8. $e^{1-2x} = e^{3x-5}$
9. $6^{x^2-1} = 6^{1-x^2}$
10. $10^{2x^2-3} = 10^{9-x^2}$

11–38 ■ Ecuaciones exponenciales *a*) Encuentre la solución exacta de la ecuación exponencial en términos de logaritmos. *b*) Utilice una calculadora para encontrar una aproximación de la solución redondeada a seis decimales.

11. $10^x = 25$
12. $10^{-x} = 4$
13. $e^{-5x} = 10$
14. $e^{0.4x} = 8$
15. $2^{1-x} = 3$
16. $3^{2x-1} = 5$
17. $3e^x = 10$
18. $2e^{12x} = 17$
19. $300(1.025)^{12t} = 1\,000$
20. $10(1.375)^{10t} = 50$
21. $e^{1-4x} = 2$
22. $e^{3-5x} = 16$
23. $2^{5-7x} = 15$
24. $2^{3x} = 34$
25. $3^{x/14} = 0.1$
26. $5^{-x/100} = 2$
27. $4(1 + 10^{5x}) = 9$
28. $2(5 + 3^{x+1}) = 100$
29. $8 + e^{1-4x} = 20$
30. $1 + e^{4x+1} = 20$
31. $4x + 2^{1+2x} = 50$
32. $125^x + 5^{3x+1} = 200$
33. $5x = 4^{x+1}$
34. $10^{1-x} = 6x$
35. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$
36. $7^{x/2} = 5^{1-x}$
37. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$
38. $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$

39–44 ■ Ecuaciones exponenciales de tipo cuadrático Resuelva la ecuación.

39. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
40. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
41. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$
42. $3^{4x} - 3^{2x} - 6 = 0$
43. $2x - 10(2^{-x}) + 3 = 0$
44. $e^x + 15e^{-x} - 8 = 0$

45–48 ■ Ecuaciones que implican funciones exponenciales Resuelva la ecuación.

45. $x^2 2^x - 2x = 0$
46. $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$
47. $4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = 0$
48. $x^2e^x + xe^x - e^x = 0$

49–54 ■ Ecuaciones logarítmicas Resuelva la ecuación logarítmica para x, como en el ejemplo 7.

49. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$
50. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$
51. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$
52. $\ln(x - \frac{1}{2}) + \ln 2 = 2 \ln x$
53. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$
54. $\log_4(x + 2) + \log_4 3 = \log_4 5 + \log_4(2x - 3)$

55–68 ■ Ecuaciones logarítmicas Resuelva la ecuación logarítmica para x.

55. $\ln x = 10$
56. $\ln(2 + x) = 1$
57. $\log x = -2$
58. $\log(x - 4) = 3$
59. $\log(3x + 5) = 2$
60. $\log_3(2 - x) = 3$
61. $4 - \log(3 - x) = 3$
62. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$
63. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$
64. $\log x + \log(x - 3) = 1$
65. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$
66. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$
67. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$
68. $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$

69–76 ■ Resolver ecuaciones gráficamente Utilice una calculadora graficadora para encontrar todas las soluciones redondeadas a dos lugares decimales.

69. $\ln x = 3 - x$
70. $\log x = x^2 - 2$
71. $x^3 - x = \log(x + 1)$
72. $x = \ln(4 - x^2)$
73. $e^x = -x$
74. $2^{-x} = x - 1$
75. $4^{-x} = \sqrt{x}$
76. $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

77–78 ■ Más ecuaciones exponenciales y logarítmicas Despeje x de la ecuación.

77. $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$
78. $\log_2(\log_3 x) = 4$

HABILIDADES Plus

79–82 ■ Resolver desigualdades Resuelva la desigualdad.

79. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$

80. $3 \leq \log_2 x \leq 4$

81. $2 < 10^x < 5$

82. $x^2e^x - 2e^x < 0$

83–86 ■ Funciones inversas Determine la función inversa de f.

83. $f(x) = 2^{2x}$

84. $f(x) = 3^{x+1}$

85. $f(x) = \log_2(x - 1)$

86. $f(x) = \log 3x$

87–88 ■ Ecuaciones logarítmicas especiales Determine el valor o los valores de x para los que la ecuación es verdadera.

87. $\log(x + 3) = \log x + \log 3$

88. $(\log x)^3 = 3 \log x$

APLICACIONES

89. Interés compuesto Un hombre invierte 5 000 dólares en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.

a) Encuentre la cantidad después de 3 años.

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?

90. Interés compuesto Una mujer invierte 6 500 dólares en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.

a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea 8 000 dólares?

91. Interés compuesto Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de 5 000 dólares crezca a 8 000, a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.

92. Interés compuesto Nancy desea invertir 4 000 dólares en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Qué periodo de inversión debe escoger para ahorrar 5 000 dólares?

93. Duplicar una inversión ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de 1 000 dólares en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?

94. Tasa de interés Se invirtió una suma de 1 000 dólares durante 4 años y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a 1 435.77 dólares en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

95. Desintegración radiactiva Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?

96. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos su velocidad será de 70 pies/s?

97. Población de peces En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.

a) Encuentre la población de peces después de 3 años.

b) ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5 000?

98. Transparencia de un lago Para encontrar la "transparencia" del agua los científicos ambientalistas miden la intensidad de la luz a varias profundidades en un lago. Se requieren ciertos niveles de transparencia para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago la intensidad de luz a una profundidad x está dada por



$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.

a) Encuentre la intensidad I a una profundidad de 30 pies.

b) ¿A qué profundidad la intensidad de la luz habrá descendido a $I = 5$?

99. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascales, kPa) a una altitud h (en kilómetros, km) está gobernada por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.

a) De la ecuación despeje P.

b) Use el inciso *a*) para encontrar la presión P a una altitud de 4 km.

100. Enfriamiento de un motor Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día invernal (20°F al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220°F). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

a) De la ecuación despeje T.

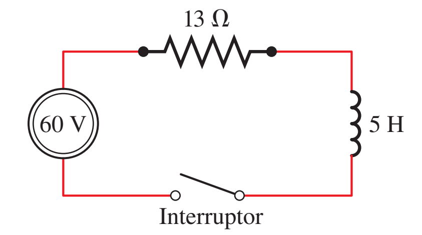
b) Use el inciso *a*) para encontrar la temperatura del motor después de 20 minutos ($t = 20$).

101. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$

(en amperes, A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.

a) Use esta ecuación para expresar el tiempo t como función de la corriente I.

b) ¿Después de cuántos segundos la corriente será de 2 A?



102. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina como función del tiempo t. de capacitación. Al principio la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo M, la rapidez de aprendizaje disminuye. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para el aprendizaje.

a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como función del nivel de rendimiento P.



b) Para un atleta de salto con pértiga en entrenamiento la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que él es capaz de saltar con pértiga después de t meses. ¿Después de cuántos meses de aprendizaje podrá saltar 12 pies?

 ***c***) Trace una gráfica de la curva de aprendizaje del inciso *b*).

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

103. DISCUSIÓN: Estimar una solución Sin resolver realmente la ecuación encuentre dos números enteros entre los cuales debe estar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo ha llegado a esa conclusión.

104. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Una ecuación sorprendente Tome logaritmos para demostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. Señale para qué valores de k tiene solución la ecuación

$$x^{1/\log x} = k$$

¿Qué nos dice esto acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta usando una calculadora graficadora.

105. DISCUSIÓN: Ecuaciones disfrazadas Cada una de estas ecuaciones se puede transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático si se aplica la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

a) $(x - 1)^{\log(x-1)} = 100(x - 1)$
[*Sugerencia:* tome log de cada lado.]

b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$
[*Sugerencia:* cambie todos los log a base 2.]

c) $4^x - 2^{x+1} = 3$
[*Sugerencia:* escríbala como cuadrática en 2^x.]

4.6 MODELADO CON FUNCIONES EXPONENCIALES

■ Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación) ■ Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa) ■ Desintegración radiactiva ■ Ley de Newton de enfriamiento

Un gran número de procesos que se presentan en la naturaleza, por ejemplo, el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, la difusión de calor y otros muchos se pueden modelar usando funciones exponenciales. En esta sección estudiamos modelos exponenciales.

■ Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)

Suponga que empezamos con una sola bacteria que se divide cada hora. Después de una hora tenemos 2 bacterias, después de dos horas tenemos 2^2 o sea 4 bacterias, después de tres horas tenemos 2^3 o sea 8 bacterias, y así sucesivamente (vea la

figura 1). Vemos que podemos modelar la población de bacterias después de t horas, por medio de $f(t) = 2^t$.

0 1 2 3 4 5 6

FIGURA 1 Población de bacterias

Si empezamos con 10 de estas bacterias entonces la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^t$. Una especie de bacteria de crecimiento más lento se duplica cada 3 horas; en este caso la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^{t/3}$. En general, tenemos lo siguiente.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TIEMPO DE DUPLICACIÓN)

Si el tamaño inicial de una población es n_0 y el tiempo de duplicación es a, entonces el tamaño de la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{t/a}$$

donde a y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

EJEMPLO 1 ■ Población de bacterias

Bajo condiciones ideales cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Inicialmente hay 1 000 en una colonia.

a) Encuentre un modelo para la población de bacterias después de t horas.

b) ¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de 15 horas?

c) ¿Cuándo llegará a 100 000 el número de bacterias?

SOLUCIÓN

a) La población en el tiempo t está modelada por

$$n(t) = 1\,000 \cdot 2^{t/3}$$

donde t se mide en horas.

b) Después de 15 horas el número de bacterias es

$$n(15) = 1\,000 \cdot 2^{15/3} = 32\,000$$

c) Hacemos que $n(t) = 100\,00$ en el modelo que encontramos en el inciso *a*) y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$100\,000 = 1\,000 \cdot 2^{t/3} \qquad n(t) = 1\,000 \cdot 2^{t/3}$$

$$100 = 2^{t/3} \qquad \text{Divida entre } 1\,000$$

$$\log 100 = \log 2^{t/3} \qquad \text{Tome log de cada lado}$$

$$2 = \frac{t}{3} \log 2 \qquad \text{Propiedades de log}$$

$$t = \frac{6}{\log 2} \approx 19.93 \qquad \text{Despeje } t$$

El nivel de bacterias llega a 100 000 en unas 20 horas.

Ahora intente realizar el ejercicio 1 ■

EJEMPLO 2 ■ Población de conejos



Cierta clase de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 meses. La población actual de conejos en la isla se estima en 4 100 y se duplica cada 3 meses.

a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?

b) Estime la población a un año después de que los conejos fueron introducidos en la isla.

c) Trace una gráfica de la población de conejos.

SOLUCIÓN

a) El tiempo de duplicación es $a = 3$, de modo que la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{t/3} \qquad \text{Model}$$

donde n_0 es la población inicial. Dado que la población es 4 100 cuando t es 8 meses, tenemos

$$\begin{aligned} n(8) &= n_0 2^{8/3} && \text{Del modelo} \\ 4\,100 &= n_0 2^{8/3} && \text{Porque } n(8) = 4\,100 \\ n_0 &= \frac{4\,100}{2^{8/3}} && \text{Divida entre } 2^{8/3} \text{ e intercambie lados} \\ n_0 &\approx 645 && \text{Calcule} \end{aligned}$$

Entonces estimamos que 645 conejos fueron introducidos en la isla.

b) Del inciso *a*) sabemos que la población inicial es $n_0 = 645$, de modo que podemos modelar la población después de t meses mediante

$$n(t) = 645 \cdot 2^{t/3} \qquad \text{Modelo}$$

Después de un año $t = 12$, y entonces

$$n(12) = 645 \cdot 2^{12/3} = 10\,320$$

Por tanto, después de un año habría unos 10 000 conejos.

c) Primero observamos que el dominio es $t \geq 0$. La gráfica se muestra en la figura 2.

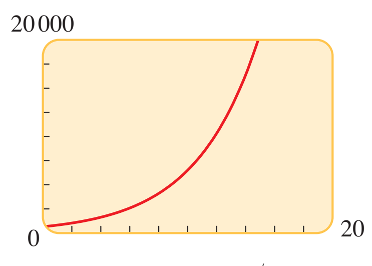


FIGURA 2 $n(t) = 645 \cdot 2^{t/3}$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

■ Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa)

Hemos utilizado una función exponencial con base 2 para modelar el crecimiento poblacional (en términos del tiempo de duplicación). También podemos modelar la misma población con una función exponencial con base 3 (en términos del tiempo de triplicación). De hecho, podemos encontrar un modelo exponencial con cualquier base. Si usamos la base e, obtenemos el siguiente modelo de una población en términos de la **tasa de crecimiento relativa** r: la tasa de crecimiento poblacional expresada como una proporción de la población en cualquier momento. En este caso r es la tasa de crecimiento "instantánea". (En cálculo al concepto de velocidad instantánea se le da un significado preciso.) Por ejemplo, si $r = 0.02$, entonces en cualquier tiempo t la tasa de crecimiento es 2% de la población en el tiempo t.

El crecimiento de una población con tasa de crecimiento relativo r es similar al crecimiento de una inversión con tasa de interés continuamente compuesto r.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TASA DE CRECIMIENTO RELATIVA)

Una población que experimenta un **crecimiento exponencial** aumenta de acuerdo con el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ = población al tiempo t

n_0 = tamaño inicial de la población

r = tasa de crecimiento relativa (expresada como una proporción de la población)

t = tiempo

Observe que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para el interés capitalizado continuamente. De hecho, el mismo principio funciona en ambos casos: el crecimiento de una población (o una inversión) por periodo es proporcional al tamaño de la población (o la cantidad de la inversión). Una población de 1 000 000 aumentará más en un año que una población de 1 000; exactamente del mismo modo una inversión de $1 000 000 aumentará más en un año que una inversión de $1 000.

En los siguientes ejemplos suponemos que las poblaciones crecen exponencialmente.

EJEMPLO 3 ■ Predicción del tamaño de una población

La cantidad inicial de bacterias en un cultivo es 500. Posteriormente, un biólogo hace un conteo de muestra de bacterias del cultivo y encuentra que la tasa de crecimiento relativa es 40% por hora.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

b) ¿Cuál es la cantidad estimada después de 10 horas?

c) ¿Cuándo llegará a 80 000 la cantidad de bacterias?

d) Trace la gráfica de la función $n(t)$.

SOLUCIÓN

a) Usamos el modelo de crecimiento exponencial con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde t se mide en horas.

b) Usando la función del inciso *a*) encontramos que la cantidad de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^{4} \approx 27\,300$$

c) Hacemos $n(t) = 80\,000$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$80\,000 = 500 \cdot e^{0.4t} \qquad n(t) = 500 \cdot e^{0.4t}$$

$$160 = e^{0.4t} \qquad \text{Divida entre 500}$$

$$\ln 160 = 0.4t \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln 160}{0.4} \approx 12.68 \qquad \text{Despeje } t$$

El nivel de bacterias llega a 80 000 en unas 12.7 horas.

d) En la figura 3 se muestra la gráfica.

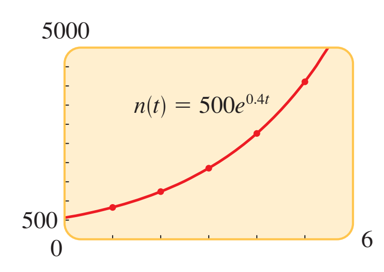


FIGURA 3

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

EJEMPLO 4 ■ Comparación de diferentes tasas de crecimiento poblacional

El crecimiento relativo de la población mundial ha estado bajando en las últimas décadas, de 2% en 1995 a 1.1% en 2013.

En el año 2000 la población mundial era de 6 100 millones y la tasa de crecimiento relativa era de 1.4% por año. Se dice que una tasa del 1.0% haría una diferencia importante en la población total en sólo unas pocas décadas. Pruebe este argumento estimando la población mundial del año 2050 usando una tasa de crecimiento relativa de *a*) 1.4% al año y *b*) 1.0% al año.

Trace la gráfica de las funciones de población para los siguientes 100 años para las dos tasas de crecimiento relativas en el mismo rectángulo de visión.

Únicamente de pie
La población mundial era aproximadamente de 6 100 millones en 2000 y estaba creciendo 1.4% al año. Suponiendo que cada persona ocupa un promedio de 4 pies^2 de la superficie terrestre, el modelo exponencial para el crecimiento poblacional proyecta que para 2801 habrá espacio únicamente para estar de pie. (El área total de superficie terrestre del mundo es aproximadamente de 1.8×10^{15} pies^2.)

SOLUCIÓN

***a*)** Con el modelo de crecimiento exponencial tenemos

$$n(t) = 6.1e^{0.014t}$$

donde $n(t)$ se mide en miles de millones y t se mide en años desde 2000. Dado que el año 2050 es 50 años después de 2000 encontramos que

$$n(50) = 6.1e^{0.014(50)} = 6.1e^{0.7} \approx 12.3$$

La población estimada en el año 2050 es de 12 300 millones.

***b*)** Usamos la función

$$n(t) = 6.1e^{0.010t}$$

y encontramos

$$n(50) = 6.1e^{0.010(50)} = 6.1e^{0.50} \approx 10.1$$

La población estimada en el año 2050 es alrededor de 10 100 millones.

Las gráficas de la figura 4 muestran que, con el tiempo, un pequeño cambio en la tasa de crecimiento relativa hará una gran diferencia en el tamaño de la población.

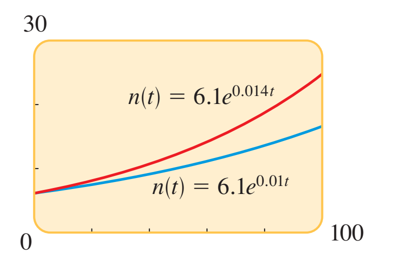


FIGURA 4


Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

EJEMPLO 5 ■ Expresar el modelo en términos de *e*

Un cultivo se inicia con 10 000 bacterias y el número se duplica cada 40 minutos.

***a*)** Encuentre una función $n(t) = n_0 2^{t/a}$ que modele el número de bacterias después de t horas.

***b*)** Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele el número de bacterias después de t horas.

***c*)** Trace una gráfica del número de bacterias en el tiempo t.

SOLUCIÓN

***a*)** La población inicial es $n_0 = 10000$. El tiempo de duplicación es $a = 40$ min $= 2/3$ h. Dado que $1/a = 3/2 = 1.5$, el modelo es

$$n(t) = 10000 \cdot 2^{1.5t}$$

***b*)** La población inicial es $n_0 = 10000$. Necesitamos encontrar la tasa de crecimiento relativa r. Puesto que hay 20 000 bacterias cuando $t = 2/3$ h, tenemos

$$20000 = 10000e^{r(2/3)} \qquad n(t) = 10000e^{rt}$$

$$2 = e^{r(2/3)} \qquad \text{Divida entre } 10000$$

$$\ln 2 = \ln e^{r(2/3)} \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$\ln 2 = r(2/3) \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$r = \frac{3 \ln 2}{2} \approx 1.0397 \qquad \text{Despeje } r$$

Ahora que conocemos la tasa de crecimiento relativa r, podemos encontrar el modelo:

$$n(t) = 10000e^{1.0397t}$$

c) Podemos trazar la gráfica del modelo del inciso *a*) o del inciso *b*). Las gráficas son idénticas. Vea la figura 5.

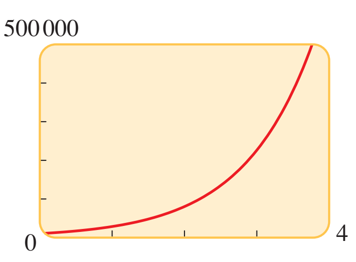


FIGURA 5 Gráficas de $y = 10\,000 \cdot 2^{1.5t}$ y $y = 10\,000e^{1.0397t}$

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

Radioactive Decay

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es similar al crecimiento poblacional excepto que la masa *decrece*. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de **vida media**. Por ejemplo, la vida media del radio 226 es de 1 600 años, de modo que una muestra de 100 g se desintegra a 50 g (o $\frac{1}{2} \times 100$ g) en 1 600 años, 25 g (o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100$ g) se desintegran en 3 200 años y así, sucesivamente. En general, para una sustancia radiactiva con masa m_0 y vida media h, la cantidad restante en el tiempo t está modelada por

$$m(t) = m_0 2^{-t/h}$$

donde h y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

Para expresar este modelo en la forma $m(t) = m_0 e^{rt}$, necesitamos encontrar la tasa relativa de desintegración r. Puesto que h es la vida media, tenemos

$$m(t) = m_0 e^{-rt} \quad \text{Modelo}$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-rh} \quad h \text{ es la vida media}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-rh} \quad \text{Divida entre } m_0$$

$$\ln \frac{1}{2} = -rh \quad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$r = \frac{\ln 2}{h} \quad \text{Despeje } r$$

Esta última ecuación nos permite encontrar la tasa r a partir de la vida media h.

Las vidas medias de los **elementos radiactivos** varían de muy largas a muy cortas. Veamos unos ejemplos a continuación.

Elemento	Vida media
Torio-232	14.5 miles de millones de años
Uranio-235	4.5 miles de millones de años
Torio-230	80 000 años
Plutonio-239	24 360 años
Carbono-14	5 730 años
Radio-226	1 600 años
Cesio-137	30 años
Estroncio-90	28 años
Polonio-210	140 días
Torio-234	25 días
Yodo-135	8 días
Radón-222	3.8 días
Plomo-211	3.6 minutos
Criptón-91	10 segundos



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Modelado de radiación con monedas y dados

Los elementos radiactivos decaen cuando sus átomos emiten radiación espontáneamente y cambian a átomos más pequeños y estables. Pero si los átomos decaen aleatoriamente, ¿cómo es posible encontrar una función que modele su comportamiento? Intentaremos responder a esta pregunta arrojando de manera aleatoria monedas y dados. Los experimentos nos permiten contar cómo un gran número de eventos aleatorios pueden dar como resultado funciones exponenciales predecibles. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

MODELO DE DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media h, entonces la masa restante en el tiempo t está modelada por la función

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$ es la **tasa de desintegración relativa**.

EJEMPLO 6 ■ Desintegración radiactiva

El polonio 210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

a) Encuentre una función $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa que queda después de t días.

b) Encuentre una función $m(t) = m_0 e^{-rt}$ que modele la masa que resta después de t días.

c) Encuentre la masa que queda después de un año.

d) ¿Cuánto tiempo le tomará a la muestra desintegrarse a una masa de 200 mg?

e) Trace una gráfica de la masa de la muestra como función del tiempo.

SOLUCIÓN

a) Tenemos $m_0 = 300$ y $h = 140$, de modo que la cantidad que queda después de t días es

$$m(t) = 300 \cdot 2^{-t/140}$$

b) Tenemos $m_0 = 300$ y $r = \ln 2/140 \approx -0.00495$, de modo que la cantidad que resta después de t días es

$$m(t) = 300 \cdot e^{-0.00495t}$$

En los incisos *c*) y *d*) también podemos usar el modelo encontrado en el inciso *a*). Compruebe que el resultado sea el mismo usando cualquiera de estos modelos.

c) Usamos la función que encontramos en el inciso *b*) con $t = 365$ (un año):

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Entonces, después de un año quedarán aproximadamente 49 mg ^{210}Po.

d) Usamos la función que encontramos en el inciso *b*) con $m(t) = 200$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t:

$$300e^{-0.00495t} = 200 \qquad m(t) = m_0 e^{-rt}$$

$$e^{-0.00495t} = \tfrac{2}{3} \qquad \text{Divida entre 300}$$

$$\ln e^{-0.00495t} = \ln \tfrac{2}{3} \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$-0.00495t = \ln \tfrac{2}{3} \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = -\frac{\ln \frac{2}{3}}{0.00495} \qquad \text{Despeje } t$$

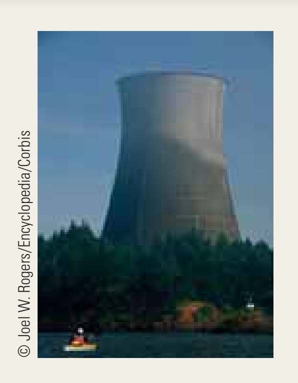
$$t \approx 81.9 \qquad \text{Calculadora}$$

El tiempo necesario para que la muestra se desintegre a 200 mg es aproximadamente 82 días.

e) Podemos trazar la gráfica del modelo del inciso *a*) o la del inciso *b*). Las gráficas son idénticas. Vea la figura 6.

FIGURA 6

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■



Desechos radiactivos

Se producen isótopos radiactivos perjudiciales siempre que se produce una reacción nuclear, como resultado de una prueba de la bomba atómica, de un accidente nuclear como el de Fukushima Daiichi en 2011 o por la producción de electricidad sin incidentes de una planta de energía nuclear.

Un material radiactivo que se produce en las bombas atómicas es el isótopo estroncio-90 (^{90}Sr), con una vida media de 28 años. Este se deposita como calcio en el tejido óseo humano, donde puede causar leucemia y otros cánceres. Sin embargo, desde las décadas en que se detuvieron las pruebas atmosféricas de armas nucleares, los niveles de, ^{90}Sr en el medio ambiente han descendido a un nivel que ya no representa una amenaza para la salud.

Las centrales nucleares producen el radioactivo plutonio-239 (^{239}Pu), que tiene una vida media de 24 360 años. Debido a su larga vida media, el, ^{239}Pu podría representar una amenaza para el medio ambiente durante miles de años. Se debe tener mucho cuidado de disponer de este apropiadamente. La dificultad de garantizar la seguridad de los residuos radiactivos dispuestos es una de las razones por las que las plantas de energía nuclear siguen siendo un tema controvertido.



Ley de Newton de enfriamiento

La ley de Newton de enfriamiento dice que la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO

Si D_0 es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno, y si su entorno tiene temperatura T_s, entonces la temperatura del cuerpo en el tiempo t está modelada por la función

$$T(t) = T_s + D_0e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

EJEMPLO 7 ■ Ley de Newton de enfriamiento

Una taza de café tiene una temperatura de 200°F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70°F. Después de 10 minutos la temperatura del café es 150°F.

a) Encuentre una función que modele la temperatura del café en el tiempo t.

b) Encuentre la temperatura del café después de 15 minutos.

c) ¿Cuándo se habrá enfriado el café a 100°F?

d) Haga una gráfica de la función de temperatura.

SOLUCIÓN

a) La temperatura de la habitación es $T_s = 70$°F, y la diferencia inicial de la temperatura es

$$D_0 = 200 - 70 = 130°\text{F}$$

Entonces, por la ley de Newton de enfriamiento, la temperatura después de t minutos está modelada con la función

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Necesitamos encontrar la constante k asociada con esta taza de café. Para ello usamos el hecho de que cuando $t = 10$, la temperatura $T(10) = 150$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} 70 + 130e^{-10k} &= 150 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t) \\ 130e^{-10k} &= 80 && \text{Reste 70} \\ e^{-10k} &= \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre 130} \\ -10k &= \ln \tfrac{8}{13} && \text{Tome ln de cada lado} \\ k &= -\tfrac{1}{10} \ln \tfrac{8}{13} && \text{Despeje } k \\ k &\approx 0.04855 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de k en la expresión para $T(t)$ obtenemos

$$T(t) = 70 + 130e^{-0.04855t}$$

b) Usamos la función que encontramos en el inciso *a*) con $t = 15$.

$$T(15) = 70 + 130e^{-0.04855(15)} \approx 133°\text{F}$$

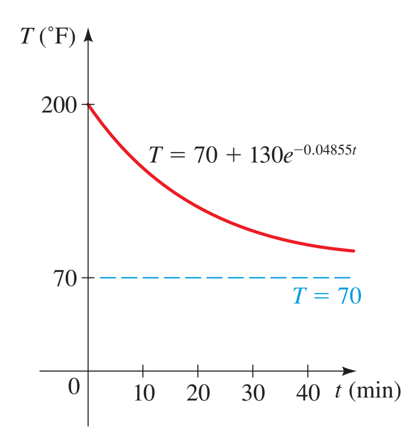


FIGURA 7 Temperatura del café después de t minutos

***c*)** Usamos la función que encontramos en el inciso *a*) con $T(t) = 100$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$70 + 130e^{-0.04855t} = 100 \qquad T_s + D_0e^{-kt} = T(t)$$

$$130e^{-0.04855t} = 30 \qquad \text{Reste 70}$$

$$e^{-0.04855t} = \frac{3}{13} \qquad \text{Divida entre 130}$$

$$-0.04855t = \ln \frac{3}{13} \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln \frac{3}{13}}{-0.04855} \qquad \text{Despeje } t$$

$$t \approx 30.2 \qquad \text{Calculadora}$$

El café se habrá enfriado a 100°F después de media hora.

***d*)** La gráfica de la función de temperatura aparece en la figura 7. Observe que la recta $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?)

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

4.6 EJERCICIOS

APLICACIONES

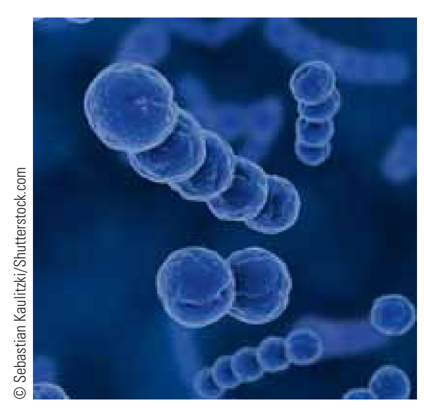
1–16 ■ Crecimiento poblacional Estos ejercicios usan el modelo de crecimiento poblacional.

1. Cultivo de bacterias Cierto cultivo de la bacteria *Streptococcus A* inicialmente tiene 10 bacterias y se observa que se duplica cada 1.5 horas.

***a*)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para el número de bacterias en el cultivo después de t horas.

***b*)** Estime el número de bacterias después de 35 horas.

***c*)** ¿Después de cuántas horas llegará a 10 000 el número de bacterias?



Streptococcus A
(12 000 × aumento)

2. Cultivo de bacterias Cierto cultivo de la bacteria *Rhodobacter sphaeroides* inicialmente tiene 25 bacterias y se observa que se duplica cada 5 horas.

***a*)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para el número de bacterias del cultivo después de t horas.

***b*)** Estime el número de bacterias después de 18 horas.

***c*)** ¿Después de cuántas horas llegará el número de bacterias a un millón?

3. Población de ardillas Una población de arcillas grises fue introducida en cierto condado de la Gran Bretaña hace 30 años. Los biólogos observaron que la población se duplica cada 6 años y ahora la población es de 100 000.

***a*)** ¿Cuál es el tamaño inicial de la población de ardillas?

***b*)** Estime la población de ardillas a 10 años a partir de ahora.

***c*)** Trace una gráfica de la población de ardillas.

4. Población de aves Cierta especie de aves fue introducida en un condado hace 25 años. Los biólogos observan que la población se duplica cada 10 años, y ahora la población es de 13 000.

***a*)** ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de aves?

***b*)** Estime la población de aves dentro de 5 años a partir del día de hoy.

***c*)** Trace una gráfica de la población de aves.

5. Población de zorros La población de zorros en cierta región tiene una razón de crecimiento relativa de 8% por año. Se estima que la población en 2013 era de 18 000.

***a*)** Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele la población en t años después de 2013.

***b*)** Use la función del inciso *b*) para estimar la población de zorros en el año 2021.

***c*)** ¿Después de cuantos años la población de zorros será de 25 000?

***d*)** Trace una gráfica de la función de población de zorros para los años 2013-2021.

6. Población de peces La población de cierta especie de peces tiene una tasa de crecimiento relativa de 1.2% por año. Se estima que la población en 2010 era de 12 millones.

a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0e^{rt}$ para la población t años después de 2010.

b) Estime la población de peces en el año 2015.

c) ¿Después de cuántos años la población de peces será de 14 millones?

d) Trace una gráfica de la población de peces.

7. Población de un condado La población de un condado tiene una tasa de crecimiento relativa de 3% por año. El gobierno está tratando de reducir la tasa de crecimiento al 2%. La población en 2011 era de aproximadamente de 110 millones. Encuentre la población proyectada para el año 2036 para las siguientes condiciones.

a) La tasa de crecimiento relativa permanece en 3% al año.

b) La tasa de crecimiento relativa se reduce a 2% al año.

8. Cultivo de bacterias Se observa que cierto cultivo de bacterias tiene una tasa de crecimiento relativa de 12% por hora, pero en presencia de un antibiótico la tasa de crecimiento relativa se reduce a 5% por hora. El número inicial en el cultivo es 22. Encuentre la población proyectada después de 24 horas para las siguientes condiciones.

a) No hay antibiótico presente, por lo cual la tasa de crecimiento relativa es 12%.

b) Está presente un antibiótico en el cultivo, por lo cual la tasa de crecimiento relativa se reduce a 5%.

9. Población de una ciudad La población de cierta ciudad era de 112 000 en 2014; el tiempo de duplicación observado para la población es de 18 años.

a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para la población, t años después de 2014.

b) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0e^{rt}$ para la población, t años después de 2014.

c) Trace una gráfica de la población en el tiempo t.

d) Estime cuándo llegará la población a 500 000.

10. Población de murciélagos La población de murciélagos en cierto condado del oeste medio era de 350 000 en 2012, y el tiempo de duplicación observado para la población es de 25 años.

a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para la población, t años después de 2012.

b) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0e^{rt}$ para la población, t años después de 2012.

c) Trace una gráfica de la población en el tiempo t.

d) Estime cuándo llegará a 2 millones la población.

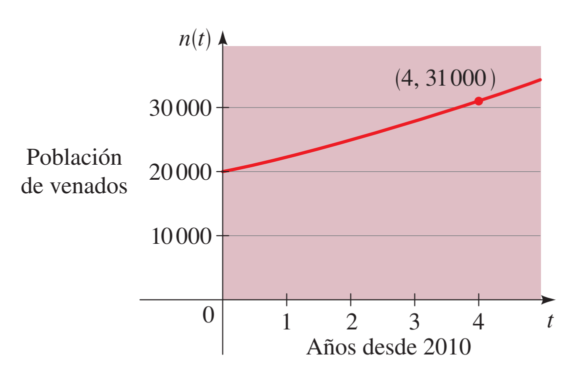
11. Población de venados La gráfica muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 2010 y 2014. Suponga que la población crece exponencialmente.

a) ¿Cuál era la población de venados en 2010?

b) Encuentre una función que modele la población de venados t años después de 2010.

c) ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2018?

d) Estime ¿en qué año la población de venados llegará a 100 000?



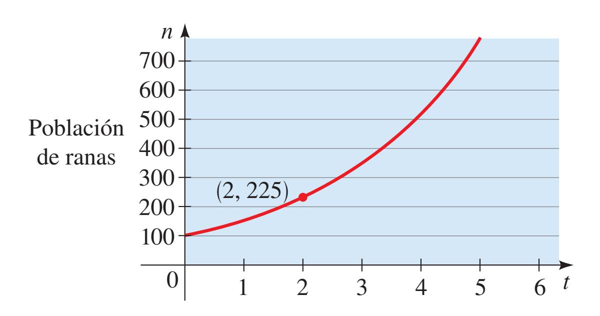
12. Población de ranas Se introdujeron algunas ranas mugidoras en un pequeño estanque. La gráfica muestra la población de estas ranas para los siguientes pocos años. Suponga que la población crece exponencialmente.

a) ¿Cuál era la población inicial de ranas mugidoras?

b) Encuentre una función que modele la población de estas ranas t años desde que las ranas fueron puestas en el estanque.

c) ¿Cuál es la población proyectada de ranas mugidoras después de 15 años?

d) Estime cuánto tiempo le tomará a la población llegar a 75 000.



13. Cultivo de bacterias Un cultivo empieza con 8 600 bacterias. Después de una hora la cantidad es de 10 000.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.

b) Encuentre el número de bacterias después de 2 horas.

c) ¿Después de cuántas horas se duplicará el número de bacterias?

14. Cultivo de bacterias La cantidad en un cultivo de bacterias era de 400 después de 2 horas y de 25 600 después de 6 horas.

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativa de la población de bacterias? Exprese su respuesta como porcentaje.

b) ¿Cuál era el tamaño inicial del cultivo?

c) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.

d) Encuentre el número de bacterias después de 4.5 horas.

e) ¿Después de cuántas horas el número de bacterias será de 50 000?

15. Población de California La población de California era de 29.76 millones en 1990 y 33.87 en 2000. Suponga que la población crece exponencialmente.

a) Encuentre la función que modele la población *t* años después de 1990.

b) Encuentre el tiempo necesario para que la población se duplique.

c) Use la función del inciso *a*) para predecir la población de California en el año 2010. Busque en su biblioteca la población real de California en 2010 y compare.

16. Población mundial La población mundial era de 7.1 miles de millones en 2013, y la tasa de crecimiento observada relativa era de 1.1% al año.

a) ¿En qué año se habrá duplicado la población.

b) ¿En qué año se habrá triplicado la población.

17–24 ■ Desintegración radiactiva Estos ejercicios usan el modelo de desintegración radiactiva.

17. Radio radiactivo La vida media del radio 226 es de 1 600 años. Suponga que tenemos una muestra de 22 mg.

a) Encuentre una función $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa que queda después de *t* años.

b) Encuentre una función $m(t) = m_0 e^{-rt}$ que modele la masa que resta después de *t* años.

c) ¿Cuánto de la muestra habrá después de 4 000 años?

d) ¿Después de cuánto tiempo habrá sólo 18 mg de la muestra?

18. Cesio radiactivo La vida media del cesio 137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 10 gramos.

a) Encuentre una función $n(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa que queda después de *t* años.

b) Encuentre una función $m(t) = m_0 e^{-rt}$ que modele la masa que queda después de *t* años.

c) ¿Cuánto de la muestra habrá después de 80 años?

d) ¿Después de cuánto tiempo habrá sólo 2 g de la muestra?

19. Estroncio radiactivo La vida media del estroncio 90 es de 28 años. ¿Cuánto tiempo tardará una muestra de 50 mg en desintegrarse a una masa de 32 mg?

20. Radio radiactivo El radio 221 tiene una vida media de 30 s. ¿Cuánto tiempo tomará que 95% de la muestra se desintegre?

21. Encontrar vida media Si 250 mg de un elemento radiactivo se desintegran a 200 mg en 48 horas, encuentre la vida media del elemento.

22. Radón radiactivo Después de 3 días una muestra de radón 222 se ha desintegrado a 58% de su cantidad original.

a) ¿Cuál es la vida media del radón 222?

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la muestra se desintegre al 20% de su cantidad original?

23. Determinación de antigüedad por carbono 14 Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% del carbono 14 que está presente en árboles vivos. ¿Cuánto tiempo hace que se construyó el artefacto? (La vida media del carbono 14 es de 5 370 años.)

24. Determinación de antigüedad por carbono 14 Se estima que la tela para el entierro de una momia egipcia contiene 59% del carbono 14 que contenía originalmente. ¿Cuánto tiempo hace que la momia fue enterrada? (La vida media del carbono 14 es de 5 730 años.)



25–28 ■ Ley de enfriamiento Estos ejercicios usan la ley de Newton de enfriamiento.

25. Sopa que se enfría Un tazón de sopa caliente se sirve en una fiesta. Empieza a enfriarse de acuerdo con la ley de Newton de enfriamiento, de modo que la temperatura en el tiempo *t* está dada por

$$T(t) = 65 + 145e^{-0.05t}$$

donde *t* se mide en minutos y *T* se mide en °F.

a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?

b) ¿Cuál es la temperatura después de 10 minutos?

c) ¿Después de cuánto tiempo será de 100°F la temperatura?

26. Tiempo de fallecimiento La ley de Newton de enfriamiento se utiliza en investigaciones de homicidios para determinar el tiempo que tiene de fallecida una persona. La temperatura normal del cuerpo humano es de 98.6 °F. Inmediatamente después de morir, el cuerpo empieza a enfriarse. Se ha determinado en forma experimental que la constante de la ley de Newton de enfriamiento es aproximadamente $k = 0.1947$, suponiendo que el tiempo se mida en horas. Suponga que la temperatura del entorno es de 60°F.

a) Encuentre la función $T(t)$ que modele la temperatura *t* horas después del fallecimiento.

b) Si la temperatura del cuerpo es ahora de 72°F, ¿cuánto tiempo transcurrió desde la muerte?

27. Enfriamiento de un pavo Un pavo rostizado se saca del horno cuando su temperatura ha alcanzado los 185°F y se coloca en una mesa en una habitación donde la temperatura es de 75°F.

a) Si la temperatura del pavo es de 150°F después de media hora, ¿cuál es su temperatura después de 45 minutos?

b) ¿Después de cuántas horas se enfriará el pavo a 100°F?



28. Ebullición del agua Una tetera llena de agua se pone a hervir en un cuarto con una temperatura de 20°C. Después de 15 minutos la temperatura del agua ha descendido de 100 a 75°C. Encuentre la temperatura después de otros 10 minutos. Ilustre mediante una gráfica de la función de temperatura.

4.7 ESCALAS LOGARÍTMICAS

■ La escala pH ■ La escala Ritcher ■ La escala de decibeles

Animal	W (kg)	log W
Hormiga	0.000003	−5.5
Elefante	4 000	3.6
Ballena	170 000	5.2

Cuando una cantidad física varía con un margen muy grande, a veces es conveniente tomar su logaritmo para tener un conjunto de números más manejable. En una **escala logarítmica**, los números se representan con sus logaritmos. Por ejemplo, la tabla en el margen da el peso W de algunos animales (en kilogramos) y sus logaritmos (log W).

Los pesos (W) varían enormemente, pero en una escala logarítmica los pesos están representados por números más manejables (log W). La figura 1 muestra que es difícil comparar los pesos W gráficamente, pero es fácil compararlos en una escala logarítmica.

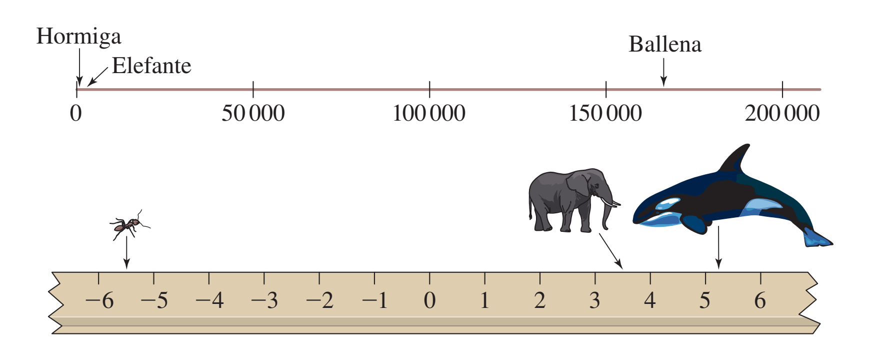


FIGURA 1 Gráfica del peso, trazada sobre la recta real (arriba) y en escala logarítmica (abajo)

Estudiamos tres de estas situaciones: la escala pH, que mide acidez; la escala Richter, que mide la intensidad de los terremotos, y la escala de decibeles, que mide la intensidad de los sonidos. Otras cantidades que se miden en escalas logarítmicas son intensidad de luz, capacidad de información y radiación.

■ La escala pH

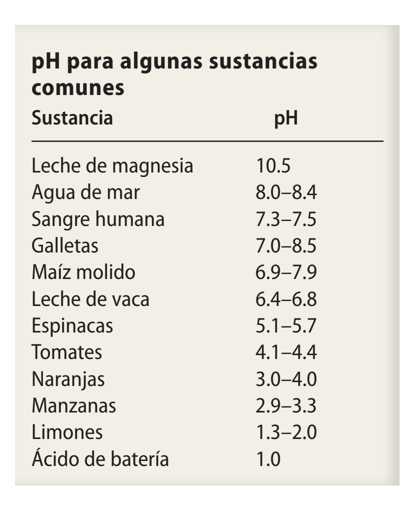
Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno hasta que Søren Peter Lauritz Sørensen, en 1909, propuso una medida más cómoda. Él definió

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

donde $[\text{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Hizo esto para evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo,

$$\text{si} \quad [\text{H}^+] = 10^{-4}\ \text{M}, \qquad \text{entonces} \qquad \text{pH} = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las soluciones con un pH de 7 se definen como *neutras*, aquellas con pH < 7 son *ácidas*, y las que tienen pH > 7 son *básicas*. Observe que cuando el pH aumenta en una unidad, $[\text{H}^+]$ disminuye en un factor de 10.



pH para algunas sustancias comunes

Sustancia	pH
Leche de magnesia	10.5
Agua de mar	8.0–8.4
Sangre humana	7.3–7.5
Galletas	7.0–8.5
Maíz molido	6.9–7.9
Leche de vaca	6.4–6.8
Espinacas	5.1–5.7
Tomates	4.1–4.4
Naranjas	3.0–4.0
Manzanas	2.9–3.3
Limones	1.3–2.0
Ácido de batería	1.0

EJEMPLO 1 ■ Escala de pH y concentración de iones de hidrógeno

a) La concentración de iones de hidrógeno de una muestra de sangre humana se midió de $[\text{H}^+] = 3.16 \times 10^{-8}$ M. Encuentre el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

b) La lluvia más ácida jamás medida antes ocurrió en Escocia en 1974; su pH fue de 2.4. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno.

SOLUCIÓN

***a*)** Una calculadora da

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

Dado que esto es mayor a 7, la sangre es básica.

***b*)** Para encontrar la concentración de iones de hidrógeno necesitamos despejar $[\text{H}^+]$ de la ecuación logarítmica

$$\log[\text{H}^+] = -\text{pH}$$

Por tanto, la escribimos en forma exponencial:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

En este caso pH = 2.4, por lo cual

$$[\text{H}^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\ \text{M}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 1 y 3 ■

La escala Richter



Terremotos más fuertes

Lugar	Fecha	Magnitud
Chile	1960	9.5
Alaska	1964	9.2
Japón	2011	9.1
Sumatra	2004	9.1
Kamchatka	1952	9.0
Chile	2010	8.8
Ecuador	1906	8.8
Alaska	1965	8.7
Alaska	1957	8.6
Sumatra	2005	8.6
Sumatra	2012	8.6
Tíbet	1950	8.6
Indonesia	1938	8.5
Kamchatka	1923	8.5

Fuente: U.S. Geological Survey

En 1935 el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como

$$M = \log \frac{I}{S}$$

donde I es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del sismo; y S es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es 1 micrón $= 10^{-4}$ cm). (En la práctica, las estaciones sismográficas pueden no estar exactamente a 100 km del epicentro, por lo que se hacen ajustes apropiados en el cálculo de la magnitud de un terremoto.) La magnitud de un terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió numerosos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala de Richter y el más pequeño tuvo magnitud 0. Esto corresponde a una relación de intensidades de 800 000 000, de modo que la escala

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Clave para afinar

Poetas, escritores, filósofos, incluso los políticos han ensalzado las virtudes de la música, de su belleza y su poder para comunicar emociones. Pero el corazón de la música es una escala logarítmica. Todos los tonos que diariamente le son familiares a nuestro oído, se pueden reproducir con las teclas de un piano. Las teclas de un piano, a su vez, están "uniformemente afinadas" mediante una escala logarítmica. En este proyecto exploramos cómo las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan para afinar adecuadamente un piano. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

de Richter da números más manejables para trabajar. Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5.

EJEMPLO 2 ■ Magnitud e intensidad

a) Encuentre la magnitud de un terremoto que tiene una intensidad de 3.75 (es decir, la amplitud de la lectura del sismógrafo es 3.75 cm.)

b) Se midió un terremoto de magnitud 5.1 en la escala de Richter. Encuentre la intensidad del terremoto.

SOLUCIÓN

a) De la definición de magnitud vemos que

$$M = \log \frac{I}{S} = \log \frac{3.75}{10^{-4}} = \log 37\,500 \approx 4.6$$

Por tanto, la magnitud es 4.6 en la escala de Ritcher.

b) Para encontrar la intensidad debemos despejar I en la ecuación logarítmica

$$M = \log \frac{I}{S}$$

Así, escribimos en forma exponencial:

$$10^M = \frac{I}{S}$$

En este caso $S = 10^{-4}$ y $M = 5.1$, por lo que

$$10^{5.1} = \frac{I}{10^{-4}} \qquad M = 5.1,\ S = 10^{-4}$$

$$(10^{-4})(10^{5.1}) = I \qquad \text{Multiplique por } 10^{-4}$$

$$I = 10^{1.1} \approx 12.6 \qquad \text{Sume exponentes}$$

Por tanto, la intensidad del terremoto es de 12.6, lo que significa que la amplitud de la lectura del sismógrafo está alrededor de 12.6 cm.



EJEMPLO 3 ■ Magnitud de los terremotos

Hay otras escalas logarítmicas para calcular la magnitud de los terremotos. Por ejemplo, el U.S. Geological Survey utiliza la *escala de magnitud de momento*.

El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala de Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador, que fue cuatro veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del temblor entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter?

SOLUCIÓN Si I es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces por la definición de magnitud tenemos

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto entre Colombia y Ecuador fue $4I$, de modo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$

Ahora intente realizar el ejercicio 11

EJEMPLO 4 ■ Intensidad de los terremotos



© Grant Smith/Corbis

El terremoto de 1989 en Loma Prieta, que sacudió San Francisco tuvo una magnitud de 7.1 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue el temblor de 1906 (vea el ejemplo 3) que el de 1989?

SOLUCIÓN Si I_1 e I_2 son las intensidades de los terremotos de 1906 y 1989, entonces nos piden hallar I_1/I_2. Para relacionar esto con la definición de magnitud dividimos el numerador y el denominador entre S.

$$\log \frac{I}{S} = \log \frac{I_1/S}{I_2/S} \qquad \text{Divida el numerador y el denominador entre } S$$

$$= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S} \qquad \text{Ley 2 de logaritmos}$$

$$= 8.3 - 7.1 = 1.2 \qquad \text{Definición de magnitud de terremotos}$$

Por tanto,

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

El terremoto de 1906 fue alrededor de 16 veces más intenso que el de 1989.

 Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

■ La escala de decibeles

Nuestro oído es sensible a una gama extremadamente grande de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1 000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de escucha). La sensación psicológica de intensidad varía con el logaritmo de la intensidad (ley de Weber-Fechner), de modo que el **nivel de intensidad** B, medido en decibeles, está definido como

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es

$$B = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

EJEMPLO 5 ■ Intensidad de sonido del despegue de un jet

***a*)** Encuentre el nivel de intensidad en decibeles de un motor de jet durante el despegue si la intensidad se mide en 100 W/m^2.

***b*)** Encuentre el nivel de intensidad de un motor de motocicleta a toda velocidad si se midió el nivel de decibeles en 90 dB.

SOLUCIÓN

***a*)** De la definición de nivel de intensidad vemos que

$$B = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Por tanto, el nivel de intensidad es 140 dB.

b) Para encontrar la intensidad, tenemos que despejar I de la ecuación logarítmica

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{Definición de nivel de decibeles}$$

$$\frac{B}{10} = \log I - \log 10^{-12} \qquad \text{Divida entre 10, } I_0 = 10^{-12}$$

$$\frac{B}{10} = \log I + 12 \qquad \text{Definición de logaritmo}$$

$$\frac{B}{10} - 12 = \log I \qquad \text{Reste 12}$$

$$\log I = \frac{90}{10} - 12 = -3 \qquad B = 90$$

$$I = 10^{-3} \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo que la intensidad es 10^{-3} W/m^2.

Ahora intente realizar los ejercicios 15 y 17 ■

Los **niveles de intensidad de sonido** que podemos oír varían de muy fuertes a muy débiles. Aquí tenemos algunos ejemplos de niveles en decibeles de sonidos que se pueden escuchar comúnmente.

Fuente de sonido	*B* (dB)
Despegue de un jet	140
Martillo neumático	130
Concierto de rock	120
Tren subterráneo	100
Tránsito intenso	80
Tránsito ordinario	70
Conversación normal	50
Susurro	30
Hojas que caen	10–20
Umbral de escucha	0

La tabla del margen es una lista de niveles de intensidad en decibeles para algunos sonidos comunes que van desde el umbral de escucha humana hasta el despegue del jet del ejemplo 5. El umbral del dolor es aproximadamente 120 dB.

4.7 EJERCICIOS

APLICACIONES

1. Encontrar el pH Se da la concentración de un ion de hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Calcule el pH de la sustancia.

a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-3}$ M
b) Jugo de tomate: $[H^+] = 3.2 \times 10^{-4}$ M
c) Agua de mar: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-9}$ M

2. Encontrar el pH Una sustancia desconocida tiene una concentración de iones de hidrógeno de $[H^+] = 3.1 \times 10^{-8}$ M. Encuentre el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

3. Concentración de iones Se da la lectura de pH de una muestra de cada sustancia. Calcule la concentración de iones de hidrógeno de la sustancia.

a) Vinagre: pH = 3.0 ***b***) Leche: pH = 6.5

4. Concentración de iones Nos dan la lectura de pH de un vaso de líquido. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno del líquido.

a) Cerveza: pH = 4.6 ***b***) Agua: pH = 7.3

5. Encontrar el pH Las concentraciones de iones de hidrógeno en quesos van de 4.0×10^{-7} M a 1.6×10^{-5} M. Encuentre la variación correspondiente de lecturas de pH.



6. Concentración de iones en vino Las lecturas de pH para vinos varían de 2.8 a 3.8. Encuentre la variación correspondiente de concentraciones de iones de hidrógeno.

7. pH del vino Si el pH de un vino es demasiado alto; es decir, mayor de 4.0, el vino se hace inestable e insípido.

a) Un cierto vino de California rojo tiene un pH de 3.2, y un cierto vino blanco italiano tiene un pH de 2.9. Encuentre las correspondientes concentraciones de iones de hidrógeno de los dos vinos.

b) ¿Qué vino tiene la menor concentración de iones hidrógeno?

8. pH de la saliva El pH de la saliva está normalmente en el rango de 6.4 a 7.0. Sin embargo, cuando una persona está enferma, su saliva se vuelve más ácida.

a) Cuando Marco se enferma prueba el pH de su saliva y descubre que es de 5.5. ¿Cuál es la concentración del ion de hidrógeno de su saliva?

b) La concentración del ion de hidrógeno en la saliva de Marco, ¿aumentará o disminuirá conforme mejora?

c) Después de que se recupera Marco prueba el pH de su saliva y es 6.5. ¿Era la saliva más ácida o menos ácida cuando estaba enfermo?

9. Magnitud e intensidad de terremotos

a) Encuentre la magnitud de un terremoto cuya intensidad es 31.25 (es decir, la amplitud de la lectura del sismógrafo es 31.25 cm).

b) Se midió la magnitud de un terremoto de 4.8 en la escala de Richter. Encuentre la intensidad del terremoto.

10. Magnitud e intensidad de terremotos

a) Encuentre la magnitud de un terremoto con una intensidad de 72.1 (es decir, la amplitud de la lectura del sismógrafo es 72.1 cm).

b) Se midió la magnitud de un terremoto de 5.8 en la escala de Richter. Encuentre la intensidad del terremoto.

11. Magnitudes de terremotos Si un terremoto es 20 veces más intenso que otro, ¿cuánto más grande es su magnitud en la escala de Richter?

12. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala de Richter. Al mismo tiempo, en Japón, un terremoto con magnitud 4.9 apenas causó daños de menor importancia. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de San Francisco que el de Japón?

13. Magnitudes de terremotos El terremoto de Japón de 2011 tuvo una magnitud de 9.1 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue este que el terremoto de San Francisco de 1906? (Vea la figura 12.)

14. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1994 en Northridge, California, tuvo una magnitud de 6.8 en la escala de Richter. Un año después un terremoto de magnitud 7.2 destruyó Kobe, Japón. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Kobe que el de Northridge?

15. Ruido de tránsito La intensidad del sonido de tránsito en un crucero de mucho movimiento se midió en 2.0×10^{-5} W/m^2. Encuentre el nivel de intensidad en decibeles.

16. Un soplador de hojas La intensidad del sonido de cierto soplador de hojas se mide en 3.2×10^{-2} W/m^2. Encuentre el nivel de intensidad en decibeles.

17. Secadora Se mide el nivel de decibeles del sonido de cierta secadora de cabello en 70 dB. Encuentre la intensidad del sonido.

18. Ruido del metro Se midió el nivel de decibeles del sonido de un tren subterráneo a 98 dB. Encuentre la intensidad en watts por metro cuadrado (W/m^2).

19. Pérdida de audición con los reproductores de MP3 Investigaciones recientes han demostrado que el uso de los auriculares de los reproductores de MP3 pueden causar pérdida permanente de la audición.

a) La intensidad del sonido de los altavoces de un determinado reproductor de MP3 (sin auriculares) se mide en 3.1×10^{-5} W/m^2. Encuentre el nivel de decibeles.

b) Si los auriculares se utilizan con el reproductor de MP3 del inciso *a*), el nivel de decibeles es de 95 dB. Encuentre la intensidad.

c) Determine el cociente de la intensidad del sonido del reproductor MP3 con auriculares entre la del sonido sin auriculares.

20. Comparación de niveles de decibeles El ruido de una podadora de motor se midió en 106 dB. El nivel de ruido en un concierto de rock se midió en 120 dB. Encuentre el cociente de la intensidad de la música de rock entre la intensidad de la podadora de motor.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

21. DEMOSTRACIÓN: Ley del cuadrado inverso para sonido Una ley de física dice que la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente: $I = k/d^2$.

a) Use este modelo y la ecuación

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

(descrita en esta sección) para mostrar que los niveles B_1 y B_2 en decibeles, a distancias d_1 y d_2 desde la fuente, están relacionados por la ecuación

$$B_2 = B_1 + 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$

b) El nivel de intensidad en un concierto de rock es 120 dB a una distancia de 2 m de los altavoces. Encuentre el nivel de intensidad a una distancia de 10 metros.

CAPÍTULO 4 ■ REPASO

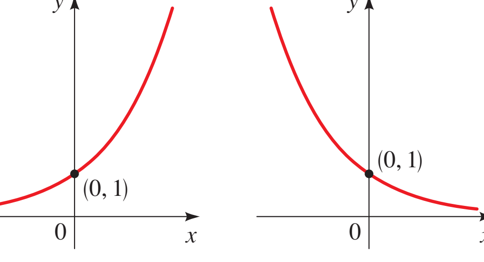
■ PROPIEDADES Y FÓRMULAS

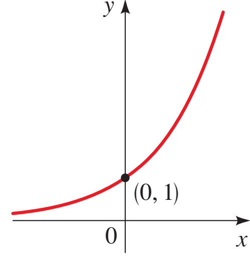
Funciones exponenciales (pp. 330–332)

La **función exponencial** f con base a (donde $a > 0$, $a \neq 1$) se define para todos los números reales x por

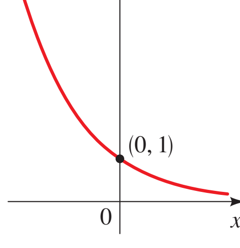
$$f(x) = a^x$$

El dominio de f es $\mathbb{R}$, y el rango de f es de $(0, \infty)$ La gráfica de f tiene una de las siguientes formas, dependiendo del valor de a:





$f(x) = a^x$ para $a > 1$



$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

La función exponencial natural (p. 339)

La **función exponencial natural** es la función exponencial natural con base e:

$$f(x) = e^x$$

El número e se define como el número al que se aproxima la expresión $(1 + 1/n)^n$ cuando $n \to \infty$ Un valor aproximado del número irracional e es

$$e \approx 2.7182818284590\ldots$$

Interés compuesto (pp. 334, 340)

Si un principal P se invierte en una cuenta pagando una tasa de interés anual r, capitalizable n veces en un año, entonces después de t años la **cantidad** $A(t)$ en la cuenta es

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Si el interés se capitaliza **continuamente**, entonces la cantidad es

$$A(t) = Pe^{rt}$$

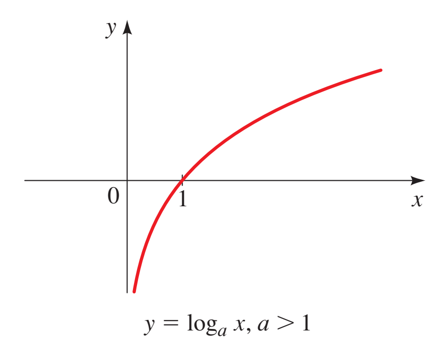
Funciones logarítmicas (pp. 344–345)

La **función logarítmica** $\log_a$ con base a (donde $a > 0$, $a \neq 1$) se define para $x > 0$ por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por tanto $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base para que dé y.

El dominio de $\log_a$ es $(0, \infty)$, y el rango es $\mathbb{R}$. Para $a > 1$, la gráfica de la función $\log_a$ tiene la forma siguiente:



$y = \log_a x, a > 1$

Logaritmos comunes y naturales (pp. 348–349)

La función logaritmo de base 10 se llama **logaritmo común** y se denota por **log**. Así

$$\log x = \log_{10} x$$

La función logaritmo con base e se llama **logaritmo natural** y se denota como **ln**. Por tanto

$$\ln x = \log_e x$$

Propiedades de los logaritmos (pp. 345, 349)

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a a^x = x$

4. $a^{\log_a x} = x$

Leyes de los logaritmos (p. 354)

Sea a una base de logaritmo $(a > 0, a \neq 1)$ y sean A, B y C cualesquiera números reales o expresiones algebraicas que representen números reales, con $A > 0$ y $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$

2. $\log_a(A/B) = \log_a A - \log_a B$

3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$

Fórmula de cambio de base (p. 357)

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Guía para resolver ecuaciones exponenciales (p. 361)

1. Despejar el término exponencial de un lado de la ecuación.

2. Tomar el logaritmo de cada lado y utilizar las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente".

3. Despejar la variable.

Guía para resolver ecuaciones logarítmicas (p. 364)

1. Despejar los términos en un lado de la ecuación y utilizar las leyes de los logaritmos para combinar términos logarítmicos si es necesario.

2. Reescribir la ecuación en la forma exponencial.

3. Despejar la variable.

Modelo de crecimiento exponencial (p. 373)

Una población experimenta un **crecimiento exponencial** si se puede modelar por la función exponencial

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ es la población en el tiempo t, n_0 es la población inicial (al tiempo $t = 0$), y r es la tasa de crecimiento relativo (expresada como proporción de la población).

Modelo de desintegración radiactiva (pp. 375–376)

Si una **sustancia radiactiva** con h de vida media tiene masa inicial m_0, entonces en el tiempo t la masa $m(t)$ de la sustancia que queda se modela por la función exponencial

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

Ley de Newton de enfriamiento (p. 377)

Si un objeto tiene una temperatura inicial D_0 grados más caliente que la temperatura circundante T_s entonces el tiempo t la temperatura $T(t)$ del objeto es modelada por la función

$$T(t) = T_s + D_0 e^{-kt}$$

donde la constante $k > 0$ depende del tamaño y tipo del objeto.

Escalas logarítmicas (pp. 381–385)

La **escala de pH** mide la acidez de una solución:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

La **escala de Richter** mide la intensidad de los terremotos:

$$M = \log \frac{I}{S}$$

La **escala de decibeles** mide la intensidad del sonido:

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Sea f la función exponencial con base a.
   a) Escriba una ecuación que defina f.
   b) Escriba una ecuación para la función exponencial f con base 3.

2. Sea f la función exponencial $f(x) = a^x$, donde $a > 0$.
   a) ¿Cuál es el dominio de f?
   b) ¿Cuál es el rango de f?
   c) Trace las gráficas de f para cada caso.
   i) $a > 1$ *ii*) $0 < a < 1$

3. Si x es grande, ¿cuál función crece más rápido, $f(x) = 2^x$ o $g(x) = x^2$?

4. ***a***) ¿Cómo está definido el número e?
   b) Dé un valor aproximado de e, redondeado a cuatro decimales.
   c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

5. ***a***) ¿Cómo se define $\log_a x$?
   b) Encuentre $\log_3 9$.
   c) ¿Qué es el logaritmo natural?
   d) ¿Qué es el logaritmo común?
   e) Escriba la forma exponencial de la ecuación $\log_7 49 = 2$.

6. Sea f la función logarítmica $f(x) = \log_a x$.
   a) ¿Cuál es el dominio de f?
   b) ¿Cuál es el rango de f?
   c) Trace una gráfica de la función logarítmica para el caso $a > 1$.

7. Exprese las tres leyes de logaritmos.

8. ***a***) Exprese la fórmula de cambio de base.
   b) Encuentre $\log_7 30$.

9. ***a***) ¿Qué es una ecuación exponencial?
   b) ¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica?
   c) Despeje x: $2^x = 19$

10. ***a***) ¿Qué es una ecuación logarítmica?
   b) ¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica?
   c) Despeje x: $4 \log_3 x = 7$

11. Suponga que se invierte una cantidad P a una tasa r y que $A(t)$ es la cantidad después de t años. Escriba una expresión para $A(t)$ en los casos siguientes.
   a) El interés es capitalizable n veces por año.
   b) El interés es capitalizable continuamente.

12. Suponga que el tamaño inicial de una población es n_0 y la población crece exponencialmente. Sea $n(t)$ el tamaño de la población al tiempo t.
   a) Escriba una expresión para $n(t)$ en términos del tiempo de duplicación a.
   b) Escriba una expresión para $n(t)$ en términos de la tasa de crecimiento relativo r.

13. Suponga que la masa inicial de una sustancia radiactiva es m_0 y que la vida media de la sustancia es h. Sea $m(t)$ la masa que queda al tiempo t.
   a) ¿Qué se entiende por vida media h?
   b) Escriba una fórmula para $m(t)$ en términos de la vida media h.
   c) Escriba una fórmula para la tasa de desintegración relativa r en términos de la vida media h.
   d) Escriba una fórmula para $m(t)$ en términos de la tasa de desintegración relativa r.

14. Suponga que la diferencia de la temperatura inicial entre un objeto y sus alrededores es D_0 y que los alrededores tienen una temperatura T_s. Sea $T(t)$ la temperatura al tiempo t. Exprese la ley de Newton de enfriamiento para $T(t)$.

15. ¿Qué es una escala logarítmica? Si usamos una escala logarítmica con base 10, ¿cuáles de los siguientes números corresponden a la escala logarítmica?
   i) 100 *ii*) 100 000 *iii*) 0.0001

16. ***a***) ¿Qué mide la escala de pH?
   b) Defina el pH de una sustancia con la concentración de ion hidrógeno de $[H^+]$.

17. ***a***) ¿Qué mide la escala de Richter?
   b) Defina la magnitud M de un terremoto en términos de la intensidad I de terremoto y de la intensidad S de un terremoto estándar.

18. ***a***) ¿Qué mide la escala de decibeles?
   b) Defina el nivel de decibeles B de un sonido en términos de la intensidad I del sonido y la intensidad I_0 de un sonido apenas audible.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–4 ■ Evaluar funciones exponenciales Utilice una calculadora para encontrar los valores indicados de la función exponencial, redondeados a tres lugares decimales.

1. $f(x) = 5^x$; $f(-1.5), f(\sqrt{2}), f(2.5)$

2. $f(x) = 3 \cdot 2^x$; $f(-2.2), f(\sqrt{7}), f(5.5)$

3. $g(x) = 4e^{x-2}$; $g(-0.7), g(1), g(\pi)$

4. $g(x) = \frac{7}{4}e^{x+1}$; $g(-2), g(\sqrt{3}), g(3.6)$

5–16 ■ Trazar la gráfica de funciones exponenciales y logarítmicas **Exprese el dominio, el rango y la asíntota.**

5. $f(x) = 3^{x-2}$

6. $f(x) = 2^{-x+1}$

7. $g(x) = 3 + 2^x$

8. $g(x) = 5^{-x} - 5$

9. $F(x) = e^{x-1} + 1$

10. $G(x) = -e^{x+1} - 2$

11. $f(x) = \log_3(x - 1)$

12. $g(x) = \log(-x)$

13. $f(x) = 2 - \log_2 x$

14. $f(x) = 3 + \log_5(x + 4)$

15. $g(x) = 2 \ln x$

16. $g(x) = \ln(x^2)$

17–20 ■ Dominio Encuentre el dominio de la función.

17. $f(x) = 10^{x^2} + \log(1 - 2x)$

18. $g(x) = \log(2 + x - x^2)$

19. $h(x) = \ln(x^2 - 4)$

20. $k(x) = \ln |x|$

21–24 ■ Forma exponencial Escriba la ecuación en forma exponencial.

21. $\log_2 1\,024 = 10$

22. $\log_6 37 = x$

23. $\log x = y$

24. $\ln c = 17$

25–28 ■ Forma logarítmica Escriba la ecuación en forma logarítmica.

25. $2^6 = 64$

26. $49^{-1/2} = \frac{1}{7}$

27. $10^x = 74$

28. $e^k = m$

29–44 ■ Evaluar expresiones logarítmicas Evalúe la expresión sin usar calculadora.

29. $\log_2 128$

30. $\log_8 1$

31. $10^{\log 45}$

32. $\log 0.000001$

33. $\ln(e^6)$

34. $\log_4 8$

35. $\log_3(\frac{1}{27})$

36. $2^{\log_2 13}$

37. $\log_5 \sqrt{5}$

38. $e^{2 \ln 7}$

39. $\log 25 + \log 4$

40. $\log_3 \sqrt{243}$

41. $\log_2 16^{23}$

42. $\log_5 250 - \log_5 2$

43. $\log_8 6 - \log_8 3 + \log_8 2$

44. $\log \log 10^{100}$

45–50 ■ Desarrollar expresiones logarítmicas Desarrolle la expresión logarítmica.

45. $\log(AB^2C^3)$

46. $\log_2(x\sqrt{x^2 + 1})$

47. $\ln \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

48. $\log\left(\dfrac{4x^3}{y^2(x - 1)^5}\right)$

49. $\log_5\left(\dfrac{x^2(1 - 5x)^{3/2}}{\sqrt{x^3 - x}}\right)$

50. $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 12}}{(x + 16)\sqrt{x - 3}}\right)$

51–56 ■ Combinar expresiones logarítmicas Combine en un solo logaritmo.

51. $\log 6 + 4 \log 2$

52. $\log x + \log(x^2y) + 3 \log y$

53. $\frac{3}{2} \log_2(x - y) - 2 \log_2(x^2 + y^2)$

54. $\log_5 2 + \log_5(x + 1) - \frac{1}{3} \log_5(3x + 7)$

55. $\log(x - 2) + \log(x + 2) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 4)$

56. $\frac{1}{2}[\ln(x - 4) + 5 \ln(x^2 + 4x)]$

57–70 ■ Ecuaciones exponenciales y logarítmicas Resuelva la ecuación. Encuentre la solución exacta si es posible; de otro modo, use calculadora para aproximar a dos decimales.

57. $3^{2x-7} = 27$

58. $5^{4-x} = \frac{1}{125}$

59. $2^{3x-5} = 7$

60. $10^{6-3x} = 18$

61. $4^{1-x} = 3^{2x+5}$

62. $e^{3x/4} = 10$

63. $x^2e^{2x} + 2xe^{2x} = 8e^{2x}$

64. $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

65. $\log x + \log(x + 1) = \log 12$

66. $\ln(x - 2) + \ln 3 = \ln(5x - 7)$

67. $\log_2(1 - x) = 4$

68. $\ln(2x - 3) + 1 = 0$

69. $\log_3(x - 8) + \log_3 x = 2$

70. $\log_8(x + 5) - \log_8(x - 2) = 1$

71–74 ■ Ecuaciones exponenciales Use calculadora para encontrar la solución de la ecuación, redondeada a seis lugares decimales.

71. $5^{-2x/3} = 0.63$

72. $2^{3x-5} = 7$

73. $5^{2x+1} = 3^{4x-1}$

74. $e^{-15k} = 10\,000$



75–78 ■ Extremos locales y asíntotas Trace una gráfica de la función y úsela para determinar las asíntotas y los valores máximos y mínimos locales.

75. $y = e^{x/(x+2)}$

76. $y = 10^x - 5^x$

77. $y = \log(x^3 - x)$

78. $y = 2x^2 - \ln x$



79–80 ■ Resolver ecuaciones Encuentre las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos decimales.

79. $3 \log x = 6 - 2x$

80. $4 - x^2 = e^{-2x}$



81–82 ■ Resolver desigualdades Resuelva gráficamente la desigualdad.

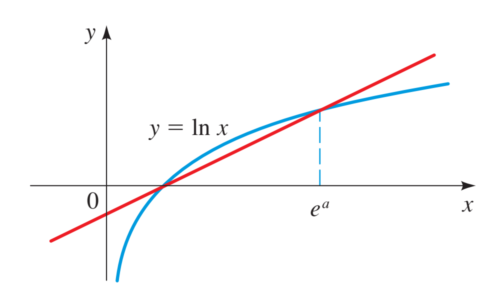
81. $\ln x > x - 2$

82. $e^x < 4x^2$



83. Creciente y decreciente Use una gráfica de $f(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$ para encontrar, aproximadamente, los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

84. Ecuación de una recta Encuentre una ecuación de la recta que se muestra en la figura.



85–88 ■ Cambio de base Use la fórmula de cambio de base para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales.

85. $\log_4 15$

86. $\log_7(\frac{3}{4})$

87. $\log_9 0.28$

88. $\log_{100} 250$

89. Comparar logaritmos ¿Qué es mayor, $\log_4 258$ o $\log_5 620$?

90. Función inversa Encuentre la inversa de la función $f(x) = 2^{3^x}$, y exprese su dominio y su rango.

91. Interés compuesto Si se invierten 12 000 dólares a una tasa de interés de 10% al año, encuentre la cantidad de la inversión al término de 3 años por cada uno de los métodos de capitalización.

a) Semestralmente ***b)*** Mensualmente
c) Diariamente ***d)*** Continuamente

92. Interés compuesto Se invierte una suma de 5 000 dólares a una tasa de $8\frac{1}{2}\%$ al año, capitalizado semestralmente.

a) Encuentre la cantidad de la inversión después de $1\frac{1}{2}$ años.

b) Después de qué tiempo la cantidad de la inversión será de 7 000 dólares?

c) Si el interés se capitalizara continuamente en lugar de semestralmente, ¿cuánto tiempo tardaría la cantidad en crecer a 7 000 dólares?

93. Interés compuesto Una cuenta de mercado de dinero paga 5.2% de interés anual, capitalizado diariamente. Si se invierten 100 000 dólares en esta cuenta, ¿cuánto tardará la cuenta en acumular 10 000 dólares en intereses?

94. Interés compuesto Un plan de ahorros para el retiro paga 4.5% de interés, capitalizado continuamente. ¿Cuánto tiempo tomará en duplicarse una inversión en este plan?

95–96 ■ Porcentaje anual de ganancia Determine el porcentaje anual de ganancia (APY, por sus siglas en inglés) para la tasa de interés nominal anual y la frecuencia compuesta dadas.

95. 4.25%; diariamente

96. 3.2%; mensualmente

97. Población de gatos La población de gatos callejeros de una pequeña ciudad crece exponencialmente. En 1999 la ciudad tenía 30 gatos callejeros y la tasa de crecimiento relativa era de 15% al año.

a) Encuentre una función que modele la población $n(t)$ de gatos callejeros después de t años.

b) Encuentre la población proyectada después de 4 años.

c) Encuentre el número de años necesario para que la población de gatos callejeros llegue a 500.

98. Cultivo de bacterias Un cultivo contiene 10 000 bacterias inicialmente. Después de una hora, la cantidad de bacterias es de 25 000.

a) Encuentre el periodo de duplicación.

b) Encuentre el número de bacterias después de 3 horas.

99. Desintegración radiactiva El uranio 234 tiene una vida media de 2.7×10^5 años.

a) Encuentre la cantidad restante de una muestra de 10 mg después de mil años.

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que esta muestra se descomponga hasta que su masa sea de 7 mg?

100. Desintegración radiactiva Una muestra de bismuto 210 se desintegró a 33% de su masa original después de 8 días.

a) Encuentre la vida media de este elemento.

b) Encuentre la masa restante después de 12 días.

101. Desintegración radiactiva La vida media del radio 226 es de 1 590 años.

a) Si una muestra tiene una masa de 150 mg, encuentre una función que modele la masa que resta después de t años.

b) Encuentre la masa que habrá después de 1 000 años.

c) ¿Después de cuántos años habrá sólo 50 mg?

102. Desintegración radiactiva La vida media del paladio 100 es 4 días. Después de 20 días una muestra se ha reducido a una masa de 0.375 g.

a) ¿Cuál era la masa inicial de la muestra?

b) Encuentre una función que modele la masa restante después de t días.

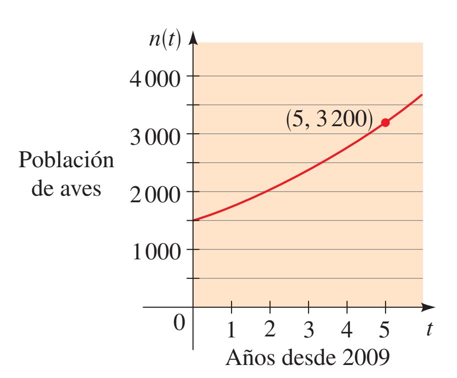
c) ¿Cuál es la masa después de 3 días?

d) ¿Después de cuántos días habrá sólo 0.15 g?

103. Población de pájaros La gráfica muestra la población de una rara especie de aves, donde t representa los años desde 2009 y $n(t)$ se mide en miles.

a) Encuentre una función que modele la población de aves en el tiempo t en la forma $n(t) = n_0 e^{rt}$.

b) ¿Cuál se espera que sea la población de aves en el año 2020?



104. Ley de enfriamiento El motor de un auto funciona a una temperatura de 190°F. Cuando el motor se apaga, se enfría de acuerdo con la ley de Newton de enfriamiento con una constante $k = 0.0341$, donde el tiempo se mide en minutos. Encuentre el tiempo necesario para que el motor se enfríe a 90°F si la temperatura circundante es de 60°F.

105. pH La concentración de iones de hidrógeno de claras de huevo fresco se midió como

$$[H+] = 1.3 \times 10^{-8}\ M$$

Encuentre el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

106. pH El pH del jugo de limón es 1.9. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno.

107. Escala de Ritcher Si un terremoto tiene magnitud de 6.5 en la escala de Richter, ¿cuál es la magnitud de otro terremoto que es 35 veces más intenso?

108. Escala de decibeles La operación de un martillo neumático se midió en 132 dB. El sonido de un susurro se midió en 28 dB. Encuentre el cociente de las intensidades del martillo y del susurro.

EXAMEN

1. Trace la gráfica de cada función y exprese el dominio, el rango y la asíntota. Muestre los puntos de intersección x y y de la gráfica.

a) $f(x) = 2^{-x} + 4$ ***b***) $g(x) = \log_3(x + 3)$

2. Encuentre el dominio de la función.

a) $f(x) = \ln(2t - 3)$ ***b***) $g(x) = \log(x^2 - 1)$

3. ***a***) Escriba la ecuación $6^{2x} = 25$ en forma logarítmica.

b) Escriba la ecuación $\ln A = 3$ en forma exponencial.

4. Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $10^{\log 36}$ ***b***) $\ln e^3$ ***c***) $\log_3 \sqrt{27}$

d) $\log_2 80 - \log_2 10$ ***e***) $\log_8 4$ ***f***) $\log_6 4 + \log_6 9$

5. Use las leyes de logaritmos para desarrollar la expresión.

a) $\log\left(\dfrac{xy^3}{z^2}\right)$ ***b***) $\ln\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ***c***) $\log\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^4(x^2+4)}}$

6. Utilice las leyes de los logaritmos para combinar la expresión en un solo logaritmo.

a) $\log a + 2\log b$ ***b***) $\ln(x^2 - 25) - \ln(x + 5)$ ***c***) $\log_2 3 - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2(x + 1)$

7. Encuentre la solución de la ecuación, aproximada a dos lugares decimales.

a) $3^{4x} = 3^{100}$ ***b***) $e^{3x-2} = e^{x^2}$ ***c***) $5^{x/10} + 1 = 7$ ***d***) $10^{x+3} = 6^{2x}$

8. Resuelva la ecuación logarítmica para x.

a) $\log(2x) = 3$ ***b***) $\log(x + 1) + \log 2 = \log(5x)$

c) $5\ln(3 - x) = 4$ ***d***) $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) = 2$

9. Utilice la fórmula de cambio de base para evaluar $\log_{12} 27$.

10. El tamaño inicial de un cultivo de bacteria es 1 000. Después de una hora, la cantidad de bacterias es de 8 000.

a) Encuentre una función $n(t) = n_0e^{rt}$ que modele la población después de t horas.

b) Encuentre la población después de 1.5 horas.

c) ¿Cuándo llegará la población a 15 000?

d) Trace la gráfica de la función de población.

11. Suponga que se invierten 12 000 dólares en una cuenta de ahorros que paga 5.6% de interés al año.

a) Escriba la fórmula para la cantidad en la cuenta después de t años si el interés se capitaliza mensualmente.

b) Encuentre la cantidad en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza diariamente.

c) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad en la cuenta crezca a 20 000 dólares si el interés se capitaliza continuamente?

12. La vida media del criptón 91 (^{91}Kr) es 10 segundos. En el tiempo $t = 0$ un recipiente de construcción robusta contiene 3 g de este gas radiactivo.

a) Encuentre la función que modele la cantidad $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ de ^{91}Kr que queda en el recipiente después de t segundos.

b) Encuentre la función que modele la cantidad $m(t) = m_0e^{-rt}$ de ^{91}Kr que queda en el recipiente después de t segundos.

c) ¿Cuánto ^{91}Kr habrá después de un minuto?

d) ¿Después de cuánto tiempo la cantidad de ^{91}Kr restante se reducirá a 1 μg (1 microgramo, o 10^{-6} g)?

13. En julio de 2007 un terremoto de 6.4 en la escala de Richter golpeó las costas de Japón, causando grandes daños. Antes, ese mismo año, un terremoto de menor importancia que midió 3.1 en la escala de Richter se sintió en algunos lugares de Pennsylvania. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Japón que el de Pennsylvania?

EN NUESTRO SITIO WEB SE PUEDE ENCONTRAR UN EXAMEN DE REPASO ACUMULATIVO DE LOS CAPÍTULOS 2, 3 Y 4.
Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

Ajuste de datos a curvas exponenciales y de potencia

En una sección previa de *Enfoque sobre modelado* (página 325) aprendimos que la forma de una gráfica de dispersión nos ayuda a escoger el tipo de curva a usar para modelar datos. La primera gráfica de la figura 1 sugiere fuertemente que una recta pasa a través de estos, y la segunda indica que señala un polinomio cúbico. Para la tercera gráfica es tentador ajustar a un polinomio de segundo grado. Pero, ¿qué pasa si una curva exponencial se ajusta mejor? ¿Cómo determinamos esto? En esta sección aprenderemos a ajustar curvas exponenciales y de potencia a los datos y a determinar qué tipo de curva se ajusta mejor a los mismos. También aprenderemos que para gráficas de dispersión como las de las últimas dos gráficas de la figura 1 los datos se pueden modelar mediante funciones logarítmicas o logísticas.

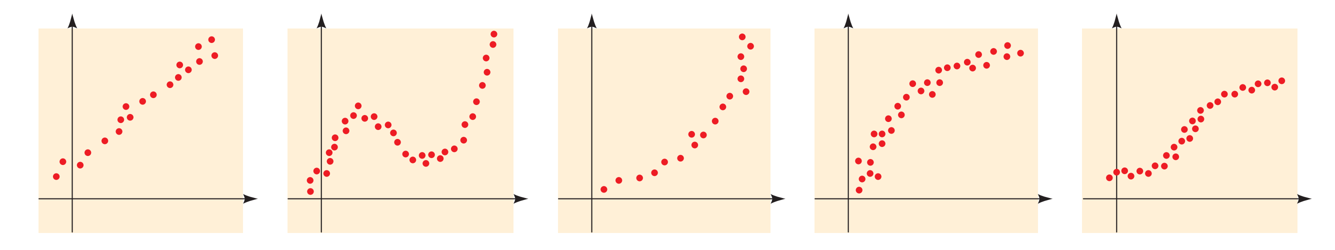


FIGURA 1

Modelado con funciones exponenciales

Si una gráfica de dispersión muestra que los datos aumentan rápidamente podríamos modelar los datos usando un *modelo exponencial*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = Ce^{kx}$$

donde C y k son constantes. En el primer ejemplo modelamos la población mundial mediante un modelo exponencial. Recuerde de la sección 4.6 que la población tiende a aumentar exponencialmente.

EJEMPLO 1 ■ Un modelo exponencial para la población mundial

La tabla 1 da la población del mundo en el siglo XX.

a) Trace una gráfica de dispersión y observe que un modelo lineal no es apropiado.

b) Encuentre una función exponencial que modele el crecimiento poblacional.

c) Trace una gráfica de la función que encontró junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

d) Use el modelo que encontró para predecir la población mundial en el año 2020.

TABLA 1
Población mundial

Año (t)	Población mundial (P en millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 520
1960	3 020
1970	3 700
1980	4 450
1990	5 300
2000	6 060

SOLUCIÓN

a) La gráfica de dispersión se muestra en la figura 2. Los puntos colocados no parecen encontrarse a lo largo de una recta, de modo que el modelo lineal no es apropiado.

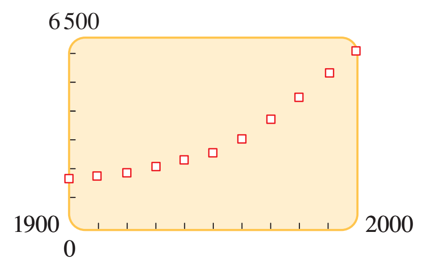


FIGURA 2 Gráfica de dispersión de la población mundial



La población mundial crece exponencialmente.

***b*)** Usando una calculadora graficadora y la instrucción `ExpReg` (vea la figura 3*a*)), obtenemos el modelo exponencial

$$P(t) = (0.0082543)\cdot(1.0137186)^t$$

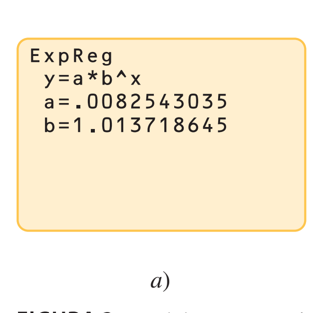
Este es un modelo de la forma $y = Cb^t$. Para convertirlo a la forma $y = Ce^{kt}$ usamos las propiedades de exponenciales y logaritmos como sigue.

$$1.0137186^t = e^{\ln 1.0137186^t} \qquad A = e^{\ln A}$$
$$= e^{t \ln 1.0137186} \qquad \ln A^B = B \ln A$$
$$= e^{0.013625t} \qquad \ln 1.0137186 \approx 0.013625$$

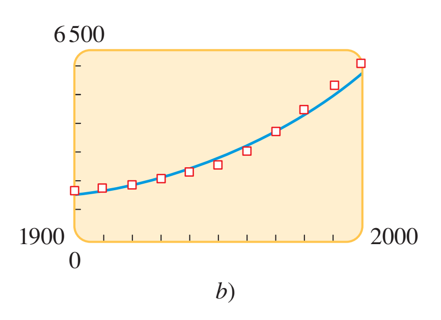
Entonces, podemos escribir el modelo como

$$P(t) = 0.0082543e^{0.013625t}$$

***c*)** De la gráfica de la figura 3*b*) vemos que el modelo parece ajustarse muy bien a los datos. El periodo de crecimiento poblacional relativamente lento se explica con la depresión de la década de 1930 y las dos guerras mundiales.



a)



b)

FIGURA 3 Modelo exponencial para la población mundial

***d*)** El modelo predice que la población mundial en 2020 será

$$P(2020) = 0.0082543e^{(0.013625)(2020)}$$
$$\approx 7\,405\,400\,000$$

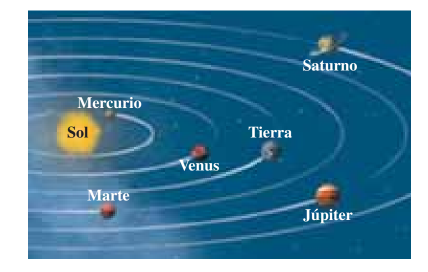
Modelado con funciones de potencia

Si la gráfica de dispersión de los datos que estamos estudiando se parece a la gráfica de $y = ax^2$, $y = ax^{1.32}$, o a alguna otra función de potencia, entonces buscamos un *modelo de potencia*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = ax^n$$

donde a es una constante positiva y n es cualquier número real.

En el siguiente ejemplo buscamos un modelo de potencia para algunos datos astronómicos. En astronomía la distancia en el sistema solar se mide con frecuencia en unidades astronómicas. Una unidad astronómica (UA) es la distancia media de la Tierra al Sol. El *periodo* de un planeta es el tiempo que tarda el planeta en hacer una revolución completa alrededor del Sol (medido en años terrestres). En este ejemplo deducimos la relación sorprendente, descubierta primero por Johannes Kepler (vea la página 808), entre la distancia media de un planeta desde el Sol y su periodo.



EJEMPLO 2 ■ Un modelo de potencia para periodos planetarios

La tabla 2 da la distancia media d de cada planeta desde el Sol en unidades astronómicas y su periodo T en años.

TABLA 2
Distancia y periodos de los planetas

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784
Plutón*	39.507	248.350

*Plutón es un "planeta enano".

a) Trace una gráfica de dispersión. ¿Será apropiado un modelo lineal?

b) Encuentre una función potencia que modele los datos.

c) Trace una gráfica de la función que encontró y la gráfica de dispersión sobre la misma gráfica. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

d) Use el modelo que encontró para calcular el periodo de un asteroide cuya distancia media desde el Sol es 5 AU.

SOLUCIÓN

a) La gráfica de dispersión de la figura 4 indica que los puntos localizados no se encuentran a lo largo de una recta, de modo que el modelo lineal no es apropiado.

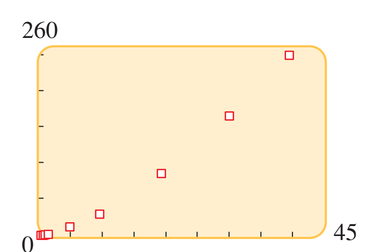


FIGURA 4 Gráfica de dispersión de datos planetarios

b) Usando una calculadora graficadora y el comando `PwrReg` (vea la figura 5*a*)) obtenemos el modelo de potencia

$$T = 1.000396d^{1.49966}$$

Si redondeamos ambos coeficientes y el exponente a tres cifras significativas podemos escribir el modelo como

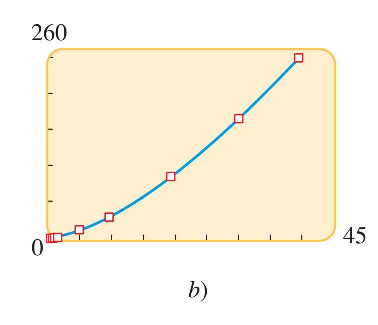
$$T = d^{1.5}$$

Esta es la relación descubierta por Kepler (vea la página 808). Sir Isaac Newton (página 911) usó posteriormente su ley de gravitación para deducir teóricamente esta relación, dando así una fuerte evidencia científica de que la ley de gravitación debe ser verdadera.

c) La gráfica se muestra en la figura 5(b). El modelo parece ajustar muy bien los datos.

```
PwrReg
 y=a*x^b
 a=1.000396048
 b=1.499661718
```

a)



b)

FIGURA 5 Modelo de potencia para los datos planetarios

d) En este caso $d = 5$ AU, de modo que nuestro modelo da

$$T = 1.00039 \cdot 5^{1.49966} \approx 11.22$$

El periodo del asteroide es aproximadamente 11.2 años. ■

Linealización de datos

Hemos utilizado la forma de una gráfica de dispersión para determinar qué tipo de modelo usar: lineal, exponencial o de potencia. Esto funciona bien si los puntos de los datos se encuentran sobre una recta, pero es difícil distinguir una gráfica de dispersión que sea exponencial de una que requiera un modelo de potencia. Por tanto, para ayudar a determinar qué modelo usar podemos *linealizar* los datos, es decir, aplicar una fun-

ción que "enderece" la gráfica de dispersión. La inversa de la función de linealización es entonces un modelo apropiado. A continuación describimos cómo linealizar datos que puedan ser modelados por funciones exponenciales o de potencia.

Linealización de datos exponenciales

Si sospechamos que los puntos de los datos (x, y) se encuentran sobre una curva exponencial $y = Ce^{kx}$, entonces los puntos

$$(x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Podemos ver esto a partir de los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln Ce^{kx} && \text{Suponga que } y = Ce^{kx} \text{ y tome ln} \\ &= \ln e^{kx} + \ln C && \text{Propiedad de ln} \\ &= kx + \ln C && \text{Propiedad de ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de x, sea $Y = \ln y$ y $A = \ln C$; por tanto

$$Y = kx + A$$

TABLA 3
Datos de la población mundial

t	Población mundial P (en millones)	$\ln P$
1900	1650	21.224
1910	1750	21.283
1920	1860	21.344
1930	2070	21.451
1940	2300	21.556
1950	2520	21.648
1960	3020	21.829
1970	3700	22.032
1980	4450	22.216
1990	5300	22.391
2000	6060	22.525

Aplicamos esta técnica a los datos de población mundial (t, P) para obtener los puntos $(t, \ln P)$ en la tabla 3. La gráfica de dispersión de $(t, \ln P)$ de la figura 6, llamada **gráfica semi-log**, muestra que los datos alineados están aproximadamente sobre una recta, de modo que el modelo exponencial debe ser apropiado.

FIGURA 6 Gráfica semi-log de la tabla 3

Linealización de datos de potencia

Si sospechamos que los puntos de los datos (x, y) están sobre una curva de potencia $y = ax^n$, entonces los puntos

$$(\ln x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Podemos ver esto a partir de los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln ax^n && \text{Suponga que } y = ax^n \text{ y tome ln} \\ &= \ln a + \ln x^n && \text{Propiedad de ln} \\ &= \ln a + n \ln x && \text{Propiedad de ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de $\ln x$, sea $Y = \ln y$, $X = \ln x$ y $A = \ln a$; por tanto

$$Y = nX + A$$

TABLA 4
Tabla log-log

$\ln d$	$\ln T$
−0.94933	−1.4230
−0.32435	−0.48613
0	0
0.42068	0.6318
1.6492	2.4733
2.2556	3.3829
2.9544	4.4309
3.4041	5.1046
3.6765	5.5148

Aplicamos esta técnica a los datos planetarios (d, T) en la tabla 2 para obtener los puntos $(\ln d, \ln T)$ en la tabla 4. La gráfica de dispersión $(\ln d, \ln T)$ en la figura 7, llamada **gráfica log-log**, muestra que los datos se encuentran sobre una recta, de modo que el modelo de potencia parece apropiado.

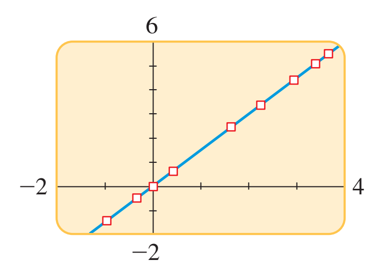


FIGURA 7 Gráfica log-log de los datos de la tabla 4

¿Modelo exponencial o de potencia?

Suponga que una gráfica de dispersión de los puntos de los datos (x, y) muestra un rápido aumento. ¿Debemos usar una función exponencial o una función de potencia para modelar los datos? Para ayudarnos a determinarlo trazamos dos gráficas de dispersión: una para los puntos $(x, \ln y)$ y la otra para los puntos $(\ln x, \ln y)$. Si la primera gráfica de dispersión parece encontrarse a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo exponencial; si la segunda gráfica parece encontrarse a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo de potencia.

EJEMPLO 3 ■ ¿Modelo exponencial o de potencia?

Los puntos de los datos (x, y) se muestran en la tabla 5.

TABLA 5

x	y
1	2
2	6
3	14
4	22
5	34
6	46
7	64
8	80
9	102
10	130

a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

b) Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Será apropiada una función exponencial o una función de potencia para modelar esta información?

d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

SOLUCIÓN

a) La gráfica de dispersión de los datos se muestra en la figura 8.

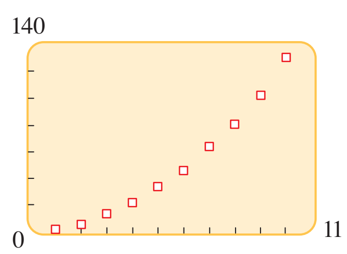


FIGURA 8

b) Usamos los valores de la tabla 6 para trazar las gráficas de dispersión en las figuras 9 y 10.

TABLA 6

x	$\ln x$	$\ln y$
1	0	0.7
2	0.7	1.8
3	1.1	2.6
4	1.4	3.1
5	1.6	3.5
6	1.8	3.8
7	1.9	4.2
8	2.1	4.4
9	2.2	4.6
10	2.3	4.9

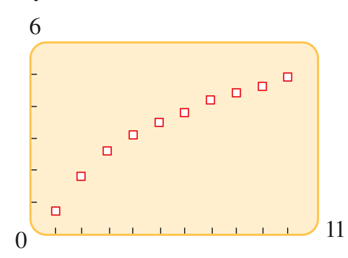


FIGURA 9 Gráfica semi-log

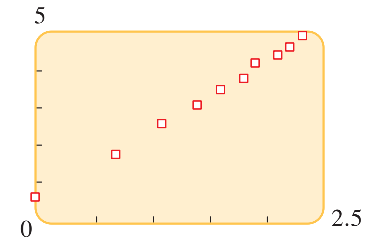


FIGURA 10 Gráfica log-log

c) La gráfica de dispersión de $(x, \ln y)$ de la figura 9 no parece ser lineal, por lo que el modelo exponencial no es apropiado. Por otra parte, la gráfica de dispersión de $(\ln x, \ln y)$ de la figura 10 es muy cercanamente lineal, de modo que un modelo de potencia es apropiado.

d) Usando la instrucción `PwrReg` en una calculadora graficadora encontramos que la función de potencia que mejor ajusta el punto de datos es

$$y = 1.85x^{1.82}$$

En la figura 11 se muestran la gráfica de esta función y los puntos de los datos originales. ■

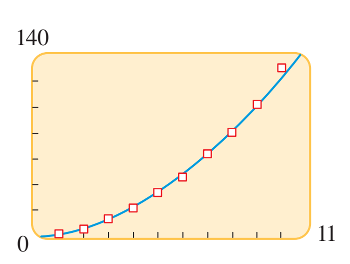


FIGURA 11

Antes de que las calculadoras graficadoras y el software de estadística se hicieran comunes, era frecuente que los modelos exponenciales y de potencia para datos se construyeran al encontrar primero un modelo lineal para los datos linealizados. Luego se encontraba el modelo para los datos reales al tomar exponenciales. Por ejemplo, si encontramos que $\ln y = A \ln x + B$, entonces al tomar exponenciales obtenemos el modelo $y = e^B \cdot e^{A \ln x}$, o $y = Cx^A$ (donde $C = e^B$). Se usaba un papel de gráficas especial llamado "papel log" o "papel log-log" para facilitar este proceso.

Modelado con funciones logísticas

Un modelo logístico de crecimiento es una función de la forma

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

donde a, b, y c son constantes positivas. Se usan funciones logísticas para modelar poblaciones donde el crecimiento está restringido por recursos disponibles. (Vea los ejercicios 27-30 de la sección 4.2.)

EJEMPLO 4 ■ Abastecer de bagres un estanque

Buena parte del pescado que se vende hoy en día en los supermercados se cría en granjas piscícolas comerciales, no se pescan en estado silvestre. En un estanque en una de estas granjas se introducen inicialmente 1 000 bagres y la población de peces se muestrea entonces a intervalos de 15 semanas para estimar su tamaño. Los datos de la población se presentan en la tabla 7.

TABLA 7

Semana	Bagres
0	1000
15	1500
30	3300
45	4400
60	6100
75	6900
90	7100
105	7800
120	7900

***a*)** Encuentre un modelo apropiado para los datos.

***b*)** Haga una gráfica de dispersión de los datos y trace la gráfica del modelo que encontró en el inciso *a*) en la gráfica de dispersión.

***c*)** ¿Cómo predice que el modelo que la población de peces cambiará con el tiempo?

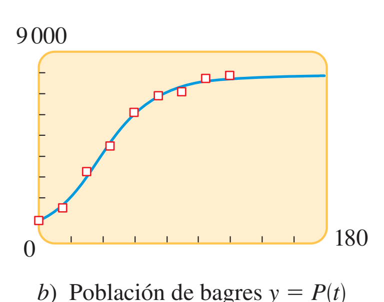
SOLUCIÓN

***a*)** Dado que la población de bagres está restringida por su hábitat (el estanque), un modelo logístico es apropiado. Usando la instrucción `Logistic` en una calculadora (vea la figura 12*a*)), encontramos el siguiente modelo para la población $P(t)$ de bagres:

$$P(t) = \frac{7925}{1 + 7.7e^{-0.052t}}$$

```
Logistic
 y=c/(1+ae^(-bx))
 a=7.69477503
 b=.0523020764
 c=7924.540299
```

a)



b) Población de bagres $y = P(t)$

FIGURA 12

***b*)** La gráfica de dispersión y la curva logística se muestran en la figura 12*b*).

***c*)** De la gráfica de P en la figura 12*b*), vemos que la población de bagres aumenta rápidamente hasta aproximadamente $t = 80$ semanas. A partir de ahí el crecimiento se reduce y alrededor de $t = 120$ semanas, la población se nivela y queda más o menos constante en ligeramente más de 7 900. ■

El comportamiento que muestra la población de bagres en el ejemplo 4 es típico de un crecimiento logístico. Después de una fase de crecimiento rápido, la población se aproxima a un nivel constante llamado **capacidad de carga** del entorno. Esto ocurre porque cuando $t \to \infty$, tenemos $e^{-bt} \to 0$ (vea la sección 4.2), y entonces

$$P(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}} \longrightarrow \frac{c}{1 + 0} = c$$

Por tanto, la capacidad de carga es c.

PROBLEMAS

1. **Población de Estados Unidos** La constitución de Estados Unidos exige un censo cada 10 años. Los datos del censo para 1790-2000 se dan en la tabla siguiente.

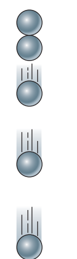
   a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

   b) Use calculadora para encontrar un modelo exponencial para los datos.

   c) Use su modelo para predecir la población en el censo de 2020.

   d) Use su modelo para estimar la población en 1965.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1790	3.9	1870	38.6	1950	151.3
1800	5.3	1880	50.2	1960	179.3
1810	7.2	1890	63.0	1970	203.3
1820	9.6	1900	76.2	1980	226.5
1830	12.9	1910	92.2	1990	248.7
1840	17.1	1920	106.0	2000	281.4
1850	23.2	1930	123.2	2010	308.7
1860	31.4	1940	132.2		



Tiempo (s)	Distancia (m)
0.1	0.048
0.2	0.197
0.3	0.441
0.4	0.882
0.5	1.227
0.6	1.765
0.7	2.401
0.8	3.136
0.9	3.969
1.0	4.902

2. **Una pelota en caída** En un experimento de física se deja caer una pelota desde una altura de 5 metros. Los estudiantes registran la distancia que cae la pelota a cada décimo de segundo. (Esto puede hacerse usando una cámara y una luz estroboscópica.) Los datos se muestran en el margen.

   a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

   b) Use una calculadora para encontrar un modelo de potencia.

   c) Use su modelo para predecir la distancia que caerá la pelota en 3 segundos.

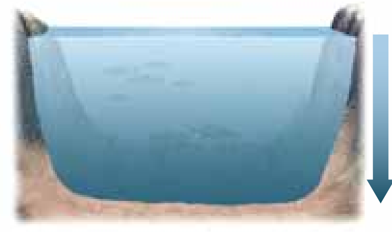
3. **Vida media del yodo radiactivo** Un estudiante está tratando de determinar la vida media del yodo radiactivo 131. Mide la cantidad de yodo 131 en una solución de muestra cada 8 horas. Sus datos se muestran en la tabla del margen.

   a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

   b) Use calculadora para encontrar un modelo exponencial.

   c) Use su modelo para encontrar la vida media del yodo 131.

Tiempo (h)	Cantidad de ^{131}I(g)
0	4.80
8	4.66
16	4.51
24	4.39
32	4.29
40	4.14
48	4.04



La intensidad de la luz disminuye exponencialmente con la profundidad.

4. **Ley de Beer-Lambert** Cuando pasa luz solar por las aguas de lagos y océanos, la luz es absorbida y, cuanto mayor sea la profundidad a la que penetre, más disminuye su intensidad. La intensidad I de la luz a una profundidad x está dada por la ley Beer-Lambert:

$$I = I_0 e^{-kx}$$

donde I_0 es la intensidad de luz en la superficie y k es una constante que depende de la oscuridad del agua (vea la página 366). Un biólogo usa un fotómetro para investigar la penetración de luz en un lago del norte, obteniendo los datos de la tabla.

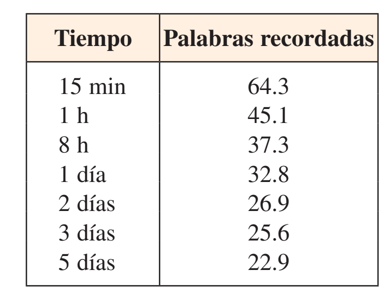
a) Use una calculadora graficadora para encontrar una función exponencial de la forma dada por la ley de Beer-Lambert para modelar estos datos. ¿Cuál es la intensidad de luz I_0 en la superficie en este día, y cuál es la constante k de "oscuridad" para este lago? [*Sugerencia:* si su calculadora da una función de la forma $I = ab^x$, convierta esto a la forma que desee, usando las identidades $b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x \ln b}$. Vea el ejemplo 1*b*).]

b) Haga una gráfica de dispersión de los datos y trace la gráfica de la función que encontró en el inciso *a*) en su gráfica de dispersión.

c) Si la intensidad de luz desciende por debajo de 0.15 lumen (lm), cierta especie de algas no puede sobrevivir porque la fotosíntesis es imposible. Use su modelo del inciso *a*) para determinar la profundidad a la cual hay insuficiente luz para sostener estas algas.

Profundidad (pies)	Intensidad de luz (lm)	Profundidad (pies)	Intensidad de luz (lm)
5	13.0	25	1.8
10	7.6	30	1.1
15	4.5	35	0.5
20	2.7	40	0.3

5. Experimentos con curvas "del olvido" Todos estamos familiarizados con la sensación de olvidar algo. Datos que entendimos con claridad en el momento en que los aprendimos a veces se desvanecen de la memoria cuando hacemos un examen final. Unos psicólogos han propuesto varias formas de modelar este proceso. Uno de estos modelos es la ley de Ebbinghaus del olvido, que se describe en la página 356. Otros modelos usan funciones exponenciales o logarítmicas. Para crear su propio modelo una psicóloga realiza un experimento en un grupo de voluntarios a quienes les pide memorizar una lista de 100 palabras relacionadas. Entonces, ella prueba cuántas de estas palabras pueden recordar después de varios periodos. Los resultados promedio para el grupo se muestran en la tabla.



Tiempo	Palabras recordadas
15 min	64.3
1 h	45.1
8 h	37.3
1 día	32.8
2 días	26.9
3 días	25.6
5 días	22.9

a) Use una calculadora graficadora para encontrar una función de *potencia* de la forma $y = at^b$ que modele el número promedio de palabras y que los voluntarios recuerdan después de t horas. Luego encuentre una función *exponencial* de la forma $y = ab^t$ para modelar los datos.

b) Haga una gráfica de dispersión de los datos y trace la gráfica de las dos funciones que encontró en el inciso *a*) en su gráfica de dispersión.

c) ¿Cuál de las dos funciones parece dar el mejor modelo?

6. Modelar una relación entre especies y área La tabla siguiente da las áreas de varias cuevas de la región central de México y el número de especies de murciélagos que viven en cada cueva.*



El número de especies diferentes de murciélagos en una cueva está relacionado con el tamaño de la cueva por una función de potencia.

a) Encuentre una función de potencia que modele los datos.

b) Trace una gráfica de la función que encontró en el inciso *a*) y una gráfica de dispersión de los datos en la misma gráfica. ¿Se ajusta bien el modelo a los datos?

c) La cueva llamada El Sapo, cerca de Puebla, México, tiene una superficie $A = 205$ m^2. Use el modelo para estimar el número de especies de murciélagos que esperaría encontrar en esa cueva.

Cueva	Área (m^2)	Número de especies
La Escondida	18	1
El Escorpión	19	1
El Tigre	58	1
Misión Imposible	60	2
San Martín	128	5
El Arenal	187	4
La Ciudad	344	6
Virgen	511	7

*A. K. Brunet y R. A. Medallin, "The Species-Area Relationship in Bat Assemblages of Tropical Caves". *Journal of Mammalogy, 82*(4): 1114-1122, 2001.

7. Emisiones de escapes de autos Un estudio realizado por la U.S. Office of Science and Technology en 1972 estimó el costo de reducir emisiones de automóviles en ciertos porcentajes. Encuentre un modelo exponencial que capte la tendencia de "rendimientos de reducción" de estos datos mostrados en la tabla siguiente.

Reducción en emisiones (%)	Costo por auto ($)
50	45
55	55
60	62
65	70
70	80
75	90
80	100
85	200
90	375
95	600

8. ¿Modelo exponencial o de potencia? En la tabla siguiente se muestran los puntos de los datos (x, y).

a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

b) Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Qué es más apropiado para modelar estos datos: una función exponencial o una función de potencia?

d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
y	0.08	0.12	0.18	0.25	0.36	0.52	0.73	1.06

9. ¿Modelo exponencial o de potencia? Los puntos de los datos (x, y) se muestran en la tabla del margen.

a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

b) Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Qué es más apropiado para modelar estos datos: una función exponencial o una función de potencia?

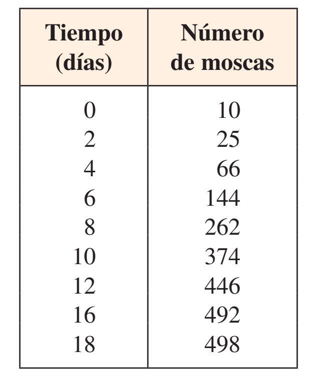
d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
y	29	82	151	235	330	430	546	669	797

10. Crecimiento logístico de la población La tabla y la gráfica de dispersión dan la población de moscas negras en un recipiente cerrado de laboratorio en un periodo de 18 días.

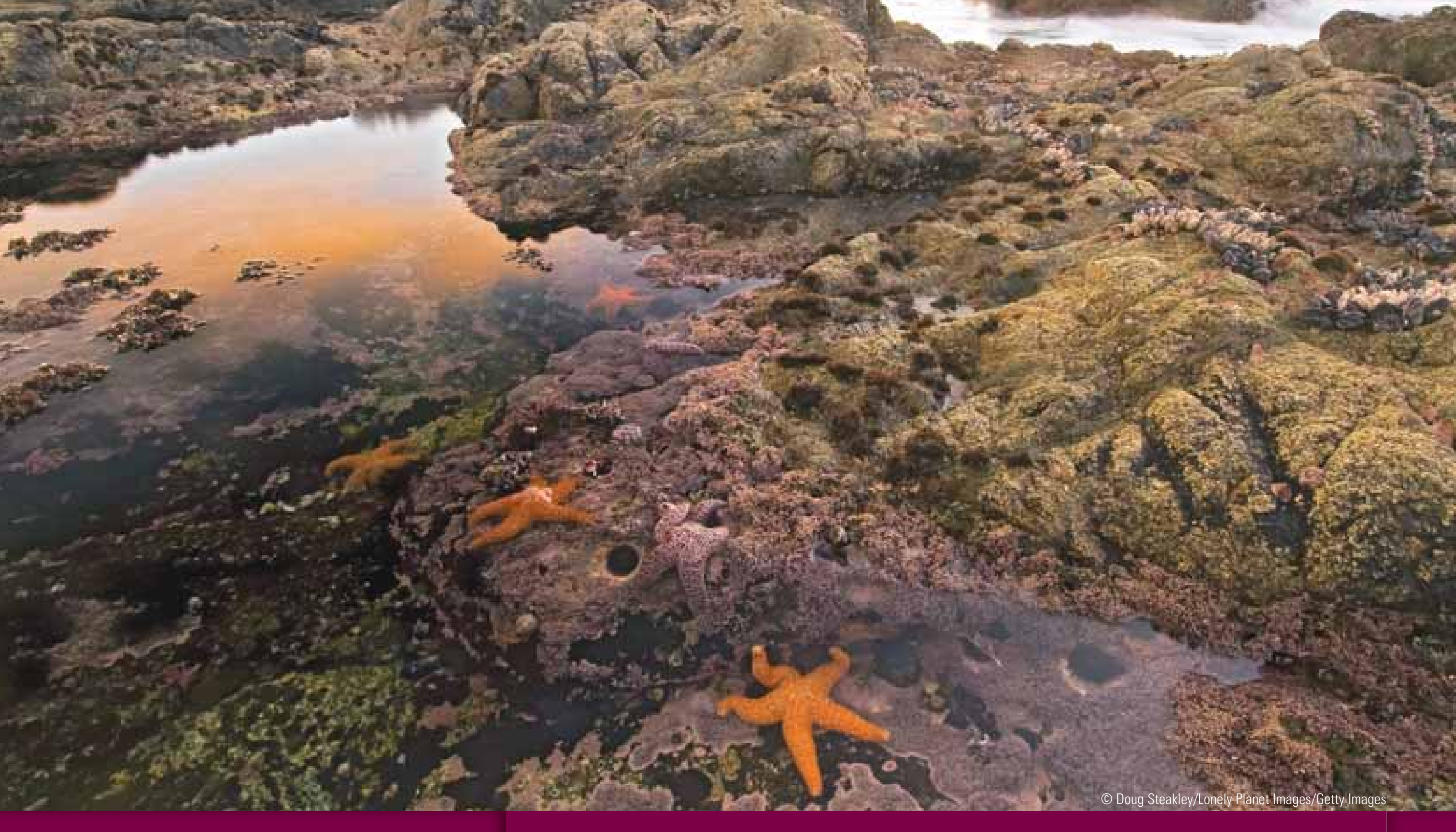
a) Use la instrucción `Logistic` de su calculadora para encontrar un modelo logístico para estos datos.

b) Use el modelo para estimar el tiempo cuando hubo 400 moscas en el recipiente.



Tiempo (días)	Número de moscas
0	10
2	25
4	66
6	144
8	262
10	374
12	446
16	492
18	498

N
500
400
Número de moscas
300
200
100
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 t
Días



© Doug Steakley/Lonely Planet Images/Getty Images

5 Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria

En este capítulo y el siguiente presentamos dos maneras diferentes pero equivalentes de ver a las funciones trigonométricas. Una manera es verlas como *funciones de números reales* (capítulo 5); la otra es verlas como *funciones de ángulos* (capítulo 6). En trigonometría los dos métodos son independientes entre sí, por lo que cualquiera de los capítulos 5 y 6 se puede estudiar primero. Las aplicaciones de la trigonometría son numerosas, incluyendo el procesamiento de señales, la codificación digital de música y video, para encontrar las distancias a las estrellas, producir tomografías para imágenes médicas y muchas otras. Estas aplicaciones son muy diversas y necesitamos estudiar los dos métodos trigonométricos ya que ambos métodos son necesarios para las diferentes aplicaciones.

Una de las principales aplicaciones de la trigonometría que estudiamos en este capítulo es el movimiento periódico. Si usted se ha subido a una rueda de la fortuna conoce el movimiento periódico, es decir, un movimiento que se repite una y otra vez. El movimiento periódico es común en la naturaleza. Considere el diario amanecer y puesta de Sol, la variación diaria de los niveles de las mareas o las vibraciones de una hoja en el viento, y muchas otras situaciones. En este capítulo veremos cómo se utilizan las funciones trigonométricas para modelar el movimiento periódico.

5.1 LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

■ La circunferencia unitaria ■ Puntos terminales en la circunferencia unitaria ■ El número de referencia

En esta sección exploramos algunas propiedades de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Estas propiedades se usan en la siguiente sección para definir las funciones trigonométricas.

■ La circunferencia unitaria

El conjunto de puntos a una distancia 1 del origen es una circunferencia de radio 1 (vea la figura 1). En la sección 1.9 aprendimos que la ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

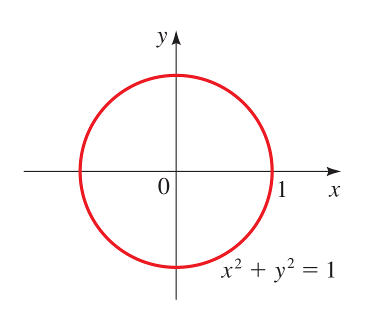


FIGURA 1 La circunferencia unitaria

CIRCUNFERENCIA UNITARIA

La **circunferencia unitaria** es de radio 1 con centro en el origen en el plano *xy*. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Las circunferencias se estudian en la sección 1.9 página 97.

EJEMPLO 1 ■ Un punto en la circunferencia unitaria

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ está en la circunferencia unitaria.

SOLUCIÓN Necesitamos demostrar que este punto satisface la ecuación de la circunferencia unitaria, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Dado que

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

P está en la circunferencia unitaria.

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Colocar un punto sobre la circunferencia unitaria

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en la circunferencia unitaria en el cuarto cuadrante. Encuentre su coordenada *y*.

SOLUCIÓN Dado que el punto está en la circunferencia unitaria tenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

Puesto que el punto está en el cuarto cuadrante, su coordenada *y* debe ser negativa, de modo que $y = -\frac{1}{2}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

■ Puntos terminales en la circunferencia unitaria

Suponga que *t* es un número real. Si $t \geq 0$, marcaremos una distancia *t* a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria a la de las manecillas de un reloj. Si $t < 0$, marcamos una distancia $|t|$ en dirección de las manecillas del reloj (figura 2). De esta forma llegamos al punto $P(x, y)$ en

la circunferencia unitaria. El punto $P(x, y)$ obtenido de esta forma se llama **punto terminal** determinado por el número real t.

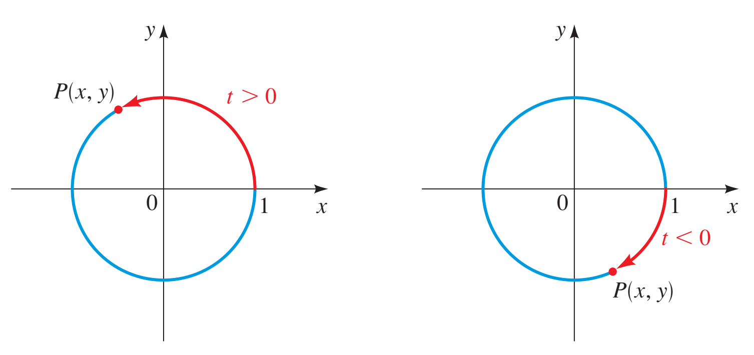
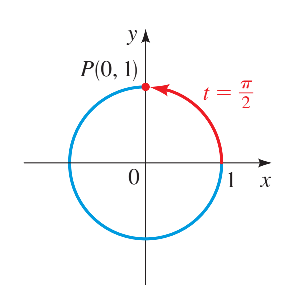


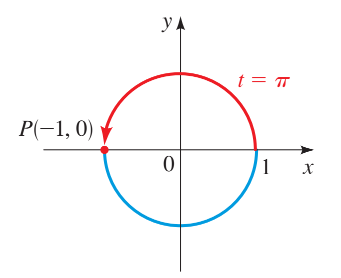
FIGURA 2

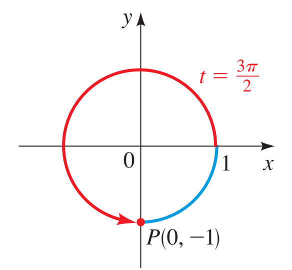
a) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t > 0$

b) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t < 0$

La circunferencia unitaria es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto inicia en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj en toda la vuelta del círculo unitario y regresa a $(1, 0)$, viaja una distancia de 2π. Para moverse la mitad alrededor del círculo viaja una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$. Para moverse un cuarto de la distancia alrededor del círculo viaja una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$. ¿Dónde termina el punto cuando viaja estas distancias a lo largo del círculo? De la figura 3 vemos, por ejemplo, que cuando se viaja una distancia de π iniciando en $(1, 0)$, su punto terminal es $(-1, 0)$.







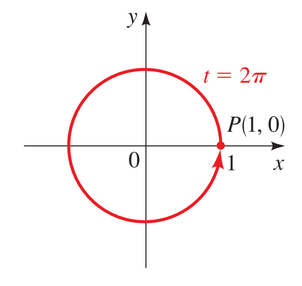


FIGURA 3 Puntos terminales determinados por $t = \frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ y 2π

EJEMPLO 3 ■ Encontrar puntos terminales

Encuentre el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por cada número real t.

a) $t = 3\pi$ ***b***) $t = -\pi$ ***c***) $t = -\dfrac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN De la figura 4 obtenemos lo siguiente:

a) El punto terminal determinado por 3π es $(-1, 0)$.

b) El punto terminal determinado por $-\pi$ es $(-1, 0)$.

c) El punto terminal determinado por $-\pi/2$ es $(0, -1)$.

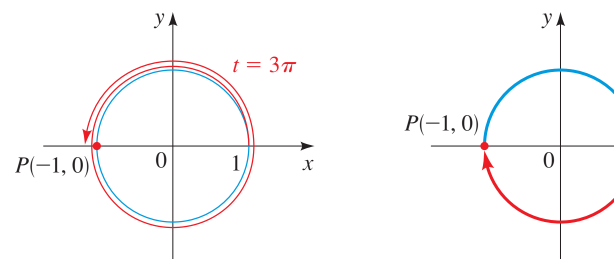


FIGURA 4

Observe que valores diferentes de t pueden determinar el mismo punto terminal.

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t = \pi/4$ es la misma distancia de $(1, 0)$ de que $(0, 1)$ a lo largo de la circunferencia unitaria (vea la figura 5).

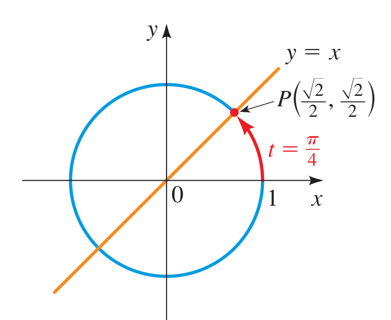


FIGURA 5

Dado que la circunferencia unitaria es simétrica respecto a la recta $y = x$, se deduce que P se encuentra sobre la recta $y = x$. Por tanto, P es el punto de intersección (en el primer cuadrante) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x$. Al sustituir x por y en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Dado que P está en el primer cuadrante, $x = 1/\sqrt{2}$ y puesto que $y = x$, tenemos también $y = 1/\sqrt{2}$. Entonces, el punto terminal determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se pueden usar métodos similares para encontrar los puntos terminales determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ (vea los ejercicios 61 y 62). La tabla 1 y la figura 6 dan los puntos terminales para algunos valores especiales de t.

TABLA 1

t	Punto terminal determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

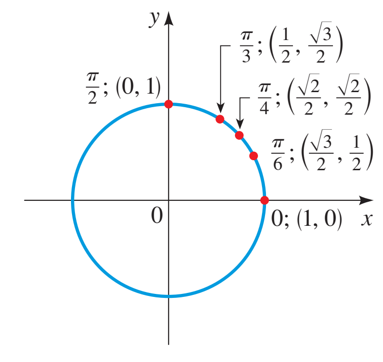


FIGURA 6

EJEMPLO 4 ■ Encontrar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

a) $t = -\frac{\pi}{4}$ ***b)*** $t = \frac{3\pi}{4}$ ***c)*** $t = -\frac{5\pi}{6}$

SOLUCIÓN

***a*)** Sea P el punto terminal determinado por $-\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la figura 7*a*) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en y. Dado que P está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal es $P(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

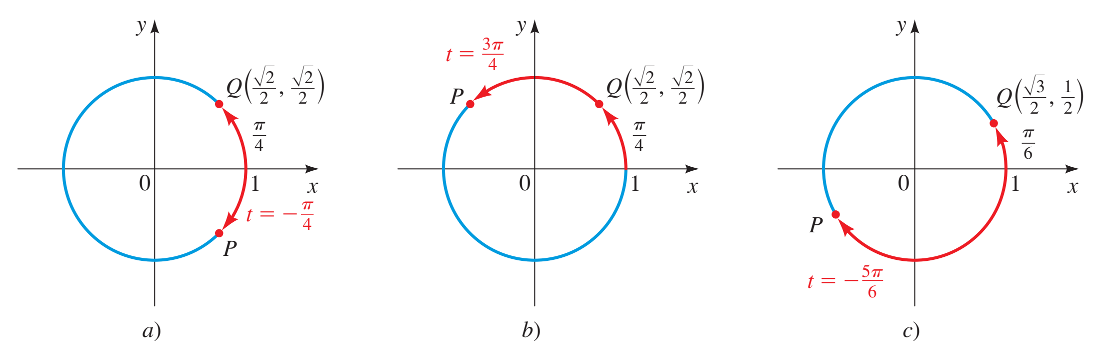


FIGURA 7

***b*)** Sea P el punto terminal determinado por $3\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la figura 7*b*) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en x. Dado que P está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal es $P(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

***c*)** Sea P el punto terminal determinado por $-5\pi/6$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/6$. De la figura 7*c*) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo. Dado que P está en el tercer cuadrante, sus dos coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal $P(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$.


Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

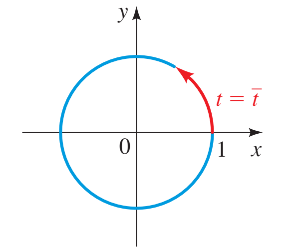
El número de referencia

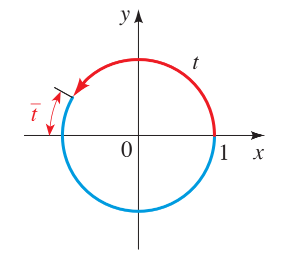
De los ejemplos 3 y 4 vemos que para encontrar un punto terminal en cualquier cuadrante sólo necesitamos conocer el punto terminal "correspondiente" en el primer cuadrante. Usamos la idea del *número de referencia* para ayudarnos a encontrar puntos terminales.

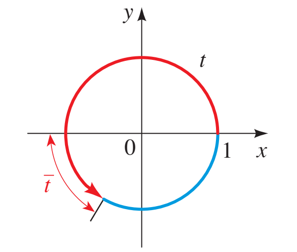
NÚMERO DE REFERENCIA

Sea t un número real. El **número de referencia $\bar{t}$** asociado con t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

La figura 8 muestra que para encontrar el número de referencia $\bar{t}$, es útil conocer el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t. Si el punto terminal se encuentra en el primer cuadrante o en el cuarto cuadrante, donde x es positiva, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *positivo*. Si se encuentra en el segundo y en el tercer cuadrantes, donde x es negativa, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *negativo*.







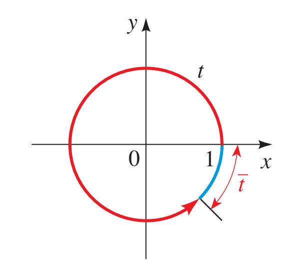


FIGURA 8 El número de referencia $\bar{t}$ para t

EJEMPLO 5 ■ Encontrar números de referencia

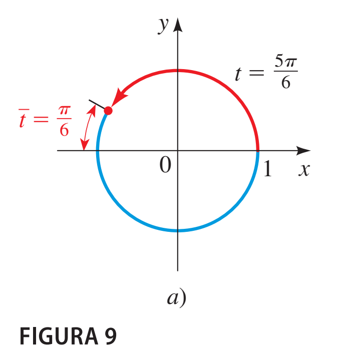
Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

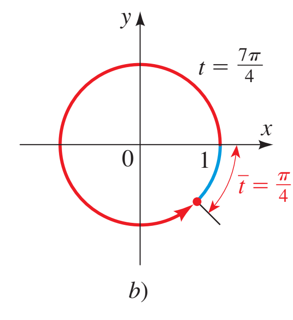
a) $t = \frac{5\pi}{6}$ ***b)*** $t = \frac{7\pi}{4}$ ***c)*** $t = -\frac{2\pi}{3}$ ***d)*** $t = 5.80$

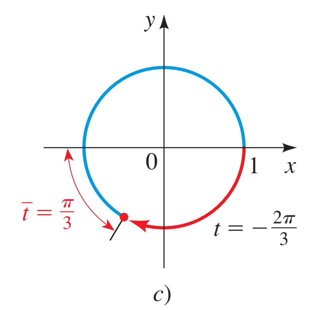
SOLUCIÓN De la figura 9 encontramos los números de referencia como sigue.

a) $\bar{t} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ***b)*** $\bar{t} = 2\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$

c) $\bar{t} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ***d)*** $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$







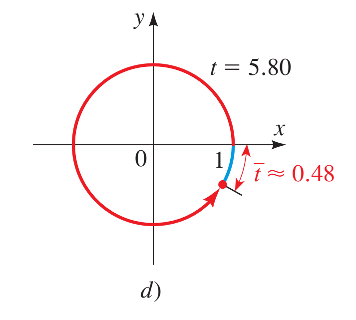


FIGURA 9

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

USO DE NÚMEROS DE REFERENCIA PARA ENCONTRAR PUNTOS TERMINALES

Para encontrar el punto terminal P determinado por cualquier valor de t, seguimos los pasos siguientes:

1. Encuentre el número de referencia $\bar{t}$.
2. Encuentre el punto terminal $Q(a, b)$ determinado por $\bar{t}$.
3. El punto terminal determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se escogen de acuerdo con el cuadrante en el que se encuentre este punto terminal.

EJEMPLO 6 ■ Uso de números de referencia para encontrar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

a) $t = \frac{5\pi}{6}$ ***b)*** $t = \frac{7\pi}{4}$ ***c)*** $t = -\frac{2\pi}{3}$

SOLUCIÓN Los números de referencia asociados con estos valores de t se encontraron en el ejemplo 5.

a) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, que determina el punto terminal $(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$ de la tabla 1. Dado que el punto terminal determinado por t está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/4$, que determina el punto terminal $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ de la tabla 1. Dado que el punto terminal está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

c) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/3$, que determina el punto terminal $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ de la tabla 1. Dado que el punto terminal está determinado por t en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Dado que el perímetro de la circunferencia unitaria es 2π, el punto terminal determinado por t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar 2π cualquier número de veces sin cambiar el punto terminal determinado por t. Usamos esta observación en el siguiente ejemplo para encontrar puntos terminales para t grandes.

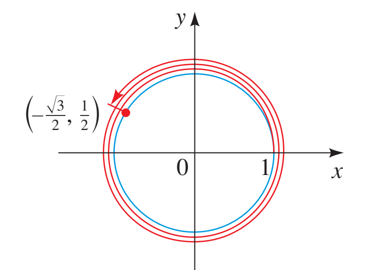


FIGURA 10

EJEMPLO 7 ■ Encontrar el punto terminal para *t* grande

Encuentre el punto terminal determinado por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

SOLUCIÓN Dado que

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto terminal de t es el mismo que el de $5\pi/6$ (esto es, restamos 4π). Por tanto, por el ejemplo 6*a*) el punto terminal es $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$. (Vea la figura 10.)

Ahora intente realizar el ejercicio 47

5.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. *a*) La circunferencia unitaria es la circunferencia con centro en ________ con radio ________.

***b*)** La ecuación de la circunferencia unitaria es ____________.

***c*)** Suponga que el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria. Encuentre la coordenada faltante:

i) $P(1, \;\square\;)$ *ii*) $P(\;\square\;, 1)$

iii) $P(-1, \;\square\;)$ *iv*) $P(\;\square\;, -1)$

2. *a*) Si marcamos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria a la de las manecillas del reloj llegamos al punto ______________ determinado por t.

***b*)** Los puntos terminales determinados por $\pi/2$, π, $-\pi/2$, 2π son ________, ________, ________ y ________, respectivamente.

HABILIDADES

3–8 ■ Puntos en la circunferencia unitaria Demuestre que el punto está en la circunferencia unitaria.

3. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **4.** $\left(-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

5. $\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ **6.** $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$

7. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **8.** $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$

9–14 ■ Puntos en la circunferencia unitaria Encuentre la coordenada faltante de P, usando el hecho de que P se encuentra en la circunferencia unitaria en el cuadrante dado.

Coordenadas	Cuadrante
9. $P(-\frac{3}{5}, \;\square\;)$	III
10. $P(\;\square\;, -\frac{7}{25})$	IV
11. $P(\;\square\;, \frac{1}{3})$	II

Coordenadas	Cuadrante
12. $P(\frac{2}{5}, \;\square\;)$	I
13. $P(\;\square\;, -\frac{2}{7})$	IV
14. $P(-\frac{2}{3}, \;\square\;)$	II

15–20 ■ Puntos en la circunferencia unitaria El punto P está en la circunferencia unitaria. Encuentre $P(x, y)$ a partir de la información dada.

15. La coordenada x de P es $\frac{5}{13}$, y la coordenada y es negativa.

16. La coordenada y de P es $-\frac{3}{5}$, y la coordenada x es positiva.

17. La coordenada y de P es $\frac{2}{3}$ y la coordenada x es negativa.

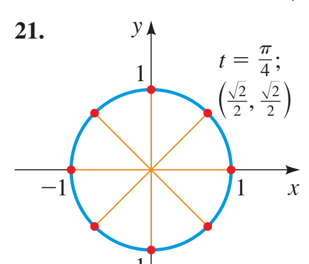
18. La coordenada x de P es positiva y la coordenada y de P es $-\sqrt{5}/5$.

19. La coordenada x de P es $-\sqrt{2}/3$ y P está abajo del eje x.

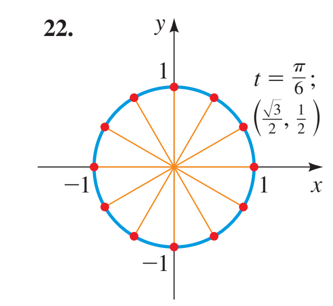
20. La coordenada x de P es $-\frac{2}{5}$ y P está arriba del eje x.

21–22 ■ Puntos terminales Encuentre t y el punto terminal determinado por t para cada punto de la figura. En el ejercicio 21, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; al igual que en el ejercicio 22, t aumenta en incrementos de $\pi/6$.

21.



22.



23–36 ■ Puntos terminales Encuentre el punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el valor dado de t.

23. $t = 4\pi$ **24.** $t = -3\pi$

25. $t = \dfrac{3\pi}{2}$ **26.** $t = \dfrac{5\pi}{2}$

27. $t = -\dfrac{\pi}{6}$ **28.** $t = \dfrac{7\pi}{6}$

29. $t = \dfrac{5\pi}{4}$ **30.** $t = \dfrac{4\pi}{3}$

31. $t = -\dfrac{7\pi}{6}$ **32.** $t = \dfrac{5\pi}{3}$

33. $t = -\dfrac{7\pi}{4}$ **34.** $t = -\dfrac{4\pi}{3}$

35. $t = -\dfrac{3\pi}{4}$ **36.** $t = \dfrac{11\pi}{6}$

37–40 ■ Números de referencia Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

37. ***a)*** $t = \dfrac{4\pi}{3}$ ***b)*** $t = \dfrac{5\pi}{3}$

c) $t = -\dfrac{7\pi}{6}$ ***d)*** $t = 3.5$

38. ***a)*** $t = 9\pi$ ***b)*** $t = -\dfrac{5\pi}{4}$

c) $t = \dfrac{25\pi}{6}$ ***d)*** $t = 4$

39. ***a)*** $t = \dfrac{5\pi}{7}$ ***b)*** $t = -\dfrac{7\pi}{9}$

c) $t = -3$ ***d)*** $t = 5$

40. ***a)*** $t = \dfrac{11\pi}{5}$ ***b)*** $t = -\dfrac{9\pi}{7}$

c) $t = 6$ ***d)*** $t = -7$

41–54 ■ Puntos terminales y números de referencia Encuentre ***a)*** el número de referencia para cada valor de t y ***b)*** el punto terminal determinado por t.

41. $t = \dfrac{11\pi}{6}$ **42.** $t = \dfrac{2\pi}{3}$

43. $t = -\dfrac{4\pi}{3}$ **44.** $t = \dfrac{5\pi}{3}$

45. $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **46.** $t = -\dfrac{7\pi}{6}$

47. $t = \dfrac{13\pi}{4}$ **48.** $t = \dfrac{13\pi}{6}$

49. $t = \dfrac{41\pi}{6}$ **50.** $t = \dfrac{17\pi}{4}$

51. $t = -\dfrac{11\pi}{3}$ **52.** $t = \dfrac{31\pi}{6}$

53. $t = \dfrac{16\pi}{3}$ **54.** $t = -\dfrac{41\pi}{4}$

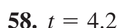
55–58 ■ Puntos terminales En la figura que se muestra a continuación se presenta la gráfica de la circunferencia unitaria. Utilice la figura para encontrar el punto terminal determinado por el número real t, con coordenadas redondeadas a un decimal.

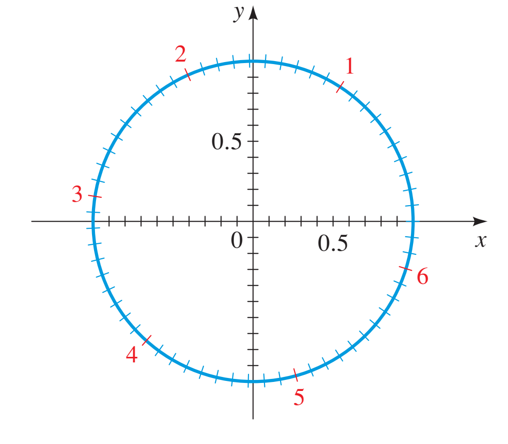
55. $t = 1$

56. $t = 2.5$

57. $t = -1.1$

58. $t = 4.2$





HABILIDADES Plus

59. Puntos terminales Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

a) $\pi - t$ ***b)*** $-t$

c) $\pi + t$ ***d)*** $2\pi + t$

60. Puntos terminales Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $\left(\frac{3}{4}, \sqrt{7}/4\right)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

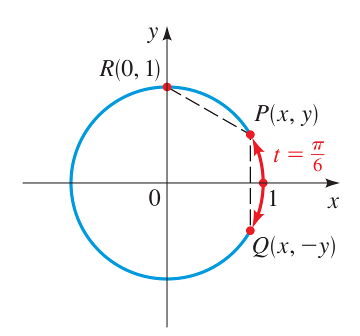
a) $-t$ ***b)*** $4\pi + t$

c) $\pi - t$ ***d)*** $t - \pi$

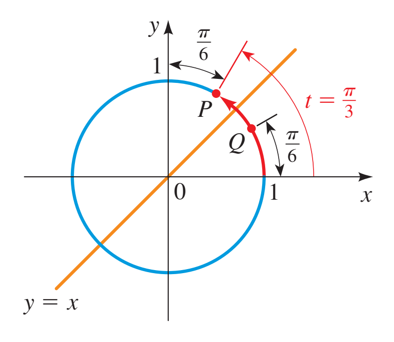
DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

61. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Encontrar el punto terminal para $\pi/6$ Suponga que el punto terminal

determinado por $t = \pi/6$ es $P(x, y)$ y los puntos Q y R son como se muestran en la figura. ¿Por qué son iguales las distancias PQ y PR? Use este dato junto con la fórmula de la distancia para demostrar que las coordenadas de P satisfacen la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Simplifique esta ecuación usando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada para encontrar $P(x, y)$.



62. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Encontrar el punto terminal para $\pi/3$ Ahora que ya conoce el punto terminal determinado por $t = \pi/6$, use simetría para encontrar el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ (vea la figura). Explique su razonamiento.



5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

■ Funciones trigonométricas ■ Valores de las funciones trigonométricas
■ Identidades fundamentales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección usamos propiedades de la circunferencia unitaria de la sección anterior para definir las funciones trigonométricas.

■ Funciones trigonométricas

Recuerde que para encontrar el punto terminal $P(x, y)$ para un número real dado t, nos movemos una distancia $|t|$ a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto$(1, 0)$. Nos movemos en dirección contraria a la de las manecillas del reloj si t es positiva y en la dirección de las manecillas si t es negativa (vea la figura 1). Ahora, usamos las coordenadas x y y del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* al asignar a cada número real t la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* también se definen si usamos las coordenadas de $P(x, y)$.

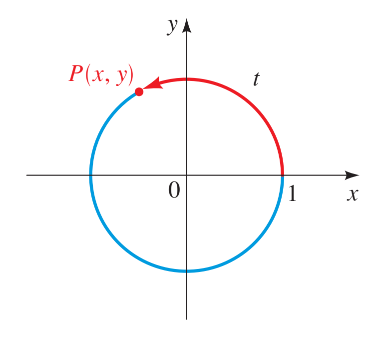


FIGURA 1

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea t cualquier número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal sobre la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de **funciones circulares**.

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

a) $t = \dfrac{\pi}{3}$ ***b)*** $t = \dfrac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN

a) De la tabla 1 de la página 404, vemos que el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ es $P(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. (Vea la figura 2.) Puesto que las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

FIGURA 2

b) El punto terminal determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Vea la figura 3.) Por tanto

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidas porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones.

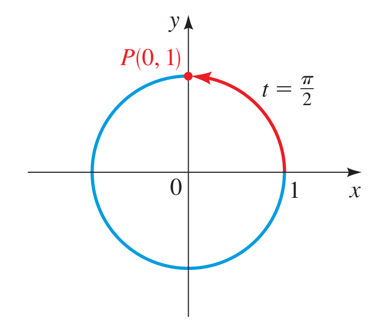


FIGURA 3



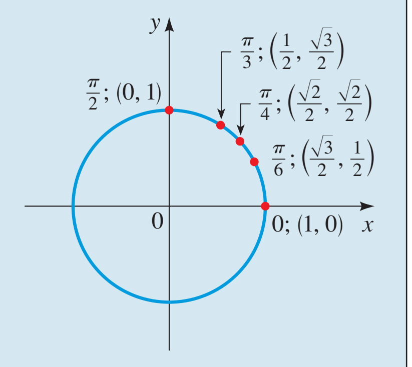
Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se dan en la tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la tabla 1 de la sección 5.1 junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los siguientes valores de las funciones trigonométricas se obtienen de los puntos terminales.

TABLA 1

t	**sen t**	**cos t**	**tan t**	**csc t**	**sec t**	**cot t**
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0



Fácilmente podemos recordar los senos y los cosenos de los ángulos básicos, si los escribimos de la forma $\sqrt{\blacksquare}/2$:

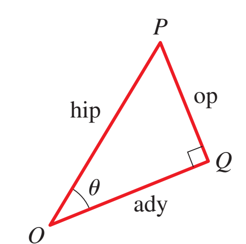
t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

El ejemplo 1 muestra que algunas de las funciones trigonométricas no están definidas para ciertos números reales, por lo cual es necesario determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de t. Dado que las funciones cotangente y cosecante tienen y en el denominador de sus definiciones, no estarán definidas siempre que la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t sea igual a 0. Esto ocurre cuando $t = n\pi$ para cualquier entero n, de modo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante tienen x en el denominador en sus definiciones, de modo que no estarán definidas siempre que $x = 0$. Esto ocurre cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero n.

(*El texto continúa en la página 412*)

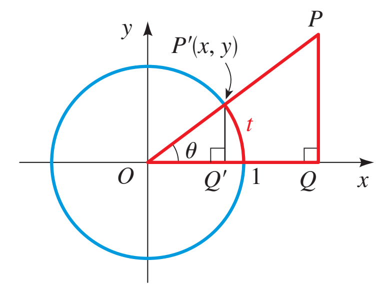
Relación con las funciones trigonométricas de los ángulos

Si usted ya ha estudiado trigonometría de triángulos rectángulos en el capítulo 6 es probable que se pregunte cómo el seno y el coseno de un *ángulo* se relacionan con los de esta sección. Para analizar esto empecemos con un triángulo rectángulo, ΔOPQ.



Triángulo rectángulo OPQ

Coloque el triángulo en el plano de coordenadas como se muestra, con el ángulo θ en posición estándar.



$P'(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto terminal determinado por el arco t. Observe que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos tienen longitudes x y y.

Entonces, por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

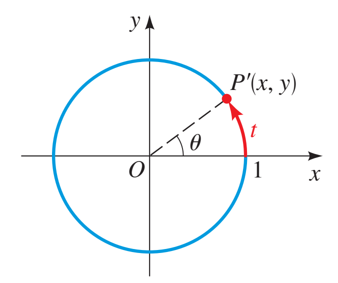
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real t*, tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

Ahora, si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (vea la figura). Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo con medida en radianes θ son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto terminal determinado por el número real t.



La medida radián del ángulo θ es t.

¿Por qué estudiar entonces trigonometría de dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de distinto modo. (Compare la sección 5.6 con las secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

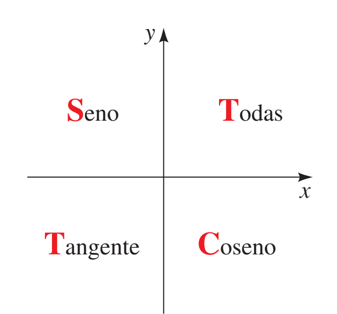
DOMINIOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función	Dominio
sen, cos	Todos los números reales
tan, sec	Todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
cot, csc	Todos los números reales diferentes de $n\pi$ para cualquier entero, n

Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular valores de las funciones trigonométricas para cualquier número real t, primero determinamos sus signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de t. Por ejemplo, si el punto terminal $P(x, y)$ determinado por t está en el tercer cuadrante, entonces sus coordenadas son negativas. En consecuencia sen t, cos t, csc t y sec t son todas negativas, mientras que tan t y cot t son positivas. En el siguiente recuadro se pueden comprobar las otras entradas.

El siguiente nemónico le ayudará a recordar qué funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante: **To**das, **S**eno, **T**angente y **Co**seno.



Usted puede recordar "To-Sen-Tan-Cos.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

Por ejemplo $\cos(2\pi/3) < 0$ porque el punto terminal de $t = 2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, mientras que $\tan 4 > 0$ porque el punto terminal de $t = 4$ está en el tercer cuadrante.

En la sección 5.1 utilizamos el número de referencia para encontrar el punto terminal determinado por un número real t. Dado que las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de puntos terminales, podemos usar el número de referencia para encontrar valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $\bar{t}$ es el número de referencia para t. Entonces el punto terminal de $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente por el signo, como el punto terminal de t. Entonces, los valores de las funciones trigonométricas en t son iguales, excepto posiblemente por el signo, como sus valores en $\bar{t}$. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER NÚMERO REAL

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier número real t, realizamos los siguientes pasos.

1. **Encontrar el número de referencia**. Determine el número de referencia $\bar{t}$ asociado con t.
2. **Encontrar el signo**. Determine el signo de la función trigonométrica de t indicando el cuadrante en el que se encuentra el punto terminal.
3. **Encontrar el valor**. El valor de la función trigonométrica de t es igual, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{t}$.

EJEMPLO 2 ■ Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre cada valor.

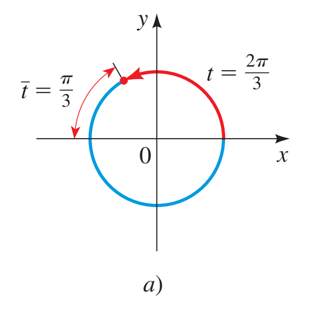
***a*)** $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ ***b*)** $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ ***c*)** $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4}$

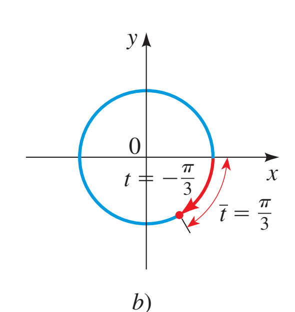
SOLUCIÓN

***a*)** El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (vea la figura 4*a*)). Dado que el punto terminal de $2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Entonces,

$$\cos = \frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Signo | Número de referencia | De la tabla 1 (página 410)





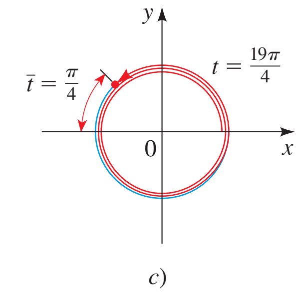


FIGURA 4 *a*) *b*) *c*)

***b*)** El número de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$ (vea la figura 4*b*)). Dado que el punto terminal de $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, $\tan(-\pi/3)$ es negativa. Por tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Signo | Número de referencia | De la tabla 1 (página 410)

***c*)** Puesto que $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos terminales determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son los mismos. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (vea la figura 4*c*)). Dado que el punto terminal de $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Entonces,

$$\operatorname{sen}\frac{19\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = +\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reste 4π | Signo | Número de referencia | De la tabla 1 (página 410)


Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

Hasta este punto hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de *t*. De hecho, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas siempre que *t* sea múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Cómo podemos calcular las funciones trigonométricas para otros valores de *t*? Por ejemplo, ¿cómo podemos encontrar sen 1.5? Una forma es trazando cuidadosamente un diagrama y leer el valor (vea los ejercicios 37-44), pero este método no es muy preciso. Por fortuna, programados directamente en las calculadoras científicas, son procedimientos matemáticos (vea la nota al margen en la página 433) que encuentran los valores de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* redondeados al número de dígitos en la pantalla. La

calculadora debe ser puesta en el *modo de radianes* para evaluar estas funciones. Para encontrar con una calculadora valores de las funciones cosecante, secante y cotangente necesitamos usar las siguientes *relaciones recíprocas*:

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Estas identidades se siguen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, dado que sen $t = y$ y csc $t = 1/y$, tenemos csc $t = 1/y = 1/(\operatorname{sen} t)$. Los otros se obtienen de un modo semejante.

EJEMPLO 3 ■ Uso de calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Use una calculadora y encuentre lo siguiente.

a) sen 2.2 ***b)*** cos 1.1 ***c)*** cot 28 ***d)*** csc 0.98

SOLUCIÓN Asegurándonos de que nuestra calculadora esté puesta en el modo de radianes y redondeando los resultados a seis decimales, obtenemos

a) $\operatorname{sen} 2.2 \approx 0.808496$ ***b)*** $\cos 1.1 \approx 0.453596$

c) $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$ ***d)*** $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 0.98} \approx 1.204098$

 **Ahora intente realizar los ejercicios 39 y 41** ■

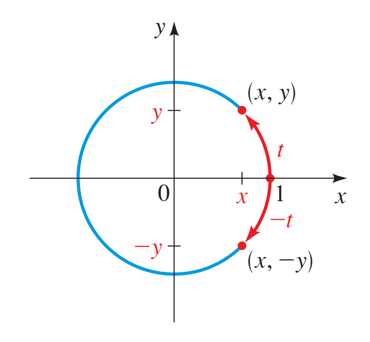


FIGURA 5

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. De la figura 5 vemos que

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y tangente son funciones impares, en tanto que la función coseno es una función par. Es fácil ver que la recíproca de una función par es par y la recíproca de una función impar es impar. Este hecho, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades pares-impares para todas las funciones trigonométricas.

Las funciones pares e impares están definidas en la sección 2.6.

PROPIEDADES PARES-IMPARES

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son funciones impares; las funciones coseno y secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

EJEMPLO 4 ■ Funciones trigonométricas pares e impares

Use las propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas para determinar cada valor.

a) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ***b)*** $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN Por las propiedades pares-impares y la tabla 1 de la página 410 tenemos

a) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$ Seno es impar

b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Coseno es par

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

■ Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí mediante expresiones llamadas **identidades trigonométricas**. Damos las más importantes en el recuadro siguiente.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Demostración Las identidades recíprocas se deducen inmediatamente de las definiciones de la página 409. Ahora demostraremos las identidades pitagóricas. Por definición $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria. Dado que $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Dividiendo ambos lados entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos utilizado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. Similarmente, dividiendo ambos lados de la primera identidad pitagórica entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) se obtiene $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■

Así como lo indican sus nombres, las identidades fundamentales desempeñan un papel esencial en trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquiera otra. Por tanto, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, entonces podemos encontrar los valores de todas las otras en t.

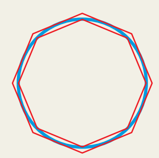
EJEMPLO 5 ■ Encontrar todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una de ellas

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuarto cuadrante encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

*Seguimos la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ por $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ por $(\operatorname{sen} t)^n$ para todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la sección 5.5. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

El valor de π

El número π es el cociente entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Desde la antigüedad se conoce que esta relación es la misma para todas las circunferencias. El primer esfuerzo sistemático por encontrar una aproximación numérica para π fue realizado por Arquímedes (hacia el año 240 a.C.) quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ al encontrar los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos alrededor de la circunferencia.



Hacia el año 480 d.C., el físico chino Tsu Ch'ung-chih dio la aproximación

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

que es correcta a seis lugares decimales. Esta estimación siguió siendo la más precisa de π hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos con más de mil millones de lados para calcular π redondeado a 15 lugares decimales. En el siglo XVII los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas en busca de π. El inglés William Shanks se pasó 15 años (1858-1873) usando estos métodos para calcular π a 707 decimales, pero en 1946 se encontró que sus cifras eran erróneas al empezar con el decimal 528. En la actualidad, con ayuda de computadoras, de manera rutinaria los matemáticos determinan π redondeado a millones de lugares decimales. De hecho, los matemáticos han desarrollado recientemente nuevos algoritmos que se pueden programar en la computadora para calcular π a varios billones de decimales.

SOLUCIÓN De las identidades pitagóricas tenemos

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\text{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituya } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\text{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} \qquad \text{Despeje sen}^2 t$$

$$\text{sen}\, t = 1 \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Dado que este punto está en el cuarto cuadrante, sen t es negativo, de modo que $t = -\frac{4}{5}$. Ahora que conocemos sen t y cos t podemos encontrar los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas.

$$\text{sen}\, t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen}\, t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■

EJEMPLO 6 ■ Escribir una función trigonométrica en términos de otra

Escriba tan t en términos de cos t, donde t está en el tercer cuadrante.

SOLUCIÓN Puesto que tan t = sen t/cos t, necesitamos escribir sen t en términos de cos t. Por las identidades pitagóricas tenemos

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\text{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \qquad \text{Despeje sen}^2 t$$

$$\text{sen}\, t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Dado que sen t es negativo en el tercer cuadrante, aquí aplica el signo negativo. Por tanto

$$\tan t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

5.2 EJERCICIOS

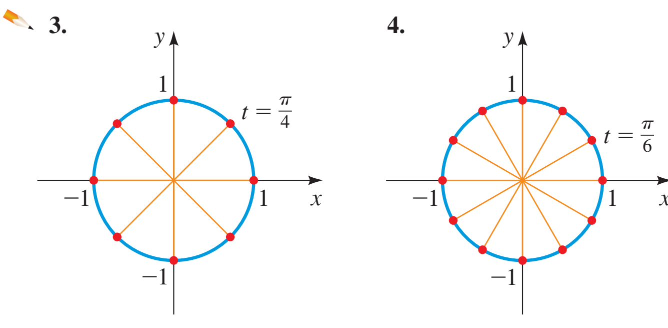
CONCEPTOS

1. Sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinada por t. Entonces sen t = ________, cos t = ________ y tan t = ________.

2. Si $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, entonces $x^2 + y^2$ = ________. Así, para toda t tenemos $\text{sen}^2 t + \cos^2 t$ = ________.

HABILIDADES

3–4 ■ Evaluar funciones trigonométricas Encuentre sen t y cos t para los valores de t cuyos puntos terminales se muestran en la circunferencia unitaria en la figura. En el ejercicio 3, t crece con incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 4, t aumenta con incrementos de $\pi/6$. (Vea los ejercicios 21 y 22 en la sección 5.1.)



5–22 ■ Evaluar funciones trigonométricas Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

5. ***a)*** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ ***b)*** $\cos\frac{17\pi}{6}$ ***c)*** $\tan\frac{7\pi}{6}$

6. ***a)*** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$ ***b)*** $\cos\frac{11\pi}{3}$ ***c)*** $\tan\frac{5\pi}{3}$

7. ***a)*** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{4}$ ***b)*** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ***c)*** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$

8. ***a)*** $\cos\frac{19\pi}{6}$ ***b)*** $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ ***c)*** $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

9. ***a)*** $\cos\frac{3\pi}{4}$ ***b)*** $\cos\frac{5\pi}{4}$ ***c)*** $\cos\frac{7\pi}{4}$

10. ***a)*** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ ***b)*** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ ***c)*** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

11. ***a)*** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}$ ***b)*** $\csc\frac{7\pi}{3}$ ***c)*** $\cot\frac{7\pi}{3}$

12. ***a)*** $\csc\frac{5\pi}{4}$ ***b)*** $\sec\frac{5\pi}{4}$ ***c)*** $\tan\frac{5\pi}{4}$

13. ***a)*** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ***b)*** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ***c)*** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

14. ***a)*** $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ***b)*** $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ***c)*** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

15. ***a)*** $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ***b)*** $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ***c)*** $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

16. ***a)*** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ***b)*** $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ***c)*** $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

17. ***a)*** $\csc\frac{7\pi}{6}$ ***b)*** $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ***c)*** $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

18. ***a)*** $\sec\frac{3\pi}{4}$ ***b)*** $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ***c)*** $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

19. ***a)*** $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$ ***b)*** $\sec\frac{11\pi}{6}$ ***c)*** $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

20. ***a)*** $\csc\frac{2\pi}{3}$ ***b)*** $\sec\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ ***c)*** $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)$

21. ***a)*** $\operatorname{sen} 13\pi$ ***b)*** $\cos 14\pi$ ***c)*** $\tan 15\pi$

22. ***a)*** $\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}$ ***b)*** $\cos\frac{25\pi}{2}$ ***c)*** $\cot\frac{25\pi}{2}$

23–26 ■ Evaluar funciones trigonométricas Encuentre el valor (si está definido) de cada una de las seis funciones trigonométricas en el número real t dado. Use sus respuestas para completar la tabla.

23. $t = 0$ **24.** $t = \frac{\pi}{2}$

25. $t = \pi$ **26.** $t = \frac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinido		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinido
$\frac{3\pi}{2}$						

27–36 ■ Evaluar funciones trigonométricas Se da el punto terminal $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

27. $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **28.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

29. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ **30.** $\left(\frac{1}{5}, -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$

31. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **32.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

33. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **34.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

35. $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$ **36.** $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

37–44 ■ Valores de las funciones trigonométricas Encuentre un valor aproximado de la función trigonométrica dada usando ***a)*** la figura y ***b)*** una calculadora. Compare los dos valores.

37. sen 1

38. cos 0.8

39. sen 1.2

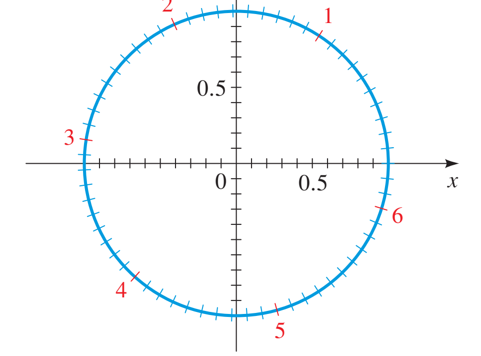
40. cos 5

41. tan 0.8

42. tan(−1.3)

43. cos 4.1

44. sen(−5.2)



45–48 ■ Signo de una expresión trigonométrica Encuentre el signo de la expresión si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

45. sen t cos t, Cuadrante II **46.** tan t sec t, Cuadrante IV

47. $\frac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$, Cuadrante III **48.** cos t sec t, cualquier cuadrante

49–52 ■ Cuadrante de un punto terminal De la información dada encuentre el cuadrante en el que se encuentra el punto terminal determinado por t.

49. sen $t > 0$ y cos $t < 0$

50. tan $t > 0$ y sen $t < 0$

51. csc $t > 0$ y sec $t < 0$

52. cos $t < 0$ y cot $t < 0$

53–62 ■ Escribir una expresión trigonométrica en términos de otra Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

53. sen t, cos t; cuadrante II

54. cos t, sen t; cuadrante IV

55. tan t, sen t; cuadrante IV

56. tan t, cos t; cuadrante III

57. sec t, tan t; cuadrante II

58. csc t, cot t; cuadrante III

59. tan t, sec t; cuadrante III

60. sen t, sec t; cuadrante IV

61. $\tan^2 t$, sen t; cualquier cuadrante

62. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, cos t; cualquier cuadrante

63–70 ■ Uso de identidades pitagóricas Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

63. sen $t = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante IV

64. cos $t = -\frac{7}{25}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

65. sec $t = 3$, el punto terminal de t está en el cuadrante IV

66. tan $t = \frac{1}{4}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

67. tan $t = -\frac{12}{5}$, sen $t > 0$

68. csc $t = 5$, cos $t < 0$

69. sen $t = -\frac{1}{4}$, sec $t < 0$

70. tan $t = -4$, csc $t > 0$

HABILIDADES Plus

71–78 ■ Funciones pares e impares Determine si la función es par, impar o ninguna de estas. (Vea las definiciones de funciones pares e impares en la página 204.)

71. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

72. $f(x) = x^2 \cos 2x$

73. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

74. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

75. $f(x) = |x| \cos x$

76. $f(x) = x \operatorname{sen}^3 x$

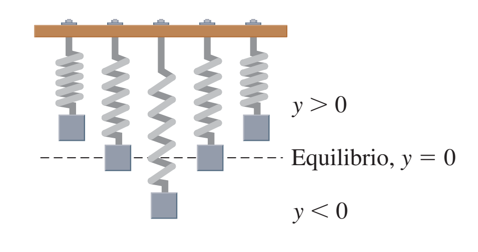
77. $f(x) = x^3 + \cos x$

78. $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

APLICACIONES

79. Movimiento armónico El desplazamiento a partir del equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte está dado por $y(t) = 4 \cos 3\pi t$ donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Encuentre el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

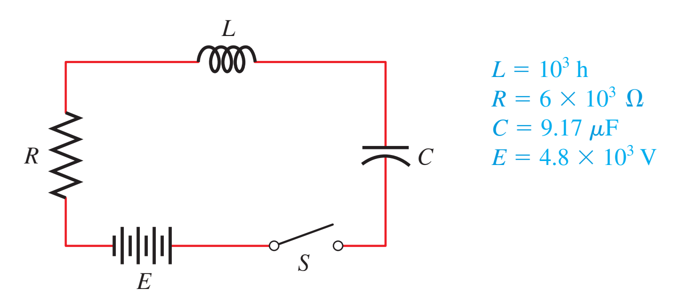
t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



80. Ritmos circadianos Nuestra presión sanguínea varía en el curso del día. En cierta persona, la presión diastólica, en reposo en el tiempo t está dada por $B(t) = 80 + 7 \operatorname{sen}(\pi t/12)$, donde t se mide en horas desde la medianoche y $B(t)$ en mmHg (milímetros de mercurio). Encuentre la presión sanguínea de esta persona a las siguientes horas

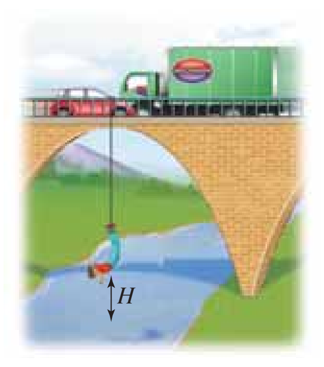
a) 6:00 a.m. ***b)*** 10:30 a.m. ***c)*** mediodía ***d)*** 8:00 p.m.

81. Circuito eléctrico Después de cerrar el interruptor del circuito mostrado la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t}$ sen $10t$. Encuentre la corriente en los tiempos ***a)*** $t = 0.1$ s y ***b)*** $t = 0.5$ s.



82. Salto en *bungee* Una saltadora de *bungee* se deja caer desde un elevado puente hasta el río, y luego rebota una y otra vez. En el tiempo t segundos después de su salto su altura H (en metros) sobre el río está dada por $H(t) = 100 + 75e^{-t/20} \cos(\frac{\pi}{4}t)$. Encuentre la altura a la que se encuentra en los tiempos indicados en la tabla.

t	$H(t)$
0	
1	
2	
4	
6	
8	
12	

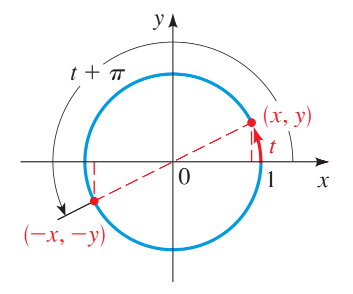


DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

83. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Fórmulas de reducción Una *fórmula de reducción* es aquella que se puede usar para "reducir" el número de términos en la entrada para una función trigonométrica. Explique la forma en que la figura muestra que son válidas las fórmulas de reducción siguientes:

$$\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(t + \pi) = -\cos t$$

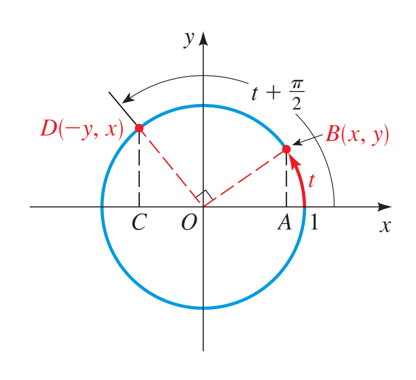
$$\tan(t + \pi) = \tan t$$



84. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Más fórmulas de reducción Por el teorema de "ángulo-lado-ángulo" de geometría elemental, los triángulos CDO y AOB de la figura siguiente son congruentes. Explique la forma en que esto demuestra que si B tiene coordenadas (x, y), entonces D tiene coordenadas $(-y, x)$. Luego explique cómo es que la figura muestra que las fórmulas de reducción siguientes son válidas:

$$\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t \qquad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\, t$$

$$\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot t$$



5.3 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

■ Gráficas de las funciones seno y coseno ■ Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno ■ Uso de calculadoras graficadoras para trazar las gráficas de funciones trigonométricas

La gráfica de una función nos da una mejor idea de su comportamiento. Así, en esta sección trazamos las gráficas de las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. En la sección siguiente se trazarán las gráficas de las otras funciones trigonométricas.

■ Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, primero observamos que estas funciones repiten sus valores en forma regular. Para ver exactamente cómo ocurre esto, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es 2π. Se deduce que el punto terminal $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Dado que las funciones seno y coseno están en términos de las coordenadas de $P(x, y)$, se deduce que sus valores no cambian al sumar cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras,

$$\text{sen}(t + 2n\pi) = \text{sen}\, t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Entonces, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la siguiente definición: una función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. El mínimo de tal número positivo (si existe) es el **periodo** de f. Si f tiene periodo p, entonces la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p se denomina **periodo completo** de f.

PROPIEDADES PERIÓDICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π:

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}\, t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

TABLA 1

t	sen t	cos t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

Por tanto, las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar sus gráficas primero trazamos la gráfica de un periodo. Para trazar las gráficas en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ podríamos tratar de hacer una tabla de valores y usar esos puntos para trazar la gráfica. Como no se puede completar dicha tabla revisemos las definiciones de estas funciones.

Recuerde que sen t es la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el número real t. ¿Cómo varía la coordenada y de este punto cuando t aumenta? Es fácil ver que la coordenada y de $P(x, y)$ aumenta a 1, y luego disminuye a -1 repetidamente cuando el punto $P(x, y)$ se mueve alrededor del círculo unitario. (Vea la figura 1.) De hecho, cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, $y =$ sen t aumenta de 0 a 1. Cuando t crece de $\pi/2$ a π, el valor de $y =$ sen t decrece de 1 a 0. La tabla 1 muestra la variación de las funciones seno y coseno para t entre 0 y 2π.

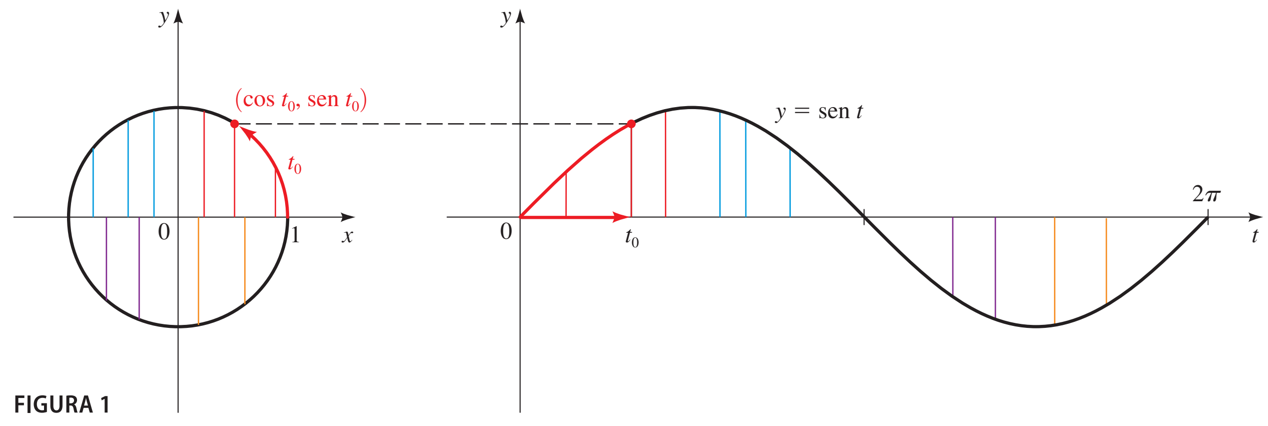


FIGURA 1

Para trazar las gráficas en forma más precisa en la tabla 2 encontramos otros pocos valores de sen t y cos t. Podríamos también encontrar otros valores con ayuda de una calculadora.

TABLA 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ahora usamos esta información para trazar la gráfica de las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π en las figuras 2 y 3. Estas son las gráficas de un periodo. Usando el hecho de que estas funciones son periódicas con periodo 2π, obtenemos sus gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π.

La gráfica de la función seno es simétrica respecto al origen. Esto es como se esperaba porque la función seno es una función impar. Dado que la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y.

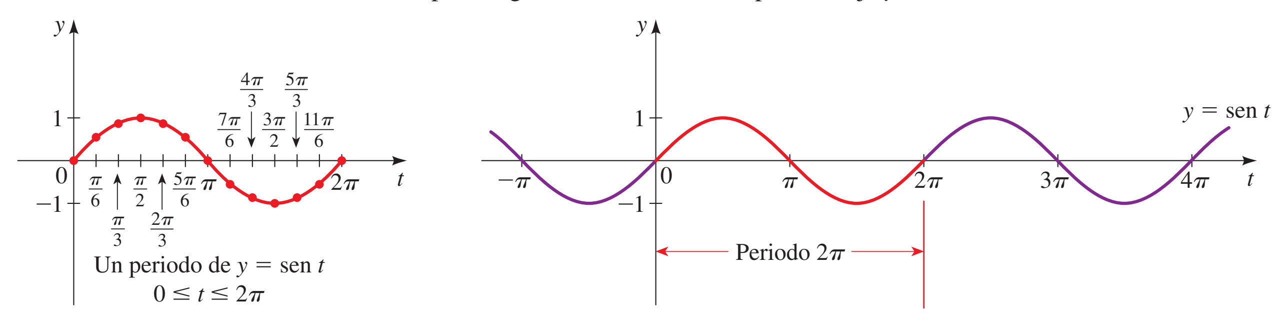


FIGURA 2 Gráfica de sen t

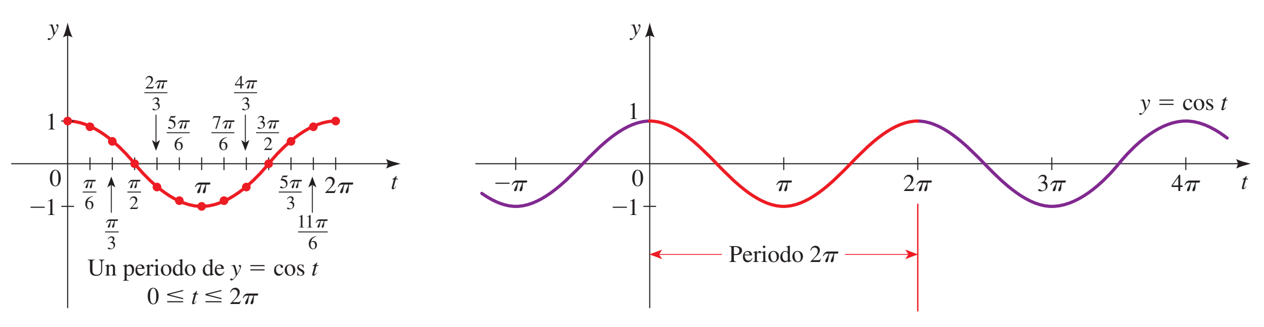


FIGURA 3 Gráfica de cos t

Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

Ahora consideraremos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para trazar gráficas de la sección 2.6 son muy útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para la comprensión de las aplicaciones a situaciones físicas tales como el movimiento armónico (vea la sección 5.6), pero algunas de estas gráficas tienen un aspecto tan atractivo que por sí solas son interesantes.

Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por tanto, de aquí en adelante usaremos la letra x y escribiremos $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, y así sucesivamente, para denotar estas funciones.

EJEMPLO 1 ■ Curvas de coseno

Trace la gráfica de cada función.

a) $f(x) = 2 + \cos x$ ***b***) $g(x) = -\cos x$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades (vea la figura 4*a*)).

b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la figura 4*b*) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.

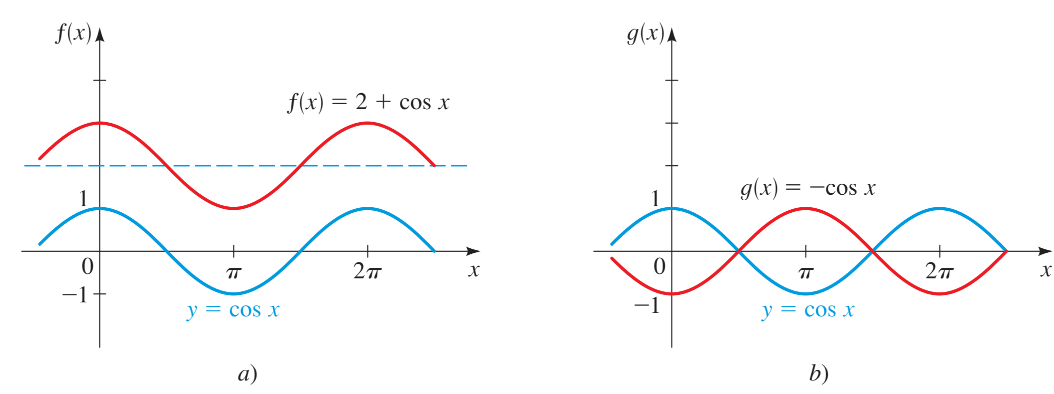


FIGURA 4

Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 7

Trace la gráfica de $y = 2\, \text{sen}\, x$. Empezamos con la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ y multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de estirar verticalmente la gráfica en un factor de 2. Para trazar la gráfica de $y = \frac{1}{2}\, \text{sen}\, x$, empezamos con la

El estiramiento y la reducción de gráficas se estudia en la sección 2.6.

gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de reducir verticalmente la gráfica en un factor de $\frac{1}{2}$ (vea la figura 5).

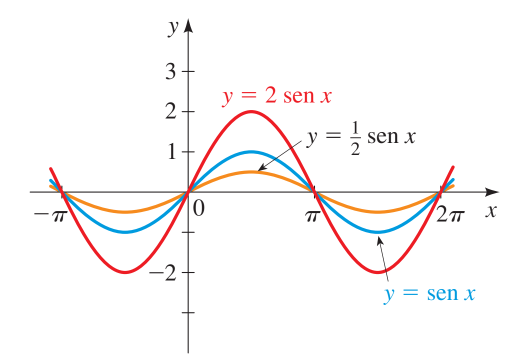


FIGURA 5

En general, para las funciones

$$y = a \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se denomina **amplitud** y es el valor más grande que estas funciones alcanzan. En la figura 6 se muestran las gráficas de $y = a \text{ sen } x$ para diferentes valores de a.

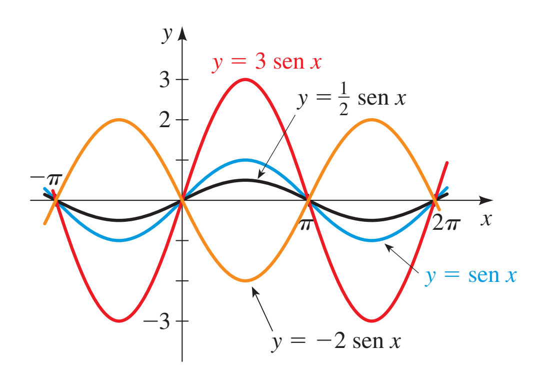


FIGURA 6

EJEMPLO 2 ■ Estirar una curva coseno

Encuentre la amplitud de $y = -3 \cos x$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN La amplitud es $|-3| = 3$, de modo que el valor más grande que la gráfica alcanza es 3 y el valor más pequeño es -3. Para trazarla empezamos con la gráfica de $y = \cos x$, la estiramos verticalmente en un factor de 3 y reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de la figura 7.

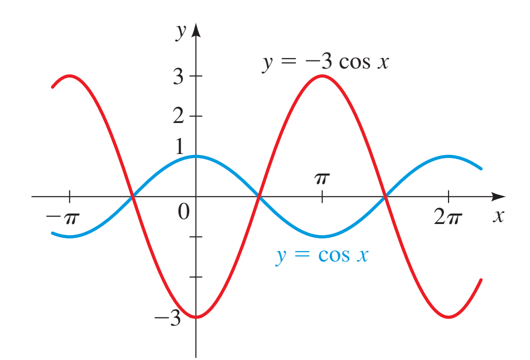


FIGURA 7

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

Dado que las funciones seno y coseno tienen periodos 2π, las funciones

$$y = a \text{ sen } kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un periodo cuando kx varía de 0 a 2π, es decir, para $0 \le kx \le 2\pi$ o para $0 \le x \le 2\pi/k$. Entonces estas funciones completan un periodo cuando x varía entre 0 y $2\pi/k$ por tanto, tienen periodo $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se denominan **curvas seno** y **coseno**, respectivamente. (De forma colectiva, las curvas del seno y del coseno se refieren como **senoidales**.)

CURVAS SENO Y COSENO

Las curvas seno y coseno

$$y = a \text{ sen } kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$ y **periodo** $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado en el cual trazar la gráfica de un periodo completo es $[0, 2\pi/k]$.

En la sección 2.6 se estudia el estiramiento y la reducción de gráficas.

Para ver cómo afecta el valor de k a la gráfica de $y = \text{sen } kx$, trace la curva seno $y = \text{sen } 2x$. Puesto que el periodo es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \le x \le \pi$ (vea la figura 8*a*)). Para la curva seno $y = \text{sen } \frac{1}{2}x$ el periodo es $2\pi \div \frac{1}{2}$ sen $= 4\pi$, de modo que la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \le x \le 4\pi$ (vea la figura 8*b*)). Vemos que el efecto es *reducir* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *estirar* la gráfica horizontalmente si $k < 1$.

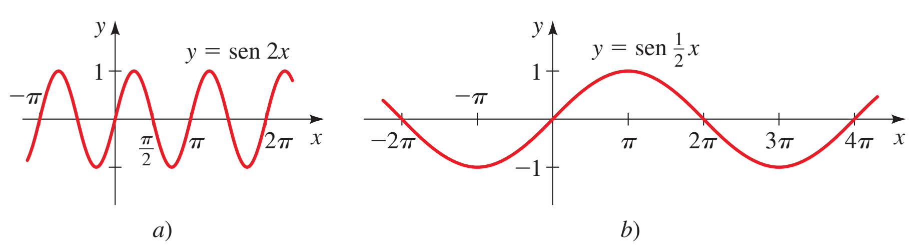


FIGURA 8

Por comparación, en la figura 9 mostramos las gráficas de un periodo de la curva seno $y = a \text{ sen } kx$ para varios valores de k.

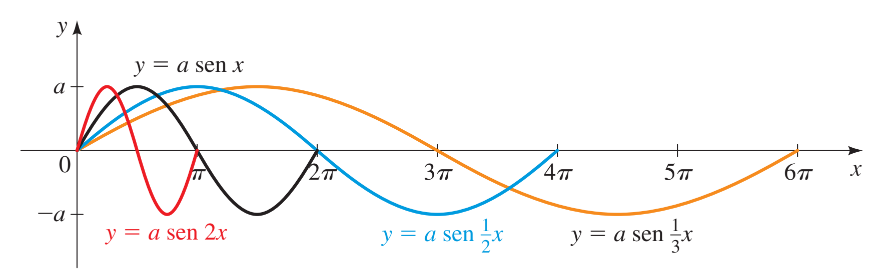


FIGURA 9

EJEMPLO 3 ■ Amplitud y periodo

Encuentre la amplitud y el periodo de cada función y trace su gráfica.

a) $y = 4 \cos 3x$ ***b)*** $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

SOLUCIÓN

a) Obtenemos la amplitud y el periodo a partir de la forma de la función como sigue.

$$\text{amplitud} = |a| = 4$$

$$y = 4 \cos 3x$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$$

La amplitud es 4 y el periodo es $2\pi/3$. La gráfica se ilustra en la figura 10.

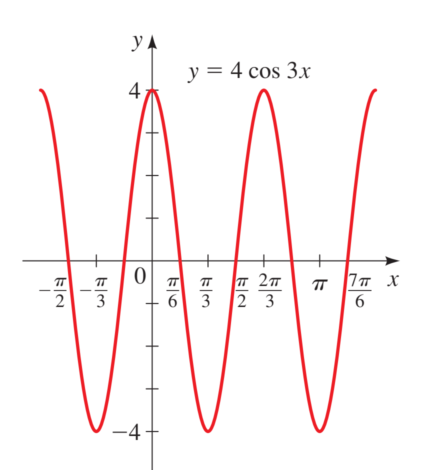


FIGURA 10

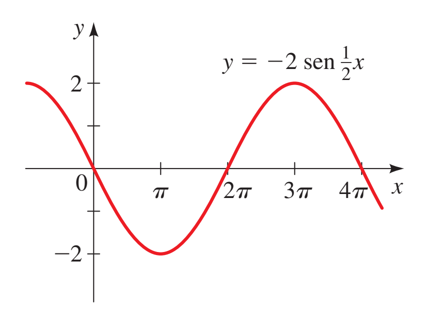


FIGURA 11

***b*)** Para $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

La gráfica está en la figura 11.

Ahora intente realizar los ejercicios 23 y 25 ■

Las gráficas de funciones de la forma $y = a \text{ sen } k(x - b)$ y $y = a \cos k(x - b)$ son simplemente curvas seno y coseno desplazadas horizontalmente en una cantidad $|b|$. Se desplazan a la derecha si $b > 0$ o a la izquierda si $b < 0$. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

El desplazamiento de fase (desfase) de una curva seno se analiza en la sección 5.6.

CURVAS SENO Y COSENO DESPLAZADAS

Las curvas seno y coseno

$$y = a \text{ sen } k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$, **periodo** $2\pi/k$ y **desplazamiento horizontal** b.

Un intervalo apropiado sobre el cual trazar la gráfica de un periodo completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ y $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ son como se muestran en la figura 12.

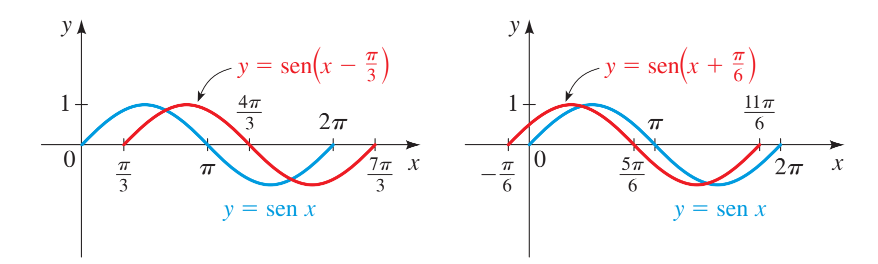


FIGURA 12 Desfases de una curva seno

EJEMPLO 4 ■ Una curva seno desplazada

Encuentre la amplitud, el periodo y el desfase de $y = 3 \text{ sen } 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ y trace la gráfica de un periodo completo.

SOLUCIÓN Obtenemos la amplitud, el periodo y el desfase de la forma de la función como sigue:

$\text{amplitud} = |a| = 3$ $\qquad$ $\text{periodo} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} = \pi$

$$y = 3 \text{ sen } 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\text{desfase} = \frac{\pi}{4}$ (a la derecha)

Puesto que el desfase es $\pi/4$ y el periodo es π, un periodo completo ocurre en el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Aquí tenemos otra forma de encontrar un intervalo apropiado sobre el cual graficar un periodo completo. Dado que el periodo de $y = \text{sen}\, x$ es 2π, la función $y = 3\,\text{sen}\, 2(x - \frac{\pi}{4})$ pasará por un periodo completo conforme $2(x - \frac{\pi}{4})$ varíe de 0 a 2π.

Inicio de periodo:	Fin de periodo:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$
$x - \frac{\pi}{4} = 0$	$x - \frac{\pi}{4} = \pi$
$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{5\pi}{4}$

Entonces trazamos la gráfica de un periodo en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Como ayuda para trazar la gráfica dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y luego trazamos la gráfica de una curva seno con amplitud 3 como en la figura 13.

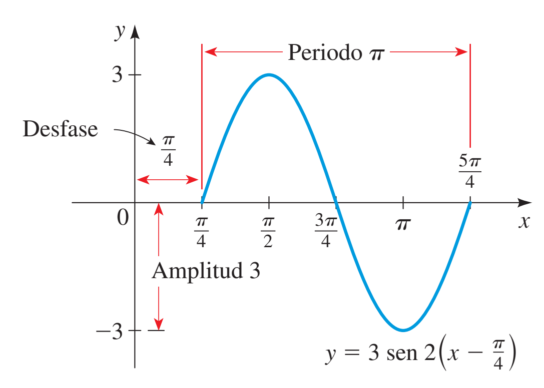


FIGURA 13

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

EJEMPLO 5 ■ Curva coseno desfasada

Encuentre la amplitud, el periodo y el desfase de $y = \frac{3}{4}\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, y trace la gráfica de un periodo completo.

SOLUCIÓN Primero escribimos esta función en la forma $y = a\cos k(x - b)$. Para hacerlo factorizamos 2 de la expresión $2x + \frac{2\pi}{3}$ y obtenemos

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Entonces tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desfase} = b = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{Desplazada } \frac{\pi}{3} \text{ a la } \textit{izquierda}$$

También podemos encontrar un periodo completo como sigue:

Inicio del periodo:	Fin del periodo:
$2x + \frac{2\pi}{3} = 0$	$2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$
$2x = -\frac{2\pi}{3}$	$2x = \frac{4\pi}{3}$
$x = -\frac{\pi}{3}$	$x = \frac{2\pi}{3}$

De este modo podemos trazar la gráfica de un periodo en el intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

A partir de esta información tenemos que un periodo de esta curva coseno comienza en $-\pi/3$ y termina en $(-\pi/3) + \pi = 2\pi/3$. Para trazar la gráfica en el intervalo $[-\pi/3, 2\pi/3]$, dividimos en cuatro partes iguales y trazamos una gráfica de la curva coseno con amplitud $\frac{3}{4}$ como se muestra en la figura 14.

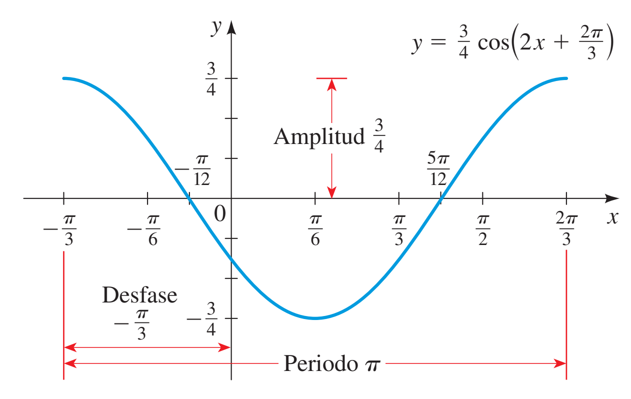


FIGURA 14

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

Uso de calculadoras graficadoras para trazar la gráfica de funciones trigonométricas

Consulte el apéndice C*, *Trazar gráficas con una calculadora graficadora,* para consultar cómo elegir un rectángulo de visión apropiado. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

Cuando use una calculadora graficadora o una computadora para trazar la gráfica de una función es importante escoger cuidadosamente el rectángulo de vista para producir una gráfica razonable de la función. Esto se aplica en especial para funciones trigonométricas; el siguiente ejemplo muestra que, si no se tiene cuidado, es fácil producir una gráfica engañosa de una función trigonométrica.

EJEMPLO 6 ■ Selección de un rectángulo de vista

Trace la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN La figura 15*a*) muestra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando el rectángulo de vista $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista la gráfica parece razonable, pero si cambiamos el rectángulo de vista a los que aparecen en la figura 15, las gráficas se verán muy diferentes. Algo extraño está pasando.

El aspecto de las gráficas de la figura 15 depende de la computadora que se use. Las gráficas que usted obtenga con su calculadora graficadora podrían no parecerse a estas figuras, pero también serán bastante imprecisas.

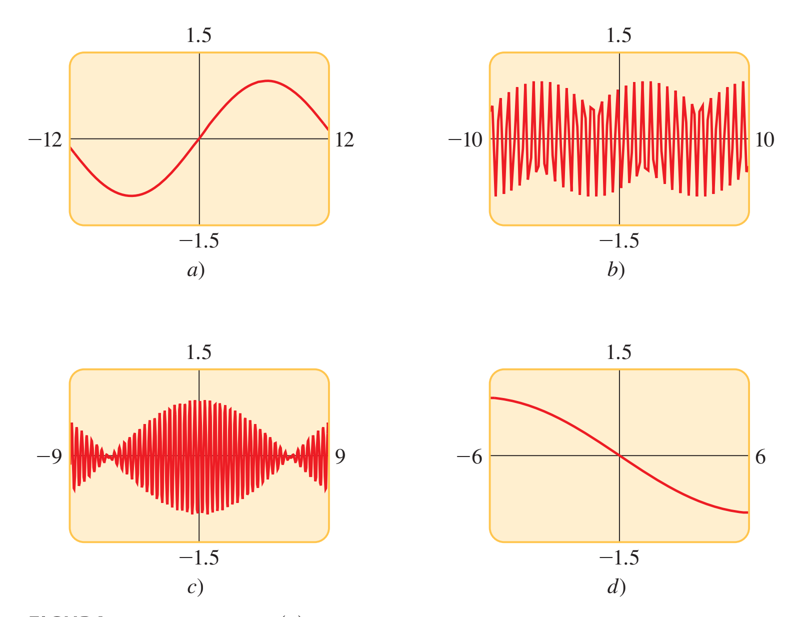


FIGURA 15 Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en diferentes rectángulos de vista

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y encontrar un rectángulo de vista apropiado necesitamos encontrar el periodo de la función $y = \text{sen } 50x$.

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que debemos trabajar con pequeños valores de x para mostrar sólo unas pocas oscilaciones de la gráfica. Si escogemos el rectángulo de vista $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se ilustra en la figura 16.

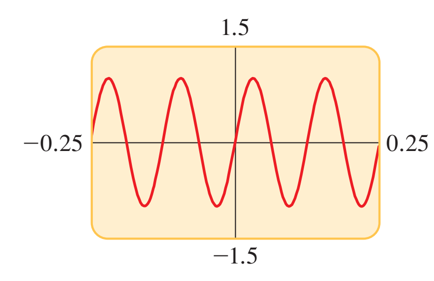


FIGURA 16 $f(x) = \text{sen } 50x$

Ahora vemos lo que estaba mal en la figura 15. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora coloca puntos y los une se pierde la mayor parte de los puntos máximo y mínimo y, por tanto, da una impresión engañosa de la gráfica.

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

La función h del ejemplo 7 es **periódica** con periodo 2π. En general, las funciones que son sumas de funciones de la siguiente lista son periódicas:

$$1, \cos kx, \cos 2kx, \cos 3kx, \ldots$$

$$\text{sen } kx, \text{sen } 2kx, \text{sen } 3kx, \ldots$$

Aun cuando estas funciones parecen ser especiales, en realidad son fundamentales para describir todas las funciones periódicas que surgen en la práctica. El matemático francés J. B. J. Fourier (vea la página 546) descubrió que casi toda función periódica se puede escribir como una suma (por lo general, una suma infinita) de estas funciones. Esto es notable porque significa que cualquier situación en la que se presente una variación periódica se puede describir matemáticamente usando las funciones seno y coseno. Una aplicación moderna del descubrimiento de Fourier es la codificación digital del sonido en discos compactos.

EJEMPLO 7 ■ Una suma de curvas seno y coseno

Trace la gráfica de $f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = \text{sen } 2x$ y $h(x) = 2 \cos x + \text{sen } 2x$ en una pantalla común para ilustrar el método de adición gráfica.

SOLUCIÓN Observe que $h = f + g$, de modo que la gráfica se obtiene sumando las coordenadas y correspondientes de las gráficas de f y g. Las gráficas de f, g y h se muestran en la figura 17.

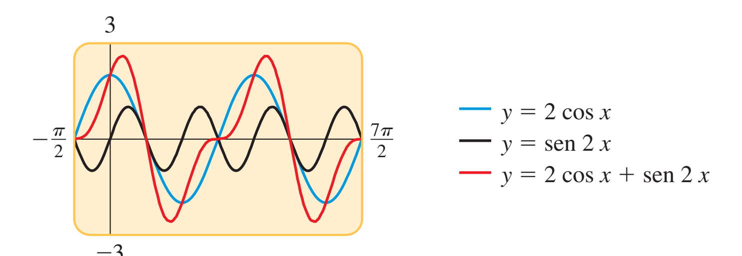


FIGURA 17

Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■

EJEMPLO 8 ■ Una curva coseno con amplitud variable

Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$, $y = -x^2$ y $y = x^2 \cos 6\pi x$ en una pantalla común. Comente y explique sobre la relación entre las gráficas.

SOLUCIÓN La figura 18 muestra las tres gráficas en el rectángulo de vista $[-1.5, 1.5]$ por $[-2, 2]$. Al parecer la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$ se encuentra entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$.

Para entender lo anterior, recuerde que los valores de $\cos 6\pi x$ están entre -1 y 1, es decir,

$$-1 \le \cos 6\pi x \le 1$$

para todos los valores de x. Multiplicando las desigualdades por x^2 y observando que $x^2 \ge 0$, obtenemos

$$-x^2 \le x^2 \cos 6\pi x \le x^2$$

Esto explica por qué las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$ forman una frontera para la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. (Observe que las gráficas se tocan cuando $\cos 6\pi x = \pm 1$.)

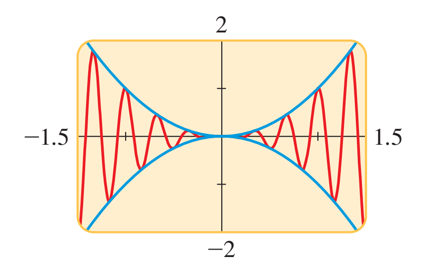


FIGURA 18 $y = x^2 \cos 6\pi x$

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

El ejemplo 8 muestra que la función $y = x^2$ controla la amplitud de la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. En general, si $f(x) = a(x) \text{ sen } kx$ o $f(x) = a(x) \cos kx$, la función a determina cómo varía la amplitud de f y la gráfica de f está entre las de $y = -a(x)$ y $y = a(x)$. Ahora veamos otro ejemplo.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

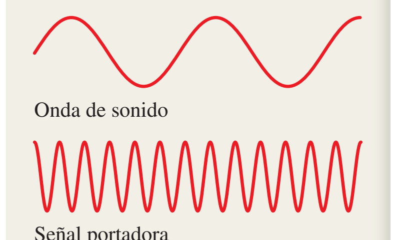
Modelos depredador/presa

Muchas poblaciones de animales fluctúan con regularidad en tamaño por lo que se pueden modelar con funciones trigonométricas. Predecir cambios en la población permite a los científicos detectar anomalías y tomar medidas para proteger una especie. En este proyecto se estudian la población de una especie de depredador y la población de su presa. Si la presa es abundante, la población de depredadores crece, pero también muchos depredadores tienden a agotar la presa. Esto se traduce en una disminución de la población del depredador, entonces la población de la presa aumenta, y así sucesivamente. Puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

*Este material se encuentra disponible en inglés.

Radio AM y FM

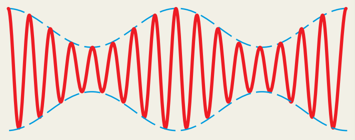
Las transmisiones de radio están formadas por ondas de sonido sobrepuestas en una forma de onda electromagnética llamada **señal portadora**.



Onda de sonido

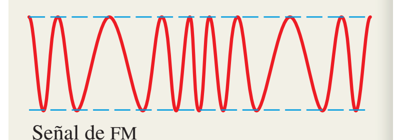
Señal portadora

Hay dos tipos de transmisión de radio, llamadas **amplitud modulada (AM)** y **frecuencia modulada (FM)**. En emisoras de AM la onda de sonido cambia o **modula** la amplitud de la portadora, pero la frecuencia permanece sin alteración.



Señal de AM

En emisoras de FM la onda de sonido modula la frecuencia, pero la amplitud permanece igual.



Señal de FM

EJEMPLO 9 ■ Curva coseno con amplitud variable

Trace la gráfica de la función $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$.

SOLUCIÓN En la figura 19 se muestra la gráfica. Aun cuando está trazada por computadora podríamos haberla creado manualmente trazando primero las curvas de frontera $y = \cos 2\pi x$ y $y = -\cos 2\pi x$. La gráfica de f es una curva coseno que está entre las gráficas de estas dos funciones.

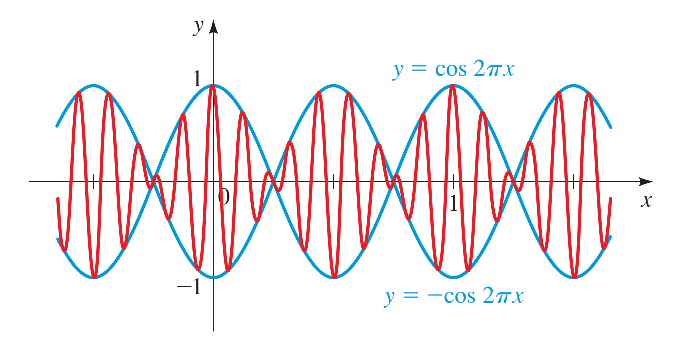


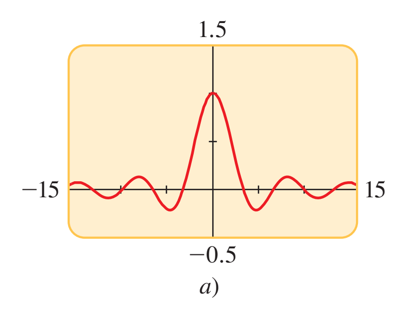
FIGURA 19 $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$

Ahora intente realizar el ejercicio 71 ■

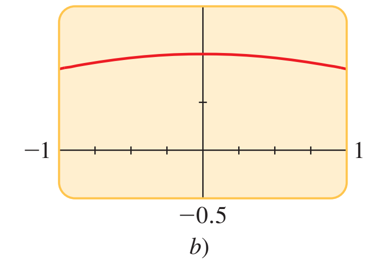
EJEMPLO 10 ■ Una curva seno con amplitud amortiguada

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es importante en cálculo. Trace la gráfica de esta función y comente sobre su comportamiento cuando x se aproxima a 0.

SOLUCIÓN El rectángulo de vista $[-15, 15]$ por $[-0.5, 1.5]$ que se muestra en la figura 20*a*) da una buena vista general de la gráfica de f. El rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-0.5, 1.5]$ de la figura 20*b*) se enfoca en el comportamiento de f cuando $x \approx 0$. Observe que aun cuando $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ (en otras palabras, 0 no está en el dominio de f), los valores de f parecen aproximarse a 1 cuando x se acerca a 0. Este hecho es crucial en cálculo.



a)



b)

FIGURA 20 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Ahora intente realizar el ejercicio 81 ■

La función del ejemplo 10 se puede escribir como

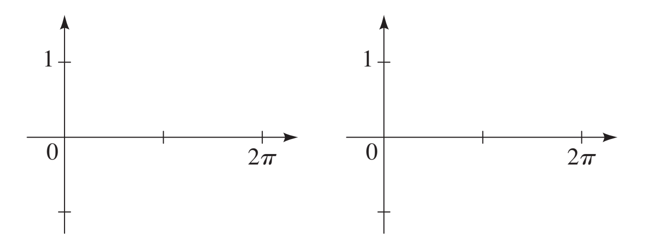
$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$$

y entonces se puede ver como una función seno cuya amplitud está controlada por la función $a(x) = 1/x$.

5.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función f es periódica con periodo p, entonces $f(t+p) =$ ________ para todo t. Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son periódicas, con periodo ________ y amplitud ________. Trace una gráfica de cada función en el intervalo $[0, 2\pi]$.



2. Para obtener la gráfica de $y = 5 + \operatorname{sen} x$, empezamos con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, luego la desplazamos 5 unidades ________ (hacia arriba o hacia abajo). Para obtener la gráfica de $y = -\cos x$, empezamos con la gráfica de $y = \cos x$, y luego la reflejamos respecto al eje ____.

3. Las curvas seno y coseno $y = a \operatorname{sen} kx$ y $y = a \cos kx$, $k > 0$, tienen amplitud ________ y periodo ________. La curva seno $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ tiene amplitud ________ y periodo ________.

4. La curva seno $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ tiene amplitud ________, periodo ________ y desfase ________. La curva seno $y = 4 \operatorname{sen} 3(x - \frac{\pi}{6})$ tiene amplitud ________, periodo ________ y desfase ________.

HABILIDADES

5–18 ■ Trazar gráficas de funciones seno y coseno Trace la gráfica de la función.

5. $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ **6.** $f(x) = -2 + \cos x$

7. $f(x) = -\operatorname{sen} x$ **8.** $f(x) = 2 - \cos x$

9. $f(x) = -2 + \operatorname{sen} x$ **10.** $f(x) = -1 + \cos x$

11. $g(x) = 3 \cos x$ **12.** $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$

13. $g(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ **14.** $g(x) = -\frac{2}{3} \cos x$

15. $g(x) = 3 + 3 \cos x$ **16.** $g(x) = 4 - 2 \operatorname{sen} x$

17. $h(x) = |\cos x|$ **18.** $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

19–32 ■ Amplitud y periodo Encuentre la amplitud y el periodo de la función y trace su gráfica.

19. $y = \cos 2x$ **20.** $y = -\operatorname{sen} 2x$

21. $y = -\operatorname{sen} 3x$ **22.** $y = \cos 4\pi x$

23. $y = -2 \cos 3\pi x$ **24.** $y = -3 \operatorname{sen} 6x$

25. $y = 10 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ **26.** $y = 5 \cos \frac{1}{4}x$

27. $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$ **28.** $y = 4 \operatorname{sen}(-2x)$

29. $y = -2 \operatorname{sen} 2\pi x$ **30.** $y = -3 \operatorname{sen} \pi x$

31. $y = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$ **32.** $y = -2 + \cos 4\pi x$

33–46 ■ Desfases Encuentre la amplitud, el periodo y el desfase de la función, y trace la gráfica de un periodo completo.

33. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **34.** $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

35. $y = -2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ **36.** $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

37. $y = -4 \operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **38.** $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

39. $y = 5 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ **40.** $y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

41. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ **42.** $y = 1 + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

43. $y = 3 \cos \pi(x + \frac{1}{2})$ **44.** $y = 3 + 2 \operatorname{sen} 3(x + 1)$

45. $y = \operatorname{sen}(\pi + 3x)$ **46.** $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

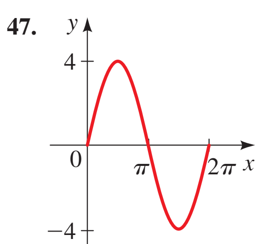
47–54 ■ Ecuaciones de una gráfica Se da la gráfica de un periodo completo de una curva seno o coseno.

a) Encuentre la amplitud, el periodo y el desfase.

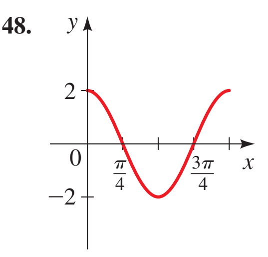
b) Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \quad \text{o} \quad y = a \cos k(x - b)$$

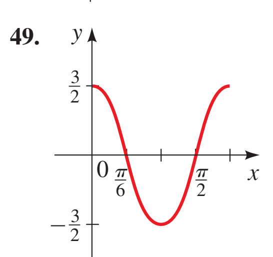
47.



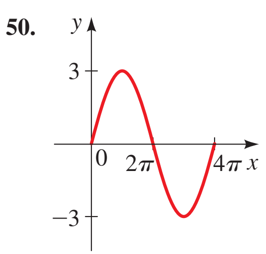
48.



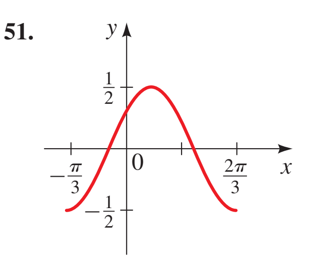
49.



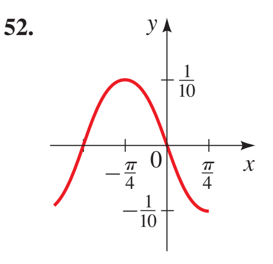
50.



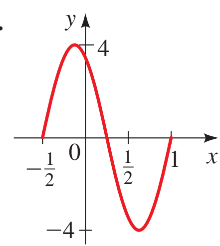
51.



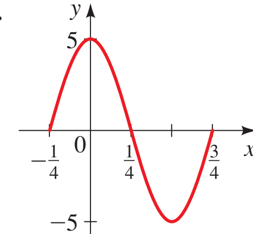
52.



53.



54.



55–62 ■ Trazar las gráficas de funciones trigonométricas Determine un rectángulo de vista apropiado para cada función y úselo para trazar la gráfica.

55. $f(x) = \cos 100x$

56. $f(x) = 3\ \text{sen}\ 120x$

57. $f(x) = \text{sen}(x/40)$

58. $f(x) = \cos(x/80)$

59. $y = \tan 25x$

60. $y = \csc 40x$

61. $y = \text{sen}^2\ 20x$

62. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$



63–66 ■ Adición gráfica Trace la gráfica de f, g y $f + g$ en una pantalla común para mostrar la adición gráfica.

63. $f(x) = x, \quad g(x) = \text{sen}\ x$

64. $f(x) = \text{sen}\ x, \quad g(x) = \text{sen}\ 2x$

65. $f(x) = \text{sen}\ 3x, \quad g(x) = \cos \frac{1}{2}x$

66. $f(x) = 0.5\ \text{sen}\ 5x, \quad g(x) = -\cos 2x$



67–72 ■ Curvas seno y coseno con amplitud variable Trace la gráfica de las tres funciones en una pantalla común. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

67. $y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = x^2\ \text{sen}\ x$

68. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \cos x$

69. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x}\ \text{sen}\ 5\pi x$

70. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2\pi x}{1 + x^2}$

71. $y = \cos 3\pi x, \quad y = -\cos 3\pi x, \quad y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$

72. $y = \text{sen}\ 2\pi x, \quad y = -\text{sen}\ 2\pi x, \quad y = \text{sen}\ 2\pi x\ \text{sen}\ 10\pi x$

HABILIDADES Plus



73–76 ■ Máximos y mínimos Encuentre los valores máximo y mínimo de la función.

73. $y = \text{sen}\ x + \text{sen}\ 2x$

74. $y = x - 2\ \text{sen}\ x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

75. $y = 2\ \text{sen}\ x + \text{sen}^2 x$

76. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \text{sen}\ x}$



77–80 ■ Resolver gráficamente ecuaciones trigonométricas Encuentre todas las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, \pi]$. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

77. $\cos x = 0.4$

78. $\tan x = 2$

79. $\csc x = 3$

80. $\cos x = x$



81–82 ■ Comportamiento límite de funciones trigonométricas Se da una función f.

a) ¿Es f par, impar o ninguna de estas?

b) Encuentre los puntos de intersección x de la gráfica de f.

c) Trace la gráfica de f en un rectángulo de vista apropiado.

d) Describa el comportamiento de la función a medida que $x \to \pm\infty$.

e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué ocurre cuando x se aproxima a 0?

81. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

82. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\ 4x}{2x}$

APLICACIONES

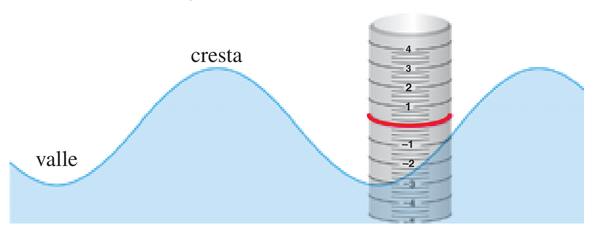
83. Altura de una ola Cuando pasa una ola por un rompeolas de pilotes, la altura del agua está modelada por la función

$$h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$$

donde $h(t)$ es la altura en pies sobre el nivel medio del mar en el tiempo t segundos.

a) Encuentre el periodo de la ola.

b) Encuentre la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.



84. Vibraciones de sonido Se pulsa un diapasón y cuando vibran sus puntas produce un tono puro. Las vibraciones son modeladas por la función

$$v(t) = 0.7\ \text{sen}(880\pi t)$$

donde $v(t)$ es el desplazamiento de las puntas en milímetros en el tiempo t segundos.

a) Encuentre el periodo de la vibración.

b) Encuentre la frecuencia de la vibración, es decir, el número de veces que la punta vibra por segundo.

c) Trace la gráfica de la función v.

85. Presión sanguínea Cada vez que pulsa nuestro corazón la presión sanguínea primero aumenta y después disminuye a medida que el corazón descansa entre una pulsación y otra. Las presiones sanguíneas máxima y mínima reciben el nombre de presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. Las lecturas de presión sanguínea se escriben como sistólica/diastólica. Una lectura de 120/80 se considera normal.

La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25\ \text{sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en mmHg (milímetros de mercurio), en el tiempo t medido en minutos.

a) Encuentre el periodo de p.

b) Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

c) Trace la gráfica de la función p.

d) Encuentre la lectura de presión sanguínea. ¿Cómo se compara esto contra la presión sanguínea normal?

86. Estrellas variables Las estrellas variables son aquellas cuyo brillo varía periódicamente. Una de las más visibles es R Leonis; su brillo está modelado por la función

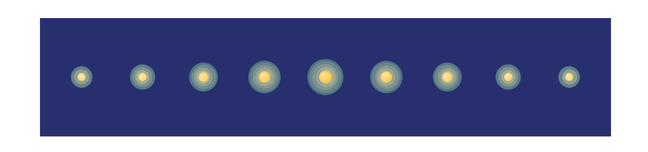
$$b(t) = 7.9 - 2.1 \cos\left(\frac{\pi}{156}t\right)$$

donde t se mide en días.

a) Encuentre el periodo de R Leonis.

b) Encuentre el brillo máximo y el brillo mínimo.

c) Trace la gráfica de la función b.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

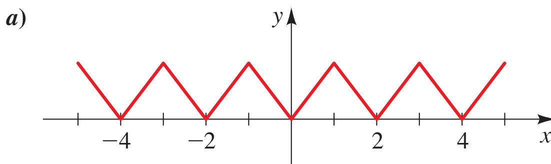
87. DISCUSIÓN: Composiciones que contienen funciones trigonométricas Este ejercicio explora el efecto de la función interior g en una función compuesta $y = f(g(x))$.

a) Trace la gráfica de la función $y = \text{sen}\sqrt{x}$ usando el rectángulo de vista $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la de la función seno?

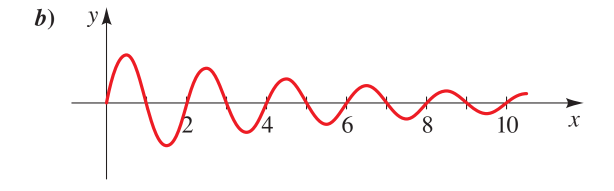
b) Trace la gráfica de la función $y = \text{sen}(x^2)$ usando el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la gráfica de la función seno?

88. DISCUSIÓN: Funciones periódicas I Recuerde que una función f es *periódica* si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t, y la más pequeña p (si existe) es el *periodo* de f. La gráfica de una función de periodo p se ve igual en cada intervalo de longitud p, de modo que podemos fácilmente determinar el periodo a partir de la gráfica. Determine si la función cuya gráfica se muestra es periódica; si es periódica, encuentre el periodo.

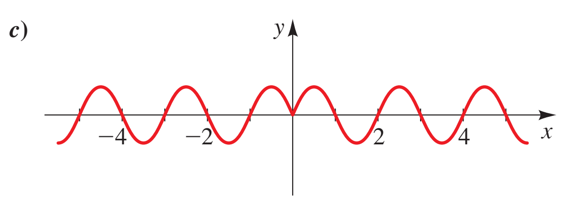
a)



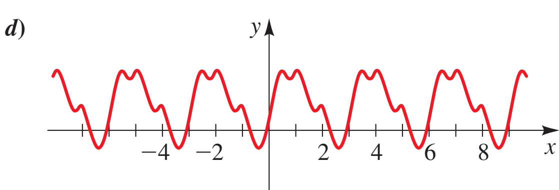
b)



c)



d)



89. DISCUSIÓN: Funciones periódicas II Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de las siguientes funciones. De la gráfica determine si la función es periódica; si es periódica encuentre el periodo. (Vea la página 163 para la definición de $[\![x]\!]$.)

a) $y = |\,\text{sen}\, x\,|$

b) $y = \text{sen}\,|\,x\,|$

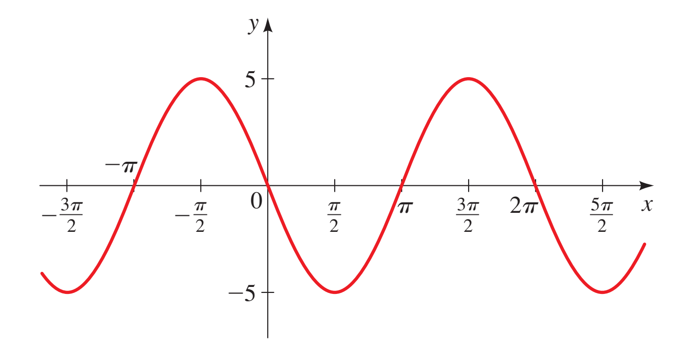
c) $y = 2^{\cos x}$

d) $y = x - [\![x]\!]$

e) $y = \cos(\text{sen}\, x)$

f) $y = \cos(x^2)$

90. DISCUSIÓN: Curvas senoidales La gráfica de $y = \text{sen}\, x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$ desplazada a la derecha $\pi/2$ unidades. Entonces, la curva seno $y = \text{sen}\, x$ es también, al mismo tiempo, una curva coseno: $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. De hecho, cualquier curva seno es también una curva coseno con un desfase diferente, y cualquier curva coseno también es una curva seno. Las curvas seno y coseno se conocen en forma colectiva como *senoidales*. Para la curva cuya gráfica se muestra, encuentre todas las formas posibles de expresarla como curva seno $y = a\,\text{sen}(x - b)$ o como curva coseno $y = a\cos(x - b)$. Explique por qué piensa que ha encontrado todas las opciones posibles para a y b en cada caso.



5.4 MÁS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

■ Gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante ■ Gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente ■ Gráficas de transformaciones de las funciones cosecante y secante

En esta sección trazamos la gráfica de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, y las transformaciones de estas funciones.

■ Gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Empezamos por expresar las propiedades periódicas de estas funciones. Recuerde que las funciones seno y coseno tienen periodo 2π. Dado que las funciones cosecante y secante son las recíprocas de las funciones seno y coseno, respectivamente, también tienen periodo 2π (vea el ejercicio 63). Las funciones tangente y cotangente, sin embargo, tienen periodo π (vea el ejercicio 83 de la sección 5.2).

PROPIEDADES PERIÓDICAS

Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen periodo 2π:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

x	$\tan x$
0	0
$\pi/6$	0.58
$\pi/4$	1.00
$\pi/3$	1.73
1.4	5.80
1.5	14.10
1.55	48.08
1.57	1 255.77
1.5707	10 381.33

Primero trazamos la gráfica de la función tangente. Como tiene periodo π, sólo necesitamos trazar la gráfica sobre cualquier intervalo de longitud π y luego repetir el patrón hacia la izquierda y hacia la derecha. Trazamos la gráfica en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Dado que $\tan(\pi/2)$ y $\tan(-\pi/2)$ no están definidas, es necesario tener cuidado al trazar la gráfica en los puntos cercanos a $\pi/2$ y $-\pi/2$. A medida que x se acerca a $\pi/2$ por medio de valores menores a $\pi/2$, el valor de $\tan x$ se hace grande. Para ver esto observe que cuando x se acerca a $\pi/2$, $\cos x$ tiende a 0 y $\operatorname{sen} x$ se aproxima a 1 y, así $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ es grande. Al margen se muestra una tabla de valores de $\tan x$ para x cercana a $\pi/2$ (≈ 1.570796).

Entonces, conforme x se aproxima a $\pi/2$ por la izquierda el valor de $\tan x$ crece sin límite. Expresamos esto escribiendo

$$\tan x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \frac{\pi}{2}^{-}$$

Esto se lee así: "tan x se aproxima al infinito cuando x se aproxima a $\pi/2$ por la izquierda".

Del mismo modo, cuando x se aproxima a $-\pi/2$ por la derecha, el valor de $\tan x$ decrece sin límite. Esto se escribe como

$$\tan x \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\frac{\pi}{2}^{+}$$

En la sección 3.6 se estudia la notación de flecha.

Esto se lee así: "tan x se aproxima al infinito negativo cuando x se aproxima a $-\pi/2$ por la derecha".

En la sección 3.6 se estudian las asíntotas.

Entonces, la gráfica de $y = \tan x$ se aproxima a las rectas verticales $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$. Por tanto, estas rectas son **asíntotas verticales**. Con la información que tenemos hasta ahora, trazamos la gráfica de $y = \tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$ en la figura 1.

Las matemáticas en el mundo moderno

Evaluación de funciones con una calculadora

¿En qué forma su calculadora evalúa sen t, cos t, e^t, ln t, $\sqrt{t}$, y otras funciones como estas? Un método es aproximar las funciones por medio de polinomios, ya que los polinomios son fáciles de evaluar. Por ejemplo,

$$\text{sen } t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

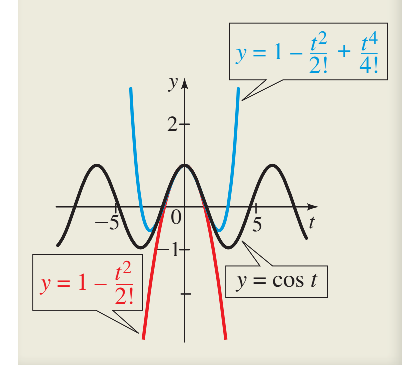
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Estas notables fórmulas fueron encontradas por el matemático inglés Brook Taylor (1685-1731). Por ejemplo, si usamos los primeros tres términos de la serie de Taylor para encontrar cos(0.4), obtenemos

$$\cos 0.4 \approx 1 - \frac{(0.4)^2}{2!} + \frac{(0.4)^4}{4!}$$

$$\approx 0.92106667$$

(Compare esto con el valor que usted obtiene en su calculadora.) La gráfica muestra que mientras más términos de la serie utilicemos, los polinomios se aproximarán más cercanamente a la función cos t.



La gráfica completa de la tangente (vea la figura 5*a*) en la página siguiente) se obtiene ahora usando el hecho de que la tangente es periódica con periodo π.

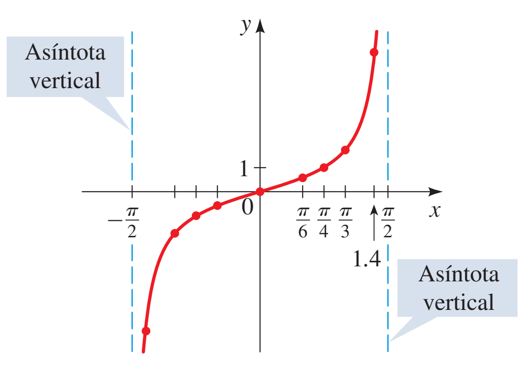


FIGURA 1 Un periodo de $y = \tan x$

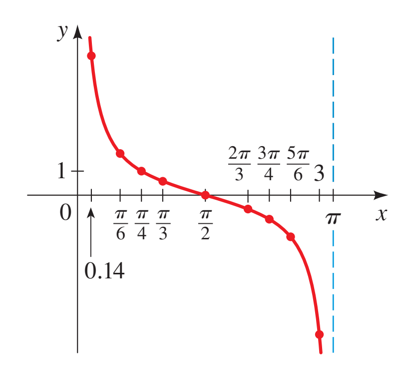


FIGURA 2 Un periodo de $y = \cot x$

La gráfica de la función $y = \cot x$ está en el intervalo $(0, \pi)$ por un análisis similar (vea la figura 2). Puesto que $\cot x$ no está definida para $x = n\pi$ con n un entero, su gráfica completa (en la figura 5*b*) de la página siguiente) tiene asíntotas verticales en estos valores.

Para trazar las gráficas de las funciones cosecante y secante, usamos las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen } x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por tanto, para trazar la gráfica de $y = \csc x$, tomamos las recíprocas de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \text{sen } x$. (Vea la figura 3.) Del mismo modo para trazar la gráfica de $y = \sec x$, tomamos las recíprocas de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \cos x$. (Vea la figura 4.)

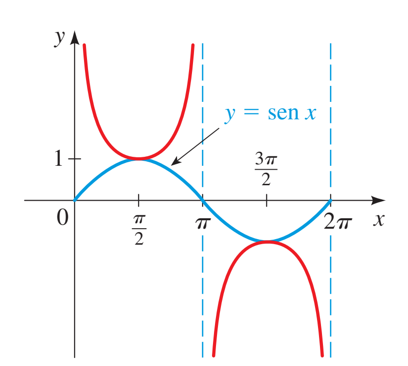


FIGURA 3 Un periodo de $y = \csc x$

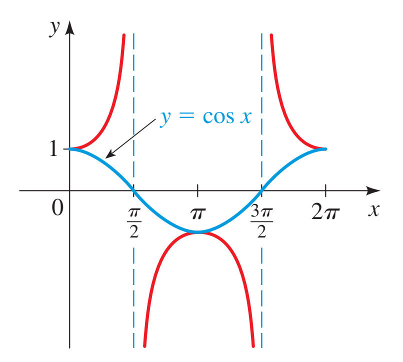


FIGURA 4 Un periodo de $y = \sec x$

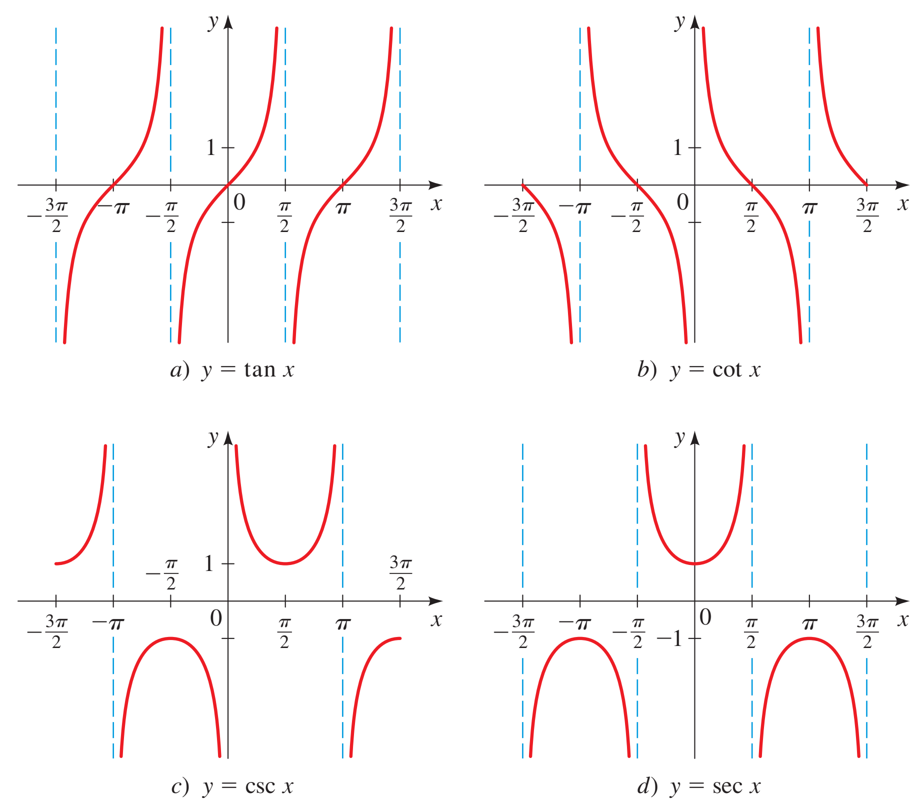
Consideremos más cercanamente la gráfica de la función $y = \csc x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Necesitamos examinar los valores de la función cerca de 0 y π, dado que en estos valores sen $x = 0$ y $\csc x$ está así indefinida. Vemos que

$$\csc x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0^+$$

$$\csc x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pi^-$$

Por tanto, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales. En el intervalo $\pi < x < 2\pi$ la gráfica se traza de la misma forma. Los valores de $\csc x$ en ese intervalo son los mismos que los del intervalo $0 < x < \pi$ excepto por el signo (vea la figura 3). La gráfica completa de la figura 5*c*) se obtiene ahora del hecho de que la función cosecante es

periódica con periodo 2π. Observe que la gráfica tiene asíntotas verticales en los puntos donde sen $x = 0$, es decir, en $x = n\pi$, para n un entero.



a) $y = \tan x$ *b*) $y = \cot x$

c) $y = \csc x$ *d*) $y = \sec x$

FIGURA 5

La gráfica de $y = \sec x$ se traza de un modo semejante. Observe que el dominio de sec x es el conjunto de todos los números reales que no sean $x = (\pi/2) + n\pi$, para n un entero, de modo que la gráfica tiene asíntotas verticales en esos puntos. La gráfica completa se muestra en la figura 5*d*).

Es evidente que las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son simétricas respecto al origen, mientras que la de $y = \sec x$ es simétrica resp ecto al eje y. Esto es porque las funciones tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, mientras que la función secante es una función par.

Gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente

Ahora consideramos gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente.

EJEMPLO 1 ■ Trazar la gráfica de curvas tangentes

Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

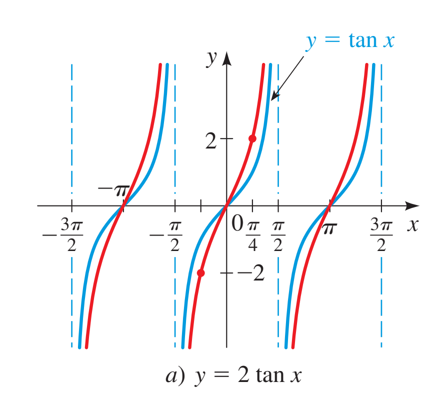
a) $y = 2 \tan x$ ***b***) $y = -\tan x$

SOLUCIÓN Primero trazamos la gráfica de $y = \tan x$ y luego la transformamos según sea necesario.

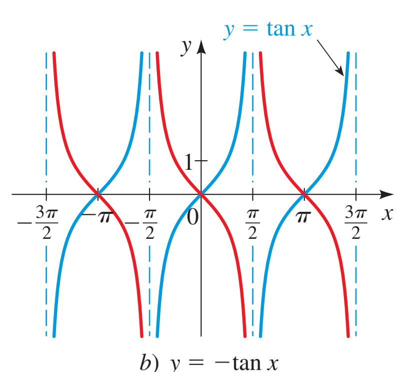
a) Para trazar la gráfica de $y = 2 \tan x$ multiplicamos la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \tan x$ por 2. La gráfica resultante se muestra en la figura 6*a*).

b) La gráfica de $y = -\tan x$ en la figura 6*b*) se obtiene de la de $y = \tan x$ por reflexión en el eje x.





a) $y = 2 \tan x$



b) $y = -\tan x$

FIGURA 6

Puesto que las funciones tangente y cotangente tienen periodo π, las funciones

$$y = a \tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cot kx \qquad (k > 0)$$

completan un periodo cuando kx varía de 0 a π, es decir, para $0 \le kx \le \pi$. Resolviendo esta desigualdad, obtenemos $0 \le x \le \pi/k$. Por tanto, cada una de ellas tiene periodo π/k.

CURVAS TANGENTE Y COTANGENTE

Las funciones

$$y = a \tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cot kx \qquad (k > 0)$$

tienen periodo π/k.

Por tanto, un periodo completo de las gráficas de estas funciones se presenta sobre cualquier intervalo de longitud π/k. Para trazar un periodo completo de estas gráficas es conveniente seleccionar un intervalo entre asíntotas verticales:

Para trazar la gráfica de un periodo de $y = a \tan kx$, un intervalo apropiado es $\left(-\dfrac{\pi}{2k}, \dfrac{\pi}{2k}\right)$.

Para trazar la gráfica de un periodo de $y = a \cot kx$, un intervalo apropiado es $\left(0, \dfrac{\pi}{k}\right)$.

EJEMPLO 2 ■ Trazar la gráfica de curvas tangentes

Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = \tan 2x$ ***b)*** $y = \tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN

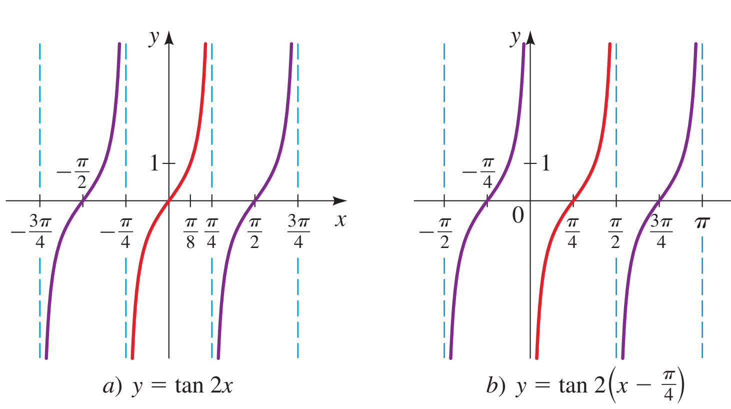
a) El periodo es $\pi/2$ y un intervalo apropiado es $(-\pi/4, \pi/4)$. Los puntos extremos $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$ son asíntotas verticales. De esta manera, trazamos la gráfica de un periodo completo de la función en $(-\pi/4, \pi/4)$. La gráfica tiene la misma forma que la de la función tangente, pero está contraída horizontalmente en un factor de $\frac{1}{2}$. Luego repetimos esa parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha. Vea la figura 7*a*).

b) La gráfica es la misma que la del inciso *a*), pero está desplazada a la derecha $\pi/4$, como se muestra en la figura 7*b*).

Puesto que $y = \tan x$ completa un periodo entre $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$, la función $y = \tan 2(x - \frac{\pi}{4})$ completa un periodo cuando $2(x - \frac{\pi}{4})$ varía de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Inicio de periodo:	Fin de periodo:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2}$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$
$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$

Luego trazamos la gráfica de un periodo en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.



a) $y = \tan 2x$ *b)* $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

FIGURA 7

Ahora intente realizar los ejercicios 19, 35 y 43 ■

EJEMPLO 3 ■ Un desplazamiento de una curva cotangente

Trace la gráfica de $y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN Primero ponemos esto en la forma $y = a\cot k(x - b)$ al factorizar 3 de la expresión $3x - \frac{\pi}{4}$:

$$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cot 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$$

Así, la gráfica es la misma que la de $y = 2\cot 3x$ pero está desplazada a la derecha $\pi/12$. El periodo de $y = 2\cot 3x$ es $\pi/3$, y un intervalo apropiado es $(0, \pi/3)$. Para obtener el intervalo correspondiente para la gráfica deseada desplazamos este intervalo a la derecha $\pi/12$. Por lo que tenemos

$$\left(0 + \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$$

Puesto que $y = \cot x$ completa un periodo entre $y = 0$ y $y = \pi$, la función $y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ completa un periodo cuando $3x - \frac{\pi}{4}$ varía de 0 a π.

Inicio de periodo:	Fin de periodo:
$3x - \frac{\pi}{4} = 0$	$3x - \frac{\pi}{4} = \pi$
$3x = \frac{\pi}{4}$	$3x = \frac{5\pi}{4}$
$x = \frac{\pi}{12}$	$x = \frac{5\pi}{12}$

Finalmente, trazamos la gráfica de un periodo en la forma de cotangente en el intervalo $(\pi/12, 5\pi/12)$ y repetimos la parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha. (Vea la figura 8.)

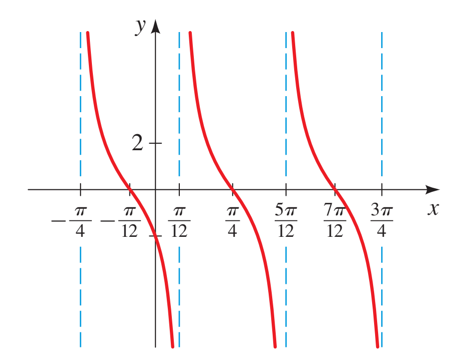


FIGURA 8
$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Ahora intente realizar los ejercicios 37 y 47 ■

■ Gráficas de transformaciones de las funciones cosecante y secante

Ya hemos observado que las funciones cosecante y secante son las recíprocas de las funciones seno y coseno. Entonces, el siguiente resultado es similar al resultado para curvas seno y coseno en la sección 5.3.

CURVAS COSECANTE Y SECANTE

Las funciones

$$y = a\csc kx \qquad \text{y} \qquad y = a\sec kx \qquad (k > 0)$$

tienen periodo $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado sobre el cual trazar la gráfica de un periodo completo es $(0, 2\pi/k)$.

EJEMPLO 4 ■ Trazar la gráfica de curvas cosecantes

Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ ***b)*** $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

SOLUCIÓN

a) El periodo es $2\pi/2 = \pi$. Un intervalo apropiado es $[0, \pi]$ y las asíntotas se presentan sobre este intervalo siempre que sen $2x = 0$. Entonces las asíntotas sobre este intervalo son $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$. Con esta información trazamos en el intervalo $[0, \pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un periodo de la función cosecante. La gráfica completa de la figura 9*a*) se obtiene al repetir esta parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha.

b) Primero escribimos

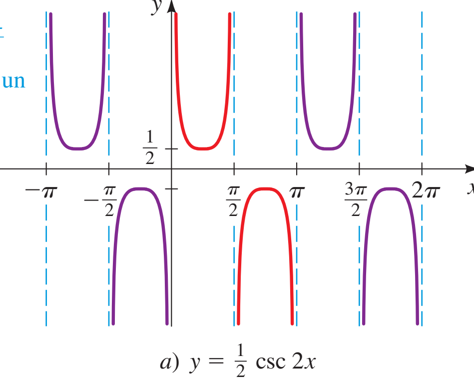
$$y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\csc 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

De esto vemos que la gráfica es la misma que la del inciso *a*) pero desplazada a la izquierda $\pi/4$. En la figura 9*b*) se muestra la gráfica.

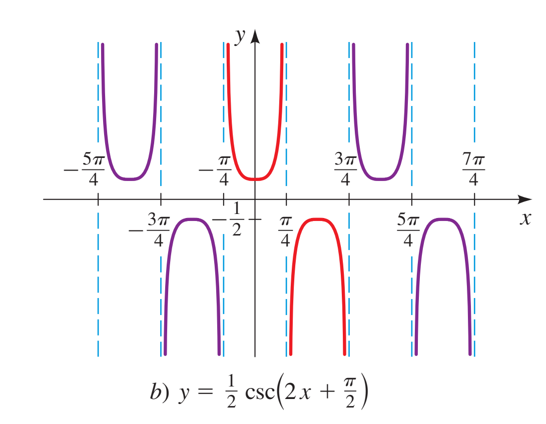
Puesto que $y = \csc x$ completa un periodo entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, la función $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ completa un periodo cuando $2x + \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a 2π.

Inicio de periodo:	Fin de periodo:
$2x + \frac{\pi}{2} = 0$	$2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$
$2x = -\frac{\pi}{2}$	$2x = \frac{3\pi}{2}$
$x = -\frac{\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$

Entonces trazamos la gráfica de un periodo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.



a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$



b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

FIGURA 9

Ahora intente realizar los ejercicios 29 y 49 ■

EJEMPLO 5 ■ Trazar la gráfica de una curva secante

Trace la gráfica de $y = 3\sec\frac{1}{2}x$.

SOLUCIÓN El periodo es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$. Un intervalo apropiado es $[0, 4\pi]$ y las asíntotas se presentan sobre este intervalo en donde $\cos\frac{1}{2}x = 0$. Entonces, las asíntotas sobre este intervalo son $x = \pi$, $x = 3\pi$. Con esta información trazamos en el intervalo $[0, 4\pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un periodo de la función secante. La gráfica completa de la figura 10 se obtiene al repetir esta parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha.

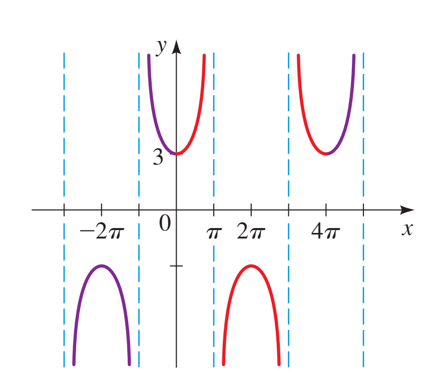


FIGURA 10
$y = 3\sec\frac{1}{2}x$

Ahora intente realizar los ejercicios 31 y 51 ■

5.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función trigonométrica $y = \tan x$ tiene periodo ________ y asíntotas $x =$ ________. Trace una gráfica de esta función en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

2. La función trigonométrica $y = \csc x$ tiene periodo ________ y asíntotas $x =$ ________. Trace una gráfica de esta función en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

HABILIDADES

3–8 ■ Gráficas de funciones trigonométricas Relacione la función trigonométrica con una de las gráficas I-VI.

3. $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

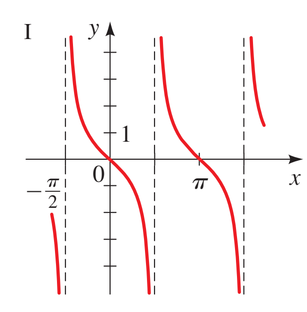
4. $f(x) = \sec 2x$

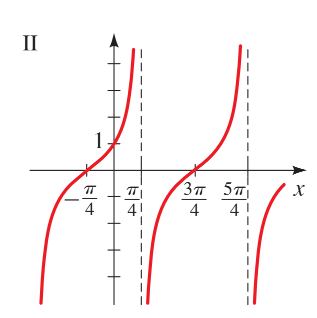
5. $f(x) = \cot 4x$

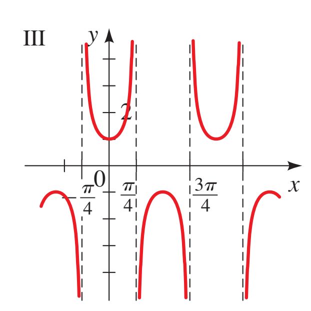
6. $f(x) = -\tan x$

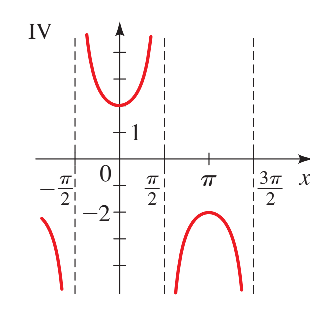
7. $f(x) = 2 \sec x$

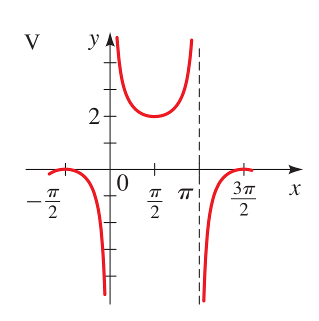
8. $f(x) = 1 + \csc x$

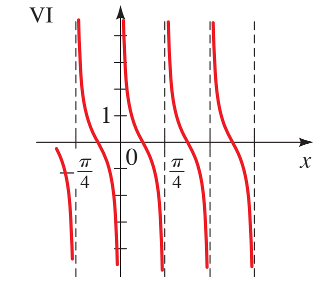












9–18 ■ Gráficas de funciones trigonométricas Encuentre el periodo y trace la gráfica de la función.

9. $y = 3 \tan x$

10. $y = -3 \tan x$

11. $y = -\frac{3}{2} \tan x$

12. $y = \frac{3}{4} \tan x$

13. $y = -\cot x$

14. $y = 2 \cot x$

15. $y = 2 \csc x$

16. $y = \frac{1}{2} \csc x$

17. $y = 3 \sec x$

18. $y = -3 \sec x$

19–34 ■ Gráficas de funciones trigonométricas con diferentes periodos Encuentre el periodo y trace la gráfica de la función.

19. $y = \tan 3x$

20. $y = \tan 4x$

21. $y = -5 \tan \pi x$

22. $y = -3 \tan 4\pi x$

23. $y = 2 \cot 3\pi x$

24. $y = 3 \cot 2\pi x$

25. $y = \tan \dfrac{\pi}{4} x$

26. $y = \cot \dfrac{\pi}{2} x$

27. $y = 2 \tan 3\pi x$

28. $y = 2 \tan \dfrac{\pi}{2} x$

29. $y = \csc 4x$

30. $y = 5 \csc 3x$

31. $y = \sec 2x$

32. $y = \frac{1}{2} \sec (4\pi x)$

33. $y = 5 \csc \dfrac{3\pi}{2} x$

34. $y = 5 \sec 2\pi x$

35–60 ■ Gráficas de funciones trigonométricas con desfases Encuentre el periodo y trace la gráfica de la función.

35. $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

36. $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

37. $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

38. $y = 2 \cot\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

39. $y = \csc\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

40. $y = \sec\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

41. $y = \dfrac{1}{2} \sec\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

42. $y = 3 \csc\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

43. $y = \tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

44. $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

45. $y = 5 \cot\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

46. $y = 4 \tan(4x - 2\pi)$

47. $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

48. $y = \frac{1}{2} \tan(\pi x - \pi)$

49. $y = 2 \csc\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

50. $y = 3 \sec\left(\dfrac{1}{4}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

51. $y = \sec 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

52. $y = \csc 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

53. $y = 5 \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

54. $y = \frac{1}{2} \sec(2\pi x - \pi)$

55. $y = \tan\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

56. $y = \tan \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

57. $y = 3 \sec \pi(x + \frac{1}{2})$

58. $y = \sec\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

59. $y = -2 \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

60. $y = 2 \cot(3\pi x + 3\pi)$

APLICACIONES

61. Faro El haz luminoso de un faro completa una rotación cada dos minutos. En el tiempo t, la distancia d mostrada en la figura que se muestra a continuación es

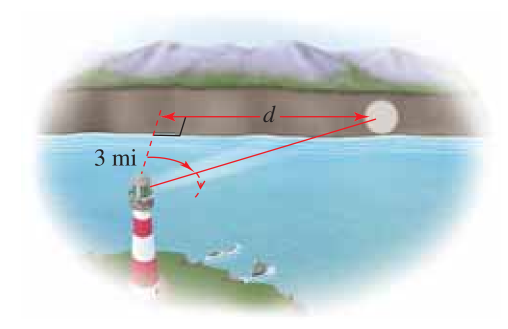
$$d(t) = 3 \tan \pi t$$

donde t se mide en minutos y d en millas.

a) Encuentre $d(0.15)$, $d(0.25)$ y $d(0.45)$.

b) Trace una gráfica de la función d para $0 \le t < \frac{1}{2}$.

c) ¿Qué ocurre a la distancia d cuando t se aproxima a $\frac{1}{2}$?



62. Longitud de una sombra En un día cuando el Sol pasa directamente encima al mediodía, un hombre de 6 pies de estatura proyecta una sombra de longitud

$$S(t) = 6\left|\cot \frac{\pi}{12} t\right|$$

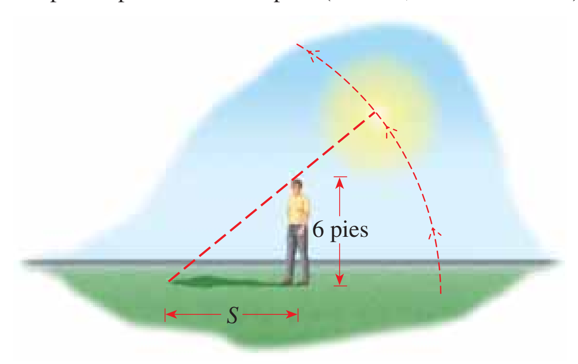
donde S se mide en pies y t es el número de horas desde las 6 a.m.

a) Encuentre la longitud de la sombra a las 8:00 a.m, al mediodía, a las 2:00 p.m. y a las 5:45 p.m.

b) Trace una gráfica de la función S para $0 < t < 12$.

c) De la gráfica determine los valores de t en los que la longitud de la sombra es igual a la estatura del hombre. ¿A qué hora corresponde cada uno de estos valores?

d) Explique lo que ocurre a la sombra a medida que el tiempo se aproxima a las 6 p.m. (es decir, cuando $t \to 12^-$).



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

63. DEMOSTRACIÓN: Funciones periódicas ***a)*** Demuestre que si f es periódica con periodo p, entonces $1/f$ también es periódica con periodo p.

b) Demuestre que tanto la cosecante como la secante tienen periodo 2π.

64. DEMOSTRACIÓN: Funciones periódicas Demuestre que, si f y g son periódicas con periodo p, entonces f/g también es periódica pero su periodo podría ser menor que p.

65. DEMOSTRACIÓN: Fórmulas de reducción Use las gráficas de la figura 5 para explicar por qué son verdaderas las siguientes fórmulas.

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x \qquad \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \csc x$$

5.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y SUS GRÁFICAS

■ La función seno inverso ■ La función coseno inverso ■ La función tangente inversa ■ Las funciones secante, cosecante y cotangente inversas

En las secciones 6.4-6.6 se estudian las aplicaciones de funciones trigonométricas inversas a triángulos.

Recuerde de la sección 2.8 que la inversa de una función f es una función f^{-1} que invierte la regla de f. Para que una función tenga inversa debe ser uno a uno. Dado que las funciones trigonométricas no son uno a uno, no tienen inversas pero es posible restringir los dominios de funciones trigonométricas en forma tal que las funciones resultantes sean uno a uno.

■ La función seno inverso

Consideremos la función seno en primer término. Hay numerosas formas de restringir el dominio del seno de manera que la nueva función sea uno a uno. Una forma natural de hacer esto es restringir el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. La razón para esta op-

ción es que el seno es uno a uno sobre este intervalo y además alcanza cada uno de los valores en su rango en este intervalo. De la figura 1 vemos que el seno es uno a uno sobre este dominio restringido (por la prueba de la recta horizontal) y, por tanto, tiene una inversa.

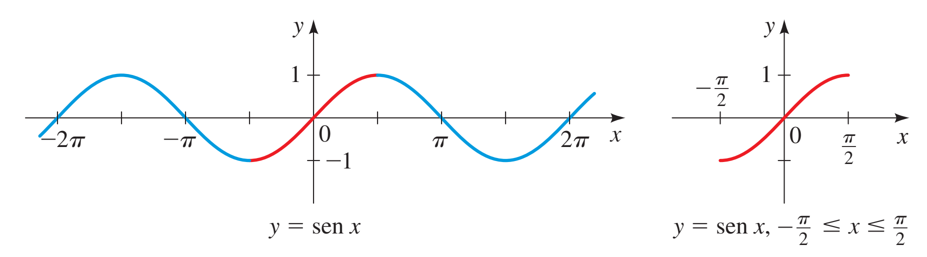


FIGURA 1 Gráficas de la función seno y la función seno restringida

FIGURA 2 Gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$

Ahora podemos definir una función seno inverso sobre este dominio restringido. La gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$ se muestra en la figura 2; se obtiene reflejando la gráfica de $y = \text{sen } x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, en la recta $y = x$.



DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN SENO INVERSO

La **función seno inverso** es la función sen^{-1} con dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$ definida por

$$\text{sen}^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen } y = x$$

La función seno inverso también se denomina **arcoseno** y se denota por **arcsen**.

Así, $y = \text{sen}^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *cuyo seno es* x. En otras palabras, $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$. De hecho, de las propiedades generales de funciones inversas estudiadas en la sección 2.8 tenemos las siguientes **propiedades de cancelación**.

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para} \quad -1 \le x \le 1$$

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de la función seno inverso

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

a) $\text{sen}^{-1} \dfrac{1}{2}$ ***b)*** $\text{sen}^{-1} \left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ***c)*** $\text{sen}^{-1} \dfrac{3}{2}$

SOLUCIÓN

a) El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{1}{2}$ es $\pi/6$. Así, $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2} = \pi/6$.

b) El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$ es $-\pi/6$. Así, $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi/6$.

c) Dado que $\frac{3}{2} > 1$, no está en el dominio de $\text{sen}^{-1} x$, de modo que $\text{sen}^{-1} \frac{3}{2}$ no está definido.

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Uso de calculadora para evaluar seno inverso

Encuentre valores aproximados para ***a*)** $\text{sen}^{-1}(0.82)$ y ***b*)** $\text{sen}^{-1}\frac{1}{3}$.

SOLUCIÓN

Usamos una calculadora para aproximar estos valores. Usando las teclas `SIN⁻¹` o `INV` `SIN` o `ARC` `SIN` de una calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

***a*)** $\text{sen}^{-1}(0.82) \approx 0.96141$ ***b*)** $\text{sen}^{-1}\frac{1}{3} \approx 0.33984$


Ahora intente realizar los ejercicios 11 y 21 ■

Cuando evaluamos expresiones que contienen sen^{-1}, necesitamos recordar que el rango de sen^{-1} es el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

EJEMPLO 3 ■ Evaluación de expresiones con seno inverso

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

***a*)** $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ ***b*)** $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$

SOLUCIÓN

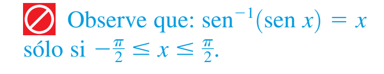
***a*)** Dado que $\pi/3$ está en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, podemos usar las propiedades de cancelación de las funciones inversas (página 440):

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Propiedad de cancelación: } -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2}$$

***b*)** Primero evaluamos la expresión de los paréntesis:

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{Evalúe}$$

$$= \frac{\pi}{3} \qquad \text{Porque sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$


Observe que: $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x) = x$ sólo si $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Ahora intente realizar los ejercicios 31 y 33 ■

La función coseno inverso

Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$, la función resultante es uno a uno y tiene una inversa. Escogemos este intervalo porque en este el coseno alcanza cada uno de sus valores exactamente una vez (vea la figura 3).

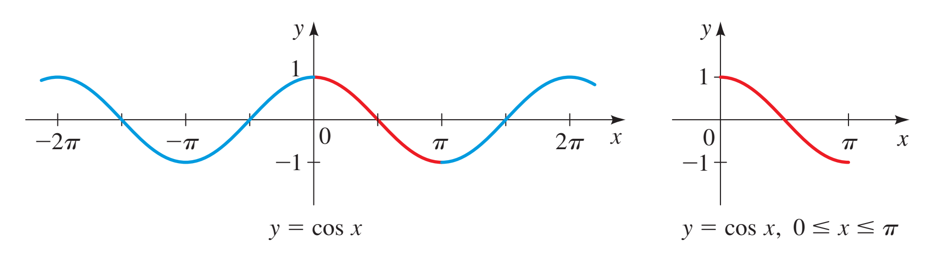


FIGURA 3 Gráficas de la función coseno y de la función coseno restringida

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN COSENO INVERSO

La **función coseno inverso** es la función $\cos^{-1}$ con dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$ definida por

$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

La función coseno inverso también se llama **arcocoseno** y se denota por **arccos**.

FIGURA 4 Gráfica de $y = \cos^{-1} x$

Así, $y = \cos^{-1}$ *es el número en el intervalo* $[0, \pi]$ *cuyo coseno es* x. Las siguientes **propiedades de cancelación** se siguen de las propiedades de función inversa.

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1$$
$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ se muestra en la figura 4; se obtiene al reflejar la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, en la recta $y = x$.

EJEMPLO 4 ■ Evaluación de la función coseno inversa

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

a) $\cos^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ***b***) $\cos^{-1} 0$ ***c***) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN

a) El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/6$. Así, $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$.

b) El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es 0 es $\pi/2$. Así, $\cos^{-1} 0 = \pi/2$.

c) El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Así, $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 2\pi/3$. (La gráfica de la figura 4 muestra que si $-1 \leq x < 0$, entonces $\cos^{-1} x > \pi/2$.)


Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 13 ■

EJEMPLO 5 ■ Evaluación de expresiones con coseno inverso

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

a) $\cos^{-1}\left(\cos \dfrac{2\pi}{3}\right)$ ***b***) $\cos^{-1}\left(\cos \dfrac{5\pi}{3}\right)$

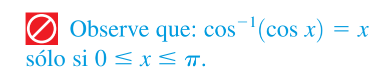
SOLUCIÓN

a) Dado que $2\pi/3$ está en el intervalo $[0, \pi]$ podemos usar las propiedades de cancelación ya citadas líneas arriba:

$$\cos^{-1}\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{Propiedad de cancelación: } 0 \leq \frac{2\pi}{3} \leq \pi$$

b) Primero evaluamos la expresión en paréntesis:

$$\cos^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Evalúe}$$
$$= \frac{\pi}{3} \qquad \text{Porque } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$


Observe que: $\cos^{-1}(\cos x) = x$ sólo si $0 \leq x \leq \pi$.

Ahora intente realizar los ejercicios 35 y 37 ■

■ La función tangente inversa

Restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para obtener una función uno a uno.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN TANGENTE INVERSA

La **función tangente inversa** es la función $\tan^{-1}$ con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$ definida por

$$\tan^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$$

La función tangente inversa también se llama **arcotangente** y se denota por **arctan**.

Así, $y = \tan^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $(-\pi/2, \pi/2)$ *cuya tangente es* x. Las siguientes **propiedades de cancelación** se siguen de las propiedades de la función inversa.

$$\tan(\tan^{-1} x) = x \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

La figura 5 muestra la gráfica de $y = \tan x$ en un intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y la gráfica de su función inversa, $y = \tan^{-1} x$.

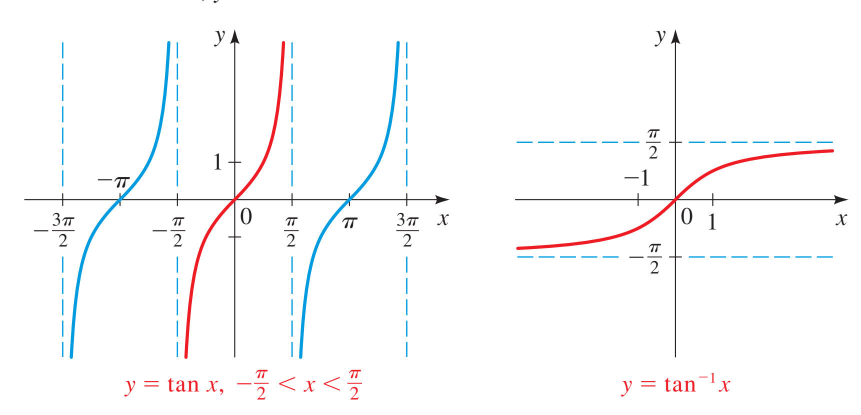


FIGURA 5 Gráficas de la función tangente restringida y de la función tangente inversa

EJEMPLO 6 ■ Evaluar la función tangente inversa

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

***a*)** $\tan^{-1} 1$ ***b*)** $\tan^{-1} \sqrt{3}$ ***c*)** $\tan^{-1}(20)$

SOLUCIÓN

***a*)** El número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con tangente 1 es $\pi/4$. Por tanto, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$.

***b*)** El número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con tangente $\sqrt{3}$ es $\pi/3$. Por tanto, $\tan^{-1} \sqrt{3} = \pi/3$.

***c*)** Usamos una calculadora (en modo de radianes) para encontrar que $\tan^{-1}(20) \approx 1.52084$.

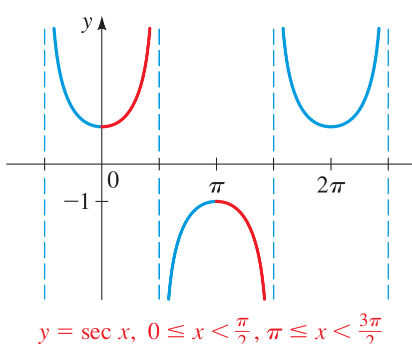
Ahora intente realizar los ejercicios 7 y 17 ■

■ Las funciones secante, cosecante y cotangente inversas

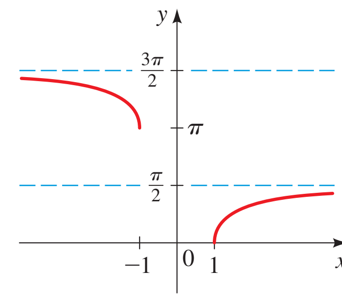
Vea en el ejercicio 46 de la sección 6.4 (página 508) una forma de encontrar los valores de estas funciones trigonométricas con una calculadora.

Para definir las funciones inversas de las funciones secante, cosecante y cotangente restringimos el dominio de cada función a un conjunto en el que es uno a uno y en el que alcanza todos sus valores. Aun cuando es apropiado cualquier intervalo que satisfaga estos criterios escogemos restringir los dominios en una forma que simplifica la selección de signo en cálculos que contengan funciones trigonométricas inversas. Las selecciones que hagamos también son apropiadas para cálculo. Esto explica la aparentemente extraña restricción para los dominios de las funciones secante y cosecante.

Terminamos esta sección presentando las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente con sus dominios restringidos y las gráficas de sus funciones inversas (figuras 6-8).

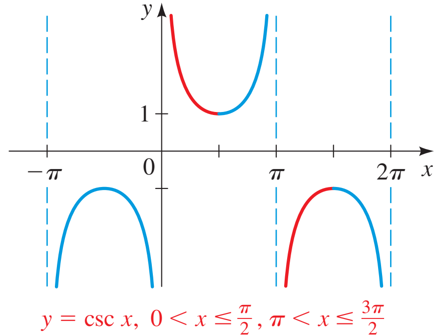


$y = \sec x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2},\ \pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$

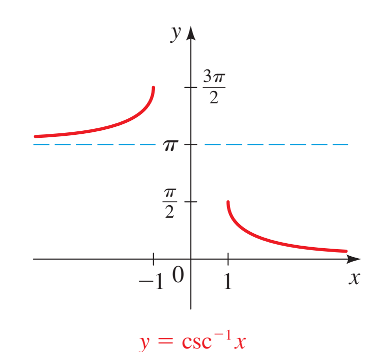


$y = \sec^{-1} x$

FIGURA 6 La función secante inversa

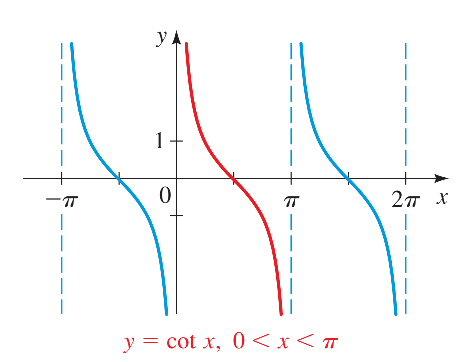


$y = \csc x,\ 0 < x \leq \frac{\pi}{2},\ \pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$

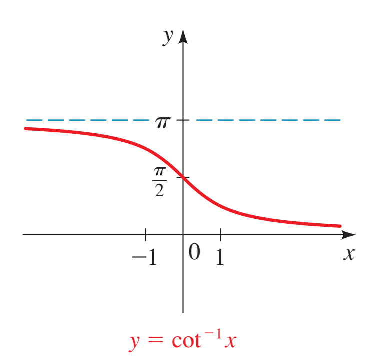


$y = \csc^{-1} x$

FIGURA 7 La función cosecante inversa



$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$



$y = \cot^{-1} x$

FIGURA 8 La función cotangente inversa

5.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. *a*) Para definir la función seno inverso restringimos el dominio de seno al intervalo ______. En este intervalo la función seno es uno a uno y su función inversa sen^{-1} está definida por $\text{sen}^{-1} x = y \Leftrightarrow \text{sen}$ ______ = ______. Por ejemplo, $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ = ______ porque sen ______ = ______.

***b*)** Para definir la función coseno inverso restringimos el dominio de coseno al intervalo ______. En este intervalo la función coseno es uno a uno y su función inversa $\cos^{-1}$ está definida por $\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow$ cos ______ = ______. Por ejemplo, $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ = ______ porque cos ______ = ______.

2. La propiedad de cancelación $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x$ es válida para x en el intervalo ______. ¿Cuál de los siguientes enunciados no es verdadero?

i) $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ *ii*) $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\, \frac{10\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$

iii) $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$

HABILIDADES

3–10 ■ Evaluar funciones trigonométricas inversas Encuentre el valor exacto de cada expresión si está definida.

3. *a*) $\text{sen}^{-1} 1$ ***b*)** $\text{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ ***c*)** $\text{sen}^{-1} 2$

4. *a)* $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ *b)* $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ *c)* $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

5. *a)* $\cos^{-1}(-1)$ *b)* $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ *c)* $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. *a)* $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\cos^{-1}1$ *c)* $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

7. *a)* $\tan^{-1}(-1)$ *b)* $\tan^{-1}\sqrt{3}$ *c)* $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. *a)* $\tan^{-1}0$ *b)* $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ *c)* $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

9. *a)* $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ *b)* $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *c)* $\tan^{-1}1$

10. *a)* $\cos^{-1}0$ *b)* $\operatorname{sen}^{-1}0$ *c)* $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$

11–22 ■ Funciones trigonométricas inversas con una calculadora Use una calculadora para encontrar un valor aproximado de cada expresión redondeado a cinco decimales, si está definido.

11. $\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}$
12. $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{8}{9})$
13. $\cos^{-1}(-\frac{3}{7})$
14. $\cos^{-1}(\frac{4}{9})$
15. $\cos^{-1}(-0.92761)$
16. $\operatorname{sen}^{-1}(0.13844)$
17. $\tan^{-1}10$
18. $\tan^{-1}(-26)$
19. $\tan^{-1}(1.23456)$
20. $\cos^{-1}(1.23456)$
21. $\operatorname{sen}^{-1}(-0.25713)$
22. $\tan^{-1}(-0.25713)$

23–48 ■ Simplificar expresiones que implican funciones trigonométricas Encuentre el valor exacto de la expresión, si está definida.

23. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4})$
24. $\cos(\cos^{-1}\frac{2}{3})$
25. $\tan(\tan^{-1}5)$
26. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}5)$
27. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{2})$
28. $\tan(\tan^{-1}\frac{3}{2})$
29. $\cos\left(\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$
30. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$
31. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
32. $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
33. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
34. $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
35. $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
36. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
37. $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$
38. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$
39. $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
40. $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
41. $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
42. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$
43. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2})$
44. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}0)$
45. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
46. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
47. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(-1))$
48. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

49–50 ■ DEMOSTRACIÓN: Identidades que implican funciones trigonométricas inversas *a)* Trace la gráfica de la función y haga una conjetura, y *b)* demuestre que su conjetura es verdadera.

49. $y = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$
50. $y = \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x}$

51. **DISCUSIÓN: Dos composiciones diferentes** Sean f y g las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$

y

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}x)$$

Por las propiedades de cancelación, $f(x) = x$ y $g(x) = x$ para valores apropiados de x. Pero estas funciones no son las mismas para toda x. Trace la gráfica de f y g para mostrar cómo difieren las funciones. (Piense con todo cuidado en el dominio y el rango de sen^{-1}.)

5.6 MODELADO DE MOVIMIENTO ARMÓNICO

■ Movimiento armónico simple ■ Movimiento armónico amortiguado ■ Fase y diferencia de fase

El comportamiento periódico —que se repite una y otra vez—, es común en la naturaleza. Quizá el ejemplo más común sea el amanecer y la puesta del Sol que resultan en la repetitiva regla de día, noche, día, noche, . . . Otro ejemplo es la diaria variación de los niveles de la marea en la playa, que resulta en la diaria repetición de marea alta, marea baja, marea alta, marea baja, ... Ciertas poblaciones de animales aumentan y disminuyen en una forma periódica que se puede predecir: una población grande agota la provisión de alimento, lo cual hace que la población disminuya; esto, a su vez, resulta en una provisión más abundante de alimento, lo cual hace posible que la población aumente; y el patrón se repite una y otra vez (vea el *Proyecto de descubrimiento: Modelos depredador/presa* en la página 427).

Otros ejemplos comunes de comportamiento periódico comprenden el movimiento que es causado por la vibración o la oscilación. Una masa suspendida de un resorte que

ha sido comprimido y luego se deja vibrar verticalmente es un movimiento simple. Este movimiento de ida y vuelta también se presenta en fenómenos diversos como, por ejemplo, ondas de sonido, ondas de luz, corriente eléctrica alternante y estrellas que pulsan, por citar algunos. En esta sección consideramos el problema de modelar el comportamiento periódico.

Movimiento armónico simple

Las funciones trigonométricas son idealmente apropiadas para modelar el comportamiento periódico. Una mirada a las gráficas de las funciones seno y coseno, por ejemplo, nos dice que estas funciones por sí solas exhiben comportamiento periódico. La figura 1 muestra la gráfica de $y = \text{sen } t$. Si consideramos t como tiempo, vemos que a medida que el tiempo transcurre, $y = \text{sen } t$ aumenta y disminuye una y otra vez. La figura 2 muestra que el movimiento de una masa en vibración en un resorte está modelada precisamente por $y = \text{sen } t$.

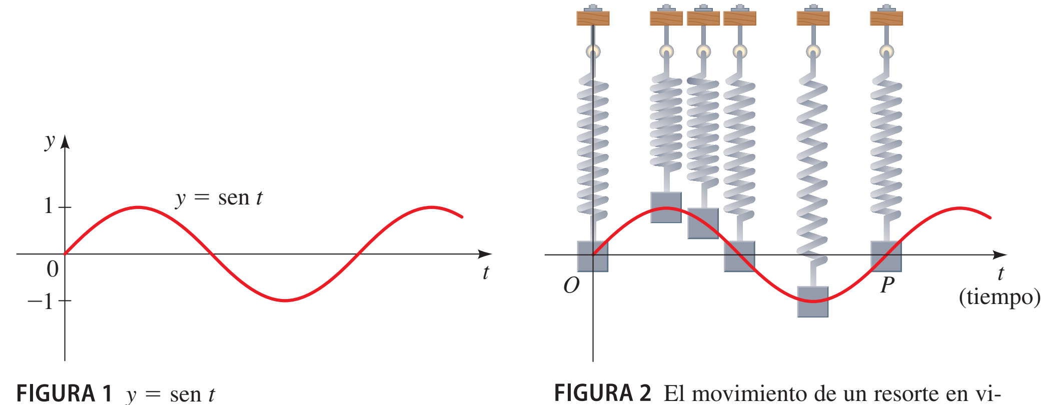


FIGURA 1 $y = \text{sen } t$

FIGURA 2 El movimiento de un resorte en vibración está modelado por $y = \text{sen } t$.

Observe que la masa regresa a su posición original una y otra vez. Un **ciclo** es una vibración completa de un cuerpo, de modo que la masa de la figura 2 completa un ciclo de su movimiento entre O y P. Nuestras observaciones acerca de la forma en que las funciones seno y coseno modelan el comportamiento periódico se resumen en el recuadro siguiente.

La diferencia principal entre las dos ecuaciones que describen el movimiento armónico simple es el punto de inicio. En $t = 0$ tenemos

$$y = a \text{ sen } \omega \cdot 0 = 0$$

$$y = a \cos \omega \cdot 0 = a$$

En el primer caso el movimiento "inicia" con cero desplazamiento, mientras que en el segundo caso el movimiento "inicia" con el desplazamiento al máximo (en la amplitud a).

El símbolo ω es la letra minúscula griega "omega", y ν es la letra "nu".

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Si la ecuación que describe el desplazamiento y de un cuerpo en el tiempo t es

$$y = a \text{ sen } \omega t \qquad \text{o} \qquad y = a \cos \omega t$$

entonces el cuerpo está en **movimiento armónico simple**. En este caso,

amplitud $= |a|$ — Desplazamiento máximo del cuerpo

periodo $= \dfrac{2\pi}{\omega}$ — Tiempo requerido para completar un ciclo

frecuencia $= \dfrac{\omega}{2\pi}$ — Número de ciclos por unidad de tiempo

Observe que las funciones

$$y = a \text{ sen } 2\pi\nu t \qquad \text{y} \qquad y = a \cos 2\pi\nu t$$

tienen frecuencia ν, porque $2\pi\nu/(2\pi) = \nu$. Ya que de inmediato podemos leer la frecuencia a partir de estas ecuaciones, a veces escribimos ecuaciones de movimiento armónico simple de esta forma.

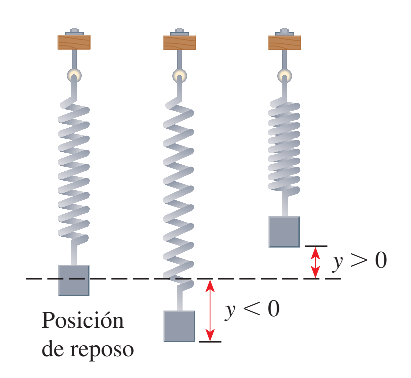


FIGURA 3

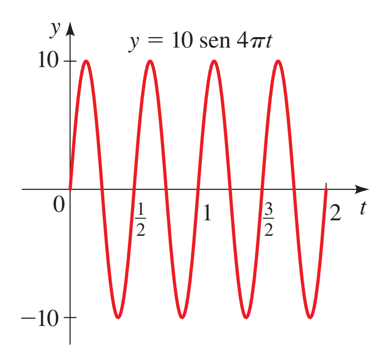


FIGURA 4

EJEMPLO 1 ■ Un resorte en vibración

El desplazamiento de una masa suspendida por un resorte está modelado por la función

$$y = 10 \text{ sen } 4\pi t$$

donde y se mide en pulgadas y t en segundos (vea la figura 3).

a) Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento de la masa.

b) Trace una gráfica del desplazamiento de la masa.

SOLUCIÓN

a) De las fórmulas para amplitud, periodo y frecuencia obtenemos

$$\text{amplitud} = |a| = 10 \text{ pulg}$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \text{ ciclos por segundo (Hz)}$$

b) La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo t se ilustra en la figura 4.

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

Una situación importante en la que ocurre movimiento armónico simple es en la producción de sonido. El sonido es producido por una vibración regular en la presión de aire a partir de la presión normal. Si la presión varía en movimiento armónico simple, entonces se produce un sonido puro. El tono del sonido depende de la frecuencia y la intensidad depende de la amplitud.



EJEMPLO 2 ■ Vibraciones de una nota musical

Un músico que toca una tuba hace sonar la nota Mi y sostiene el sonido durante algún tiempo. Para una nota Mi pura, la variación en presión a partir de la presión normal del aire está dada por

$$V(t) = 0.2 \text{ sen } 80\pi t$$

donde V se mide en libras por pulgada cuadrada y t se mide en segundos.

a) Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia de V.

b) Trace una gráfica de V.

c) Si el músico aumenta la intensidad de la nota, ¿cómo cambia la ecuación de V?

d) Si el músico está tocando una nota incorrectamente y es un poco desafinada, ¿cómo cambia la ecuación de V?

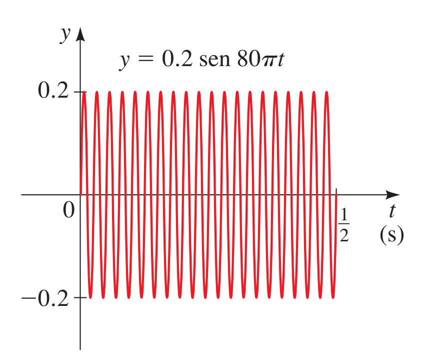


FIGURA 5

SOLUCIÓN

a) De las fórmulas para amplitud, periodo y frecuencia obtenemos

$$\text{amplitud} = |0.2| = 0.2$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{80\pi}{2\pi} = 40$$

b) La gráfica de V se ilustra en la figura 5.

c) Si el músico aumenta la intensidad, la amplitud aumenta. Por tanto, el número 0.2 es sustituido por un número más grande.

d) Si la nota está desafinada, entonces la frecuencia disminuye. En consecuencia, el coeficiente de t es menor a 80π.

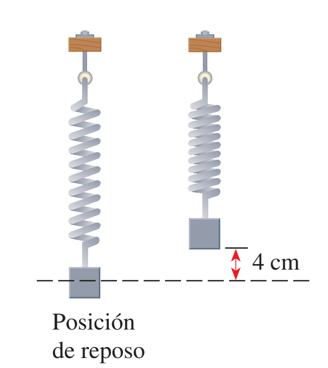

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

EJEMPLO 3 ■ Modelado de un resorte en vibración

Una masa está suspendida de un resorte. El resorte se comprime una distancia de 4 cm y luego se suelta. Se observa que la masa regresa a la posición comprimida después de $\frac{1}{3}$ de segundo.

***a*)** Encuentre una función que modele el desplazamiento de la masa.

***b*)** Trace la gráfica del desplazamiento de la masa.



SOLUCIÓN

***a*)** El movimiento de la masa está dado por una de las ecuaciones de movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es 4 cm. Como esta amplitud se alcanza en el tiempo $t = 0$, una función apropiada que modela el desplazamiento es de la forma

$$y = a \cos \omega t$$

Dado que el periodo es $p = \frac{1}{3}$, podemos encontrar ω con la siguiente ecuación:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{Periodo} = \tfrac{1}{3}$$

$$\omega = 6\pi \qquad \text{Despeje } \omega$$

Por tanto, el movimiento de la masa está modelado por la función

$$y = 4 \cos 6\pi t$$

donde y es el desplazamiento a partir de la posición de reposo en el tiempo t. Observe que cuando $t = 0$, el desplazamiento es $y = 4$, como es de esperarse.

***b*)** La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo t se muestra en la figura 6.

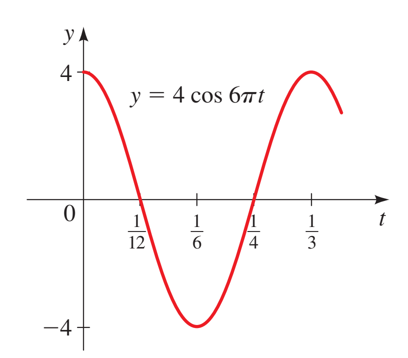


FIGURA 6

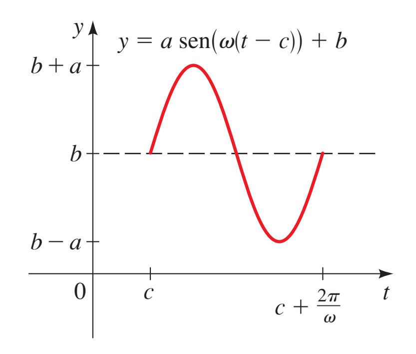
Ahora intente realizar los ejercicios 17 y 47 ■



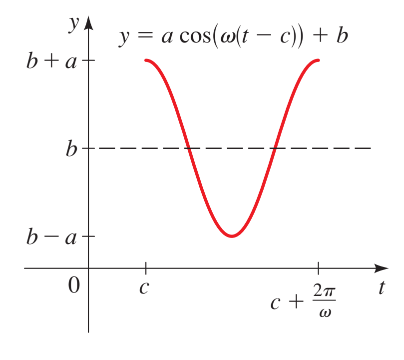
En general, las funciones seno o coseno que representan movimiento armónico pueden ser desplazadas horizontal o verticalmente. En este caso, las ecuaciones toman la forma

$$y = a \operatorname{sen}(\omega(t - c)) + b \qquad \text{o} \qquad y = a \cos(\omega(t - c)) + b$$

El desplazamiento vertical b indica que la variación ocurre alrededor de un valor promedio b. El desplazamiento horizontal c indica la posición del cuerpo en $t = 0$. (Vea la figura 7.)



a)



b)

FIGURA 7

EJEMPLO 4 ■ Modelado del brillo de una estrella variable

Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternativamente. Para la estrella variable Delta Cefeida el tiempo entre periodos de máximo brillo es 5.4 días. El promedio de brillo (o magnitud) de la estrella es 4.0 y su brillo varía en una magnitud de ± 0.35.

a) Encuentre una función que modele el brillo de Delta Cefeida como función del tiempo.

b) Trace una gráfica del brillo de Delta Cefeida como función del tiempo.

SOLUCIÓN

a) Encontremos una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

La amplitud es la variación máxima a partir del brillo promedio, de modo que la amplitud es $a = 0.35$ de magnitud. El periodo está dado de 5.4 días, por lo que

$$\omega = \frac{2\pi}{5.4} \approx 1.16$$

Como el brillo varía de un valor promedio de 4.0 magnitudes, la gráfica está desplazada hacia arriba por $b = 4.0$. Si tomamos $t = 0$ como el tiempo cuando la estrella está en su brillo máximo, no hay desplazamiento horizontal y $c = 0$ (porque una curva coseno alcanza su máximo en $t = 0$). Así, la función que buscamos es

$$y = 0.35\cos(1.16t) + 4.0$$

donde t es el número de días desde el momento en que la estrella está en su brillo máximo.

b) La gráfica está trazada en la figura 8.

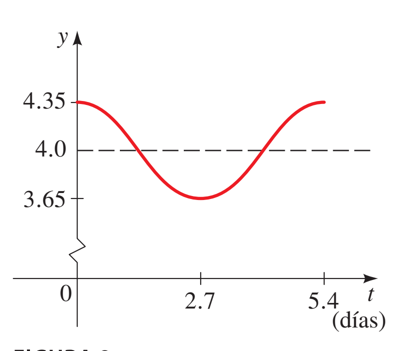
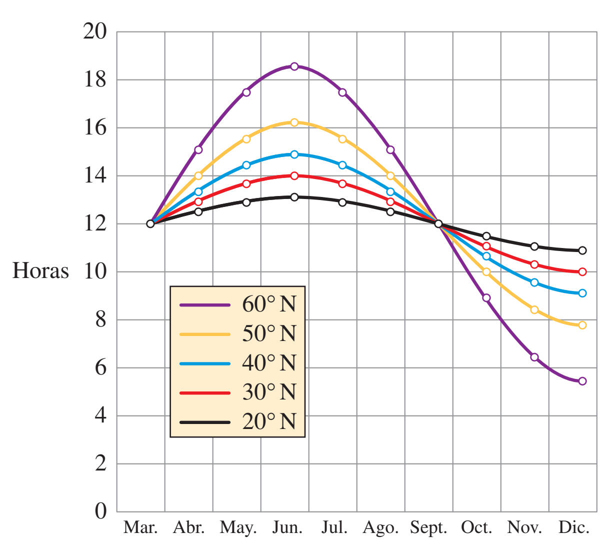


FIGURA 8

 **Ahora intente realizar el ejercicio 51** ■

El número de horas de luz de día varía en todo el curso de un año. En el hemisferio norte el día más largo es el 21 de junio y el más corto es el 21 de diciembre. La duración promedio de luz de día es de 12 horas y la variación desde este promedio depende de la latitud. (Por ejemplo, en Fairbanks, Alaska, hay más de 20 horas de luz de día en el día más largo y menos de 4 horas en el día más corto.) La gráfica de la figura 9 muestra el número de horas de luz de día en horas diferentes del año para varias latitudes. Es evidente de la gráfica que la variación en horas de luz de día es armónica simple.



Fuente: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935), página 40

FIGURA 9 Gráfica de la duración de la luz de día del 21 de marzo al 21 de diciembre en varias latitudes

EJEMPLO 5 ■ Modelado del número de horas de luz de día

En Filadelfia (40° latitud N) el día más largo del año tiene 14 h 50 min de luz de día, y el día más corto tiene 9 h 10 min de luz de día.

a) Encuentre una función L que modele la duración de luz de día como función de t, el número de días desde el 1° de enero.

b) Un astrónomo necesita al menos 11 horas de oscuridad para una fotografía astronómica de exposición larga. ¿En qué días del año son posibles esas largas exposiciones?

SOLUCIÓN

a) Necesitamos encontrar una función de la forma

$$y = a \operatorname{sen}(\omega(t - c)) + b$$

cuya gráfica es la curva de 40° N latitud norte de la figura 9. De la información dada, vemos que la amplitud es

$$a = \tfrac{1}{2}(14\tfrac{5}{6} - 9\tfrac{1}{6}) \approx 2.83 \text{ h}$$

Dado que hay 365 días en un año, el periodo es 365, entonces

$$\omega = \frac{2\pi}{365} \approx 0.0172$$

Puesto que la duración promedio de la luz de día es 12 horas, la gráfica está desplazada hacia arriba por 12, de modo que $b = 12$. Puesto que la curva alcanza el valor promedio (12 horas día) el 21 de marzo, el 80º día del año, la curva está desplazada 80 unidades a la derecha. Por tanto, $c = 80$. En consecuencia, una función que modela el número de horas de luz de día es

$$y = 2.83 \operatorname{sen}(0.0172(t - 80)) + 12$$

donde t es el número de días desde el 1 de enero.

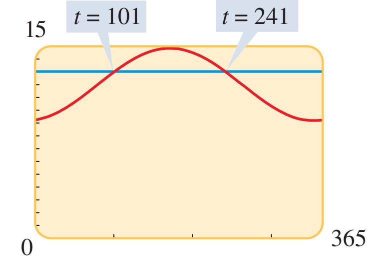


FIGURA 10

b) Un día tiene 24 horas, de modo que 11 h de noche corresponden a 13 h de luz de día, por lo que necesitamos resolver la desigualdad $y \leq 13$. Para resolver gráficamente esta desigualdad, graficamos $y = 2.83 \operatorname{sen}(0.0172(t - 80)) + 12$ y $y = 13$ en la misma gráfica. De la gráfica de la figura 10 vemos que hay menos de 13 h de luz de día entre el día 1º (1º de enero) y el día 101 (11 de abril) y del día 241 (29 de agosto) al día 365 (31 de diciembre).

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

Otra situación en la que ocurre movimiento armónico simple es en los generadores de corriente alterna (CA). Se produce corriente alterna cuando una armadura gira alrededor de su eje en un campo magnético.

La figura 11 representa una versión sencilla de uno de estos generadores. Cuando el alambre pasa por el campo magnético se genera un voltaje E en el alambre. Se puede demostrar que el voltaje generado está dado por

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

donde E_0 es el voltaje máximo producido (que depende de la intensidad del campo magnético) y $\omega/(2\pi)$ es el número de revoluciones por segundo de la armadura (la frecuencia).

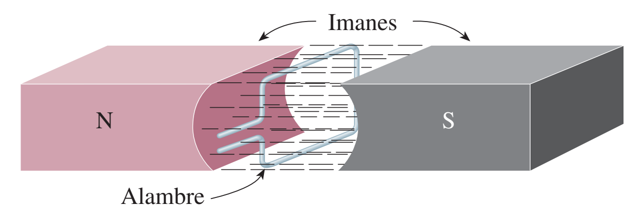


FIGURA 11

¿Por qué decimos que la corriente en las tomas domiciliarias es de 110 V cuando el voltaje máximo producido es de 155 V? De la simetría de la función coseno vemos que el promedio de voltaje producido es cero. Este valor promedio sería el mismo para todos los generadores de CA y, por tanto, no da información acerca del voltaje generado. Para obtener una medida de voltaje más informativa, los ingenieros usan el método de **raíz media cuadrática** (RMS). Se puede demostrar que el voltaje RMS es $1/\sqrt{2}$ veces el máximo voltaje. Entonces, para la corriente domiciliaria el voltaje RMS es

$$155 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 110 \text{ V}$$

EJEMPLO 6 ■ Modelado de la corriente alterna

La corriente alterna domiciliaria común de 110 volts varía de +155 V a −155 V con una frecuencia de 60 Hz (ciclos por segundo). Encuentre una ecuación que describa esta variación en voltaje.

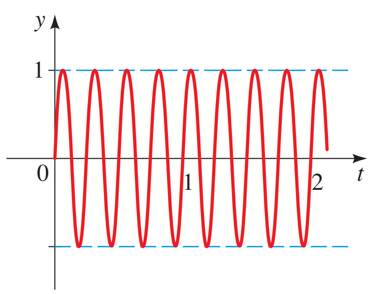
SOLUCIÓN La variación en voltaje es armónica simple. Como la frecuencia es de 60 ciclos por segundo, tenemos

$$\frac{\omega}{2\pi} = 60 \qquad \text{o} \qquad \omega = 120\pi$$

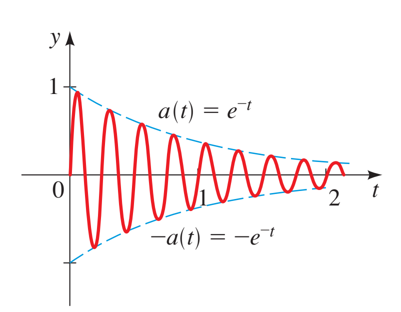
Tomemos $t = 0$ como un tiempo cuando el voltaje es +155 V. Entonces

$$E(t) = a \cos \omega t = 155 \cos 120\pi t$$

Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■



a) Movimiento armónico: $y = \text{sen}\, 8\pi t$



b) Movimiento armónico amortiguado: $y = e^{-t}\, \text{sen}\, 8\pi t$

FIGURA 12

Movimiento armónico amortiguado

Se supone que el resorte de la figura 2 de la página 446 oscila en un ambiente sin fricción. En este hipotético caso no cambiará la amplitud de la oscilación, pero en presencia de fricción el movimiento del resorte finalmente "se muere", es decir, la amplitud del movimiento disminuye con el tiempo. El movimiento de este tipo se denomina *movimiento armónico amortiguado*.

MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

Si la ecuación que describe el desplazamiento y de un cuerpo en el tiempo t es

$$y = ke^{-ct} \text{ sen } \omega t \qquad \text{o} \qquad y = ke^{-ct} \cos \omega t \qquad (c > 0)$$

entonces el cuerpo está en **movimiento armónico amortiguado**. La constante c es la **constante de amortiguamiento**, k es la amplitud inicial y $2\pi/\omega$ es el periodo.*

El movimiento armónico amortiguado es simplemente movimiento armónico para el cual la amplitud está gobernada por la función $a(t) = ke^{-ct}$. La figura 12 muestra la diferencia entre movimiento armónico y movimiento armónico amortiguado.

EJEMPLO 7 ■ Modelado de movimiento armónico amortiguado

Dos sistemas de masa-resorte se someten a movimiento armónico amortiguado, ambos a 0.5 ciclos por segundo y ambos con un desplazamiento máximo inicial de 10 centímetros. El primero tiene una constante de amortiguamiento de 0.5 y el segundo, tiene una constante de amortiguamiento de 0.1.

***a*)** Encuentre las funciones de la forma $g(t) = ke^{-ct} \cos \omega t$ para modelar el movimiento en cada caso.

***b*)** Trace la gráfica de las dos funciones que se encuentran en el inciso *a*). ¿Cómo se diferencian?

SOLUCIÓN

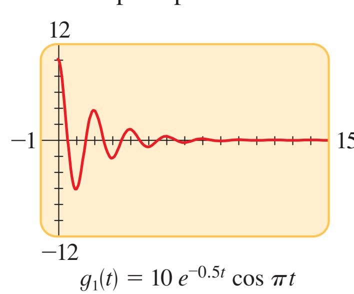
Hz es la abreviatura de hertz. Un hertz es un ciclo por segundo.

***a*)** En el tiempo $t = 0$ el desplazamiento es de 10 cm. Por tanto $g(0) = ke^{-c \cdot 0} \cos(\omega \cdot 0) = k$ para $k = 10$. Además, la frecuencia es $f = 0.5$ Hz, y dado que $\omega = 2\pi f$ (vea la página 446), obtenemos $\omega = 2\pi(0.5) = \pi$. Mediante las constantes de amortiguamiento dado nos encontramos con que los movimientos de los dos resortes están dados por las funciones

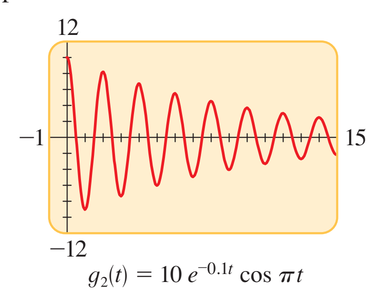
$$g_1(t) = 10e^{-0.5t} \cos \pi t \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = 10e^{-0.1t} \cos \pi t$$

*En el caso del movimiento armónico amortiguado, el término *cuasi-periodo* se usa a veces en lugar de *periodo* porque el movimiento no es periódico en realidad, sino que disminuye con el tiempo. No obstante, seguiremos usando el término *periodo* para evitar confusión.

b) En la figura 13 se presentan las gráficas de las funciones g_1 y g_2. De las gráficas vemos que en el primer caso (donde la constante de amortiguamiento es más grande) el movimiento se apaga rápidamente en tanto que, en el segundo caso, el movimiento perceptible continúa más tiempo.



$g_1(t) = 10\,e^{-0.5t}\cos \pi t$



$g_2(t) = 10\,e^{-0.1t}\cos \pi t$

FIGURA 13

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

Tal como el ejemplo 7 indica, cuanto más grande sea la constante de amortiguamiento c, la oscilación se apaga con más rapidez. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra y se deja vibrar libremente, un punto en esa cuerda experimenta movimiento armónico amortiguado. Escuchamos el amortiguamiento del movimiento cuando se apaga el sonido producido por la vibración de la cuerda. La rapidez con la que ocurre el amortiguamiento de la cuerda (medido por el tamaño de la constante c) es una propiedad del tamaño de la cuerda y el material del que está hecha. Otro ejemplo de movimiento armónico amortiguado es el movimiento que el amortiguador de un automóvil sufre cuando el auto golpea un tope del camino. En este caso el amortiguador está diseñado para amortiguar el movimiento tan rápidamente como sea posible (c grande) y tener la frecuencia tan pequeña como sea posible (ω pequeña). Por otra parte, el sonido producido por una tuba que ejecuta una nota es no amortiguado mientras el músico pueda mantener la intensidad de la nota. Las ondas electromagnéticas que producen luz se mueven en movimiento armónico simple que no es amortiguado.

EJEMPLO 8 ■ Cuerda de violín en vibración

La cuerda de Sol de un violín es jalada una distancia de 0.5 cm arriba de su posición de reposo, luego se suelta y se deja vibrar. La constante de amortiguamiento c para esta cuerda está determinada en 1.4. Suponga que la nota producida es de Sol pura (frecuencia = 200 Hz). Encuentre una ecuación que describa el movimiento del punto en el que fue pulsada la cuerda.

SOLUCIÓN Sea P el punto en el que fue pulsada la cuerda. Encontraremos una función $f(t)$ que dé la distancia en el tiempo t del punto P desde su posición original de reposo. Puesto que el desplazamiento máximo ocurre en $t = 0$, encontramos una ecuación de la forma

$$y = ke^{-ct}\cos \omega t$$

A partir de esta ecuación vemos que $f(0) = k$. Pero sabemos que el desplazamiento original de la cuerda es 0.5 cm. Entonces $k = 0.5$. Dado que la frecuencia de la vibración es 200, tenemos $\omega = 2\pi f = 2\pi(200) = 400\pi$. Por último, como sabemos que la constante de amortiguamiento es 1.4, obtenemos

$$f(t) = 0.5e^{-1.4t}\cos 400\pi t$$

Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■



EJEMPLO 9 ■ Ondas en un estanque

Se deja caer una piedra en un lago de aguas en calma, haciendo que se formen ondas. El movimiento hacia arriba y hacia abajo de un punto en la superficie del agua está modelado por el movimiento armónico amortiguado. En algún momento se mide la amplitud de la onda, y 20 s más tarde se encuentra que la amplitud ha bajado a $\frac{1}{10}$ de este valor. Encuentre la constante de amortiguamiento c.

SOLUCIÓN La amplitud está gobernada por el coeficiente ke^{-ct} en las ecuaciones para movimiento armónico amortiguado. Entonces, la amplitud en el tiempo t es ke^{-ct} y, 20 s más tarde es $ke^{-c(t+20)}$. Por tanto, debido a que el último valor es $\frac{1}{10}$ del valor anterior, tenemos

$$ke^{-c(t+20)} = \tfrac{1}{10}ke^{-ct}$$

Ahora despejamos c de esta ecuación. Eliminando k y usando las leyes de exponentes, obtenemos

$$e^{-ct} \cdot e^{-20c} = \tfrac{1}{10}e^{-ct}$$

$$e^{-20c} = \tfrac{1}{10} \qquad \text{Elimine } e^{-ct}$$

$$e^{20c} = 10 \qquad \text{Tome recíprocos}$$

Tomando el logaritmo natural de cada lado tendremos

$$20c = \ln(10)$$

$$c = \tfrac{1}{20}\ln(10) \approx \tfrac{1}{20}(2.30) \approx 0.12$$

Por tanto, la constante de amortiguamiento es $c \approx 0.12$.

Ahora intente realizar el ejercicio 59 ■

Fase y diferencia de fase

Cuando dos objetos en movimiento están en movimiento armónico simple con la misma frecuencia, a menudo es importante determinar si los objetos se están "moviendo juntos" o qué tanto difieren sus movimientos. Consideremos un ejemplo concreto.

Supongamos que un objeto está girando a lo largo del círculo de la unidad y la altura y del objeto en el tiempo t está dada por $y = \operatorname{sen}(kt - b)$. Cuando $t = 0$, la altura es $y = \operatorname{sen}(-b)$. Esto significa que el movimiento "comienza" a un ángulo b como se muestra en la figura 14.

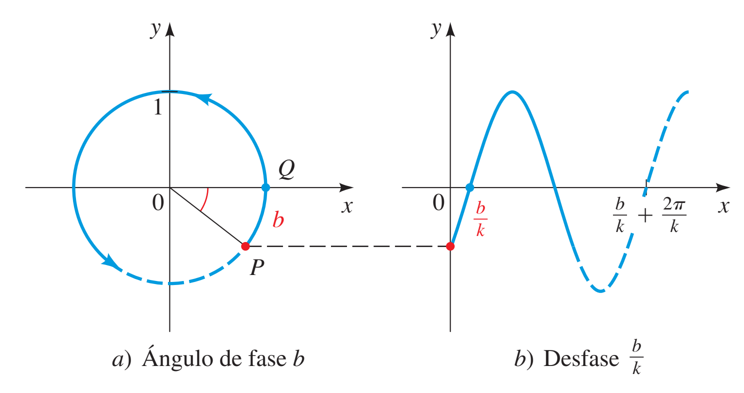


FIGURA 14 Gráfica de $y = \operatorname{sen}(kt - b)$

Podemos ver el punto de partida de dos maneras: como el *ángulo* entre P y Q en el círculo unitario o como el *tiempo* necesario para que P "alcance" a Q. El ángulo b se llama **fase** (o **ángulo de fase**). Para encontrar el tiempo necesario, factorizamos k:

El ángulo de fase b depende solamente de la posición inicial del objeto y no de la frecuencia. El tiempo de desfase depende de la frecuencia.

$$y = \operatorname{sen}(kt - b) = \operatorname{sen} k\left(t - \frac{b}{k}\right)$$

Vemos que P "alcanza" a Q (es decir, $y = 0$) cuando $t = b/k$. Esta última ecuación también demuestra que la gráfica de la figura 14*b*) se **desplaza horizontalmente** (se desfasa) b/k (a la derecha) en el eje t. El tiempo b/k se llama **tiempo de desfase** si $b > 0$ (porque P está detrás, o se desfasa, de Q por b/k unidades de tiempo) y se llama **tiempo de adelanto** si $b < 0$.

FASE

Una curva de seno puede ser expresada en las siguientes formas equivalentes:

$$y = A\ \text{sen}(kt - b) \qquad \text{La \textbf{fase} es } b.$$

$$y = A\ \text{sen}\ k\left(t - \frac{b}{k}\right) \qquad \text{El \textbf{desfase} es } \frac{b}{k}.$$

A menudo es importante saber si dos ondas con el mismo periodo (modelado por las curvas seno) están *en fase* o *fuera de fase*. Para las curvas

$$y_1 = A\ \text{sen}(kt - b) \qquad \text{y} \qquad y_2 = A\ \text{sen}(kt - c)$$

la **diferencia de fase** entre y_1 y y_2 es $b - c$. Si la diferencia de fase es un múltiplo de 2π, las ondas están **en fase**; de lo contrario, las ondas están **fuera de fase**. Si dos curvas seno están en fase, sus gráficas coinciden.

Observe que la diferencia de fase depende del orden en el que se dan las funciones.

EJEMPLO 10 ■ Determinar la fase y la diferencia de fase

Tres objetos están en movimiento armónico, modelados por las siguientes curvas:

$$y_1 = 10\ \text{sen}\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad y_2 = 10\ \text{sen}\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad y_3 = 10\ \text{sen}\left(3t + \frac{23\pi}{6}\right)$$

a) Encuentre la amplitud, el periodo, la fase y el desfase de la curva y_1.

b) Encuentre la diferencia de fase entre las curvas y_1 y y_2. ¿Están las dos curvas en fase?

c) Encuentre la diferencia de fase entre las curvas y_1 y y_3. ¿Están las dos curvas en fase?

d) Trace las tres curvas en los mismos ejes.

SOLUCIÓN

a) La amplitud es 10, el periodo es $2\pi/3$, y la fase es $\pi/6$. Para encontrar el desfase, factorizamos:

$$y_1 = 10\ \text{sen}\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) = 10\ \text{sen}\ 3\left(t - \frac{\pi}{18}\right)$$

Por lo que el desfase es $\pi/18$.

b) La fase de y_2 es $\pi/2$. Por lo que la diferencia de fase es

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

La diferencia de fase no es un múltiplo de 2π, por lo que las dos curvas están fuera de fase.

c) La fase de y_3 es $-23\pi/6$. Por lo que la diferencia de fase es

$$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{23\pi}{6}\right) = 4\pi = 2(2\pi)$$

La diferencia de fase es un múltiplo de 2π, por lo que las dos curvas están en fase.

d) En la figura 15 se muestran las gráficas. Observe que las curvas y_1 y y_3 tienen la misma gráfica porque están en fase.

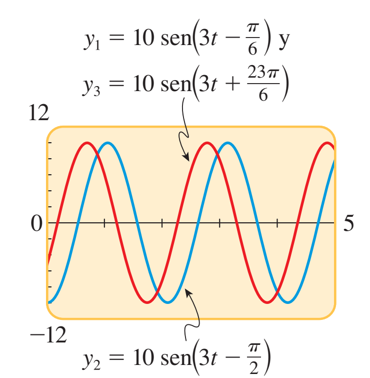
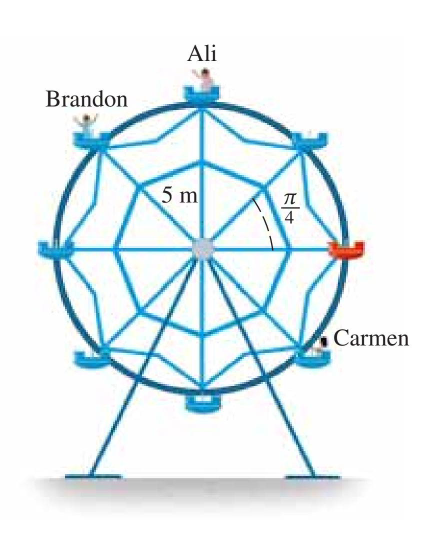


FIGURA 15

Ahora intente realizar los ejercicios 29 y 35 ■



EJEMPLO 11 ■ Uso de la fase

Ali, Brandon y Carmen están sentados en una rueda de la fortuna que permanece inmóvil, como se muestra en la figura. Al tiempo $t = 0$ la rueda comienza a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj a razón de 2 revoluciones por minuto.

a) Encuentre curvas seno que modelen la altura de cada persona arriba de la línea central de la rueda de la fortuna en cualquier tiempo $t > 0$.

b) Encuentre la diferencia de fase entre Brandon y Ali; entre Ali y Carmen; y entre Brandon y Carmen.

c) Encuentre el desfase de la ecuación de Ali. ¿Cuál es el tiempo de adelanto o de desfase de Ali (respecto al asiento rojo en la figura)?

SOLUCIÓN

a) El movimiento de cada persona se modela con una función de la forma $y = A\ \text{sen}(kt - b)$. En la figura vemos que la amplitud es $A = 5$ m. Puesto que la rueda de la fortuna hace dos revoluciones por minuto, el periodo es de $\frac{1}{2}$ minuto. Por lo que

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{2}\ \text{min}$$

Se tiene que $k = 4\pi$. En la figura vemos que cada persona comienza en una fase diferente. Consideremos que Ali y Brandon están delante del asiento rojo y que Carmen está detrás el asiento rojo. Por tanto, sus fases son $-\pi/2$, $-3\pi/4$, and $\pi/4$, respectivamente. Las ecuaciones son las siguientes.

Ali	Brandon	Carmen
$y_A = 5\ \text{sen}\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$	$y_B = 5\ \text{sen}\left(4\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$	$y_C = 5\ \text{sen}\left(4\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

b) Las diferencias de fase son las siguientes.

Ali y Brandon	Ali y Carmen	Brandon y Carmen
$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

c) En el inciso *b*) se encontró la ecuación que modela la posición de Ali arriba de la línea del centro de la rueda de la fortuna. Para encontrar el desfase, factorizamos la ecuación de Ali.

$$y_A = 5\ \text{sen}\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{Ecuación de Ali}$$

$$y_A = 5\ \text{sen}\ 4\pi\left(t + \frac{1}{8}\right) \qquad \text{Factorice } 4\pi$$

Vemos que el desfase es $\frac{1}{8}$ a la izquierda. Esto significa que el tiempo de adelanto de Ali es de $\frac{1}{8}$ de minuto (por lo que ella está $\frac{1}{8}$ de minuto por delante de la silla roja).


Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

5.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para un cuerpo en movimiento armónico simple con amplitud a y periodo $2\pi/\omega$, encuentre una ecuación que modele el desplazamiento y al tiempo t si

   a) $y = 0$ al tiempo $t = 0$: $y =$ ____________.

   b) $y = a$ al tiempo $t = 0$: $y =$ ____________.

2. Para un cuerpo en movimiento armónico amortiguado con amplitud inicial a, periodo $2\pi/\omega$, y constante de amortiguamiento c, encuentre una ecuación que modele el desplazamiento y en el tiempo t si

   a) $y = 0$ al tiempo $t = 0$: $y =$ ____________.

   b) $y = a$ al tiempo $t = 0$: $y =$ ____________.

3. ***a***) Para un objeto en movimiento armónico modelado por $y = A\ \text{sen}(kt - b)$ la amplitud es ____________, el periodo es ____________ y la fase es ____________. Para encontrar el desfase factorizamos k para obtener $y =$ ____________. De esta forma de la ecuación vemos que el desfase es ____________.

   b) Para un objeto en movimiento armónico modelado por $y = 5\ \text{sen}(4t - \pi)$ la amplitud es ____________, el periodo es ____________, la fase es ____________ y el desfase es ____________.

4. Los objetos A y B se encuentran en movimiento armónico modelados por $y = 3\ \text{sen}(2t - \pi)$ y $y = 3\ \text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)$. La fase de A es ____________ y la fase de B es ____________. La diferencia de fase es ____________, por lo que los objetos se están moviendo ____________ (en fase/fuera de fase).

HABILIDADES

5–12 ■ Movimiento armónico simple La función que se da modela el desplazamiento de un cuerpo que se mueve en movimiento armónico simple.

a) Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento.

b) Trace una gráfica del desplazamiento del cuerpo en un periodo completo.

5. $y = 2\ \text{sen}\ 3t$
6. $y = 3\cos \frac{1}{2}t$
7. $y = -\cos 0.3t$
8. $y = 2.4\ \text{sen}\ 3.6t$
9. $y = -0.25\cos\left(1.5t - \dfrac{\pi}{3}\right)$
10. $y = -\frac{3}{2}\ \text{sen}(0.2t + 1.4)$
11. $y = 5\cos\left(\frac{2}{3}t + \frac{3}{4}\right)$
12. $y = 1.6\ \text{sen}(t - 1.8)$

13–16 ■ Movimiento armónico simple Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que tenga las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento es cero al tiempo $t = 0$.

13. amplitud 10 cm, periodo 3 s
14. amplitud 24 pies, periodo 2 min
15. amplitud 6 pulg, frecuencia $5/\pi$ Hz
16. amplitud 1.2 m, frecuencia 0.5 Hz

17–20 ■ Movimiento armónico simple Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que tenga las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento está en su máximo en el tiempo $t = 0$.

17. amplitud 60 pies, periodo 0.5 min
18. amplitud 35 cm, periodo 8 s
19. amplitud 2.4 m, frecuencia 750 Hz
20. amplitud 6.25 pulg, frecuencia 60 Hz

21–28 ■ Movimiento armónico amortiguado Se dan una amplitud inicial k, una constante de amortiguamiento c y frecuencia f o periodo p. (Recuerde que frecuencia y periodo están relacionados por la ecuación $f = 1/p$.)

a) Encuentre una función que modele el movimiento armónico amortiguado. Use una función de la forma $y = ke^{-ct}\cos \omega t$ en los ejercicios 21-24, y de la forma $y = ke^{-ct}\ \text{sen}\ \omega t$ en los ejercicios 25-28.

b) Trace la gráfica de la función.

21. $k = 2,\quad c = 1.5,\quad f = 3$
22. $k = 15,\quad c = 0.25,\quad f = 0.6$
23. $k = 100,\quad c = 0.05,\quad p = 4$
24. $k = 0.75,\quad c = 3,\quad p = 3\pi$
25. $k = 7,\quad c = 10,\quad p = \pi/6$
26. $k = 1,\quad c = 1,\quad p = 1$
27. $k = 0.3,\quad c = 0.2,\quad f = 20$
28. $k = 12,\quad c = 0.01,\quad f = 8$

29–34 ■ Amplitud, periodo, fase y desfase Para cada curva seno, encuentre la amplitud, el periodo, la fase y el desfase.

29. $y = 5\ \text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)$
30. $y = 10\ \text{sen}\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right)$
31. $y = 100\ \text{sen}(5t + \pi)$
32. $y = 50\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{2}t + \dfrac{\pi}{5}\right)$
33. $y = 20\ \text{sen}\ 2\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$
34. $y = 8\ \text{sen}\ 4\left(t + \dfrac{\pi}{12}\right)$

35–38 ■ Fase y diferencia de fase Se da un par de curvas seno con el mismo periodo. ***a***) Encuentre la fase de cada curva. ***b***) Determine la diferencia de fase entre las curvas. ***c***) Indique si las curvas están en fase o fuera de fase. ***d***) Trace las dos curvas en los mismos ejes.

35. $y_1 = 10\ \text{sen}\left(3t - \dfrac{\pi}{2}\right)$; $y_2 = 10\ \text{sen}\left(3t - \dfrac{5\pi}{2}\right)$
36. $y_1 = 15\ \text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)$; $y_2 = 15\ \text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{6}\right)$

37. $y_1 = 80 \text{ sen } 5\left(t - \frac{\pi}{10}\right)$; $y_2 = 80 \text{ sen}\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$

38. $y_1 = 20 \text{ sen } 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$; $y_2 = 20 \text{ sen } 2\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$

APLICACIONES

39. Un corcho que sube y baja Un corcho que flota en un lago sube y baja en movimiento armónico simple. Su desplazamiento por encima del fondo del lago está modelado por

$$y = 0.2 \cos 20\pi t + 8$$

donde y se mide en metros y t se mide en minutos.

a) Encuentre la frecuencia del movimiento del corcho.

b) Trace una gráfica de y.

c) Encuentre el desplazamiento máximo del corcho por encima del fondo del lago.

40. Señales de radio de FM La onda portadora para una señal de radio de FM está modelada por la función

$$y = a \text{ sen}(2\pi(9.15 \times 10^7)t)$$

donde t se mide en segundos. Encuentre el periodo y la frecuencia de la onda portadora.

41. Presión sanguínea Cada vez que nuestro corazón late aumenta la presión sanguínea y luego disminuye cuando el corazón descansa entre latidos. La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \text{ sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en mmHg en el tiempo t medido en minutos.

a) Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia de p.

b) Trace una gráfica de p.

c) Si cierta persona hace ejercicio, su corazón late más rápidamente. ¿Cómo afecta esto al periodo y la frecuencia de p?

42. Modelo de población de un depredador En un modelo de depredador/presa, la población del depredador está modelada por la función

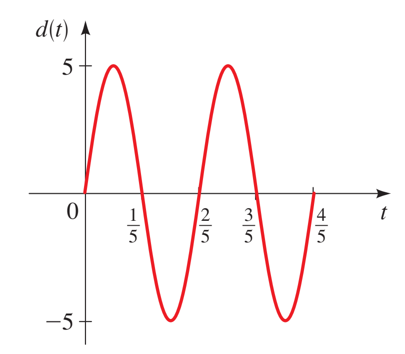
$$y = 900 \cos 2t + 8000$$

donde t se mide en años.

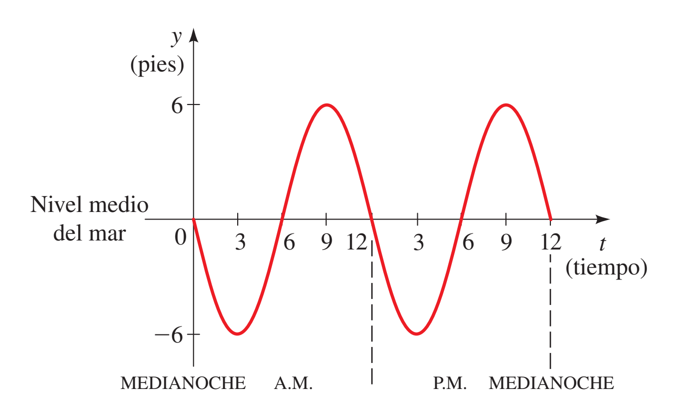
a) ¿Cuál es la población máxima?

b) Encuentre el tiempo entre periodos sucesivos de población máxima.

43. Sistema de resorte-masa Una masa unida a un resorte se mueve hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple. La gráfica da su desplazamiento $d(t)$ a partir del equilibrio al tiempo t. Exprese la función d en la forma $d(t) = a \text{ sen } \omega t$.

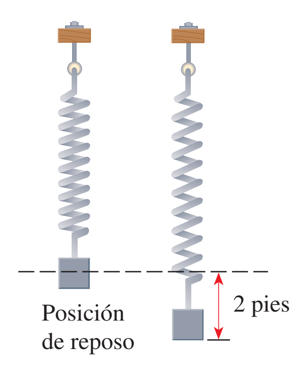


44. Mareas La gráfica muestra la variación del nivel del agua respecto al nivel medio del mar en la Bahía Commencement en Tacoma, Washington, para un periodo particular de 24 horas. Suponiendo que esta variación está modelada por movimiento armónico simple, encuentre una ecuación de la forma $y = a \text{ sen } \omega t$ que describa la variación en el nivel del agua como función del número de horas después de la medianoche.



45. Mareas La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene las mareas más altas del mundo. En un periodo de 12 horas el agua empieza al nivel medio del mar, sube a 21 pies por encima y baja 21 pies por debajo, y luego regresa al nivel del mar. Suponiendo que el movimiento de las mareas es armónico simple, encuentre una ecuación que describa la altura de la marea en la Bahía de Fundy por encima del nivel medio del mar. Trace una gráfica que muestre el nivel de las mareas en un periodo de 12 horas.

46. Sistema resorte-masa Una masa suspendida de un resorte es jalada hacia abajo una distancia de 2 pies desde su posición de reposo, como se ilustra en la figura siguiente. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le permite oscilar. Si la masa regresa a su posición después de 1 s, encuentre una ecuación que describa su movimiento.



47. Sistema resorte-masa Una masa está suspendida mediante un resorte. Este se encuentra comprimido de modo que la masa está situada a 5 cm arriba de su posición de reposo. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le permite oscilar. Se observa que la masa llega a su punto más bajo $\frac{1}{2}$ s después de soltarla. Encuentre una ecuación que describa el movimiento de la masa.

48. Sistema resorte-masa La frecuencia de oscilación de un cuerpo suspendido de un resorte depende de la rigidez k del resorte (llamada *constante de resorte*) y de la masa m del cuerpo. Si el resorte se comprime una distancia a y luego se le permite oscilar, su desplazamiento está dado por

$$f(t) = a \cos \sqrt{k/m}\, t$$

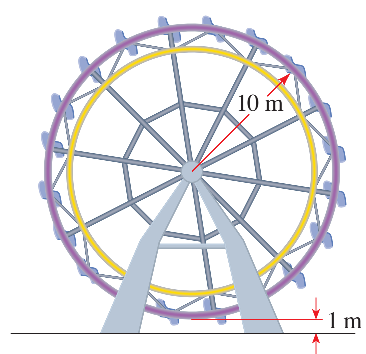
a) Una masa de 10 g está suspendida mediante un resorte con rigidez $k = 3$. Si el resorte se comprime una distancia de 5 cm y enseguida se suelta, encuentre la ecuación que describe la oscilación del resorte.

b) Encuentre una fórmula general para la frecuencia (en términos de k y m).

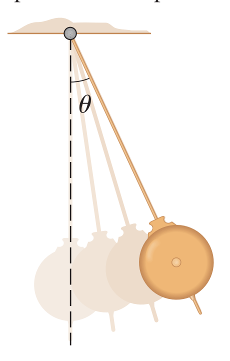
c) ¿Cómo resulta afectada la frecuencia si se aumenta la masa? ¿Es más rápida o más lenta la oscilación?

d) ¿Cómo se afectará la frecuencia si se usa un resorte con más rigidez (k)? más grande)? ¿Será más rápida o más lenta la oscilación?

49. Rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna tiene un radio de 10 m y el fondo de la rueda pasa 1 m arriba del suelo. Si la rueda hace una revolución completa cada 20 segundos, encuentre una ecuación que dé la altura de una persona que se encuentre en la rueda, desde el suelo, como función del tiempo.



50. Péndulo de reloj El péndulo de un reloj de caja da una oscilación completa cada 2 segundos. El ángulo máximo que el péndulo hace respecto a su posición de reposo es 10°. Sabemos por principios de física que el ángulo θ entre el péndulo y su posición de reposo cambia de modo armónico simple. Encuentre una ecuación que describa la medida del ángulo θ como función del tiempo. (Tome $t = 0$ como el tiempo cuando el péndulo permanece en posición vertical.)



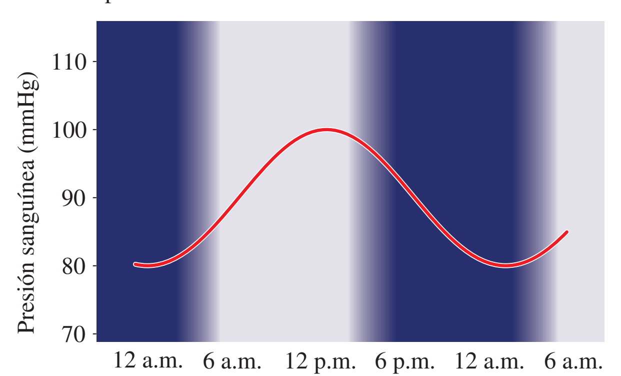
51. Estrellas visibles La estrella variable Zeta Géminis tiene un periodo de 10 días. El promedio de brillo de la estrella es 3.8 magnitudes, y la variación máxima a partir del promedio es 0.2 magnitudes. Suponiendo que la variación en brillo sea armónica simple, encuentre una ecuación que dé el brillo de la estrella como función del tiempo.

52. Estrellas variables Los astrónomos piensan que el radio de una estrella variable aumenta y disminuye con el brillo de la misma. La estrella variable Delta Cefeida (ejemplo 4) tiene un radio promedio de 20 millones de millas y cambia en un máximo de 1.5 millones de millas a partir de su promedio durante una pulsación sencilla. Encuentre una ecuación que describa el radio de esta estrella como función del tiempo.

53. Relojes biológicos Los *ritmos circadianos* son procesos biológicos que oscilan con un periodo de aproximadamente 24 horas. Esto es, un ritmo circadiano es un reloj biológico diario interno. La presión sanguínea parece seguir ese ritmo. Para cierta persona, el promedio de su presión sanguínea en reposo varía de un máximo de 100 mmHg a las 2:00 p.m. a un mínimo de 80 mmHg a las 2:00 a.m. Encuentre una función seno de la forma

$$f(t) = a\,\text{sen}(\omega(t - c)) + b$$

que modele la presión sanguínea en el tiempo t, medida en horas a partir de la medianoche.



54. Generador eléctrico La armadura de un generador eléctrico está girando a razón de 100 revoluciones por segundo (rps). Si el voltaje máximo producido es de 310 V, encuentre una ecuación que describa esta variación en voltaje. ¿Cuál es el voltaje RMS? (Vea el ejemplo 6 y la nota al margen del mismo.)

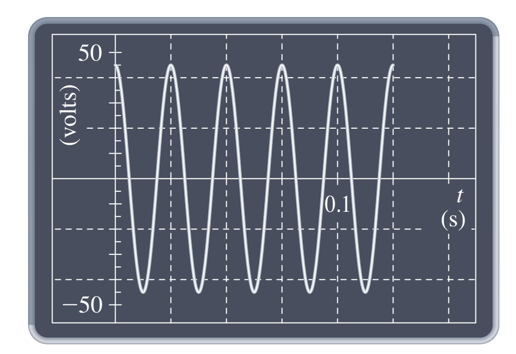
55. Generador eléctrico La gráfica muestra una pantalla de osciloscopio que indica la variación en voltaje de una corriente de CA producida por un generador simple.

a) Encuentre el voltaje máximo producido.

b) Encuentre la frecuencia (ciclos por segundo) del generador.

c) ¿Cuántas revoluciones por segundo hace la armadura del generador?

d) Encuentre una fórmula que describa la variación en voltaje como función del tiempo.



56. Efecto Doppler Si cuando un auto con su claxon activado pasa junto a un observador, el tono del claxon parece más alto cuando se aproxima y más bajo cuando se aleja (vea la figura en la página siguiente). Este fenómeno se denomina **efecto Doppler**. Si la fuente de sonido se mueve a una velocidad v respecto al observador y si la velocidad del sonido es v_0, entonces la frecuencia f percibida está relacionada con la frecuencia real f_0 como sigue.

$$f = f_0\left(\frac{v_0}{v_0 \pm v}\right)$$

Escogemos el signo menos si la fuente se mueve hacia el observador y el signo más si se aleja.

Suponga que un auto corre a 110 pies/s cerca de una mujer que está de pie en el acotamiento de una carretera, el claxon del auto está sonando y tiene una frecuencia de 500 Hz. Suponga que la velocidad del sonido es 1 130 pies/s. (Esta es la velocidad en aire seco a 70°F.)

a) ¿Cuáles son las frecuencias de los sonidos que la mujer escucha a medida que el auto se aproxima a ella y cuando se aleja de ella?

b) Sea A la amplitud del sonido. Encuentre funciones de la forma

$$y = A \text{ sen } \omega t$$

que modelen el sonido percibido cuando el auto se aproxima a la mujer y cuando se aleja de esta.

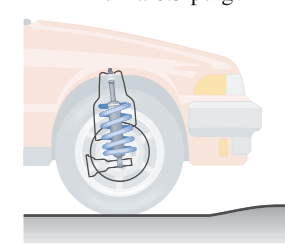


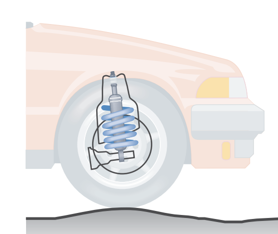
57. Movimiento de un edificio Una fuerte corriente de viento incide sobre un edificio alto, haciendo que este experimente un movimiento armónico amortiguado. La frecuencia de la oscilación es 0.5 ciclos por segundo y la constante de amortiguamiento es $c = 0.9$. Encuentre una ecuación que describa el movimiento del edificio. (Suponga que $k = 1$, y tome $t = 0$ como el instante cuando la corriente del viento incide sobre del edificio.)

58. Amortiguador de un auto Cuando un auto golpea contra un tope del camino, un amortiguador del auto se comprime una distancia de 6 pulgadas y luego se expande (vea la figura). El amortiguador vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 2 ciclos por segundo. La constante de amortiguamiento para este amortiguador en particular es 2.8.

a) Encuentre una ecuación que describa el desplazamiento del amortiguador a partir de su posición de reposo como función del tiempo. Tome $t = 0$ como el instante en que se expande el amortiguador.

b) ¿Cuánto tiempo tarda la amplitud de la vibración en disminuir a 0.5 pulg?





59. Diapasón Al pulsar un diapasón este oscila con movimiento armónico amortiguado. La amplitud del movimiento es medido y 3 segundos más tarde se encuentra que la amplitud ha bajado a $\frac{1}{4}$ de su valor. Encuentre la constante de amortiguamiento c para este diapasón.

60. Cuerda de guitarra Una cuerda de guitarra es jalada en el punto P una distancia de 3 cm arriba de su posición de reposo. Luego se suelta y vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 165 ciclos por segundo. Después de 2 s se observa que la amplitud de la vibración en el punto P es 0.6 cm.

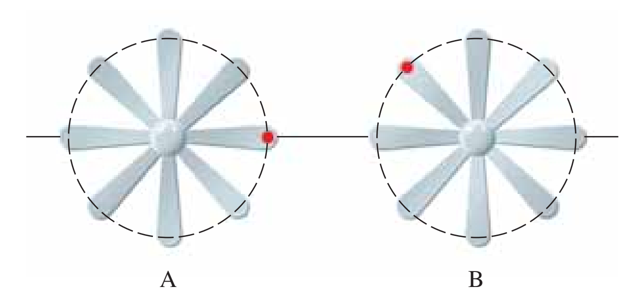
a) Encuentre la constante de amortiguamiento c.

b) Encuentre una ecuación que describa la posición en el punto P arriba de su posición de reposo como función del tiempo. Tome $t = 0$ como el instante en que se suelta la cuerda.

61. Dos ventiladores Los ventiladores eléctricos A y B tienen radio de 1 pie y cuando se encienden giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular de 100 revoluciones por minuto. Empezando en la posición que se muestra en la figura, los ventiladores se encienden simultáneamente.

a) Para cada ventilador encuentre una ecuación que dé la altura del punto rojo (arriba de la línea horizontal que se muestra) t minutos después de que se encienden los ventiladores.

b) ¿Los ventiladores giran en fase? ¿Qué ángulo debe girar el ventilador A en contra de las manecillas del reloj para que los dos ventiladores giren en fase?

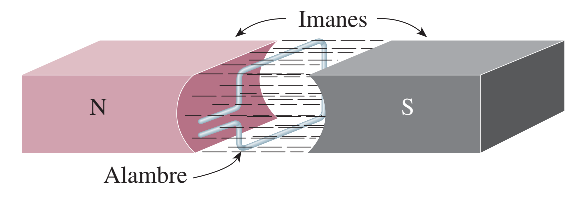


62. Corriente alterna La corriente alterna se produce cuando la armadura gira sobre su eje en un campo magnético como se muestra en la figura. Los generadores A y B giran hacia la izquierda a 60 Hz (ciclos por segundo) y cada generador produce un máximo de 50 V. El voltaje para cada generador se modela por

$$E_A = 50 \text{ sen}(120\pi t) \qquad E_B = 50 \text{ sen}\left(120\pi t - \frac{5\pi}{4}\right)$$

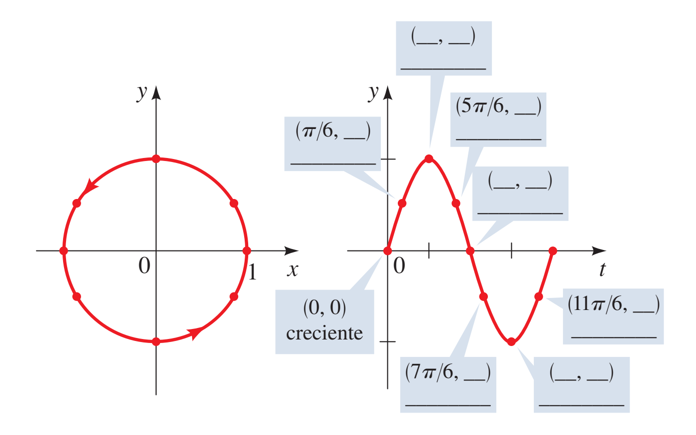
a) Encuentre el voltaje de fase de cada generador y la diferencia de fase.

b) ¿Los generadores producen voltaje en fase? ¿Qué ángulo debe girar contra el sentido de las manecillas del reloj la armadura en el segundo generador para que los dos generadores produzcan voltaje en fase?

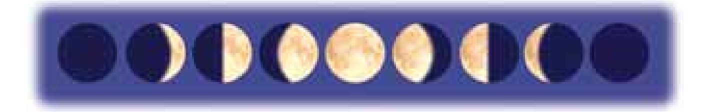


DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

63. DISCUSIÓN: Fases del seno La fase de una curva seno $y = \operatorname{sen}(kt + b)$ representa un lugar en particular en la gráfica de la función del seno $y = \operatorname{sen} t$. Específicamente, cuando $t = 0$, tenemos $y = \operatorname{sen} b$, este corresponde con el punto $(b, \operatorname{sen} b)$ en la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$. Observe que cada punto en la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ tiene características diferentes. Por ejemplo, para $t = \pi/6$, tenemos $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ y los valores del seno son crecientes, mientras que $t = 5\pi/6$, también tenemos $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ pero los valores del seno son decrecientes. Así cada punto en la gráfica del seno corresponde a una diferente "fase" de una curva seno. Complete las descripciones de cada etiqueta en la gráfica siguiente.



64. DISCUSIÓN: Fases de la Luna Durante el curso de un ciclo lunar (aproximadamente 1 mes) la Luna pasa por las fases conocidas. Las fases de la Luna son completamente similares a las fases de la función seno que se describe en el ejercicio 63. La figura siguiente muestra algunas fases del ciclo lunar a partir de una "Luna nueva", "Luna creciente", "Luna cuarto creciente", y así sucesivamente. La anterior a la última fase que se muestra es una "Luna menguante". En la figura se muestran descripciones similares para las otras fases de la Luna. ¿Cuáles son algunos eventos en la Tierra que siguen un ciclo mensual y están en fase con el ciclo lunar? ¿Cuáles son algunos de los eventos que están fuera de fase con el ciclo lunar?



CAPÍTULO 5 ■ REPASO

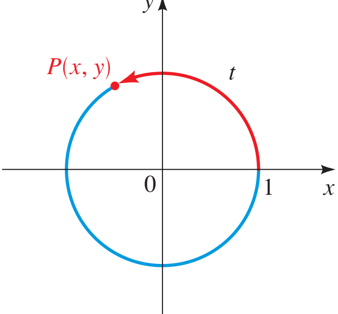
PROPIEDADES Y FÓRMULAS

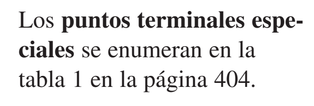
La circunferencia unitaria (p. 402)

La **circunferencia unitaria** es la circunferencia de radio 1 centrada en (0, 0). La ecuación de la circunferencia unitaria es $x^2 + y^2 = 1$.

Los puntos de la terminal en el círculo unitario (pp. 402-404)

El **punto terminal** $P(x, y)$ determinado por el número real t es el punto obtenido viajando hacia la izquierda una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en $(1, 0)$.





Los **puntos terminales especiales** se enumeran en la tabla 1 en la página 404.

El número de referencia (pp. 405-406)

El **número de referencia** asociado con el número real t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

Las funciones trigonométricas (p. 409)

Sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinada por el número real t. Entonces para valores del denominador distintos de cero las funciones trigonométricas se definen como sigue.

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x}$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \qquad \sec t = \frac{1}{x} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$

Valores especiales de las funciones trigonométricas (p. 410)

Las funciones trigonométricas tienen los siguientes valores en los valores especiales de t.

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

Identidades trigonométricas básicas (pp. 414–415)

Una identidad es una ecuación que es verdadera para todos los valores de la variable. Las identidades trigonométricas básicas son las siguientes.

Identidades recíprocas:

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$
$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$
$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Propiedades par-impar:

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$
$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

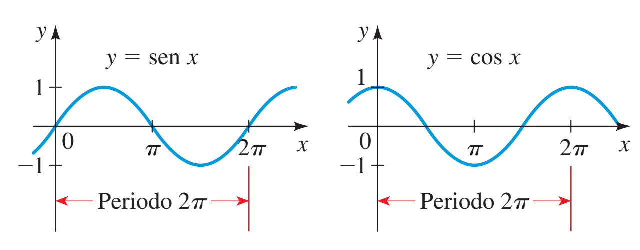
Propiedades periódicas (p. 419)

Una función f es **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para cada x. El menor p se llama **periodo** de f. Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π y la función tangente tiene periodo π.

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$$
$$\cos(t + 2\pi) = \cos t$$
$$\tan(t + \pi) = \tan t$$

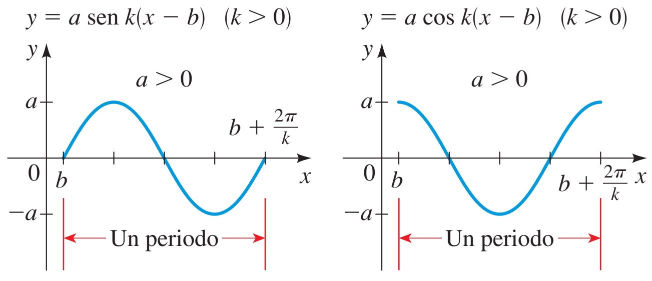
Gráficas de las funciones seno y coseno (p. 420)

Las gráficas del seno y del coseno tienen amplitud 1 y periodo 2π.



Amplitud 1, Periodo 2π

Gráficas de transformaciones del seno y del coseno (p. 424)

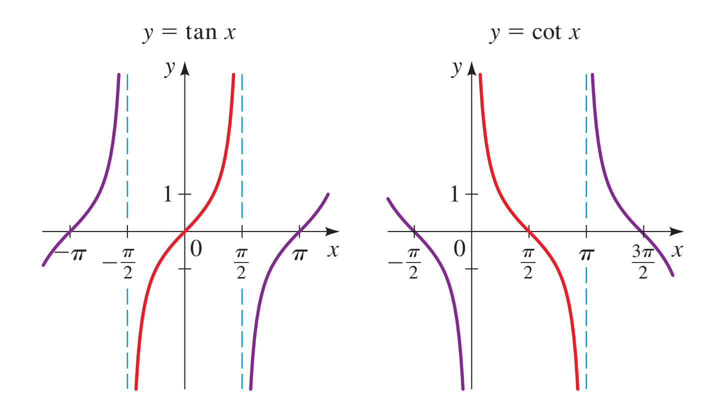


Amplitud a, periodo $\frac{2\pi}{k}$, desfase b

Un intervalo apropiado en el que un periodo completo de la gráfica es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Gráficas de las funciones tangente y cotangente (pp. 434-435)

Estas funciones tienen periodo π.

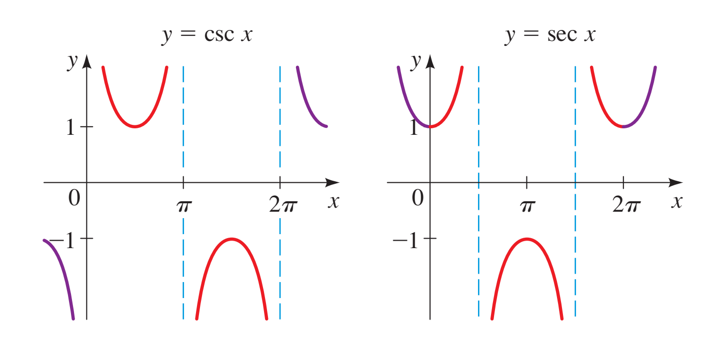


Para trazar la gráfica de un periodo de $y = a \tan kx$, un intervalo apropiado es $(-\pi/2k, \pi/2k)$.

Para trazar la gráfica de un periodo de $y = a \cot kx$, un intervalo adecuado es de $(0, \pi/k)$.

Gráficas de las funciones secante y cosecante (pp. 436-437)

Estas funciones tienen periodo 2π.



Para trazar la gráfica de un periodo de $y = a \csc kx$, un intervalo adecuado es de $(0, 2\pi/k)$.

Para trazar la gráfica de un periodo de $y = a \sec kx$, un intervalo adecuado es de $(0, 2\pi/k)$.

Funciones trigonométricas inversas (pp. 440-443)

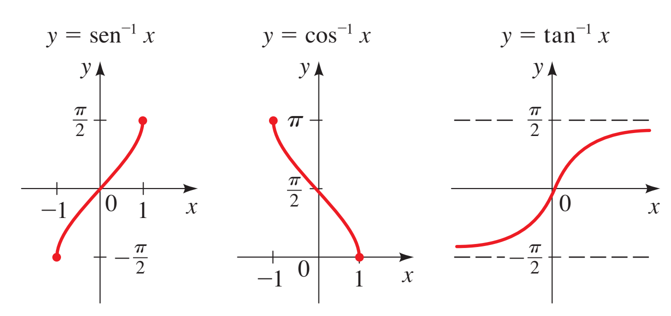
Las funciones inversas de las funciones trigonométricas se definen mediante la restricción de los dominios como sigue.

Función	Dominio	Rango
sen^{-1}	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Las funciones trigonométricas inversas se definen como sigue.

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x$$
$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$
$$\tan^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$$

A continuación se muestran las gráficas de estas funciones inversas.



Movimiento armónico (p. 446)

Un objeto está en **movimiento armónico simple** si su desplazamiento y en el tiempo t está modelado por $y = a \text{ sen } \omega t$ o $y = a \cos \omega t$. En este caso la amplitud es de $|a|$ el periodo es $2\pi/\omega$, y la frecuencia $\omega/2\pi$.

Movimiento armónico amortiguado (p. 451)

Un objeto está en **movimiento armónico amortiguado** si su desplazamiento y al tiempo t se modela con $y = ke^{-ct} \text{ sen } \omega t$ o $y = ke^{-ct} \cos \omega t$, $c > 0$ En este caso c es la constante de amortiguamiento, k es la amplitud inicial y $2\pi/\omega$ es el periodo.

Fase (pp. 453–454)

Una curva seno se puede expresar en las siguientes formas equivalentes:

$$y = A \text{ sen}(kt - b), \quad \text{la } \textbf{fase} \text{ es } b$$

$$y = A \text{ sen } k\left(t - \frac{b}{k}\right), \quad \text{el } \textbf{desfase} \text{ es } \frac{b}{k}$$

La fase (o ángulo de fase) b es la posición angular inicial del movimiento. El número b/k se llama también **tiempo de desfase** $(b > 0)$ o **tiempo de adelanto** $(b < 0)$.

Supongamos que dos objetos están en movimiento armónico con el mismo periodo modelado por

$$y_1 = A \text{ sen}(kt - b) \qquad \text{y} \qquad y_2 = A \text{ sen}(kt - c)$$

La **diferencia de fase** entre y_1 y y_2 es $b - c$. Los movimientos están "en fase" si la diferencia de fase es un múltiplo de 2π; de lo contrario, los movimientos están "fuera de fase".

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a)*** ¿Qué es la circunferencia unitaria y cuál es la ecuación de la circunferencia unitaria?

b) Use un diagrama para explicar lo que se quiere decir con el punto terminal $P(x, y)$ determinado por un número real t.

c) Encuentre el punto terminal para $t = \frac{\pi}{2}$.

d) ¿Cuál es el número de referencia asociado con t?

e) Encuentre el número de referencia y el punto terminal para $t = \frac{7\pi}{4}$.

2. Sea t un número real, y sea $P(x, y)$ el punto terminal determinado por t.

a) Escriba las ecuaciones de definición de sen t, cos t, tan t, csc t, sec t y cot t.

b) En cada uno de los cuatro cuadrantes identifique las funciones trigonométricas que son positivas.

c) Liste los valores especiales del seno, el coseno y la tangente.

3. ***a)*** Describa los pasos que utilizamos para encontrar el valor de una función trigonométrica en un número real t.

b) Encuentre sen $\frac{5\pi}{6}$.

4. ***a)*** ¿Qué es una función periódica?

b) ¿Cuáles son los periodos de las seis funciones trigonométricas?

c) Encuentre sen $\frac{19\pi}{4}$

5. ***a)*** ¿Qué es una función par y qué es una función impar?

b) ¿Cuáles funciones trigonométricas son pares y cuáles impares?

c) Si sen $t = 0.4$, encuentre sen$(-t)$.

d) Si cos $s = 0.7$, encuentre cos$(-s)$.

6. ***a)*** Exprese las identidades recíprocas.

b) Exprese las identidades pitagóricas.

7. ***a)*** Trace la gráfica de las funciones seno y coseno.

b) ¿Cuáles son la amplitud, el periodo y el desfase de la curva seno $y = a \text{ sen } k(x - b)$ y de la curva coseno $y = a \cos k(x - b)$?

c) Encuentre la amplitud, el periodo y el desfase de $y = 3 \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

8. ***a)*** Trace la gráfica de las funciones tangente y cotangente.

b) Exprese los periodos de la curva tangente $y = a \tan kx$ y para las curvas $y = a \cot kx$, indique intervalos apropiados para trazar la gráfica de un periodo completo de cada curva.

c) Encuentre el intervalo adecuado para trazar la gráfica de un periodo completo de $y = 5 \tan 3x$.

9. ***a)*** Trace la gráfica de las funciones secante y cosecante.

b) Para las curvas $y = a \csc kx$ y $y = a \sec kx$ indique intervalos adecuados para trazar la gráfica de un periodo completo de cada curva.

c) Determine un intervalo adecuado para trazar la gráfica de un periodo de $y = 3 \csc 6x$.

10. ***a)*** Defina la función inversa del seno, el coseno y la tangente.

b) Encuentre $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan^{-1}1$.

c) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$? ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x$?

11. ***a)*** ¿Qué es el movimiento armónico simple?

b) ¿Qué es el movimiento armónico amortiguado?

c) Dé ejemplos reales del movimiento armónico.

12. Suponga que un objeto está en movimiento armónico simple dado por

$$y = 5 \text{ sen}\left(2t - \frac{\pi}{3}\right).$$

a) Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia.

b) Encuentre la fase y el desfase.

13. Considere los siguientes modelos del movimiento armónico.

$$y_1 = 5 \text{ sen}(2t - 1) \qquad y_2 = 5 \text{ sen}(2t - 3)$$

¿Tendrán ambos movimientos la misma frecuencia? ¿Cuál es la fase de cada ecuación? ¿Cuál es la diferencia de fase? ¿Los objetos están moviéndose en fase o fuera de fase?

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN

EJERCICIOS

1–2 ■ Puntos terminales Se da un punto $P(x, y)$. ***a***) Demuestre que P está en la circunferencia unitaria. ***b***) Suponga que P es el punto terminal determinado por t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

1. $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **2.** $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

3–6 ■ Número de referencia y punto terminal Se da un número real t. ***a***) Encuentre el número de referencia para t. ***b***) Encuentre el punto terminal $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria determinado por t. ***c***) Encuentre las seis funciones trigonométricas de t.

3. $t = \frac{2\pi}{3}$ **4.** $t = \frac{5\pi}{3}$

5. $t = -\frac{11\pi}{4}$ **6.** $t = -\frac{7\pi}{6}$

7–16 ■ Valores de las funciones trigonométricas Encuentre el valor de la función trigonométrica. Si es posible dé el valor exacto; de otro modo, use calculadora para encontrar un valor aproximado redondeado a cinco decimales.

7. ***a***) $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$ ***b***) $\cos\frac{3\pi}{4}$

8. ***a***) $\tan\frac{\pi}{3}$ ***b***) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

9. ***a***) sen 1.1 ***b***) cos 1.1

10. ***a***) $\cos\frac{\pi}{5}$ ***b***) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

11. ***a***) $\cos\frac{9\pi}{2}$ ***b***) $\sec\frac{9\pi}{2}$

12. ***a***) $\text{sen}\,\frac{\pi}{7}$ ***b***) $\csc\frac{\pi}{7}$

13. ***a***) $\tan\frac{5\pi}{2}$ ***b***) $\cot\frac{5\pi}{2}$

14. ***a***) sen 2π ***b***) csc 2π

15. ***a***) $\tan\frac{5\pi}{6}$ ***b***) $\cot\frac{5\pi}{6}$

16. ***a***) $\cos\frac{\pi}{3}$ ***b***) $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$

17–20 ■ Identidades fundamentales Use las identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda.

17. $\frac{\tan t}{\cos t}$, sen t

18. $\tan^2 t \sec t$, $\cos t$

19. tan t, sen t; t en el cuarto cuadrante

20. sec t, sen t; t en el segundo cuadrante

21–24 ■ Valores de funciones trigonométricas Encuentre los valores de las funciones trigonométricas restantes en t a partir de la información dada.

21. sen $t = \frac{5}{13}$, cos $t = -\frac{12}{13}$

22. sen $t = -\frac{1}{2}$, cos $t > 0$

23. cot $t = -\frac{1}{2}$, csc $t = \sqrt{5}/2$

24. cos $t = -\frac{3}{5}$, tan $t < 0$

25–28 ■ Valores de funciones trigonométricas Encuentre los valores de la función trigonométrica de t a partir de la información dada.

25. sec t + cot t; tan $t = \frac{1}{4}$, el punto terminal para t está en el tercer cuadrante

26. csc t + sec t; sen $t = -\frac{8}{17}$, el punto terminal para t está en el cuarto cuadrante

27. tan t + sec t; cos $t = \frac{3}{5}$, el punto terminal para t está en el primer cuadrante

28. $\text{sen}^2 t + \cos^2 t$; sec $t = -5$, el punto terminal para t está en el segundo cuadrante

29–36 ■ Desfases Se da una función trigonométrica. ***a***) Encuentre la amplitud, el periodo y el desfase de la función. ***b***) Trace la gráfica.

29. $y = 10 \cos \frac{1}{2}x$ **30.** $y = 4 \text{ sen } 2\pi x$

31. $y = -\text{sen } \frac{1}{2}x$ **32.** $y = 2 \text{ sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

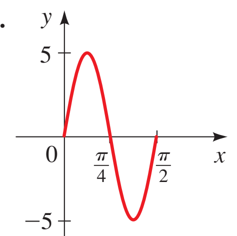
33. $y = 3 \text{ sen}(2x - 2)$ **34.** $y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

35. $y = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ **36.** $y = 10 \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

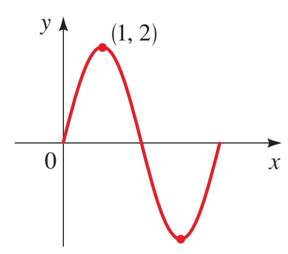
37–40 ■ Funciones de una gráfica Se muestra la gráfica de un periodo de una función de la forma $y = a \text{ sen } k(x - b)$ o $y = a \cos k(x - b)$. Determine la función.



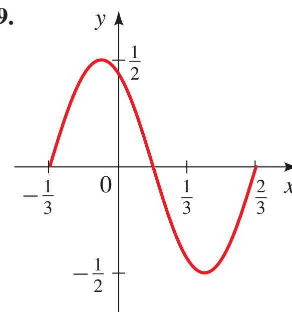
37.



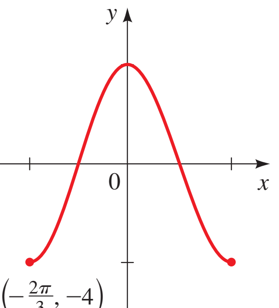
38.



39.



40.



41–48 ■ Trazar la gráfica de funciones trigonométricas Encuentre el periodo y trace la gráfica.

41. $y = 3 \tan x$

42. $y = \tan \pi x$

43. $y = 2 \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

44. $y = \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

45. $y = 4 \csc(2x + \pi)$

46. $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

47. $y = \tan\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{8}\right)$

48. $y = -4 \sec 4\pi x$

49–52 ■ Evaluar expresiones que implican funciones trigonométricas inversas Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

49. $\text{sen}^{-1} 1$

50. $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

51. $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen } \dfrac{13\pi}{6}\right)$

52. $\tan\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

53–54 ■ Amplitud, periodo, fase y desfase Para cada curva seno encuentre la amplitud, el periodo, la fase y el desfase.

53. $y = 100 \text{ sen } 8\left(t + \dfrac{\pi}{16}\right)$

54. $y = 80 \text{ sen } 3\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

55–56 ■ Fase y diferencia de fase Se da un par de curvas seno con el mismo periodo. ***a***) Encuentre la fase de cada curva. ***b***) Encuentre la diferencia de fase entre las curvas. ***c***) Determine si las curvas están en fase o fuera de fase. ***d***) Trace ambas curvas sobre los mismos ejes.

55. $y_1 = 25 \text{ sen } 3\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\quad y_2 = 10 \text{ sen}\left(3t - \dfrac{5\pi}{2}\right)$

56. $y_1 = 50 \text{ sen}\left(10t - \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\quad y_2 = 50 \text{ sen } 10\left(t - \dfrac{\pi}{20}\right)$



57–62 ■ Funciones pares e impares Se da una función. ***a***) Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función. ***b***) Determine de la gráfica si la función es periódica y, si es así, determine el periodo. ***c***) Determine de la gráfica si la función es impar, par o ninguna de estas.

57. $y = |\cos x|$

58. $y = \text{sen}(\cos x)$

59. $y = \cos(2^{0.1x})$

60. $y = 1 + 2^{\cos x}$

61. $y = |x| \cos 3x$

62. $y = \sqrt{x} \text{ sen } 3x, \quad x > 0$

63–66 ■ Curvas seno y coseno con amplitud variable Trace la gráfica de las tres funciones en una misma pantalla. ¿Cómo están relacionadas con la gráfica?

63. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \text{ sen } x$

64. $y = 2^{-x}, \quad y = -2^{-x}, \quad y = 2^{-x} \cos 4\pi x$

65. $y = x, \quad y = \text{sen } 4x, \quad y = x + \text{sen } 4x$

66. $y = \text{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

67–68 ■ Máximos y mínimos Encuentre los valores máximo y mínimo de la función.

67. $y = \cos x + \text{sen } 2x$

68. $y = \cos x + \text{sen}^2 x$



69-70 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas gráficamente Encuentre todas las soluciones de la ecuación que se encuentran en el intervalo dado. Indique cada respuesta redondeada a dos decimales.

69. $\text{sen } x = 0.3; \quad [0, 2\pi]$

70. $\cos 3x = x; \quad [0, \pi]$



71. Descubra el periodo de una función trigonométrica Sean $y_1 = \cos(\text{sen } x)$ y $y_2 = \text{sen}(\cos x)$.

a) Trace la gráfica de y_1 y y_2 en el mismo rectángulo de visión.

b) Determine el periodo de cada una de estas funciones a partir de su gráfica.

c) Encuentre una desigualdad entre $\text{sen}(\cos x)$ y $\cos(\text{sen } x)$ que sea válida para toda x.

72. Movimiento armónico simple Un punto P que se mueve en movimiento armónico simple completa 8 ciclos por segundo. Si la amplitud del movimiento es 50 cm encuentre una ecuación que describa el movimiento de P como función del tiempo. Suponga que el punto P está en su máximo desplazamiento cuando $t = 0$.

73. Movimiento armónico simple Una masa suspendida de un resorte oscila en movimiento armónico simple a una frecuencia de 4 ciclos por segundo. La distancia del punto más alto al punto más bajo de la oscilación es 100 centímetros. Encuentre una ecuación que describa la distancia de la masa desde su posición de reposo como función del tiempo. Suponga que la masa está en su punto más bajo cuando $t = 0$.

74. Movimiento armónico amortiguado El piso superior de un edificio experimenta movimiento armónico amortiguado después de un breve y repentino terremoto. En el tiempo $t = 0$ el desplazamiento está en su máximo, a 16 cm de la posición normal. La constante de amortiguamiento es $c = 0.72$ y el edificio vibra a 1.4 ciclos por segundo.

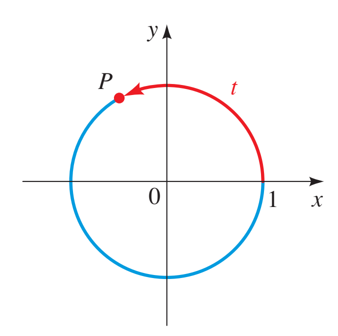
a) Encuentre una función de la forma $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ para modelar el movimiento.



b) Trace la gráfica de la función que encontró en el inciso *a*).

c) ¿Cuál es el desplazamiento en el tiempo $t = 10$ s?

EXAMEN



1. El punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria en el cuarto cuadrante. Si $x = \sqrt{11}/6$, encuentre y.

2. El punto P de la figura de la izquierda tiene coordenada y de $\frac{4}{5}$. Encuentre:

a) sen t ***b)*** cos t

c) tan t ***d)*** sec t

3. Encuentre el valor exacto.

a) $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}$ ***b)*** $\cos\dfrac{13\pi}{4}$

c) $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ ***d)*** $\csc\dfrac{3\pi}{2}$

4. Exprese tan t en términos de sen t, si el punto terminal determinado por t está en el segundo cuadrante.

5. Si $\cos t = -\frac{8}{17}$ y si el punto terminal determinado por t está en el tercer cuadrante, encuentre $\tan t \cot t + \csc t$.

6–7 ■ Se da una función trigonométrica.

a) Encuentre la amplitud, el periodo y el desfase de la función.

b) Trace la gráfica de un periodo completo.

6. $y = -5\cos 4x$ **7.** $y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

8–9 ■ Encuentre el periodo y trace la gráfica de la función.

8. $y = -\csc 2x$ **9.** $y = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

10. Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

a) $\tan^{-1} 1$ ***b)*** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\tan^{-1}(\tan 3\pi)$ ***d)*** $\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

11. La gráfica mostrada a la izquierda es un periodo de una función de la forma $y = a\operatorname{sen} k(x - b)$. Determine la función.

12. Las curvas seno $y_1 = 30\operatorname{sen}\left(6t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $y_2 = 30\operatorname{sen}\left(6t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ tienen el mismo periodo.

a) Encuentre la fase de cada curva.

b) Encuentre la diferencia de fase entre y_1 y y_2.

c) Determine si las curvas están en fase o fuera de fase.

d) Trace la gráfica de ambas curvas en los mismos ejes.



13. Sea $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$.

a) Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de f en un rectángulo de visión apropiado.

b) Determine de la gráfica si f es par, impar o ninguna de estas.

c) Encuentre los valores mínimo y máximo de f.

14. Una masa suspendida de un resorte oscila en movimiento armónico simple. La masa completa 2 ciclos por segundo, y la distancia entre el punto más alto y el punto más bajo de la oscilación es 10 cm. Encuentre una ecuación de la forma $y = a\operatorname{sen}\omega t$ que da la distancia de la masa desde su posición de reposo como función del tiempo.

15. Un cuerpo está moviéndose hacia arriba y abajo en movimiento armónico amortiguado. Su desplazamiento en el tiempo $t = 0$ es de 16 pulgadas; este es su desplazamiento máximo. La constante de amortiguamiento es $c = 0.1$, y la frecuencia es 12 Hz.

a) Encuentre una función que modele este movimiento.



b) Trace la gráfica de la función.

Ajuste de datos a curvas senoidales

En secciones anteriores de *Enfoque sobre modelado* aprendimos cómo ajustar modelos lineales, exponenciales y de potencia a datos. La figura 1 muestra algunas gráficas de dispersión de datos. Las gráficas de dispersión pueden ayudar a guiarnos a escoger un modelo apropiado. (Trate de determinar qué tipo de función modelaría mejor los datos en cada gráfica.) Si la gráfica de dispersión indica movimiento armónico simple, entonces podríamos tratar de modelar los datos con una función seno o coseno. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

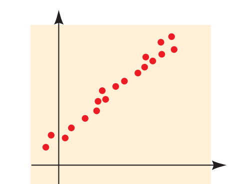
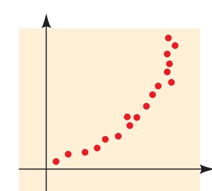
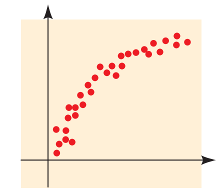
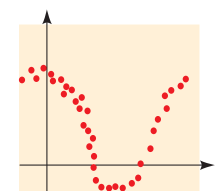
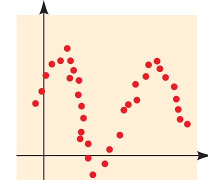






FIGURA 1

EJEMPLO 1 ■ Modelado de la altura de una marea



La profundidad del agua en un angosto canal varía con las mareas. La tabla 1 muestra la profundidad del agua en un periodo de 12 horas. En la figura 2 se muestra una gráfica de dispersión.

a) Encuentre una función que modele la profundidad del agua respecto al tiempo.

b) Si un bote necesita al menos 11 pies de agua para cruzar el canal, ¿durante qué horas puede hacerlo?

TABLA 1

Hora	Profundidad (pies)
12:00 a.m.	9.8
1:00 a.m.	11.4
2:00 a.m.	11.6
3:00 a.m.	11.2
4:00 a.m.	9.6
5:00 a.m.	8.5
6:00 a.m.	6.5
7:00 a.m.	5.7
8:00 a.m.	5.4
9:00 a.m.	6.0
10:00 a.m.	7.0
11:00 a.m.	8.6
12:00 p.m.	10.0

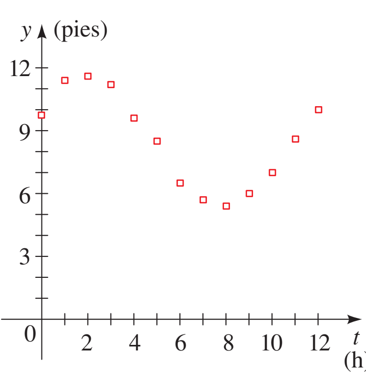


FIGURA 2

SOLUCIÓN

a) Los datos parecen encontrarse en una curva coseno (o seno). Pero si se traza la gráfica de $y = \cos t$ en la misma gráfica de dispersión, el resultado en la figura 3 no está siquiera cercana a los datos. Para ajustar los datos necesitamos ajustar el desplazamiento vertical, la amplitud, el periodo y el desfase de la curva coseno. En otras palabras, necesitamos encontrar una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

Usamos los siguientes pasos, que se ilustran en las gráficas de la siguiente página.

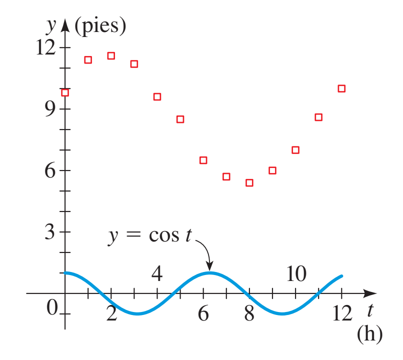
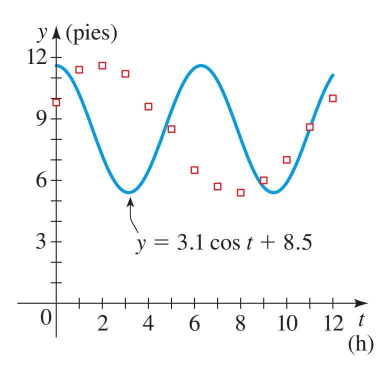
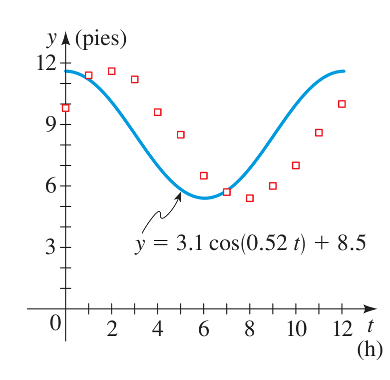


FIGURA 3





■ **Ajustar el desplazamiento vertical** El desplazamiento vertical b es el promedio de los valores máximo y mínimo:

$$\begin{aligned} b &= \text{desplazamiento vertical} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} + \text{valor mínimo}) \\ &= \frac{1}{2}(11.6 + 5.4) = 8.5 \end{aligned}$$

■ **Ajustar la amplitud** La amplitud a es la mitad de la diferencia entre los valores máximo y mínimo:

$$\begin{aligned} a &= \text{amplitud} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}) \\ &= \frac{1}{2}(11.6 - 5.4) = 3.1 \end{aligned}$$

■ **Ajustar el periodo** El tiempo entre valores consecutivos máximo y mínimo es la mitad de un periodo. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega} &= \text{periodo} \\ &= 2\cdot(\text{tiempo de valor máximo} - \text{tiempo de valor mínimo}) \\ &= 2(8 - 2) = 12 \end{aligned}$$

Entonces $\omega = 2\pi/12 = 0.52$.

■ **Ajustar el desfase** Puesto que el valor máximo de los datos se presenta en aproximadamente $t = 2.0$, este representa una curva de coseno desplazada 2 h a la derecha. Por tanto

$$\begin{aligned} c &= \text{desplazamiento de fase} \\ &= \text{hora de valor máximo} \\ &= 2.0 \end{aligned}$$

■ **El modelo** Hemos mostrado que una función que modela las mareas en el periodo dado está dada por

$$y = 3.1\cos(0.52(t - 2.0)) + 8.5$$

En la figura 4 se muestra una gráfica de la función y la gráfica de dispersión. Parece que el modelo que encontramos es una buena aproximación de los datos.

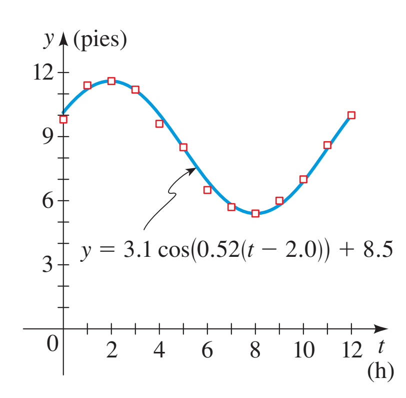


FIGURA 4

b) Necesitamos resolver la desigualdad $y \geq 11$. Resolvemos gráficamente esta desigualdad al trazar la gráfica de $y = 3.1 \cos 0.52(t - 2.0) + 8.5$ y $y = 11$ en la misma gráfica. De la gráfica de la figura 5 vemos que la profundidad del agua es mayor a 11 pies entre $t \approx 0.8$ y $t \approx 3.2$. Esto corresponde a las horas 12:48 a.m. a las 3:12 a.m.

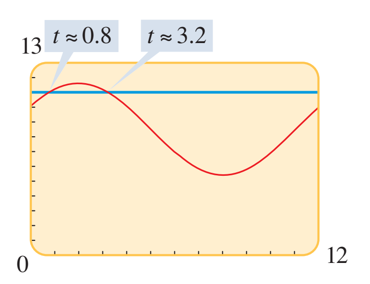


FIGURA 5

Para la TI-83 y TI-84 la instrucción `SinReg` (regresión senoidal) encuentra la curva seno que mejor se ajusta a los datos.

En el ejemplo 1 usamos la gráfica de dispersión para guiarnos a encontrar una curva coseno que dé un modelo aproximado de los datos. Algunas calculadoras graficadoras son capaces de encontrar la curva seno o coseno que mejor se ajusta a un conjunto dado de puntos de datos. El método que estas calculadoras usan es semejante al método para encontrar una recta de mejor ajuste, tal como se explica en la página 140.

EJEMPLO 2 ■ Ajuste de datos a una curva seno

a) Use una calculadora graficadora para encontrar la curva seno que mejor ajusta los datos de profundidad del agua en la tabla 1 en la página 466.

b) Compare su resultado con el modelo encontrado en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN

```
SinReg
 y=a*sin(bx+c)+d
 a=3.097877596
 b=.5268322697
 c=.5493035195
 d=8.424021899
```

Salida de la función `SinReg` en la TI-83.

a) Usando los datos de la tabla 1 y la instrucción `SinReg` de la calculadora TI-83, obtenemos una función de la forma

$$y = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$$

donde

$$a = 3.1 \qquad b = 0.53$$
$$c = 0.55 \qquad d = 8.42$$

Por tanto, la función seno que mejor ajusta los datos es

$$y = 3.1 \operatorname{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42$$

b) Para comparar esto con la función del ejemplo 1 cambiamos la función seno por una función coseno usando la fórmula de reducción $\operatorname{sen} u = \cos(u - \pi/2)$.

$$\begin{aligned} y &= 3.1 \operatorname{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42 \\ &= 3.1 \cos\left(0.53t + 0.55 - \frac{\pi}{2}\right) + 8.42 && \text{Fórmula de reducción} \\ &= 3.1 \cos(0.53t - 1.02) + 8.42 \\ &= 3.1 \cos(0.53(t - 1.92)) + 8.42 && \text{Factorice 0.53} \end{aligned}$$

Comparando esto con la función obtenida en el ejemplo 1 vemos que hay pequeñas diferencias en los coeficientes. En la figura 6 trazamos una gráfica de dispersión de los datos junto con la función seno de mejor ajuste.

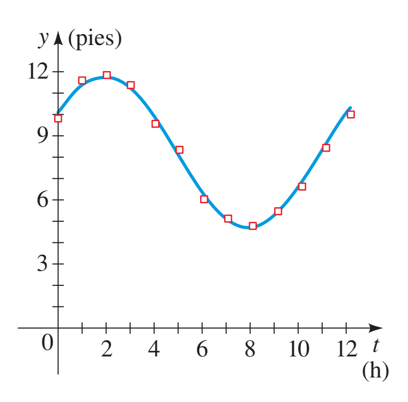


FIGURA 6

En el ejemplo 1 estimamos los valores de la amplitud, el periodo y los desplazamientos a partir de los datos. En el ejemplo 2 la calculadora mostró la curva seno que mejor se ajusta a los datos (esto es, la curva que se desvía menos de los datos como se explica en la página 140). Las diferentes formas de obtener el modelo explican las diferencias en las funciones.

PROBLEMAS

1–4 ■ Modelado de datos periódicos Se da un conjunto de datos.

***a*)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

***b*)** Encuentre una función coseno de la forma $y = a\cos(\omega(t - c)) + b$ que modele los datos como en el ejemplo 1.

***c*)** Trace la gráfica de la función que encontró en el inciso *b*) junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta la curva a los datos?

***d*)** Use una calculadora graficadora para encontrar la función seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2.

***e*)** Compare las funciones que encontró en los incisos *b*) y *d*). [Use la fórmula de reducción sen $u = \cos(u - \pi/2)$.]

1.

t	y
0	2.1
2	1.1
4	−0.8
6	−2.1
8	−1.3
10	0.6
12	1.9
14	1.5

2.

t	y
0	190
25	175
50	155
75	125
100	110
125	95
150	105
175	120
200	140
225	165
250	185
275	200
300	195
325	185
350	165

3.

t	y
0.1	21.1
0.2	23.6
0.3	24.5
0.4	21.7
0.5	17.5
0.6	12.0
0.7	5.6
0.8	2.2
0.9	1.0
1.0	3.5
1.1	7.6
1.2	13.2
1.3	18.4
1.4	23.0
1.5	25.1

4.

t	y
0.0	0.56
0.5	0.45
1.0	0.29
1.5	0.13
2.0	0.05
2.5	−0.10
3.0	0.02
3.5	0.12
4.0	0.26
4.5	0.43
5.0	0.54
5.5	0.63
6.0	0.59

5. Ritmos circadianos El ritmo circadiano (del latín *circa*, que significa “alrededor de” y diem, que significa “día”) es el modelo biológico diario por el cual cambian la temperatura del cuerpo, la presión sanguínea y otras variables fisiológicas. Los datos de la tabla siguiente muestran cambios típicos en la temperatura del cuerpo humano en un periodo de 24 horas ($t = 0$ corresponde a la medianoche).

***a*)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

***b*)** Encuentre una curva coseno que modele los datos (como en el ejemplo 1).

***c*)** Trace la gráfica de la función que encontró en el inciso *b*) junto con la gráfica de dispersión.



***d*)** Use una calculadora graficadora para encontrar la curva seno que mejor se ajusta a los datos (como en el ejemplo 2).

Hora	Temperatura corporal (°C)	Hora	Temperatura corporal (°C)
0	36.8	14	37.3
2	36.7	16	37.4
4	36.6	18	37.3
6	36.7	20	37.2
8	36.8	22	37.0
10	37.0	24	36.8
12	37.2		

Año	Población de lechuzas
0	50
1	62
2	73
3	80
4	71
5	60
6	51
7	43
8	29
9	20
10	28
11	41
12	49

6. Población de depredadores Cuando dos especies interactúan en una relación depredador/presa, las poblaciones de ambas especies tienden a variar en forma senoidal. (Vea el *Proyecto de descubrimiento: Modelos depredador/presa* que se cita en la página 427.) En cierto condado del Medio Oeste la principal fuente de alimento para las lechuzas de granero consistente en ratones de campo y otros pequeños mamíferos. La tabla da la población de lechuzas de granero en este condado cada día 1° de julio en un periodo de 12 años.

a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva seno que modele los datos (como en el ejemplo 1).

c) Trace la gráfica de la función que encontró en el inciso *b*) junto con la gráfica de dispersión.



d) Use una calculadora graficadora para encontrar la curva seno que mejor se ajuste a los datos (como en el ejemplo 2). Compare con su respuesta del inciso *b*).

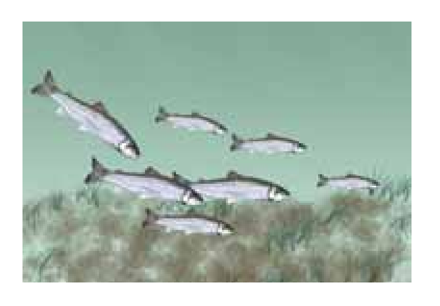
7. Supervivencia de los salmones Por razones que hasta ahora no se han entendido con toda claridad, el número de pececillos de salmón que sobreviven al viaje desde los lugares de desove en los lechos de ríos hasta el mar abierto varía, aproximadamente, en forma seno de un año a otro. La tabla muestra el número de salmones que nacen en cierto arroyuelo de la Columbia Británica y luego se abren paso al estrecho de Georgia. La información se da en miles de pececillos para un periodo de 16 años.

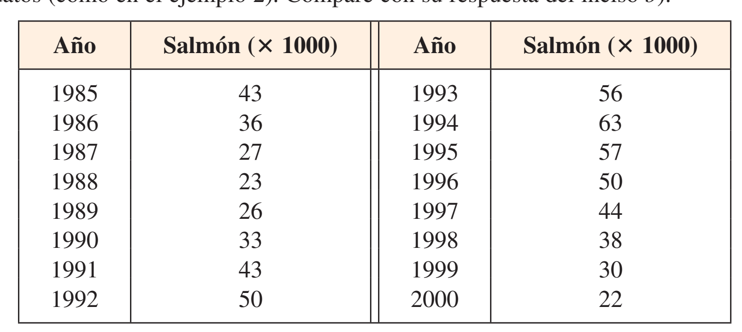
a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva seno que modele los datos (como en el ejemplo 1).

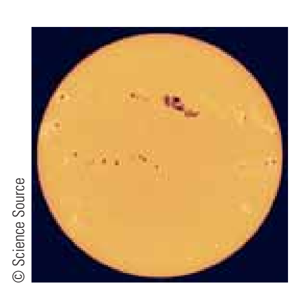
c) Grafique la función que encontró en el inciso *b*) junto con la gráfica de dispersión.

d) Use una calculadora graficadora para encontrar la curva seno que mejor se ajuste a los datos (como en el ejemplo 2). Compare con su respuesta del inciso *b*).





Año	Salmón (× 1000)	Año	Salmón (× 1000)
1985	43	1993	56
1986	36	1994	63
1987	27	1995	57
1988	23	1996	50
1989	26	1997	44
1990	33	1998	38
1991	43	1999	30
1992	50	2000	22



8. Actividad de manchas solares Las manchas solares son regiones relativamente "frías" en la superficie del Sol, que parecen como manchas oscuras cuando son observadas a través de filtros solares especiales. El número de manchas solares varía en un ciclo de 11 años. La tabla siguiente da el promedio de la cantidad diaria de manchas solares para los años 1968-2012.

a) Cree una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva coseno que modele los datos (como en el ejemplo 1).

c) Trace la gráfica de la función que encontró en el inciso *b*) junto con la gráfica de dispersión.



d) Use una calculadora graficadora para encontrar la curva seno que mejor se ajuste a los datos (como en el ejemplo 2). Compare con su respuesta del inciso *b*).

Año	Manchas solares	Año	Manchas solares	Año	Manchas solares	Año	Manchas solares
1968	106	1980	154	1991	145	2002	104
1969	105	1981	140	1992	94	2003	63
1970	104	1982	115	1993	54	2004	40
1971	67	1983	66	1994	29	2005	30
1972	69	1984	45	1995	17	2006	15
1973	38	1985	17	1996	8	2007	7
1974	34	1986	13	1997	21	2008	3
1975	15	1987	29	1998	64	2009	3
1976	12	1988	100	1999	93	2010	16
1977	27	1989	157	2000	119	2011	56
1978	92	1990	142	2001	111	2012	58
1979	155						

Fuente: Solar Influence Data Analysis Center, Bélgica



6 Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo

Supongamos que deseamos encontrar la distancia de la Tierra al Sol. Usar una cinta de medir es obviamente impráctico, de modo que necesitamos algo que no sean simples mediciones para afrontar este problema. Los ángulos son más fáciles de medir que las distancias. Por ejemplo, podemos encontrar el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna con sólo apuntar al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es encontrar relaciones entre ángulos y distancias. Por lo que si tuviéramos una forma de determinar distancias a partir de ángulos, podríamos encontrar la distancia al Sol sin tener que ir hasta allá. Las funciones trigonométricas nos dan las herramientas que necesitamos.

Las funciones trigonométricas se pueden definir en dos diferentes pero equivalentes maneras: como funciones de números reales (capítulo 5) o como funciones de ángulos (capítulo 6). Los dos métodos son independientes entre sí, cualquiera de los capítulos 5 o 6 se puede estudiar primero. Se estudian ambos métodos ya que se requieren los diferentes métodos para diferentes aplicaciones.

6.1 MEDIDA DE UN ÁNGULO

■ Medida de un ángulo ■ Ángulos en posición estándar ■ Longitud de un arco de circunferencia ■ Área de un sector circular ■ Movimiento circular

Un **ángulo** AOB está formado por dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O (vea la figura 1). Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 recibe el nombre de **lado inicial** y R_2 es el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj, el ángulo se considera **positivo** y, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo se considera **negativo**.

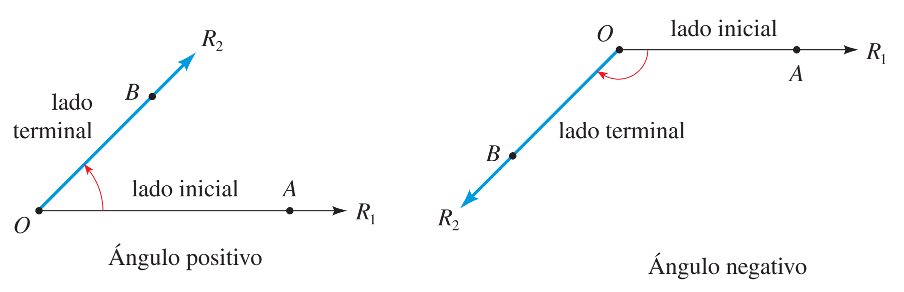


FIGURA 1

■ Medida de un ángulo

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover R_1 sobre R_2. Intuitivamente, esto es cuánto es lo que "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de matemáticas se usa un método más natural de medir ángulos: *la medida en radianes*. La cantidad que abre un ángulo se mide a lo largo del arco de una circunferencia de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

θ
1
Medida en radianes de θ

FIGURA 2

DEFINICIÓN DE MEDIDA EN RADIÁN

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (vea la figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π y, por tanto, una revolución completa tiene medida 2π rad, un ángulo llano tiene una medida π rad, y un ángulo recto tiene medida $\pi/2$ rad. Un ángulo que esté subtendido por un arco de longitud 2 a lo largo de la circunferencia unitaria tiene una medida de 2 radianes (vea la figura 3).

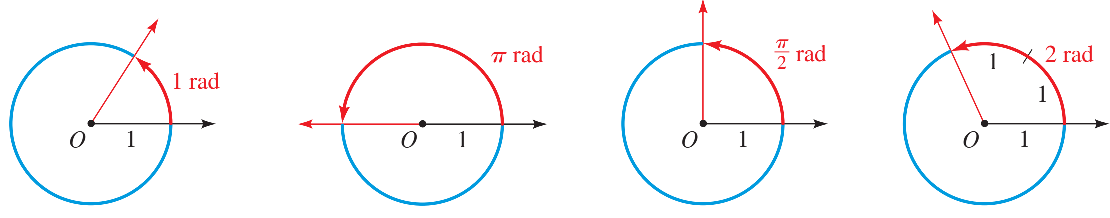


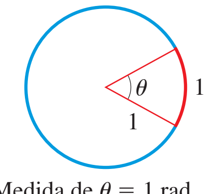
FIGURA 3 Medida en radianes

Dado que una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es 2π rad, obtenemos la siguiente y sencilla relación entre estos dos métodos de medición de ángulos.

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados a radianes multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes a grados multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

FIGURA 4

Para tener idea del tamaño de 1 radián observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296° \qquad \text{y} \qquad 1° \approx 0.01745 \text{ rad}$$

En la figura 4 se muestra un ángulo θ de medida 1 radián.

EJEMPLO 1 ■ Convertir entre radianes y grados

a) Exprese 60° en radianes. ***b***) Exprese $\dfrac{\pi}{6}$ rad en grados.

SOLUCIÓN Con la relación entre grados y radianes se obtiene

a) $60° = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right) \text{rad} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$ ***b***) $\dfrac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 30°$



Una nota de terminología: a veces usamos frases como "un ángulo de 30° que significa *un ángulo cuya medida es* 30°. También, para un ángulo θ escribimos $\theta = 30°$ o $\theta = \pi/6$ que significa *la medida de* θ *es* 30° *o* $\pi/6$ *rad*. Cuando no se da una unidad, se supone que el ángulo se mide en radianes.

Ángulos en posición estándar

Un ángulo está en **posición estándar** si está trazado en el plano *xy* con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje positivo *x*. La figura 5 da ejemplos de ángulos en posición estándar.

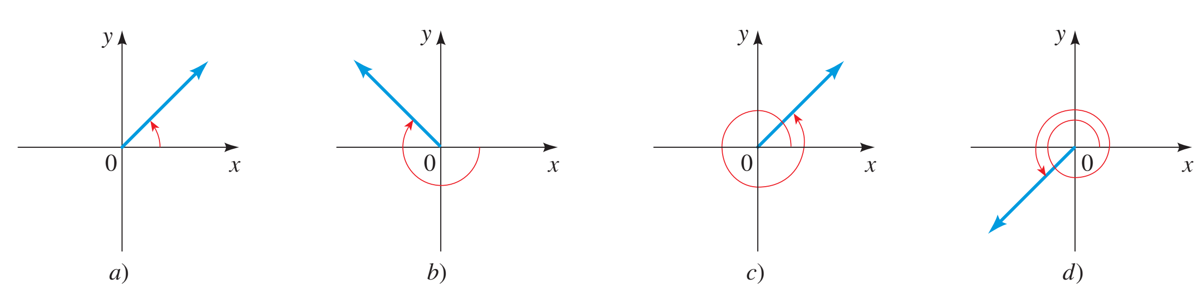


FIGURA 5 Ángulos en posición estándar

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si sus lados coinciden. En la figura 5 los ángulos en *a*) y en *c*) son coterminales.

EJEMPLO 2 ■ Ángulos coterminales

a) Encuentre los ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = 30°$ en posición estándar.

b) Encuentre los ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ en posición estándar.

SOLUCIÓN

***a*)** Para encontrar ángulos positivos que sean coterminales con θ, sumamos cualquier múltiplo de 360°. Así,

$$30° + 360° = 390° \qquad \text{y} \qquad 30° + 720° = 750°$$

son coterminales con $\theta = 30°$. Para encontrar ángulos negativos que son coterminales con θ, restamos cualquier múltiplo de 360°. Así

$$30° - 360° = -330° \qquad \text{y} \qquad 30° - 720° = -690°$$

son coterminales con θ. (Vea la figura 6.)

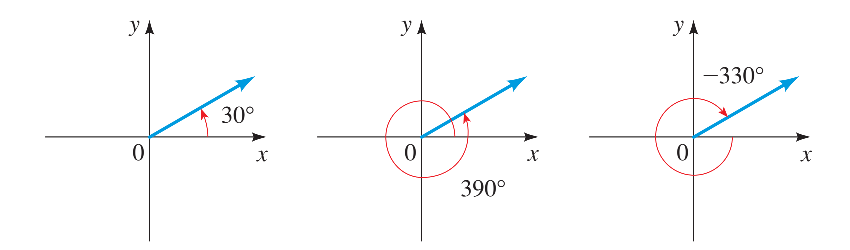


FIGURA 6

***b*)** Para encontrar ángulos positivos que sean coterminales con θ sumamos cualquier múltiplo de 2π. Así,

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

son coterminales con $\theta = \pi/3$. Para encontrar ángulos negativos que son coterminales con θ restamos cualquier múltiplo de 2π. Así

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

son coterminales con θ. (Vea la figura 7.)

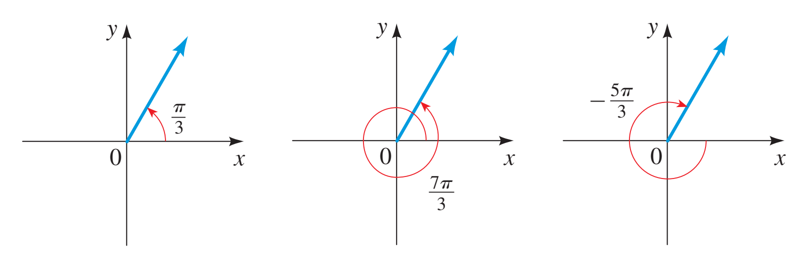


FIGURA 7

Ahora intente realizar los ejercicios 29 y 31 ■

EJEMPLO 3 ■ Ángulos coterminales

Encuentre un ángulo con medida entre 0 y 360° que sea coterminal con el ángulo de medida 1 290° en posición estándar.

SOLUCIÓN De 1 290° podemos restar 360° tantas veces como se desee y el ángulo restante será coterminal con 1 290°. Así 1 290° − 360° = 930° es coterminal con 1 290° y, también lo es, el ángulo 1 290° − 2(360)° = 570°.

Para encontrar el ángulo que buscamos entre 0 y 360°, restamos 360° de 1 290° tantas veces como sea necesario. Una forma eficiente de hacer esto es determinar cuántas veces caben 360° en 1 290°, es decir, divida 1 290 entre 360, y el residuo será

el ángulo que buscamos. Vemos que 360 cabe tres veces en 1 290, con un residuo de 210. Así, 210° es el ángulo deseado (vea la figura 8).

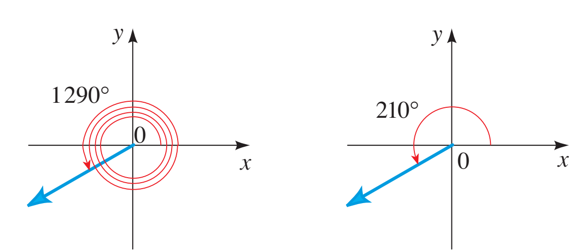
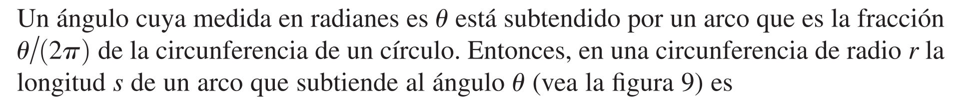


FIGURA 8

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

■ Longitud de un arco de circunferencia



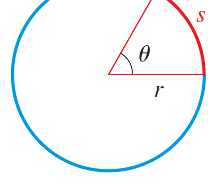


FIGURA 9 $s = \theta r$

Un ángulo cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Entonces, en una circunferencia de radio r la longitud s de un arco que subtiende al ángulo θ (vea la figura 9) es

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia de círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

En una circunferencia de radio r la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

$$s = r\theta$$

Despejando θ, obtenemos la importante fórmula

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Esta fórmula nos permite definir medidas en radianes usando una circunferencia de cualquier radio r: la medida en radianes de un ángulo θ es s/r, donde s es la longitud del arco circular que subtiende a θ en una circunferencia de radio r (vea la figura 10).

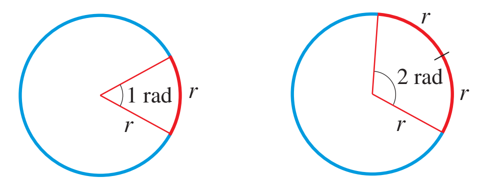


FIGURA 10 La medida de θ en radianes es el número de "radios" que pueden caber en un arco que subtiende a θ; de aquí el término *radián*.

EJEMPLO 4 ■ Longitud de arco y medida de ángulo

a) Encuentre la longitud de un arco de una circunferencia con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.

b) Un ángulo central θ de un círculo de radio 4 m está subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre la medida de θ en radianes.

SOLUCIÓN

a) Del ejemplo 1*b*) vemos que $30° = \pi/6$ rad. Por lo que la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}$$

La fórmula $s = r\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mide en radianes.

b) Por la fórmula $\theta = s/r$ tenemos

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ rad}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 57 y 59 ■

■ Área de un sector circular

El área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Un sector de este círculo con ángulo central θ tiene un área que es la fracción $\theta/(2\pi)$ del área de todo el círculo (vea la figura 11). Entonces, el área de este sector es

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{área de círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}r^2\theta$$

FIGURA 11
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

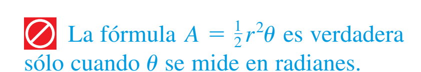
En un círculo de radio r el área A de un sector con ángulo central de θ radianes es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

EJEMPLO 5 ■ Área de un sector

Encuentre el área de un sector de un círculo con ángulo central 60° si el radio del círculo es 3 metros.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula para el área de un sector circular debemos encontrar el ángulo central del sector en radianes: $60° = 60(\pi/180)$ rad $= \pi/3$ rad. Entonces, el área del sector es


La fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mide en radianes.

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} \text{ m}^2$$

Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■

■ Movimiento circular

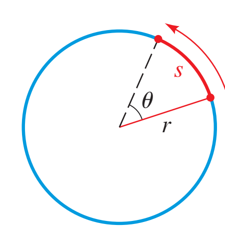


FIGURA 12

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo como se muestra en la figura 12. Hay dos formas de describir el movimiento del punto: velocidad lineal y velocidad angular. La **velocidad lineal** es la razón a la que está cambiando la distancia recorrida, de modo que la velocidad lineal es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. La **velocidad angular** es la razón a la que el ángulo central θ está cambiando, de modo que la velocidad angular es el número de radianes que este ángulo cambia dividido entre el tiempo transcurrido.

VELOCIDAD LINEAL Y VELOCIDAD ANGULAR

Suponga que un punto se mueve a lo largo de una circunferencia de radio r y el rayo desde el centro del círculo al punto recorre θ radianes en el tiempo t. Sea $s = r\theta$ la distancia que el punto se desplaza en el tiempo t. Entonces la velocidad del punto está dada por

$$\textbf{Velocidad angular} \qquad \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\textbf{Velocidad lineal} \qquad v = \frac{s}{t}$$

El símbolo ω es la letra griega "omega".



EJEMPLO 6 ■ Encontrar velocidad lineal y angular

Un niño hace girar una piedra en una honda de 3 pies de largo, a razón de 15 revoluciones cada 10 segundos. Encuentre las velocidades angular y lineal de la piedra.

SOLUCIÓN En 10 s, el ángulo θ cambia en $15 \cdot 2\pi = 30\pi$ radianes. Por tanto, la *velocidad angular* de la piedra es

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi \text{ rad}}{10 \text{ s}} = 3\pi \text{ rad/s}$$

La distancia recorrida por la piedra en 10 s es $s = 15 \cdot 2\pi r = 15 \cdot 2\pi \cdot 3 = 90\pi$ pies. En consecuencia, la *velocidad lineal* de la piedra es

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\pi \text{ pies}}{10 \text{ s}} = 9\pi \text{ pies/s}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 85 ■

Observe que la velocidad angular *no* depende del radio de la circunferencia, sino sólo del ángulo θ. No obstante, si conocemos la velocidad angular ω y el radio r, podemos encontrar la velocidad lineal como sigue: $v = s/t = r\theta/t = r(\theta/t) = r\omega$.

RELACIÓN ENTRE VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR

Si un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r con velocidad angular ω, entonces su velocidad lineal v está dada por

$$v = r\omega$$

EJEMPLO 7 ■ Encontrar la velocidad lineal a partir de la velocidad angular

Una mujer viaja en una bicicleta cuyas ruedas miden 26 pulgadas de diámetro. Si estas giran a 125 revoluciones por minuto (rpm), encuentre la velocidad a la que viaja la mujer, en mi/h.

SOLUCIÓN La velocidad angular de las ruedas es $2\pi \cdot 125 = 250\pi$ rad/min. Puesto que las ruedas tienen radio de 13 pulg (la mitad del diámetro), la velocidad lineal es

$$v = r\omega = 13 \cdot 250\pi \approx 10\,210.2 \text{ pulg/min}$$

Dado que hay 12 pulgadas por pie, 5 280 pies por milla y 60 minuto por hora, la velocidad de la mujer en millas por hora es

$$\frac{10\,210.2 \text{ pulg/min} \times 60 \text{ min/h}}{12 \text{ pulg/pies} \times 5\,280 \text{ pies/millas}} = \frac{612\,612 \text{ pulg/h}}{63\,360 \text{ pulg/millas}}$$

$$\approx 9.7 \text{ millas/h}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 87 ■

6.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. *a*) La medida en radianes de un ángulo θ es la longitud del ________ que subtiende el ángulo en un círculo de radio ________.

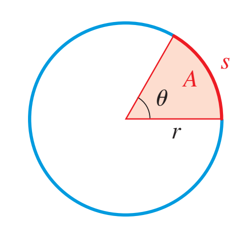
   b) Para convertir grados a radianes multiplicamos por ________.

   c) Para convertir radianes a grados multiplicamos por ________.

2. Se traza un ángulo central θ en una circunferencia de radio r, como se muestra en la figura siguiente.

   a) La longitud del arco subtendido por θ es s = ________.

   b) El área del sector circular con ángulo central θ es A = ________.

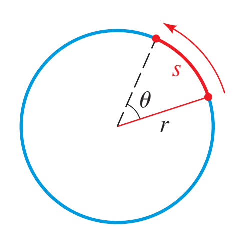


3. Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r como se muestra en la figura siguiente. El punto viaja una distancia s a lo largo del círculo en el tiempo t.

   a) La velocidad angular del punto es $\omega = \dfrac{\square}{\square}$.

   b) La velocidad lineal del punto es $v = \dfrac{\square}{\square}$.

   c) La velocidad lineal v y la velocidad angular ω están relacionados por la ecuación v = ________.



4. El objeto A está viajando a lo largo de un círculo de radio 2, y el objeto B está viajando a lo largo de un círculo de radio 5. Los objetos tienen la misma velocidad angular. ¿Tendrán los objetos la misma velocidad lineal? ¿Si no es así, qué objeto tiene la mayor velocidad lineal?

HABILIDADES

5–16 ■ De grados a radianes Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida dada en grados. Redondee su respuesta a tres decimales.

5. $15°$ **6.** $36°$ **7.** $54°$ **8.** $75°$

9. $-45°$ **10.** $-30°$ **11.** $100°$ **12.** $200°$

13. $1\,000°$ **14.** $3\,600°$ **15.** $-70°$ **16.** $-150°$

17–28 ■ De radianes a grados Encuentre la medida en grados del ángulo con la medida dada en radianes.

17. $\dfrac{5\pi}{3}$ **18.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **19.** $\dfrac{5\pi}{6}$

20. $-\dfrac{3\pi}{2}$ **21.** 3 **22.** -2

23. -1.2 **24.** 3.4 **25.** $\dfrac{\pi}{10}$

26. $\dfrac{5\pi}{18}$ **27.** $-\dfrac{2\pi}{15}$ **28.** $-\dfrac{13\pi}{12}$

29–34 ■ Ángulos coterminales Se da la medida de un ángulo en posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

29. $50°$ **30.** $135°$ **31.** $\dfrac{3\pi}{4}$

32. $\dfrac{11\pi}{6}$ **33.** $-\dfrac{\pi}{4}$ **34.** $-45°$

35–40 ■ ¿Ángulos coterminales? Se dan las medidas de dos ángulos en posición estándar. Determine si los ángulos son coterminales.

35. $70°$, $430°$ **36.** $-30°$, $330°$

37. $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{17\pi}{6}$ **38.** $\dfrac{32\pi}{3}$, $\dfrac{11\pi}{3}$

39. $155°$, $875°$ **40.** $50°$, $340°$

41–46 ■ Encontrar un ángulo coterminal Encuentre un ángulo entre 0 y 360° que sea coterminal con el ángulo dado.

41. $400°$ **42.** $375°$

43. $780°$ **44.** $-100°$

45. $-800°$ **46.** $1\,270°$

47–52 ■ Encontrar un ángulo coterminal Encuentre un ángulo entre 0 y 2π que sea coterminal con el ángulo dado.

47. $\dfrac{19\pi}{6}$ **48.** $-\dfrac{5\pi}{3}$ **49.** 25π

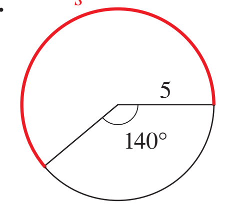
50. 10 **51.** $\dfrac{17\pi}{4}$ **52.** $\dfrac{51\pi}{2}$

53–62 ■ Arcos circulares Encuentre la longitud s del arco circular, el radio r de la circunferencia o el ángulo central θ, según se indique.

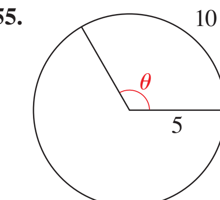
53.



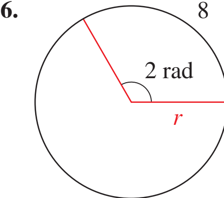
54.



55.



56.



57. Encuentre la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 3 radianes en un círculo de radio 5 cm.

58. Encuentre la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 40° en un círculo de radio 12 m.

59. Un ángulo central θ en un círculo con radio de 9 m está subtendido por un arco de 14 m de longitud. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

60. Una longitud de arco de 15 pies subtiende un ángulo central θ en una circunferencia de radio de 9 pies. Determine la medida de θ en grados y radianes.

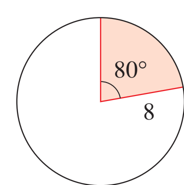
61. Encuentre el radio r del círculo si un arco de 15 m de longitud del círculo subtiende un ángulo central de $5\pi/6$.

62. Encuentre el radio r del círculo si un arco de 20 cm de longitud del círculo subtiende un ángulo central de 50°

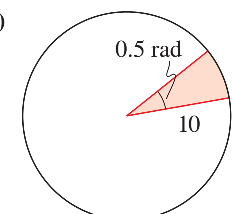
63–70 ■ Área de un sector circular Estos ejercicios utilizan la fórmula para el área de un sector circular.

63. Encuentre el área del sector mostrado en cada figura.

a)

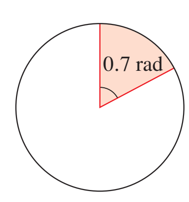


b)



64. Encuentre el radio de cada círculo si el área del sector es 12.

a)



b) 150°

65. Encuentre el área de un sector con ángulo central de $2\pi/3$ rad en un círculo de 10 m de radio.

66. Un sector de un círculo tiene un ángulo central de 145°. Encuentre el área del sector si el radio del círculo es 6 pies.

67. El área de un sector de un círculo con ángulo central de 140° es 70 m^2. Encuentre el radio del círculo.

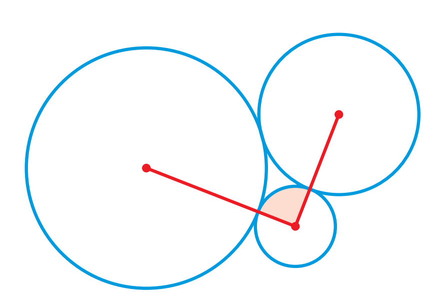
68. El área de un sector de un círculo con ángulo central de $5\pi/12$ rad es 20 m^2. Encuentre el radio del círculo.

69. Un sector de un círculo de radio 80 mi tiene un área de 1 600 mi^2. Encuentre el ángulo central (en radianes) del sector.

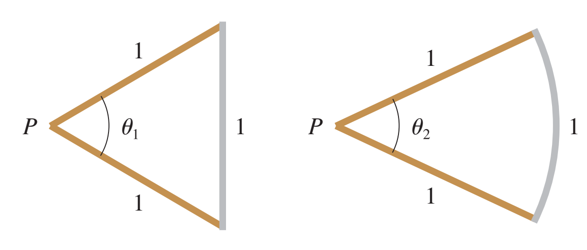
70. El área de un círculo es 600 cm^2. Encuentre el área de un sector de este círculo que subtiende un ángulo central de 3 rad.

HABILIDADES Plus

71. Área de un sector de un círculo Tres círculos con radios 1, 2 y 3 pies son externamente tangentes entre sí, como se muestra en la figura. Encuentre el área del sector del círculo de radio 1 que es cortado por los segmentos de recta que unen el centro de ese círculo con los centros de los otros dos círculos.



72. Comparar un triángulo y un sector de un círculo Se conectan dos palos de madera y una barra de metal, cada uno de longitud 1, para formar un triángulo con ángulo θ_1 en el punto P como se muestra en la figura primera. Entonces la varilla se dobla para formar un arco de un círculo con centro P, dando como resultado una menor θ_2 de ángulo en el punto P como se muestra en la segunda figura. Encuentre θ_1, θ_2 y $\theta_1 - \theta_2$.



73–74 ■ Relojes y ángulos En 1 hora el minutero de un reloj se mueve a través de un círculo completo, y la manecilla del horario se mueve a través de $\frac{1}{12}$ de un círculo.





73. ¿Durante cuántos radianes se mueven el minutero y el horario entre la 1:00 p.m. y la 1:45 p.m. (en el mismo día)?

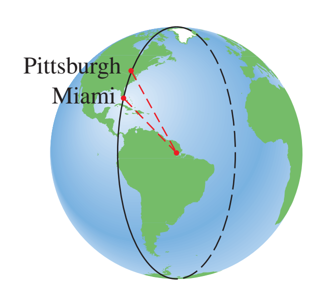
74. ¿A través de cuántos radianes se mueven el minutero y el horario entre la 1:00 p.m. y las 6:45 p.m. (en el mismo día)?

APLICACIONES

75. Distancia de viaje Las ruedas de un auto miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué distancia (en millas) recorrerá el auto si sus ruedas giran 10 000 veces sin patinar?

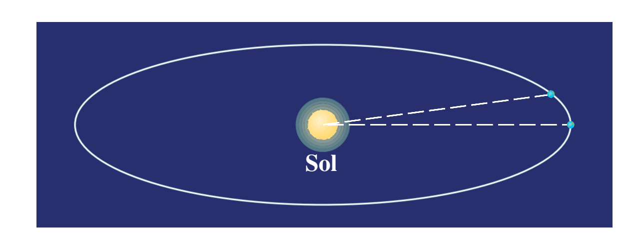
76. Revoluciones de una rueda ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de un auto, de 30 pulg de diámetro, cuando recorre una distancia de 1 milla?

77. Latitudes Pittsburgh, Pennsylvania y Miami, Florida, se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Pittsburgh tiene una latitud de 40.5° N y Miami tiene una latitud de 25.5° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3 960 millas.)

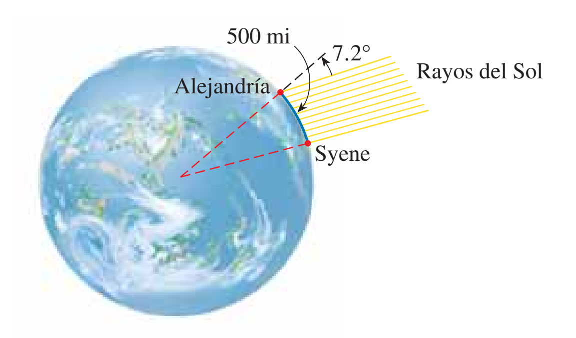


78. Latitudes Memphis, Tennessee, y Nueva Orleans, Luisiana, se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Memphis tiene una latitud de 35° N y Nueva Orleans tiene una latitud de 30° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3 960 millas.)

79. Órbita de la Tierra Encuentre la distancia que la Tierra recorre en un día en su trayectoria alrededor del Sol. Suponga que un año tiene 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una circunferencia de 93 millones de millas de radio. [*Nota:* la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es en realidad una *elipse* con el Sol en un foco (vea la sección 11.2). Esta elipse, sin embargo, tiene muy poca excentricidad y, por tanto, es casi una circunferencia.]

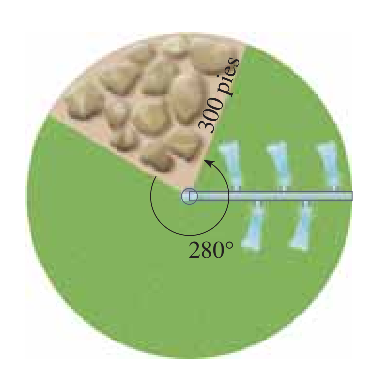


80. Circunferencia de la Tierra El matemático griego Eratóstenes (hacia 276-195 a.C.) midió la circunferencia de la Tierra a partir de las siguientes observaciones. Él observó que en cierto día los rayos del Sol caían directamente en un pozo profundo en Syene (moderna Asuán). Al mismo tiempo, en Alejandría, a 500 millas al norte (en el mismo meridiano), los rayos del Sol brillaban a un ángulo de 7.2° respecto al cenit. Use esta información y la figura para encontrar el radio y la circunferencia de la Tierra.

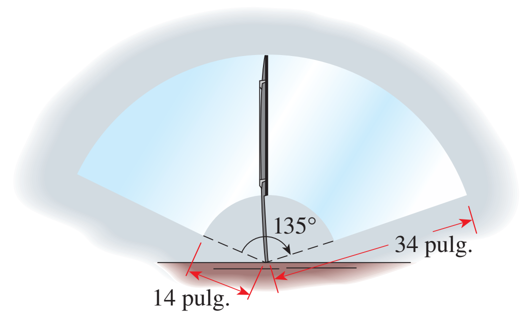


81. Millas náuticas Encuentre la distancia a lo largo de un arco en la superficie de la Tierra que subtiende un ángulo central de 1 minuto (1 minuto $= \frac{1}{60}$ de grado). Esta distancia se llama *milla náutica*. (El radio de la Tierra es 3 960 millas.)

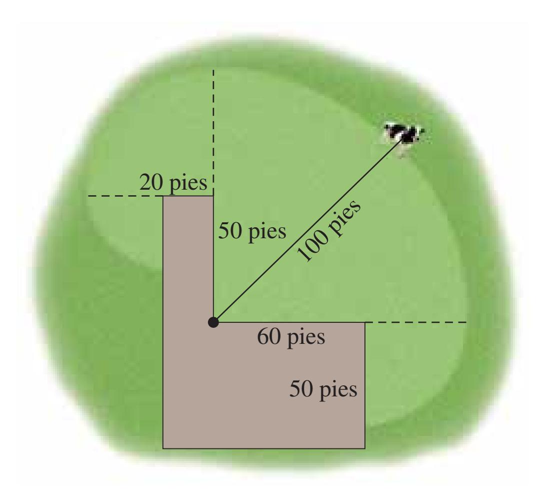
82. Irrigación Un sistema de irrigación utiliza un tubo aspersor de 300 pies de largo que gira sobre su eje alrededor de un punto central, como se muestra en la figura siguiente. Debido a un obstáculo se permite que el tubo gire sólo 280°. Encuentre el área irrigada por este sistema.



83. Limpiaparabrisas Los extremos superior e inferior de una hoja de limpiaparabrisas son 34 y 14 pulg, respectivamente, a partir el punto de pivote. Durante el funcionamiento el limpiador barre 135°. Encuentre el área barrida por la hoja.



84. La vaca atada Una vaca está amarrada por una cuerda de 100 pies a la esquina interior de un edificio en forma de *L*, como se muestra en la figura. Encuentre el área en que la vaca puede pastar.



85. Ventilador Un ventilador de cielo raso con paletas de 16 pulg gira a 45 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular del ventilador en rad/min.

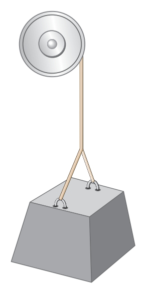
b) Encuentre la velocidad lineal de las puntas de las paletas en pulg/min.

86. Sierra radial Una sierra radial tiene una hoja de 6 pulg de radio. Suponga que la hoja gira a 1 000 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular de la hoja en rad/min.

b) Encuentre la velocidad lineal de los dientes de la hoja en pies/s.

87. Montacargas Un montacargas de 2 pies de radio se usa para levantar cargas pesadas. Si el montacargas hace 8 revoluciones cada 15 segundos, encuentre la velocidad a la que se levanta la carga.



88. Velocidad de un automóvil Las ruedas de un auto tienen radio de 11 pulg y están girando a 600 rpm. Encuentre la velocidad del auto en mi/h.

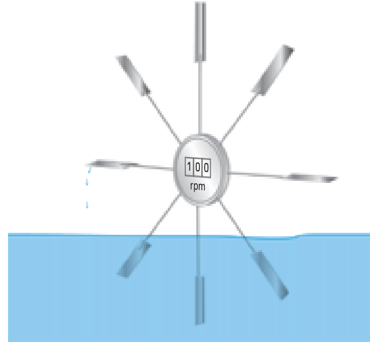
89. Velocidad en el ecuador La Tierra gira alrededor de su eje una vez cada 23 h 56 min 4 s, y el radio de la Tierra es de 3 960 millas. Encuentre la velocidad lineal de un punto en el ecuador en mi/h.

90. Ruedas de camión Un camión con ruedas de 48 pulg de diámetro está viajando a 50 mi/h.

a) Encuentre la velocidad angular de las ruedas en rad/min.

b) ¿Cuántas revoluciones por minuto hacen las ruedas?

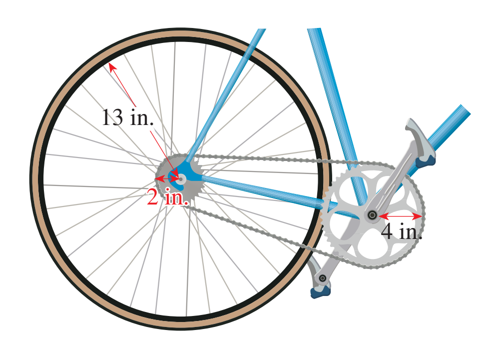
91. Velocidad de una corriente Para medir la velocidad de una corriente, unos científicos colocan una rueda de paletas en la corriente y observan la rapidez a la que gira la rueda. Si la rueda tiene radio de 0.20 m y gira a 100 rpm, encuentre la velocidad de la corriente en m/s.



92. Rueda de bicicleta En la figura se ilustran los rayos y la cadena de una bicicleta. La rueda dentada de los pedales tiene un radio de 4 pulg, la rueda dentada de la rueda tiene un radio de 2 pulg y la rueda tiene un radio de 13 pulgadas. El ciclista pedalea a 40 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular de la rueda dentada de la rueda.

b) Encuentre la velocidad de la bicicleta. (Suponga que la rueda gira al mismo paso que su rueda dentada.)



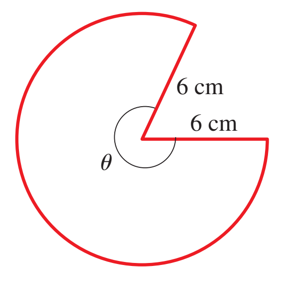
93. Taza cónica Se arma una taza cónica con un papel circular con radio de 6 cm al cortar un sector y unir los bordes, como se muestra en la figura siguiente. Suponga que $\theta = 5\pi/3$.

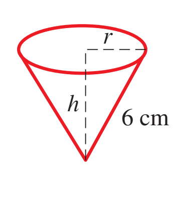
a) Encuentre la circunferencia C de la abertura de la taza.

b) Encuentre el radio r de la abertura de la taza. [*Sugerencia:* $C = 2\pi r$.]

c) Encuentre la altura h de la taza. [*Sugerencia:* use el teorema de Pitágoras.]

d) Determine el volumen de la taza.





94. Taza cónica En este ejercicio encontramos el volumen de la taza cónica del ejercicio 93 para cualquier ángulo θ.

a) Siga los pasos del ejercicio 93 para demostrar que el volumen de la taza como función de θ es

$$V(\theta) = \frac{9}{\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

 *b*) Trace la gráfica de la función V.

 *c*) ¿Para qué ángulo θ es máximo el volumen de la taza?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

95. REDACCIÓN: Diferentes formas de medir ángulos La costumbre de medir ángulos usando grados, con 360° en un círculo, data de los antiguos babilonios, que usaban un sistema numérico basado en grupos de 60. Otro sistema de medir ángulos divide el círculo en 400 unidades llamadas *grados centesimales*. En este sistema un ángulo recto es de 100 grados centesimales, de modo que esto se ajusta a nuestro sistema numérico de base 10.

Escriba un breve ensayo que compare las ventajas y desventajas de estos dos sistemas y el sistema de medir ángulos en radianes. ¿Cuál sistema prefiere usted? ¿Por qué?

6.2 TRIGONOMETRÍA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

■ Relaciones trigonométricas ■ Triángulos especiales; calculadoras ■ Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

En esta sección estudiamos ciertos cocientes entre los lados de triángulos rectángulos, llamados relaciones trigonométricas, y damos varias aplicaciones.

■ Relaciones trigonométricas

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue (vea la figura 1).

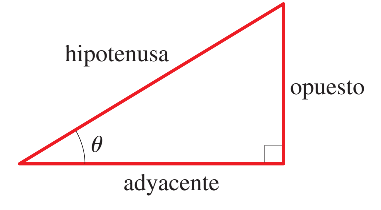


FIGURA 1

LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Los símbolos que usamos para esas relaciones son abreviaturas de sus nombres completos: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cosecante**, **secante**, **cotangente**. Dado que dos triángulos rectángulos cualesquiera con ángulo θ son semejantes, estas relaciones son iguales, cualquiera que sea el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ (vea la figura 2).

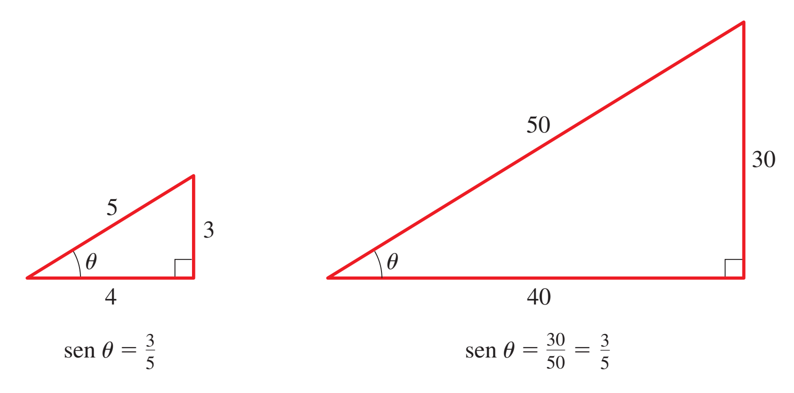


FIGURA 2

EJEMPLO 1 ■ Encontrar relaciones trigonométricas

Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ de la figura 3.

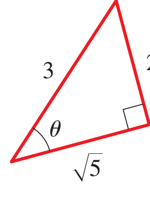




FIGURA 3

SOLUCIÓN Por definición de las relaciones trigonométricas obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Encontrar relaciones trigonométricas

Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, trace un triángulo rectángulo con ángulo agudo α, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de α.

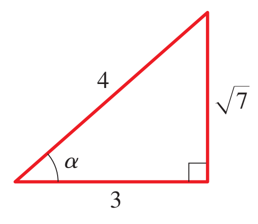


FIGURA 4

SOLUCIÓN Puesto que cos α se define como la relación entre el lado adyacente y la hipotenusa, trazamos un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un lado de longitud 3 adyacente a α. Si el lado opuesto es x, entonces por el teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o sea $x^2 = 7$, de modo que $x = \sqrt{7}$. Entonces usamos el triángulo de la figura 4 para encontrar las relaciones.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos \alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc \alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec \alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot \alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

■ Triángulos especiales; calculadoras

Hay relaciones especiales que se pueden calcular a partir de ciertos triángulos (llamados triángulos especiales). Podemos también usar una calculadora para encontrar las relaciones trigonométricas.

Relaciones especiales Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del teorema de Pitágoras. Puesto que se utilizan con frecuencia, se mencionan aquí.

El primer triángulo se obtiene al trazar una diagonal en un cuadro de lado 1 (vea la figura 5). Por el teorema de Pitágoras esta diagonal tiene longitud $\sqrt{2}$. Los triángulos resultantes tienen ángulos de 45, 45 y 90° (o $\pi/4$, $\pi/4$ y $\pi/2$). Para obtener el segundo triángulo, empezamos con un triángulo equilátero ABC de lado 2 y trazamos la bisectriz perpendicular DB de la base, como en la figura 6. Por el teorema de Pitágoras la longitud de DB es $\sqrt{3}$. Dado que DB corta al ángulo ABC, obtenemos los triángulos con ángulos de 30, 60 y 90° (o $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$).

HIPARCO (hacia el año 140 a.C.) es considerado el fundador de la trigonometría. Construyó tablas para funciones estrechamente relacionadas con la función seno moderna, evaluadas para ángulos a intervalos de medio grado y consideradas las primeras tablas trigonométricas. Principalmente utilizó sus tablas para calcular las trayectorias de los planetas por los cielos.

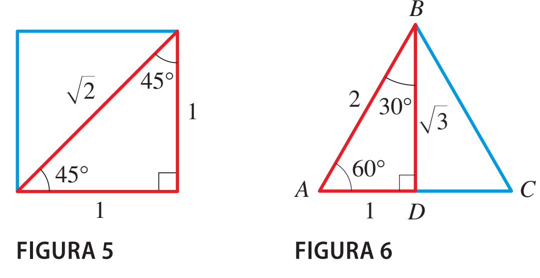


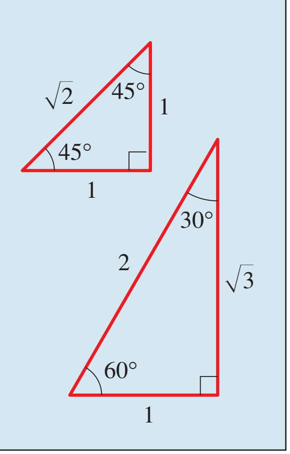
FIGURA 5 **FIGURA 6**

Ahora podemos usar los triángulos especiales de las figuras 5 y 6 para calcular las relaciones trigonométricas para ángulos con medidas 30, 45 y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$) que aparecen en la tabla que se muestra a continuación.

VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los siguientes valores de las funciones trigonométricas se obtienen de triángulos especiales.

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0	0	1	0	—	1	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0



Es útil recordar estas relaciones trigonométricas especiales porque se presentan con frecuencia. Desde luego, podemos traerlas fácilmente a la mente si recordamos los triángulos de los cuales se obtienen.

Para una explicación de métodos numéricos, vea la nota al margen en la página 433.

Uso de calculadora Para encontrar los valores de las relaciones trigonométricas para otros ángulos usamos una calculadora. Los métodos matemáticos (llamados *métodos numéricos*) que se emplean para encontrar las relaciones trigonométricas están programados directamente en calculadoras científicas. Por ejemplo, cuando se presiona la tecla [SIN] la calculadora calcula una aproximación al valor del seno del ángulo dado. Las calculadoras también dan los valores de seno, coseno y tangente; las otras relaciones se pueden calcular fácilmente a partir de estas usando las siguientes *relaciones recíprocas*:

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen } t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Se debe verificar que estas relaciones sigan inmediatamente de las definiciones de las relaciones trigonométricas.

Seguimos la convención de que cuando escribimos sen *t, significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es t*. Por ejemplo, sen 1 significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es 1. Cuando se usa calculadora para encontrar un valor aproximado para este número es necesario ponerla en el modo de radianes; se encontrará que sen 1 $\approx$ 0.841471. Si se desea encontrar el seno del ángulo cuya medida es 1° la calculadora se pone en el modo de grados; se encontrará que sen 1° $\approx$ 0.0174524.

EJEMPLO 3 ■ Uso de una calculadora

Usando una calculadora, encuentre lo siguiente.

a) tan 40° ***b***) cos 20° ***c***) cot 14° ***d***) csc 80°

SOLUCIÓN Asegúrese de que nuestra calculadora se encuentra en modo de grados y redondeando los resultados a seis decimales obtenemos lo siguiente:

a) $\tan 40° \approx 0.839100$ ***b***) $\cos 20° \approx 0.939693$

c) $\cot 14° = \dfrac{1}{\tan 14°} \approx 4.010781$ ***d***) $\csc 80° = \dfrac{1}{\text{sen } 80°} \approx 1.015427$


Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

■ Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis partes: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa determinar todas sus partes a partir de la información conocida acerca del triángulo, es decir, determinar las longitudes de los tres lados y las medidas de los tres ángulos.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Semejanza

© Hulton Archive/Moviepix/Getty Images

La semejanza de triángulos es el concepto básico subyacente a la definición de las funciones trigonométricas. Los cocientes de los lados de un triángulo están a la misma razón correspondiente en cualquier triángulo semejante. Pero el concepto de semejanza de figuras se aplica a todas las formas, no sólo a los triángulos. En este proyecto exploramos cómo se relacionan las áreas y los volúmenes de figuras semejantes. Estas relaciones nos permiten determinar si un gorila del tamaño de King Kong (es decir, un gorila similar pero mucho más grande que un mono real) puede realmente existir. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

EJEMPLO 4 ■ Resolver un triángulo rectángulo

Resuelva el triángulo *ABC* que se muestra en la figura 7.

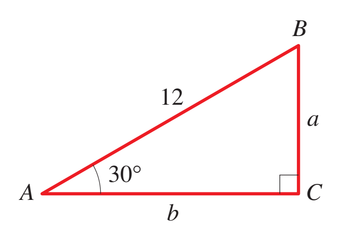


FIGURA 7

SOLUCIÓN Es evidente que $\angle B = 60°$. De la figura 7 tenemos

$$\text{sen } 30° = \frac{a}{12} \qquad \text{Definición de seno}$$

$$a = 12 \text{ sen } 30° \qquad \text{Multiplique por 12}$$

$$= 12\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6 \qquad \text{Evalúe}$$

También de la figura 7 tenemos

$$\cos 30° = \frac{b}{12} \qquad \text{Definición de coseno}$$

$$b = 12 \cos 30° \qquad \text{Multiplique por 12}$$

$$= 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3} \qquad \text{Evalúe}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

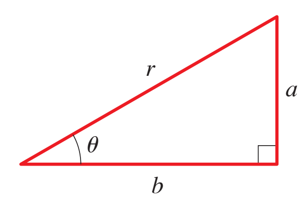


FIGURA 8
$a = r \text{ sen } \theta, \quad b = r \cos \theta$

La figura 8 muestra que si conocemos la hipotenusa r y el ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, entonces los catetos a y b están dados por

$$a = r \text{ sen } \theta \qquad \text{y} \qquad b = r \cos \theta$$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos con el uso de relaciones trigonométricas es fundamental para numerosos problemas en navegación, topografía, astronomía y las medidas de distancias. Las aplicaciones que consideramos en esta sección siempre comprenden triángulos rectángulos pero, como veremos en las siguientes tres secciones, la trigonometría también es útil para resolver triángulos que no son rectángulos.

Para examinar los siguientes ejemplos necesitamos alguna terminología. Si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama **línea de visión** (figura 9). Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**. Si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, los ángulos de elevación y de depresión se darán para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, por ejemplo, un plano inclinado o una ladera, usamos el término **ángulo de inclinación**.

ARISTARCO DE SAMOS (310-230 a.C.) fue un afamado científico, músico, astrónomo y geómetra griego. En su libro *On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon* (Sobre tamaños y distancias del Sol y la Luna) estimó la distancia al Sol observando que cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente, el triángulo formado por el Sol, la Luna y la Tierra tiene un ángulo recto respecto a la Luna. Su método es semejante al descrito en el ejercicio 67 de esta sección. Aristarco fue el primero en exponer la teoría de que la Tierra y los planetas se mueven alrededor del Sol, idea que no fue aceptada por completo sino posteriormente al tiempo de Copérnico, 1 800 años después. Por esta razón Aristarco se conoce como el "Copérnico de la Antigüedad".

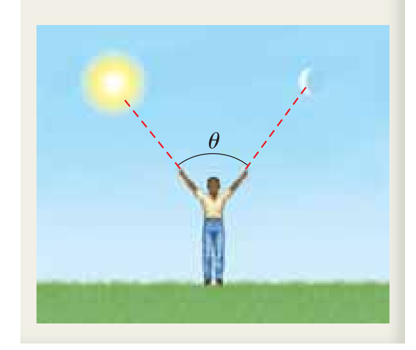






FIGURA 9

El ejemplo siguiente presenta una importante aplicación de trigonometría al problema de mediciones: medimos la altura de un árbol alto sin tener que subir a él. Aun cuando el ejemplo es sencillo, el resultado es fundamental para entender la forma en que se aplican relaciones trigonométricas a problemas como este.

TALES DE MILETO (hacia 625-547 a.C.) es el legendario fundador de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega comparando la longitud de la sombra de su báculo con la de la columna. Usando propiedades de triángulos semejantes, afirmó que la relación entre la altura h de la columna y la altura h' de su báculo era igual a la relación entre la longitud s de la sombra de la columna y la longitud s' de la sombra de su báculo:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Dado que tres de estas cantidades son conocidas, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales utilizó un método similar para encontrar la altura de la Gran Pirámide de Egipto, hazaña que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que "aun cuando [el rey de Egipto] lo admiraba [a Tales] por otras cosas, en particular a él le gustaba la forma en que había medido la altura de la pirámide sin ningún problema y sin instrumentos". El principio utilizado por Tales, el hecho de que las relaciones entre lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, es la base de la trigonometría.



EJEMPLO 5 ■ Encontrar la altura de un árbol

Una secuoya proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7°.

SOLUCIÓN Sea h la altura del árbol. De la figura 10 vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Use una calculadora}$$

Por tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

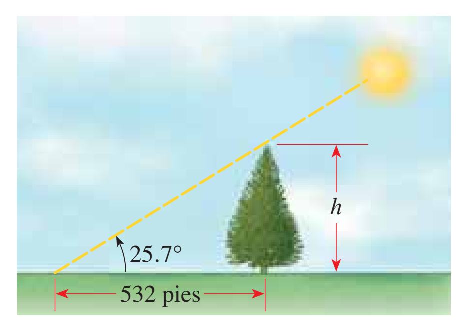


FIGURA 10

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

EJEMPLO 6 ■ Un problema de triángulos rectángulos

Desde un punto en el suelo, a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de un astabandera que está en el edificio es de 27°. Encuentre la altura del edificio y la longitud del astabandera.

SOLUCIÓN La figura 11 ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra igual que como encontramos la altura del árbol en el ejemplo 4.

$$\frac{h}{500} = \tan 24° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \qquad \text{Use una calculadora}$$

La altura del edificio es aproximadamente 223 pies.

Para encontrar la altura del astabandera, encontremos primero la altura desde el suelo a lo alto del asta.

$$\frac{k}{500} = \tan 27° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$k = 500 \tan 27° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.5095) \qquad \text{Use una calculadora}$$

$$\approx 255$$

Para encontrar la longitud del astabandera restamos h de k. Por tanto, la longitud del asta es aproximadamente $255 - 223 = 32$ pies.

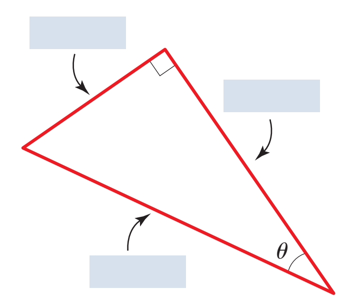
FIGURA 11

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

6.2 EJERCICIOS

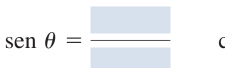
CONCEPTOS

1. En la figura siguiente se ilustra un triángulo rectángulo con ángulo θ.



***a*)** Señale los lados "opuesto" y "adyacente" a θ y la hipotenusa del triángulo.

***b*)** Las funciones trigonométricas del ángulo θ están definidas como sigue:



$\operatorname{sen}\theta = \frac{\square}{\square}$ $\cos\theta = \frac{\square}{\square}$ $\tan\theta = \frac{\square}{\square}$

***c*)** Las relaciones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo. Esto es porque todos los triángulos rectángulos con ángulo agudo θ son ______________.

2. Las identidades recíprocas indican que

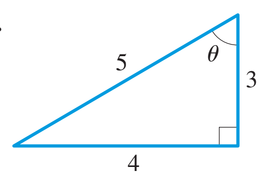
$\csc\theta = \frac{1}{\square}$ $\sec\theta = \frac{1}{\square}$ $\cot\theta = \frac{1}{\square}$

HABILIDADES

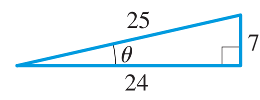
3–8 ■ Relaciones trigonométricas Encuentre los valores exactos de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en el triángulo.



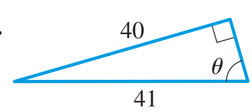
3.



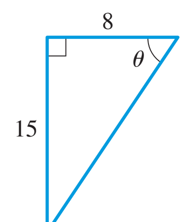
4.



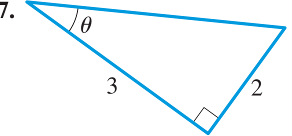
5.



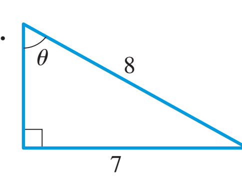
6.



7.

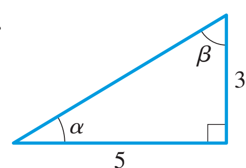


8.

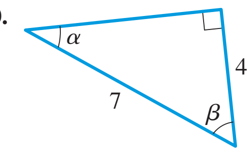


9–10 ■ Relaciones trigonométricas Encuentre ***a*)** sen α y cos β, ***b*)** tan α y cot β; y ***c*)** sec α y csc β.

9.



10.



11–14 ■ Uso de una calculadora Utilice una calculadora para evaluar la expresión. Redondee su respuesta a cinco decimales.

11. ***a*)** sen 22° ***b*)** cot 23°

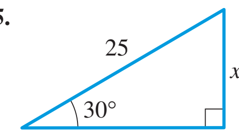
12. ***a*)** cos 37° ***b*)** csc 48°

13. ***a*)** sec 13° ***b*)** tan 51°

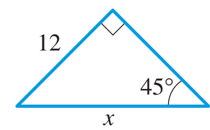
14. ***a*)** csc 10° ***b*)** sen 46°

15–20 ■ Determine el lado desconocido Encuentre el lado marcado como x. En los ejercicios 17 y 18 exprese sus respuestas redondeadas a cinco lugares decimales.

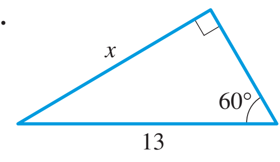
15.



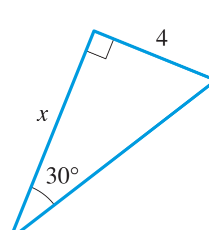
16.



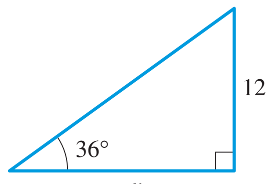
17.



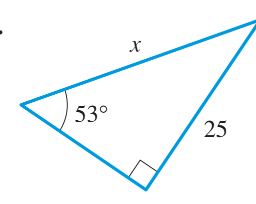
18.



19.

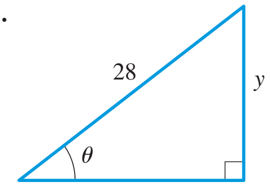


20.

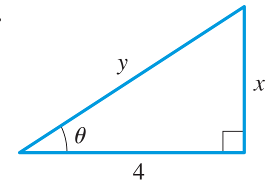


21–22 ■ Relaciones trigonométricas Exprese x y y en términos de relaciones trigonométricas de θ.

21.



22.



23–28 ■ Relaciones trigonométricas Trace un triángulo que tenga ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ.

23. $\tan\theta = \frac{5}{6}$ **24.** $\cos\theta = \frac{12}{13}$ **25.** $\cot\theta = 1$

26. $\tan\theta = \sqrt{3}$ **27.** $\csc\theta = \frac{11}{6}$ **28.** $\cot\theta = \frac{5}{3}$

29–36 ■ Evaluar una expresión Evalúe la expresión sin usar calculadora.

29. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$

30. sen 30° csc 30°

31. sen 30° cos 60° + sen 60° cos 30°

32. $(\operatorname{sen} 60°)^2+(\cos 60°)^2$

33. $(\cos 30°)^2-(\operatorname{sen} 30°)^2$

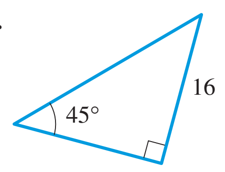
34. $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}\right)^2$

35. $\left(\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^2$

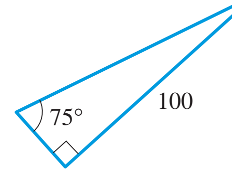
36. $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}+\csc\frac{\pi}{4}\right)^2$

37–44 ■ Resolver un triángulo rectángulo Resuelva el triángulo rectángulo.

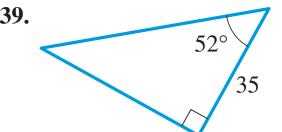
37.



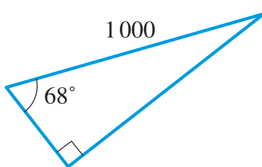
38.



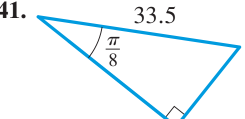
39.



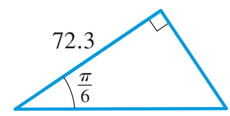
40.



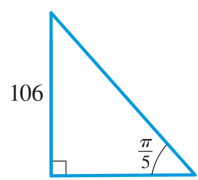
41.



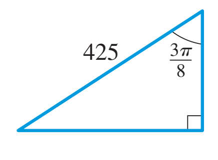
42.



43.

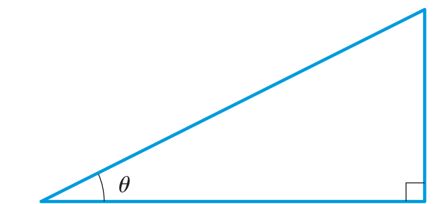


44.



HABILIDADES Plus

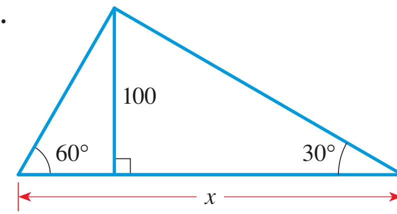
45. Usar una regla para estimar relaciones trigonométricas Use una regla para medir cuidadosamente los lados del triángulo y después use sus mediciones para estimar las seis relaciones trigonométricas de θ.



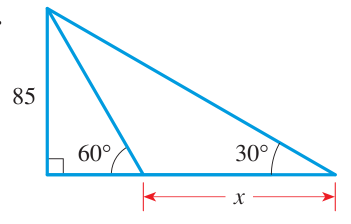
46. Uso de un transportador para estimar relaciones trigonométricas Usando un transportador trace un triángulo rectángulo que tenga el ángulo agudo de 40°. Mida los lados con todo cuidado y use sus resultados para estimar las seis relaciones trigonométricas de 40°.

47–50 ■ Encontrar el lado desconocido Encuentre x redondeada a un lugar decimal.

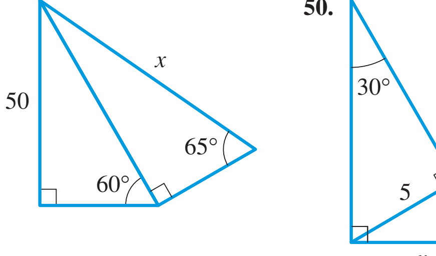
47.



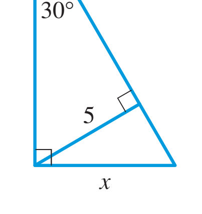
48.



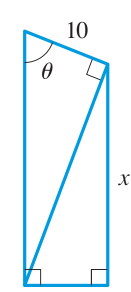
49.



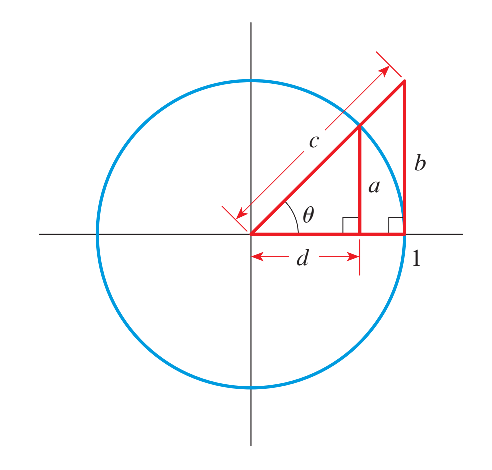
50.



51. Relaciones trigonométricas Exprese la longitud x en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



52. Relaciones trigonométricas Exprese la longitud a, b, c y d en la figura, en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



APLICACIONES

53. Altura de un edificio Se encuentra que el ángulo de elevación de lo alto del edificio Empire State de Nueva York es de 11° desde el suelo, a una distancia de 1 milla de la base del edificio. Usando esta información encuentre la altura del edificio Empire State.

54. Arco de Entrada Un avión está volando a la vista del Arco de Entrada (Gateway Arch) de San Luis, Misuri, a una elevación de 35 000 pies. Al piloto le gustaría estimar su distancia desde el arco; encuentra que el ángulo de depresión a un punto en el suelo abajo del arco es de 22°.

a) ¿Cuál es la distancia entre el avión y el arco?

b) ¿Cuál es la distancia entre un punto en el suelo directamente abajo del avión y el arco?

55. Desviación de un rayo láser Un rayo láser ha de dirigirse hacia el centro de la Luna, pero el rayo se desvía 0.5° de su trayectoria propuesta.

a) ¿Cuánto se ha desviado el rayo de su trayectoria propuesta cuando llega a la Luna? (La distancia de la Tierra a la Luna es de 240 000 millas.)

b) El radio de la Luna es aproximadamente de 1 000 millas. ¿Incidirá el rayo en la Luna?

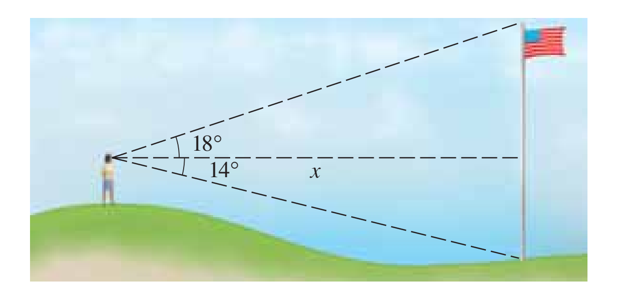
56. Distancia al mar Desde lo alto de un faro de 200 pies el ángulo de depresión hacia un barco en el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?

57. Escalera inclinada Una escalera de 20 pies está inclinada contra un edificio, de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

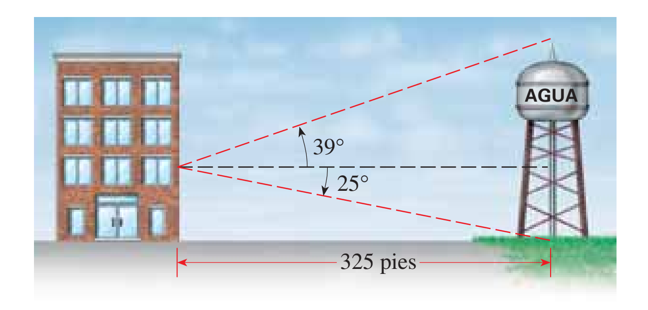
58. Altura de una torre Un cable de 600 pies para sujeción está unido a lo alto de una torre de comunicaciones. Si el cable forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

59. Elevación de una cometa Un hombre que está en la playa hace volar una cometa. Sostiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la cuerda es de 450 pies de largo, ¿a qué altura está la cometa sobre el suelo?

60. Determinación de una distancia Una mujer que está de pie en una colina observa una astabandera la cual ella sabe que mide 60 pies de alto. El ángulo de depresión hacia la parte inferior del poste es de 14° y el ángulo de elevación de la parte superior del poste es de 18°. Encuentre la distancia x de la mujer al poste.



61. Altura de una torre Una torre de agua está situada a 325 pies de un edificio (vea la figura). Desde una ventana del edificio un observador ve que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es 39° y que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es 25°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿Cuál es la altura de la ventana?



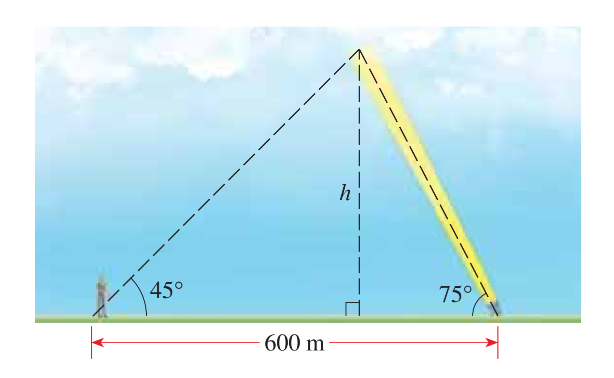
62. Determinar una distancia Un avión sobrevuela directamente una carretera recta a una elevación de 5 150 pies. Dos automovilistas recorren la carretera en sendos autos a ambos costados del avión; el ángulo de depresión hacia un auto es de 35° y al otro es de 52°. ¿A qué distancia están entre sí los dos autos?

63. Determinar una distancia Si los dos autos del ejercicio 62 están cada uno a cada costado del avión y si el ángulo de depresión hacia uno de los autos es de 38° y hacia el otro auto es de 52°, ¿a qué distancia están entre sí los dos autos?

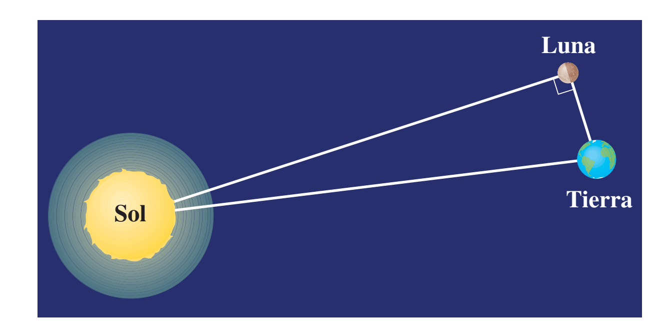
64. Altura de un globo Un globo de aire caliente está flotando sobre una carretera recta. Para estimar la altura a la que se encuentran los tripulantes del globo, estos simultáneamente miden el ángulo de depresión hacia dos señalamientos consecutivos de kilometraje situados en la carretera, del mismo lado del globo. Se encuentra que los ángulos de depresión son 20 y 22°. ¿A qué altura está el globo?

65. Altura de una montaña Para estimar la altura de una montaña sobre una meseta se mide el ángulo de elevación hacia lo alto de la montaña y es de 32°. A mil pies más cerca de la montaña a lo largo de la meseta se encuentra que el ángulo de elevación es de 35°. Estime la altura de la montaña.

66. Altura de una capa de nubes Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° de la horizontal. Un observador a 600 m de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45°. Encuentre la altura h de la capa de nubes.



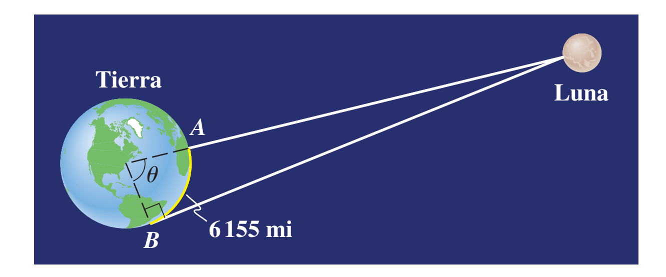
67. Distancia al Sol Cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo recto (vea la figura). En ese momento se mide el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna y es de 89.85°. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240 000 millas estime la distancia de la Tierra al Sol.



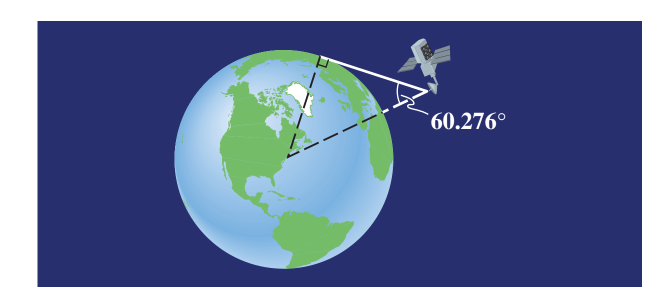
68. Distancia a la Luna Para encontrar la distancia al Sol como en el ejercicio 67, necesitamos conocer la distancia a la Luna. Ahora veamos una forma de estimar esa distancia: cuando la Luna se ve en su cenit en un punto A en la Tierra, se observa que está en el horizonte desde el punto B (vea la figura). Los puntos A y B están a 6 155 millas entre sí, y el radio de la Tierra es 3 960 millas.

a) Encuentre el ángulo θ en grados.

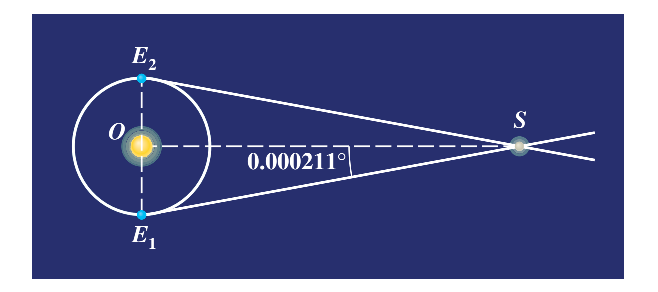
b) Estime la distancia del punto A a la Luna.



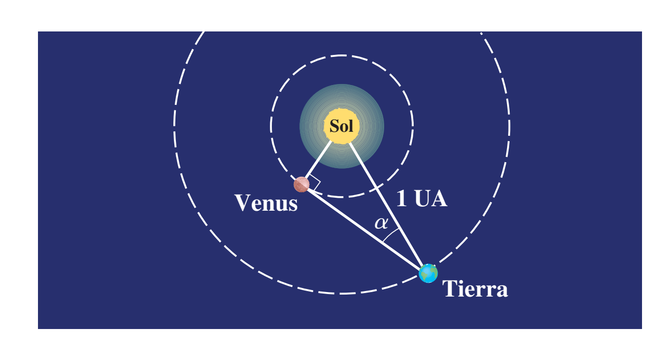
69. Radio de la Tierra En el ejercicio 80 de la sección 6.1 se dio un método para encontrar el radio de la Tierra. Ahora veamos un método más moderno: desde un satélite que está a 600 millas de la Tierra se observa que un ángulo formado por la vertical y la línea de vista al horizonte es 60.276°. Use esta información para encontrar el radio de la Tierra.



70. Paralaje Para encontrar la distancia a estrellas cercanas se usa el método de paralaje. La idea es encontrar un triángulo con la estrella en un vértice y con una base tan grande como sea posible. Para hacer esto se observa la estrella en dos tiempos diferentes exactamente con 6 meses de diferencia, y se registra su cambio aparente en posición. De estas dos observaciones se puede calcular $\angle E_1SE_2$. (Los tiempos se escogen de modo que $\angle E_1SE_2$ sea tan grande como sea posible, lo cual garantiza que $\angle E_1OS$ es de 90°.) El ángulo E_1SO se llama *paralaje* de la estrella. Alfa Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, tiene un paralaje de 0.000211°. Estime la distancia a esta estrella. (Tome la distancia de la Tierra al Sol como 9.3×10^7 mi.)



71. Distancia de Venus al Sol La **elongación** α de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Cuando Venus alcanza su máxima elongación de 46.3° la Tierra, Venus y el Sol forman un triángulo con ángulo recto en Venus. Encuentre la distancia entre Venus y el Sol en unidades astronómicas (UA). (Por definición, la distancia entre la Tierra y el Sol es 1 UA.)



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

72. DISCUSIÓN: Triángulos semejantes Si dos triángulos son semejantes ¿qué propiedades comparten? Explique la forma en que estas propiedades hacen posible definir las relaciones trigonométricas sin considerar el tamaño del triángulo.

6.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

■ Funciones trigonométricas de ángulos ■ Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo ■ Identidades trigonométricas ■ Áreas de triángulos

En la sección 6.2 definimos las relaciones trigonométricas para ángulos agudos. Aquí extendemos las relaciones trigonométricas a todos los ángulos al definir las funciones trigonométricas de los ángulos. Con estas funciones podemos resolver problemas prácticos que involucran ángulos que no sean necesariamente agudos.

■ Funciones trigonométricas de ángulos

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se muestra en la figura 1*a*). Ponga θ en posición estándar como se muestra en la figura 1*b*).

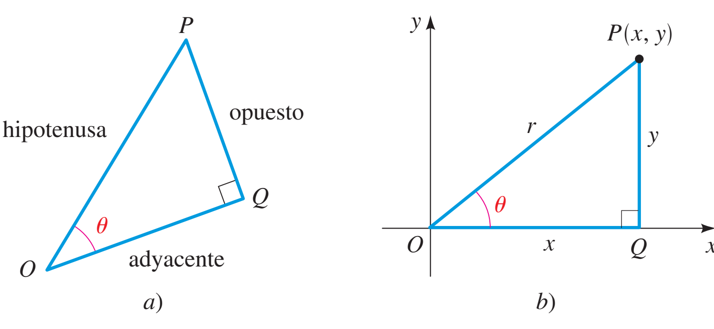


FIGURA 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de θ. En el triángulo POQ el lado opuesto tiene longitud y y el lado adyacente tiene longitud x. Usando el teorema de Pitágoras vemos que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Las otras relaciones trigonométricas se pueden encontrar de la misma forma.

Estas observaciones nos permiten extender las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Definimos las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (vea la figura 2).

FIGURA 2

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

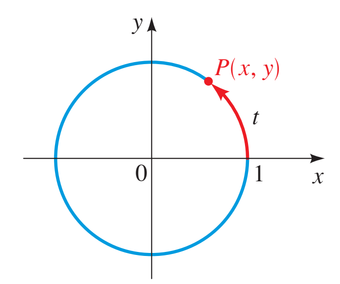
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Dado que la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, $\tan 90° = y/x$ no está definida porque $x = 0$. Los ángulos para los cuales las funciones trigonométricas pueden no estar definidas son los ángulos para los cuales la coordenada x o la y de un punto

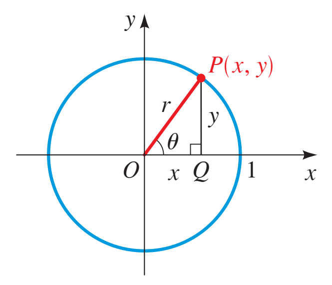
Relación con funciones trigonométricas de números reales

Quizá usted ya haya estudiado funciones trigonométricas definidas usando la circunferencia unitaria (capítulo 5). Para ver cómo se relacionan con las funciones trigonométricas de un *ángulo*, empecemos con la circunferencia unitaria del plano de coordenadas.



$P(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

Sea $P(x, y)$ el punto terminal determinado por un arco de longitud t sobre la circunferencia unitaria. Entonces t subtiende un ángulo θ en el centro de la circunferencia. Si trazamos una perpendicular de P al punto Q del eje x, entonces el triángulo $\triangle OPQ$ es un triángulo rectángulo con catetos de longitud x y y como se muestra en la figura.



El triángulo OPQ es un triángulo rectángulo.

Ahora, por la definición de funciones trigonométricas del *número real* t tenemos

$$\text{sen } t = y$$

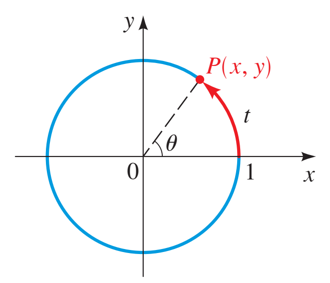
$$\cos t = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ tenemos

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{x}{1} = x$$

Si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. (Vea la figura siguiente.) Comparando los dos modos de definir las funciones trigonométricas, vemos que son idénticas. En otras palabras, como funciones asignan valores idénticos a un número real determinado. (El número real es la medida de θ en radianes en un caso o la longitud t de un arco en el otro.)



La medida del ángulo θ en radianes es t.

¿Por qué, entonces, estudiamos trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Vea el *Enfoque sobre modelado* de las páginas 466, 533 y 581; y de las secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

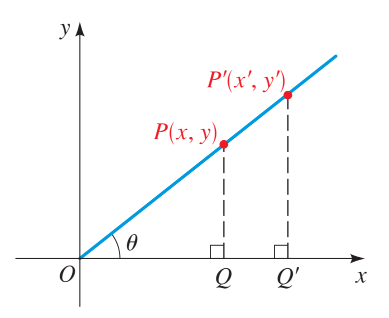


FIGURA 3

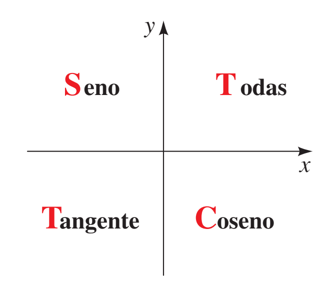
en el lado terminal del ángulo es 0. Estos son **ángulos cuadrantales**, es decir, ángulos que son coterminales con los ejes de coordenadas.

Es un hecho importante que las funciones trigonométricas *no* dependen de la selección del punto $P(x, y)$. Esto es porque si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto en el lado terminal, como en la figura 3, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son semejantes.

Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

De la definición vemos que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo θ tiene su lado terminal en el primer cuadrante. Esto es porque x y y son positivas en este cuadrante. [Por supuesto, r es siempre positiva porque es simplemente la distancia del origen al punto $P(x, y)$.] Sin embargo, si el lado terminal de θ está en el segundo cuadrante entonces x es negativa y y es positiva. Por tanto, en el segundo cuadrante las funciones sen θ y csc θ son positivas, y todas las otras funciones trigonométricas tienen valores negativos. Se pueden comprobar las otras entradas de la tabla siguiente.

Puede utilizarse el siguiente recurso mnemotécnico para recordar que las funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante: **T**odas, **S**eno, **T**angente y **C**oseno.



Usted puede recordar "To- Sen- Tan- Cos".

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

Ahora nos centramos en encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

EJEMPLO 1 ■ Encontrar funciones trigonométricas de los ángulos

Encuentre ***a***) cos 135° y ***b***) tan 390°.

SOLUCIÓN

a) De la figura 4 vemos que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$, y dado que $\cos 45° = \sqrt{2}/2$, tenemos

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la figura 5 es evidente que $\tan 390° = \tan 30°$ y, dado que $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

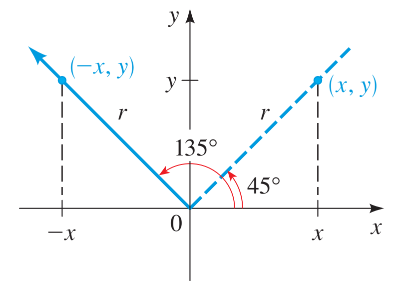


FIGURA 4

FIGURA 5

Ahora intente realizar los ejercicios 13 y 15

Del ejemplo 1 vemos que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, como las correspondientes funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Ese ángulo agudo recibirá el nombre de *ángulo de referencia*.

ÁNGULO DE REFERENCIA

Sea θ un ángulo en posición estándar. El **ángulo de referencia** $\overline{\theta}$ asociado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La figura 6 muestra que para encontrar un ángulo de referencia $\overline{\theta}$, es útil conocer el cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.

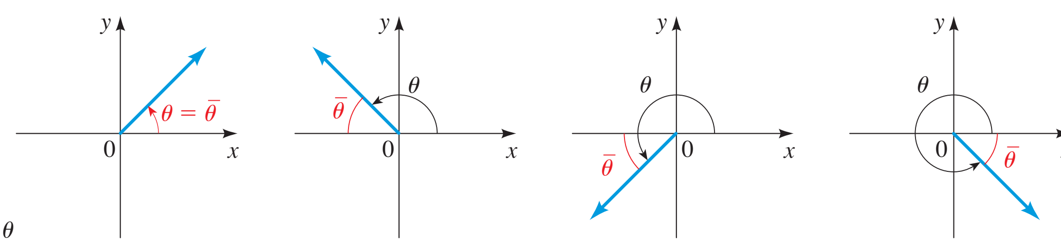


FIGURA 6 El ángulo de referencia $\overline{\theta}$ para un ángulo θ

EJEMPLO 2 ■ Encontrar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para ***a***) $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y ***b***) $\theta = 870°$.

SOLUCIÓN

a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (vea la figura 7). Puesto que el lado terminal de este ángulo está en el cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es

$$\overline{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

FIGURA 7

b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Entonces, el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante (vea la figura 8). Por tanto, el ángulo de referencia es

$$\overline{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

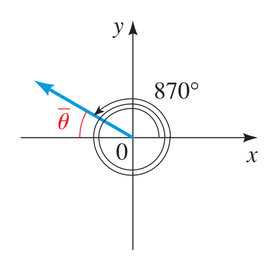


FIGURA 8



Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 9 ■

EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo θ se realizan los siguientes pasos.

1. Encontrar el ángulo de referencia $\overline{\theta}$ asociado con el ángulo θ.
2. Determinar el signo de la función trigonométrica de θ observando el cuadrante en el que se encuentre θ.
3. El valor de la función trigonométrica de θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\overline{\theta}$.

EJEMPLO 3 ■ Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre ***a***) sen 240° y ***b***) cot 495°.

SOLUCIÓN

a) Este ángulo tiene su lado terminal en el tercer cuadrante, como se muestra en la figura 9. El ángulo de referencia es, por tanto, $240° - 180° = 60°$, y el valor de sen 240° es negativo. Entonces

$$\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Signo — Ángulo de referencia

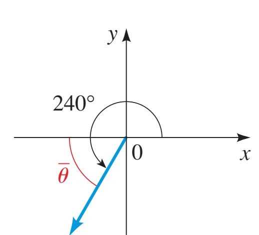


FIGURA 9

S | T
T | C

sen 240° es *negativo*.

b) El ángulo de 495° es coterminal con el ángulo de 135°, y el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante, como se muestra en la figura 10. Por tanto, el ángulo de referencia es $180° - 135° = 45°$, y el valor de cot 495° es negativo. Tenemos

$$\cot 495° = \cot 135° = -\cot 45° = -1$$



Signo — Ángulo de referencia

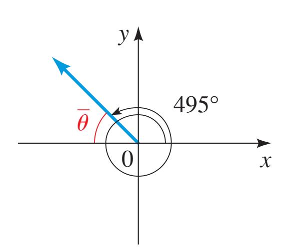


FIGURA 10

S | T
T | C

tan 495° es *negativa*,
por lo que 495° es *negativa*.

Ahora intente realizar los ejercicios 19 y 21

EJEMPLO 4 ■ Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre ***a***) $\operatorname{sen} \frac{16\pi}{3}$ y ***b***) $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN

a) El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$, y estos ángulos están en el tercer cuadrante (vea la figura 11). Entonces, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Dado que el valor del seno es negativo en el tercer cuadrante, tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{16\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ángulos coterminales — Signo — Ángulo de referencia

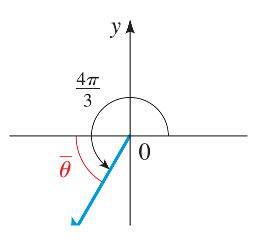


FIGURA 11

S | T
T | C

sen $\frac{16\pi}{3}$ es *negativa*.

b) El ángulo $-\pi/4$ está en el cuarto cuadrante y su ángulo de referencia es $\pi/4$ (vea la figura 12). Dado que la secante es positiva en este cuadrante, obtenemos

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Signo — Ángulo de referencia

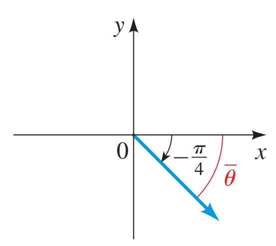


FIGURA 12

S | T
T | C

$\cos(-\frac{\pi}{4})$ es *positivo*,
por lo que $\sec(-\frac{\pi}{4})$ es *positiva*.

Ahora intente realizar los ejercicios 25 y 27

■ Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de los ángulos están relacionadas entre sí por medio de varias e importantes ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Ya hemos encontrado las identidades recíprocas. Estas identidades continúan cumpliéndose para

cualquier ángulo θ, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades pitagóricas son una consecuencia del teorema de Pitágoras.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

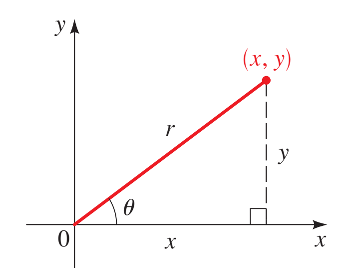


FIGURA 13

Demostración Demostremos la primera identidad pitagórica. Usando $x^2 + y^2 = r^2$ (el teorema de Pitágoras) en la figura 13, tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por tanto, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. (Aun cuando la figura indica un ángulo agudo, se debe verificar que la prueba se cumpla para todo ángulo θ.) ■

Vea el ejercicio 76 para las pruebas de las otras dos identidades pitagóricas.

EJEMPLO 5 ■ Expresar una función trigonométrica en términos de otra

a) Expresar sen θ en términos de cos θ.

b) Expresar tan θ en términos de sen θ, donde θ está en el segundo cuadrante.

SOLUCIÓN

a) De la primera identidad pitagórica obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el primero o en el segundo cuadrante, entonces sen θ es positivo y, por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el tercero o en el cuarto cuadrante, sen θ es negativo y, por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

b) Dado que $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, necesitamos escribir cos θ en términos de sen θ. Por el inciso *a*)

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

y puesto que cos θ es negativo en el segundo cuadrante, aquí aplica el signo negativo. Por tanto,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta}}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

---

* Continuamos con la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ por $(\operatorname{sen}\theta)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n\theta$ por $(\operatorname{sen}\theta)^n$ para todos los enteros n excepto para $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la sección 6.4. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

EJEMPLO 6 ■ Evaluación de una función trigonométrica

Si $\tan\theta = \frac{2}{3}$ y θ está en el tercer cuadrante, encontrar $\cos\theta$.

SOLUCIÓN 1 Necesitamos escribir $\cos\theta$ en términos de $\tan\theta$. De la identidad $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$. En el tercer cuadrante, $\sec\theta$ es negativa, por lo que

$$\sec\theta = -\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

Si se desea racionalizar el denominador, se puede expresar $\cos\theta$ como

$$-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Por tanto

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{13}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

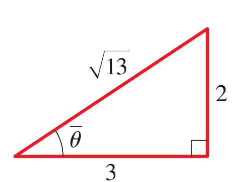
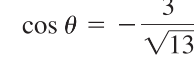


FIGURA 14

SOLUCIÓN 2 Este problema se puede resolver más fácilmente usando el método del ejemplo 2 de la sección 6.2. Recuerde que, excepto por el signo, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo son iguales a las de un ángulo agudo (el ángulo de referencia). Por tanto, ignorando por ahora el signo, trazamos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\bar{\theta}$ que satisfaga $\tan\bar{\theta} = \frac{2}{3}$ (vea la figura 14). Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{13}$. Del triángulo de la figura 14 vemos de inmediato que $\cos\bar{\theta} = 3/\sqrt{13}$. Dado que θ está en el tercer cuadrante, $\cos\theta$ es negativo y, por tanto,



$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 47

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de funciones trigonométricas

Si $\sec\theta = 2$ y θ está en el cuarto cuadrante, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

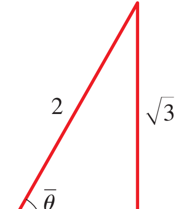


FIGURA 15

SOLUCIÓN Trazamos un triángulo como en la figura 15 para que $\sec\bar{\theta} = 2$. Tomando en cuenta el hecho de que θ está en el cuarto cuadrante, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\theta = 2 \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



Ahora intente realizar el ejercicio 49

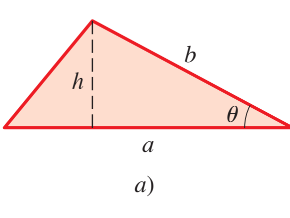
■ Áreas de triángulos

Concluimos esta sección con una aplicación de las funciones trigonométricas que comprende ángulos que no son necesariamente agudos. Aplicaciones más extensas aparecen en las secciones 6.5 y 6.6.

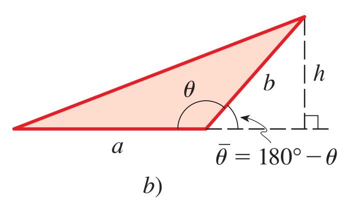
El área de un triángulo es $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$. Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo entre los mismos, entonces podemos encontrar la altura usando las funciones trigonométricas y a partir de esto podemos encontrar el área.

Si θ no es ángulo agudo, entonces la altura del triángulo de la figura 16*a*) está dada por $h = b \operatorname{sen}\theta$. Por tanto, el área es

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$$



a)



b)

FIGURA 16

Si el ángulo θ no es agudo, entonces de la figura 16*b*) vemos que la altura del triángulo es

$$h = b\operatorname{sen}(180° - \theta) = b\operatorname{sen}\theta$$

Esto ocurre porque el ángulo de referencia de θ es el ángulo $180° - \theta$. Así, también en este caso, el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo entre ellos θ es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$$

EJEMPLO 8 ■ Encontrar el área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo ABC que se muestra en la figura 17.

A, B, C, 120°, 3 cm, 10 cm

FIGURA 17

SOLUCIÓN El triángulo tiene lados de longitud de 10 y 3 cm, con un ángulo entre ellos de 120°. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta \\
&= \tfrac{1}{2}(10)(3) \text{ sen } 120° \\
&= 15 \text{ sen } 60° && \text{Ángulo de referencia} \\
&= 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

6.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si el ángulo θ está en posición estándar, $P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ, y r es la distancia del origen a P, entonces

sen θ = —— cos θ = —— tan θ = ——

2. El signo de una función trigonométrica de θ depende del ________ en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.
En el segundo cuadrante, sen θ es ________ (positivo/negativo).
En el tercer cuadrante, cos θ es ________ (positivo/negativo).
En el cuarto cuadrante, sen θ es ________ (positivo/negativo).

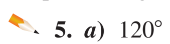
3. ***a)*** Si θ está en posición estándar, entonces el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el ________. Así que el ángulo de referencia para $\theta = 100°$ es $\bar{\theta}$ = ________, y para $\theta = 190°$ es $\bar{\theta}$ = ________.

b) Si θ es cualquier ángulo, el valor de una función trigonométrica de θ es igual, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$. Por lo que sen 100° = sen ____ y sen 190° = −sen ____.

4. El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con el ángulo entre ellos θ está dada por la fórmula $\mathcal{A}$ = ________. Por lo que el área del triángulo con lados de 4 y 7 y el ángulo entre ellos $\theta = 30°$ es ________.

HABILIDADES

5–12 ■ Ángulo de referencia Encuentre el ángulo de referencia para el ángulo dado.



5. ***a)*** 120° ***b)*** 200° ***c)*** 285°

6. ***a)*** 175° ***b)*** 310° ***c)*** 730°

7. ***a)*** 225° ***b)*** 810° ***c)*** −105°

8. ***a)*** 99° ***b)*** −199° ***c)*** 359°

9. ***a)*** $\frac{7\pi}{10}$ ***b)*** $\frac{9\pi}{8}$ ***c)*** $\frac{10\pi}{3}$

10. ***a)*** $\frac{5\pi}{6}$ ***b)*** $\frac{10\pi}{9}$ ***c)*** $\frac{23\pi}{7}$

11. ***a)*** $\frac{5\pi}{7}$ ***b)*** -1.4π ***c)*** 1.4

12. ***a)*** 2.3π ***b)*** 2.3 ***c)*** -10π

13–36 ■ Valores de funciones trigonométricas Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica.

13. $\cos 150°$ **14.** $\text{sen } 240°$ **15.** $\tan 330°$

16. $\text{sen}(-30°)$ **17.** $\cot(-120°)$ **18.** $\csc 300°$

19. $\csc(-630°)$ **20.** $\cot 210°$ **21.** $\cos 570°$

22. $\sec 120°$ **23.** $\tan 750°$ **24.** $\cos 660°$

25. $\text{sen } \dfrac{3\pi}{2}$ **26.** $\cos \dfrac{4\pi}{3}$ **27.** $\tan\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$

28. $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$ **29.** $\csc\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$ **30.** $\sec \dfrac{7\pi}{6}$

31. $\sec \dfrac{17\pi}{3}$ **32.** $\csc \dfrac{5\pi}{4}$ **33.** $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

34. $\cos \dfrac{7\pi}{4}$ **35.** $\tan \dfrac{5\pi}{2}$ **36.** $\text{sen } \dfrac{11\pi}{6}$

37–40 ■ Cuadrante en el cual está el ángulo A partir de la información dada encuentre el cuadrante en el que se encuentra θ.

37. $\text{sen } \theta < 0$ y $\cos \theta < 0$

38. $\tan \theta < 0$ y $\text{sen } \theta < 0$

39. $\sec \theta > 0$ y $\tan \theta < 0$

40. $\csc \theta > 0$ y $\cos \theta < 0$

41–46 ■ Expresar una función trigonométrica en términos de otra Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

41. $\tan \theta$, $\cos \theta$; θ en el cuadrante III

42. $\cot \theta$, $\text{sen } \theta$; θ en el cuadrante II

43. $\cos \theta$, $\text{sen } \theta$; θ en el cuadrante IV

44. $\sec \theta$, $\text{sen } \theta$; θ en el cuadrante I

45. $\sec \theta$, $\tan \theta$; θ en el cuadrante II

46. $\csc \theta$, $\cot \theta$; θ en el cuadrante III

47–54 ■ Valores de las funciones trigonométricas Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

47. $\text{sen } \theta = -\frac{4}{5}$, θ en el cuadrante IV

48. $\tan \theta = \frac{4}{3}$, θ en el cuadrante III

49. $\cos \theta = \frac{7}{12}$, $\text{sen } \theta < 0$

50. $\cot \theta = -\frac{8}{9}$, $\cos \theta > 0$

51. $\csc \theta = 2$, θ en el cuadrante I

52. $\cot \theta = \frac{1}{4}$, $\text{sen } \theta < 0$

53. $\cos \theta = -\frac{2}{7}$, $\tan \theta < 0$

54. $\tan \theta = -4$, $\text{sen } \theta > 0$

55–56 ■ Valores de una expresión Si $\theta = \pi/3$, encuentre el valor de cada expresión.

55. $\text{sen } 2\theta$, $2 \text{ sen } \theta$ **56.** $\text{sen}^2\theta$, $\text{sen}(\theta^2)$

57–60 ■ Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo con la descripción dada.

57. Un triángulo con lados de longitud 7 y 9 y el ángulo entre ellos de 72°.

58. Un triángulo con lados de longitud 10 y 22 y el ángulo entre ellos de 10°.

59. Un triángulo equilátero con lados de longitud 10.

60. Un triángulo equilátero con lados de longitud 13.

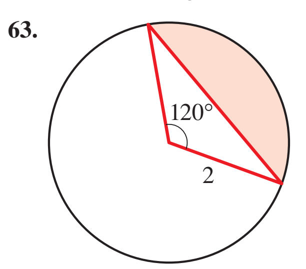
61. Encontrar un ángulo de un triángulo Un triángulo tiene un área de 16 pulg^2, y dos de los lados del triángulo tienen longitudes de 5 y 7 pulg. Encuentre el seno del ángulo entre ellos.

62. Encontrar un lado de un triángulo Un triángulo isósceles tiene un área de 24 cm^2, y el ángulo entre los dos lados iguales es $5\pi/6$. ¿Cuál es la longitud de los dos lados iguales?

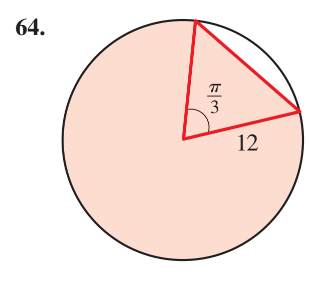
HABILIDADES Plus

63–64 ■ Área de una región Encuentre el área de la región sombreada de la figura.

63.



64.



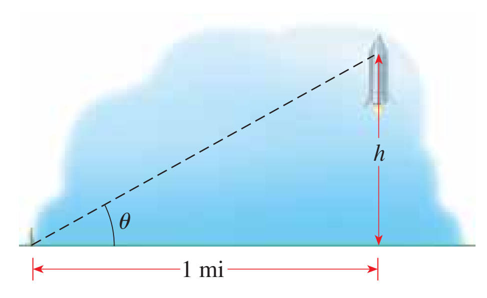
APLICACIONES

65. Altura de un cohete Un cohete disparado en línea recta hacia arriba es rastreado por un observador que está en el suelo a una milla de distancia.

a) Demuestre que cuando el ángulo de elevación es θ, la altura del cohete en pies es $h = 5\,280 \tan \theta$.

b) Complete la tabla para encontrar la altura del cohete en los ángulos de elevación dados.

θ	20°	60°	80°	85°
h				



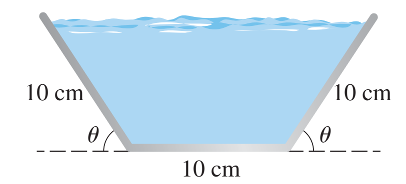
66. Canal para lluvias Un canal de agua de lluvia se construye de lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando un tercio de la lámina a ambos lados en un ángulo θ. (Vea la figura de la página siguiente.)

a) Demuestre que el área transversal del canal está modelada por la función

$$A(\theta) = 100 \text{ sen } \theta + 100 \text{ sen } \theta \cos \theta$$

b) Trace la gráfica de la función A para $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

c) ¿Para cuál ángulo θ se obtiene la máxima área de sección transversal?

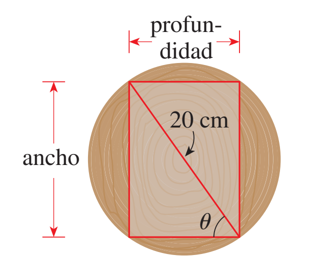


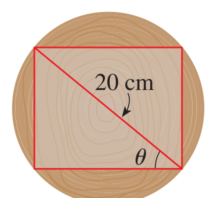
67. Viga de madera Una viga rectangular ha de cortarse de un tronco cilíndrico de 20 cm de diámetro. Las figuras siguientes muestran diferentes formas en las que se puede hacer esto.

a) Exprese el área de sección transversal de la viga como función del ángulo θ de las figuras.


b) Trace la gráfica de la función que encontró en el inciso *a*).


c) Encuentre las dimensiones de la viga con máxima área de sección transversal.





68. Resistencia de una viga La resistencia de una viga es proporcional al ancho y al cuadrado de la profundidad. Se corta una viga de un tronco como en el ejercicio 67. Exprese la resistencia de la viga como función del ángulo θ de las figuras.

69. Lanzamiento de bala El alcance R y la altura H de un tiro de lanzamiento de bala, con una velocidad inicial de v_0 pies/s a un ángulo θ, están dados por

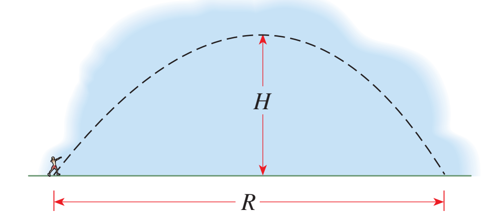
$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g}$$

En la Tierra $g = 32$ pies/s^2, y en la Luna $g = 5.2$ pies/s^2. Encuentre el rango y la altura de un lanzamiento de bala bajo las condiciones dadas.

a) En la Tierra con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$

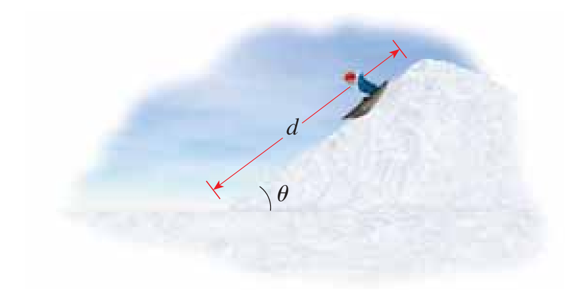
b) En la Luna con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$



70. Trineo El tiempo en segundos que tarda un trineo en bajar deslizándose por un plano inclinado a un ángulo θ es

$$t = \sqrt{\frac{d}{16 \operatorname{sen} \theta}}$$

donde d es la longitud de la pendiente en pies. Encuentre el tiempo en deslizarse por una pendiente de 2000 pies inclinada a 30°.



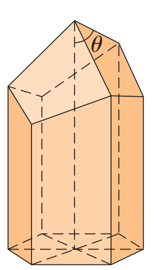
71. Colmenas En una colmena cada celda es un prisma hexagonal regular, como se muestra en la figura. La cantidad de cera W de la celda depende del ángulo θ en el vértice, y está dada por

$$W = 3.02 - 0.38 \cot \theta + 0.65 \csc \theta$$

Las abejas instintivamente escogen θ de modo que usan la cantidad mínima posible de cera.


a) Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de W como función de θ para $0 < \theta < \pi$.

b) ¿Para qué valor de θ tiene W su valor mínimo? [*Nota:* unos biólogos han descubierto que las abejas raras veces se desvían de este valor en más de un grado o dos.]



72. Dar vuelta en una esquina Un tubo de acero es transportado por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final del salón hay una vuelta en ángulo recto a otro pasillo más angosto, de 6 pies de ancho.

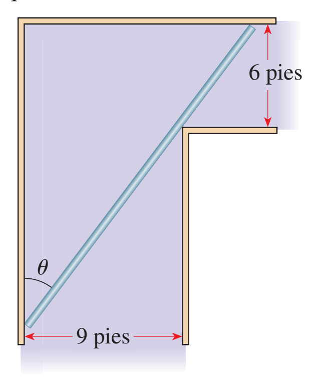
a) Demuestre que la longitud del tubo en la figura está modelada por la función

$$L(\theta) = 9 \csc \theta + 6 \sec \theta$$


b) Trace la gráfica de la función L para $0 < \theta < \pi/2$.


c) Encuentre el valor mínimo de la función L.

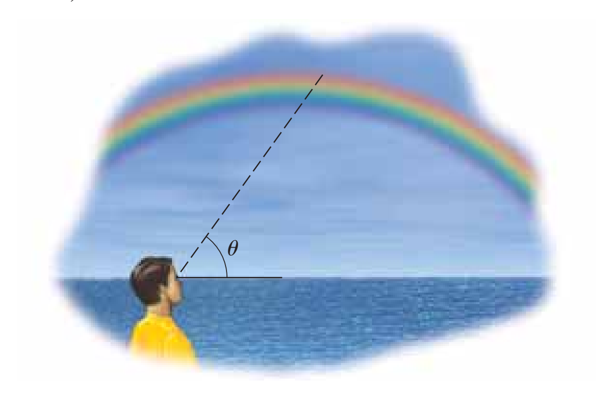
d) Explique por qué el valor de L que encontró en el inciso *c*) es la longitud del tubo más largo que puede pasarse por la esquina.



73. Arco iris Los arco iris se forman cuando luz solar de longitudes de onda diferentes (colores) se refracta y refleja en pequeñas gotas de lluvia. El ángulo de elevación θ de un arco iris es siempre el mismo. Se puede demostrar que $\theta = 4\beta - 2\alpha$, donde

$$\text{sen } \alpha = k \text{ sen } \beta$$

y $\alpha = 59.4°$ y $k = 1.33$ es el índice de refracción del agua. Use la información dada para encontrar el ángulo de elevación θ de un arco iris. [*Sugerencia:* determine sen β, luego utilice la tecla SIN⁻¹ en su calculadora para determinar β.] (Para una explicación matemática del arco iris vea *Calculus Early Transcendentals,* 7a. edición, de James Stewart, página 282.)



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

74. DISCUSIÓN: Uso de una calculadora Para resolver cierto problema usted necesita encontrar el seno de 4 rad. Un compañero de grupo usa su calculadora y le dice que

$$\text{sen } 4 = 0.0697564737$$

Usted, en su propia calculadora obtiene

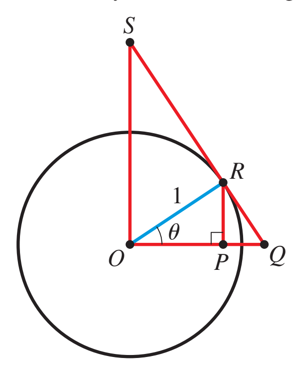
$$\text{sen } 4 = -0.7568024953$$

¿Qué es lo que está mal? ¿Qué error tuvo su compañero?

75. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Diagrama trigonométrico de Viète En el siglo XVI el matemático francés François Viète (vea la página 50) publicó el sorprendente diagrama que se muestra. Cada una de las seis funciones trigonométricas de θ es igual a la longitud de un segmento de recta de la figura. Por ejemplo, sen $\theta = |PR|$ porque a partir de $\triangle OPR$ vemos que

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{|PR|}{|OR|} = \frac{|PR|}{1} = |PR|$$

Para cada una de las otras cinco funciones trigonométricas encuentre un segmento de recta en la figura cuya longitud sea igual al valor de la función en θ. [*Nota:* El radio de la circunferencia es 1, el centro es O, el segmento QS es tangente a la circunferencia en R, y $\angle SOQ$ es un ángulo recto.]



76. DEMOSTRACIÓN: Identidades pitagóricas Para demostrar las siguientes identidades pitagóricas comience con la primera identidad pitagórica, $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, que se demostró en el texto y luego divida ambos lados entre una función trigonométrica adecuada de θ.

a) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ ***b***) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

77. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Grados y radianes ¿Cuál es el número x más pequeño positivo real con la propiedad de que el seno de x grados es igual al seno de x radianes?

6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

■ Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa ■ Solución de ángulos en triángulos rectángulos ■ Evaluación de expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas

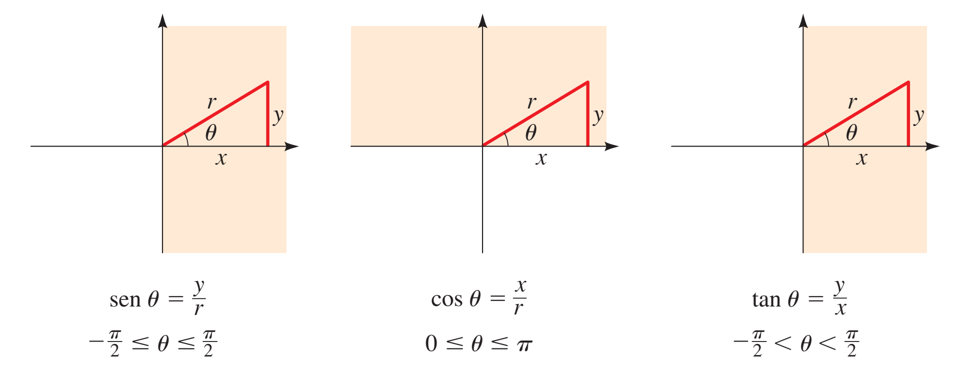
En la sección 5.5 se estudian las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.

Recuerde que para que una función tenga una inversa debe ser uno a uno. Dado que las funciones trigonométricas no son uno a uno, no tienen inversas. Por tanto, restringimos el dominio de cada una de las funciones trigonométricas a intervalos en los que alcanzan todos sus valores y en los que son uno a uno. Las funciones resultantes tienen el mismo rango que las funciones originales pero son uno a uno.

■ Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa

Consideremos primero la función seno. Restringimos el dominio de la función seno a ángulos θ with $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. De la figura 1 vemos que en este dominio la función seno alcanza cada uno de los valores sobre el intervalo $[-1, 1]$ exactamente una vez y,

por tanto, es uno a uno. Del mismo modo restringimos los dominios de coseno y tangente como se muestra en la figura 1.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

FIGURA 1 Dominios restringidos de las funciones seno, coseno y tangente

En estos dominios restringidos podemos definir una inversa para cada una de estas funciones. Por la definición de función inversa tenemos

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x$$
$$\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x$$
$$\tan^{-1} x = y \iff \tan y = x$$

Resumimos los dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas en el siguiente cuadro.

LAS FUNCIONES SENO INVERSO, COSENO INVERSO Y TANGENTE INVERSA

Las funciones seno, coseno y tangente en los dominios restringidos $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$ y $(-\pi/2, \pi/2)$, respectivamente, son uno a uno y, por tanto, tienen inversas. Las funciones inversas tienen dominio y rango como sigue.

Función	Dominio	Rango
sen^{-1}	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$
$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$

Las funciones sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ a veces reciben el nombre de **arcseno**, **arcoseno** y **arctangente**, respectivamente.

Ya que son funciones inversas, estas invierten la regla de la función original. Por ejemplo, dado que $\operatorname{sen}\pi/6 = \frac{1}{2}$, se concluye que $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \pi/6$. El siguiente ejemplo da más ilustraciones.

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto.

a) $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ***b***) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ ***c***) $\tan^{-1} 1$

SOLUCIÓN

a) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ con seno $\sqrt{3}/2$ es $\pi/3$. Por tanto $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

***b*)** El ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ con coseno $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Por tanto, $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 2\pi/3$.

***c*)** El ángulo en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con tangente 1 es $\pi/4$. Por tanto, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$.

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

EJEMPLO 2 ■ Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre valores para la expresión dada.

***a*)** $\operatorname{sen}^{-1}(0.71)$ ***b*)** $\tan^{-1} 2$ ***c*)** $\cos^{-1} 2$

SOLUCIÓN Usamos la calculadora para aproximar estos valores.

***a*)** Usando las teclas [INV] [SIN] o [SIN⁻¹] o [ARC] [SIN] de la calculadora (puesta en el modo de radianes) obtenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}(0.71) \approx 0.78950$$

***b*)** Usando las teclas [INV] [TAN] o [TAN⁻¹] o [ARC] [TAN] de la calculadora (puesta en el modo de radianes) obtenemos

$$\tan^{-1} 2 \approx 1.10715$$

***c*)** Ya que $2 > 1$ no está en el dominio de $\cos^{-1}$, $\cos^{-1} 2$ no está definido.

Ahora intente realizar los ejercicios 9, 13 y 15 ■

■ Solución de ángulos en triángulos rectángulos

En la sección 6.2 resolvimos triángulos usando las funciones trigonométricas para encontrar los lados desconocidos. Ahora usaremos funciones trigonométricas inversas para encontrar los *ángulos* en un triángulo rectángulo.

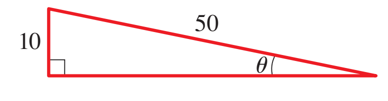


FIGURA 2

EJEMPLO 3 ■ Encontrar un ángulo en un triángulo rectángulo

Encuentre el ángulo θ en el triángulo que se muestra en la figura 2.

SOLUCIÓN Dado que θ es el ángulo opuesto al lado de longitud 10 y la hipotenusa tiene longitud 50, tenemos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$$

Ahora podemos usar sen^{-1} para encontrar θ.

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{5} \qquad \text{Definición de sen}^{-1}$$

$$\theta \approx 11.5° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

FIGURA 3

EJEMPLO 4 ■ Solución de un ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo que forman la escalera y el edificio?

SOLUCIÓN Primero trazamos un diagrama como en la figura 3. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{6}{40} = 0.15 \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$$

Ahora usamos sen^{-1} para encontrar θ.

$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.15) \qquad \text{Definición de sen}^{-1}$$
$$\theta \approx 8.6° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$



EJEMPLO 5 ■ El ángulo de un rayo de luz

Un faro está situado en una isla que se encuentra a 2 millas de una costa recta (vea la figura 4). Exprese el ángulo formado por el rayo de luz y la orilla en términos de la distancia d en la figura.

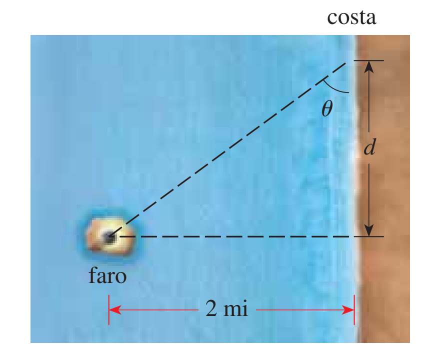


FIGURA 4

SOLUCIÓN De la figura vemos que

$$\tan\theta = \frac{2}{d} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

Tomando la tangente inversa de ambos lados obtenemos

$$\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Tome } \tan^{-1} \text{ de ambos lados}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Propiedad de funciones inversas: } \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$$

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

En las secciones 6.5 y 6.6 aprenderemos a resolver cualquier triángulo (no necesariamente un triángulo rectángulo). Los ángulos en un triángulo están siempre en el intervalo $(0, \pi)$ (o entre 0 y 180°). Veremos que para resolver estos triángulos necesitamos encontrar todos los ángulos del intervalo $(0, \pi)$ que tengan seno o coseno dados. Hacemos esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 ■ Solución de una ecuación trigonométrica básica en un intervalo

Encuentre todos los ángulos θ entre 0 y 180° que satisfagan la ecuación dada.

a) $\text{sen}\,\theta = 0.4$ ***b)*** $\cos\theta = 0.4$

SOLUCIÓN

a) Usamos sen^{-1} para encontrar una solución en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\text{sen}\,\theta = 0.4 \qquad \text{Ecuación}$$
$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.4) \qquad \text{Tome sen}^{-1} \text{ de cada lado}$$
$$\theta \approx 23.6° \qquad \text{Calculadora (modo de grados)}$$

Otra solución con θ entre 0 y 180° se obtiene tomando el suplemento del ángulo: $180° - 23.6° = 156.4°$ (vea la figura 5). Por tanto, las soluciones de la ecuación con θ entre 0 y 180° son

$$\theta \approx 23.6° \quad \text{y} \quad \theta \approx 156.4°$$

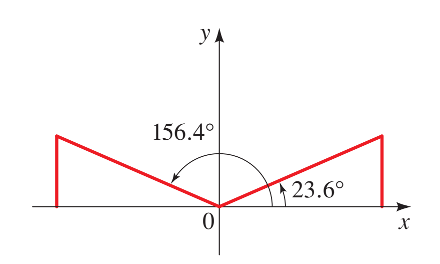


FIGURA 5

b) La función coseno es uno a uno en el intervalo $[0, \pi]$, de modo que hay sólo una solución de la ecuación con θ entre 0 y 180°. Encontramos esa solución tomando $\cos^{-1}$ de cada lado.

$$\cos\theta = 0.4$$
$$\theta = \cos^{-1}(0.4) \qquad \text{Tome cos}^{-1} \text{ de cada lado}$$
$$\theta \approx 66.4° \qquad \text{Calculadora (modo de grados)}$$

La solución es $\theta \approx 66.4°$

Ahora intente realizar los ejercicios 25 y 27 ■

Evaluación de expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas

En cálculo surgen expresiones tales como $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$. Encontramos valores exactos de estas expresiones usando identidades trigonométricas o triángulos rectángulos.

EJEMPLO 7 ■ Composición de funciones trigonométricas y sus inversas

Encuentre $\cos(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$.

SOLUCIÓN 1 Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5}$. Entonces θ es el número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{3}{5}$. Interpretamos θ como un ángulo y trazamos un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos, con lado opuesto 3 e hipotenusa 5 (vea la figura 6). El cateto restante del triángulo se encuentra mediante el teorema de Pitágoras como 4. De la figura obtenemos

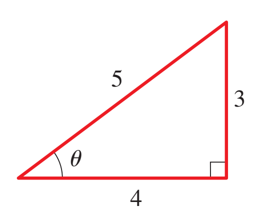


FIGURA 6
$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} \tfrac{3}{5}) = \cos\theta \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{3}{5}$$
$$= \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

Por tanto, $\cos(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$.

SOLUCIÓN 2 Es fácil encontrar $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$. De hecho, por las propiedades de cancelación de funciones inversas, este valor es exactamente $\frac{3}{5}$. Para encontrar $\cos(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$, primero escribimos la función coseno en términos de la función seno. Sea $u = \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5}$. Debido a que $-\pi/2 \le u \le \pi/2$, $\cos u$ es positivo, y podemos escribir lo siguiente:

$$\cos u = +\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} \qquad \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1$$
$$= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1} \tfrac{3}{5})} \qquad u = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{3}{5}$$
$$= \sqrt{1 - (\tfrac{3}{5})^2} \qquad \text{Propiedad de funciones inversas: } \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} \tfrac{3}{5}) = \tfrac{3}{5}$$
$$= \sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5} \qquad \text{Calcule}$$

Por tanto, $\cos(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

EJEMPLO 8 ■ Composición de funciones trigonométricas y sus inversas

Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)$ y $\tan(\cos^{-1} x)$ como expresiones algebraicas en x para $-1 \le x \le 1$.

SOLUCIÓN 1 Sea $\theta = \cos^{-1} x$; entonces $\cos\theta = x$. En la figura 7 trazamos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ, lado adyacente x e hipotenusa 1. Por el teorema de Pitágoras el cateto restante es $\sqrt{1 - x^2}$. De la figura, tenemos

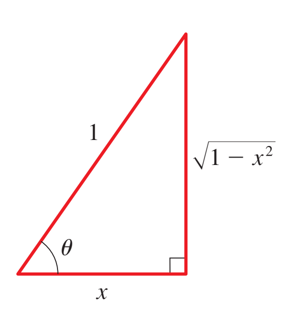


FIGURA 7
$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1} x) = \tan\theta = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

SOLUCIÓN 2 Sea $u = \cos^{-1} x$. Necesitamos encontrar $\operatorname{sen} u$ y $\tan u$ en términos de x. Al igual que en el ejemplo 7, la idea aquí es escribir seno y tangente en términos de coseno. Observe que $0 \le u \le \pi$ porque $u = \cos^{-1} x$. Tenemos

$$\operatorname{sen} u = \pm\sqrt{1 - \cos^2 u} \qquad \text{y} \qquad \tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 u}}{\cos u}$$

Para escoger los signos apropiados observe que u se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$ porque $u = \cos^{-1} x$. Dado que sen u es positivo en este intervalo, el signo $+$ es la opción correcta. Si sustituimos $u = \cos^{-1} x$ en las ecuaciones que se muestran y usamos la propiedad de cancelación $\cos(\cos^{-1} x) = x$, obtenemos

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 35 y 37 ■

Nota: en la solución 1 del ejemplo 8 podría parecer que debido a que estamos trazando un triángulo, el ángulo $\theta = \cos^{-1} x$ debe ser agudo. Pero resulta que el método del triángulo funciona para cualquier x. Los dominios y rangos para las seis funciones trigonométricas inversas se han escogido en forma tal que podemos siempre usar un triángulo para encontrar $S(T^{-1}(x))$, donde S y T son cualesquier funciones trigonométricas.

6.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para que una función tenga inversa debe ser ________________. Para definir la función inversa restringimos el ________________ de la función seno al intervalo ________________.

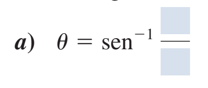
2. Las funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa tienen los siguientes dominios y rangos.

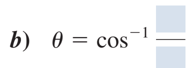
a) La función sen^{-1} tiene dominio ________ y rango ________.

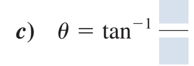
b) La función $\cos^{-1}$ tiene dominio ________ y rango ________.

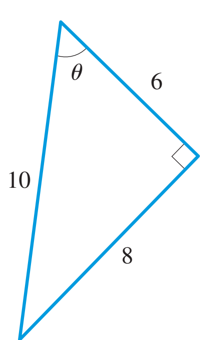
c) La función $\tan^{-1}$ tiene dominio ________ y rango ________.

3. En el triángulo que se muestra podemos encontrar el ángulo θ como sigue.



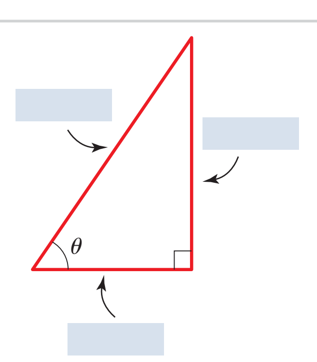






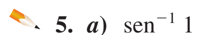
4. Para encontrar $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{5}{13})$, hacemos que $\theta = \cos^{-1}(\frac{5}{13})$ y se completa el triángulo rectángulo que se encuentra en la parte superior de la siguiente columna. Se encuentra que

$\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{5}{13}) =$ ________.



HABILIDADES

5–8 ■ Evaluar funciones trigonométricas inversas Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida. Exprese sus respuestas en radianes.



5. *a*) $\operatorname{sen}^{-1} 1$ *b*) $\cos^{-1} 0$ *c*) $\tan^{-1} \sqrt{3}$

6. *a*) $\operatorname{sen}^{-1} 0$ *b*) $\cos^{-1}(-1)$ *c*) $\tan^{-1} 0$

7. *a*) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *b*) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *c*) $\tan^{-1}(-1)$

8. *a*) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *b*) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ *c*) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

9–16 ■ Evaluar funciones trigonométricas inversas Use calculadora para encontrar un valor aproximado de cada expresión, redondeado a cinco decimales, si está definido.

9. $\operatorname{sen}^{-1}(0.30)$ **10.** $\cos^{-1}(-0.2)$

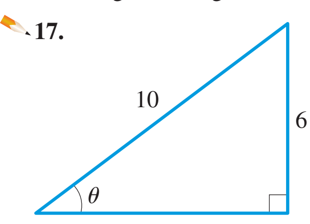
11. $\cos^{-1} \frac{1}{3}$ **12.** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{5}{6}$

13. $\tan^{-1} 3$ **14.** $\tan^{-1}(-4)$

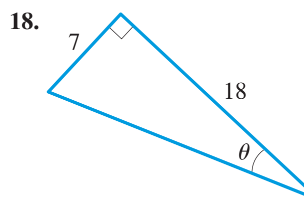
15. $\cos^{-1} 3$ **16.** $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

17–22 ■ Encontrar ángulos en triángulos rectángulos Encuentre el ángulo θ en grados, redondeado a un decimal.

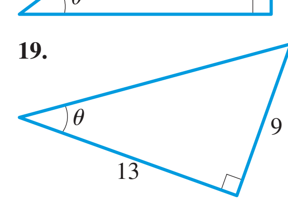
17.



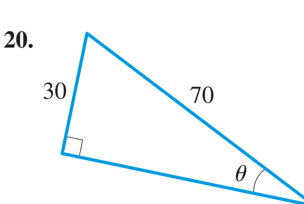
18.



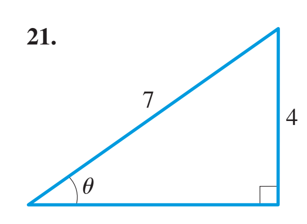
19.



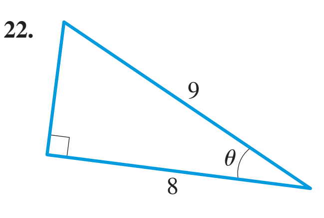
20.



21.



22.



23–28 ■ Ecuaciones trigonométricas básicas Encuentre todos los ángulos θ entre 0 y 180° que satisfagan la ecuación dada. Redondee su respuesta a un decimal.

23. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ **24.** $\cos\theta = \frac{3}{4}$

25. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$ **26.** $\tan\theta = -20$

27. $\tan\theta = 5$ **28.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$

29–34 ■ Valor de una expresión Encuentre el valor exacto de la expresión.

29. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5})$ **30.** $\cos(\tan^{-1}\frac{4}{3})$ **31.** $\sec(\operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{13})$

32. $\csc(\cos^{-1}\frac{7}{25})$ **33.** $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{13})$ **34.** $\cot(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3})$

35–38 ■ Expresiones algebraicas Reescriba la expresión como una expresión algebraica en x.

35. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **36.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

37. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **38.** $\cos(\tan^{-1}x)$

APLICACIONES

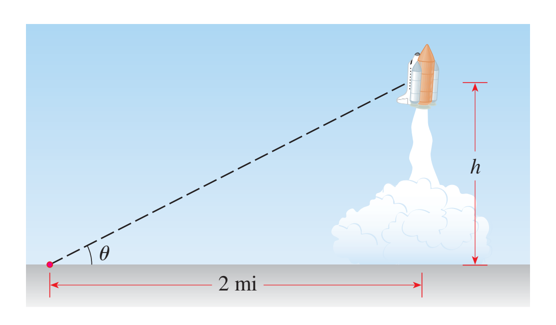
39. Escalera inclinada Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

40. Ángulo del Sol Un árbol de 96 pies proyecta una sombra que mide 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

41. Altitud de un transbordador espacial Un observador mira al transbordador espacial desde una distancia de 2 millas de la plataforma de lanzamiento.

***a*)** Exprese la altitud del transbordador espacial como función del ángulo de elevación θ.

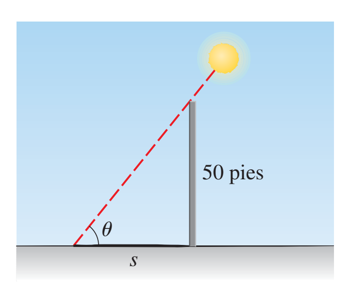
***b*)** Exprese el ángulo de elevación θ como función de la altitud h del transbordador espacial.



42. Altura de un poste Un poste de 50 pies proyecta una sombra como se muestra en la figura.

***a*)** Exprese el ángulo de elevación θ del Sol como función de la longitud s de la sombra.

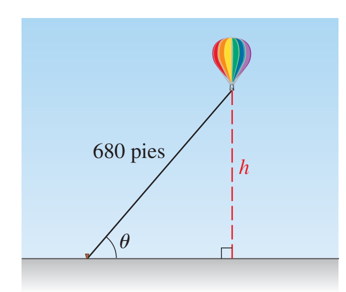
***b*)** Encuentre el ángulo θ de elevación del Sol cuando la sombra es de 20 pies de largo.



43. Altitud de un globo Un globo de aire caliente está atado a una cuerda de 680 pies, como se muestra en la figura.

***a*)** Exprese el ángulo θ como una función de la altura h del balón.

***b*)** Encuentre el ángulo θ si el globo está a 500 pies de altura.



44. Vista desde un satélite Las figuras indican que mientras más alta sea la órbita de un satélite, más se puede “ver” de la Tierra desde el satélite. Sean θ, s y h como se muestra en la figura, y suponga que la Tierra es una esfera con radio de 3 960 millas.

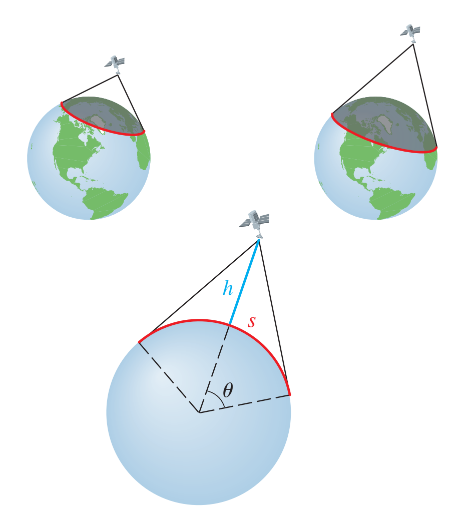
***a*)** Exprese el ángulo θ como función de h.

***b*)** Exprese la distancia s como función de θ.

***c*)** Exprese la distancia s como función de h. [*Sugerencia:* encuentre la composición de las funciones de los incisos *a*) y *b*).]

d) Si el satélite está a 100 millas sobre la Tierra, ¿cuál es la distancia s a la que se puede ver?

e) ¿A qué altura debe estar el satélite para que se vean Los Ángeles y Nueva York, que están a 2 450 millas entre sí?



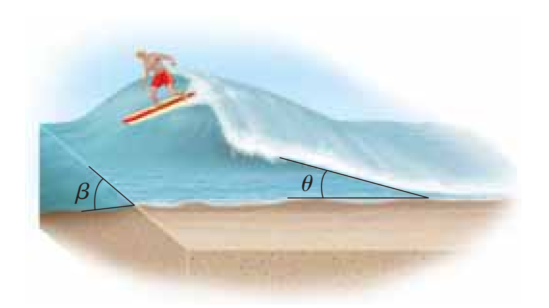
45. Surfeando en la ola perfecta Para poder surfear una ola, esta no puede romper toda a la vez. Robert Guza y Tony Bowen han demostrado que una ola tiene un "hombro", que se puede surfear si golpea la costa a un ángulo θ dado por

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{(2n + 1)\tan \beta}\right)$$

donde β es el ángulo al cual la playa hace pendiente y donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Para $\beta = 10°$, encuentre θ cuando $n = 3$.

b) Para $\beta = 15°$, encuentre θ cuando $n = 2$, 3 y 4. Explique por qué la fórmula no da un valor para θ cuando $n = 0$ o 1.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

46. DEMOSTRACIÓN: Funciones trigonométricas inversas en una calculadora La mayoría de las calculadoras no tienen teclas para $\sec^{-1}$, $\csc^{-1}$ o $\cot^{-1}$. Demuestre las siguientes identidades y luego use estas identidades y una calculadora para encontrar $\sec^{-1} 2$, $\csc^{-1} 3$ y $\cot^{-1} 4$.

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \geq 1$$

$$\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \geq 1$$

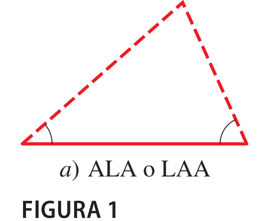
$$\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x > 0$$

6.5 LA LEY DE SENOS

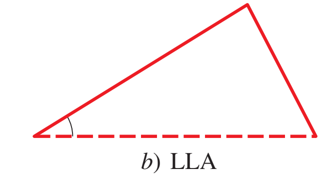
■ La ley de senos ■ El caso ambiguo

En la sección 6.2 usamos las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. Las funciones trigonométricas también se pueden usar para resolver *triángulos oblicuángulos*, es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para ello, primero estudiaremos aquí la ley de senos y luego, en la siguiente sección, la ley de cosenos.

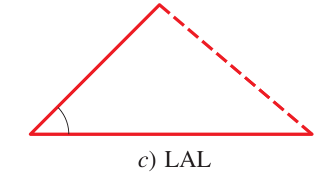
En general para resolver un triángulo necesitamos conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para determinar si tenemos suficiente información con frecuencia es útil hacer un diagrama. Por ejemplo, si se dan dos ángulos y el lado entre ellos, entonces es claro que se puede formar un triángulo y sólo uno (vea la figura 1*a*)). Del mismo modo, si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces se determina un triángulo único (figura 1*c*)). No obstante, si conocemos los tres ángulos, pero ninguno de los lados, no podemos determinar de manera única el triángulo porque hay muchos triángulos que tienen los mismos tres ángulos. (Todos estos triángulos serían semejantes, desde luego.) Por tanto, no consideraremos este último caso.



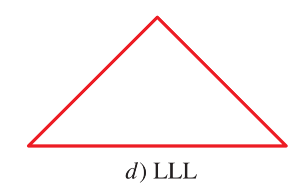
a) ALA o LAA



b) LLA



c) LAL



d) LLL

FIGURA 1

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) en tanto que al menos una de estas tres partes sea un lado. Por tanto, las posibilidades que se muestran en la figura 2 son las siguientes.

Caso 1 Un lado y dos ángulos (ALA o LAA)

Caso 2 Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)

Caso 3 Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)

Caso 4 Tres lados (LLL)

Los casos 1 y 2 se resuelven usando la ley de senos; los casos 3 y 4 requieren la ley de cosenos.

La ley de senos

La **ley de senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes. Para expresar más fácilmente esta ley (con fórmula), seguimos la convención de marcar los ángulos de un triángulo, como A, B y C y las longitudes de los correspondientes lados opuestos como a, b y c, tal como se muestra en la figura 2.

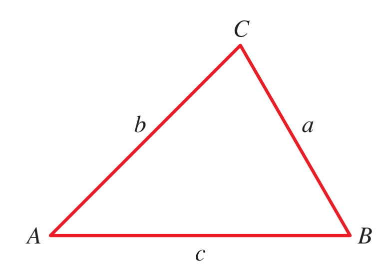


FIGURA 2



LA LEY DE SENOS

En el triángulo ABC tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

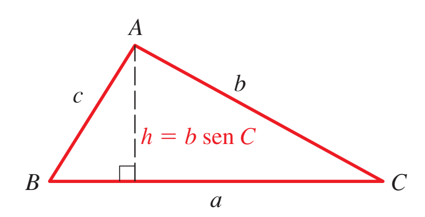


FIGURA 3

Demostración Para ver por qué la ley de senos es verdadera consulte la figura 3. Por la fórmula en la sección 6.3, el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$. Por la misma fórmula, el área de este triángulo también es $\frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$ y $\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$. Entonces,

$$\tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$$

Multiplicando por $2/(abc)$ se obtiene la ley de senos. ■

EJEMPLO 1 ■ Rastreo de un satélite (ALA)

Un satélite que describe una órbita alrededor de la Tierra pasa directamente sobre las estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, que están a 340 millas entre sí. En un instante, cuando el satélite está entre estas dos estaciones, se observa simultáneamente que su ángulo de elevación es 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de Los Ángeles?

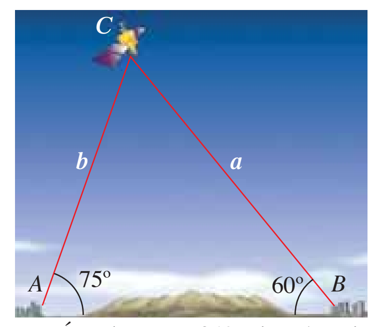


FIGURA 4

SOLUCIÓN Necesitamos encontrar la distancia b en la figura 4. Dado que la suma de los ángulos en cualquier triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (vea la figura 4), de modo que tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 416 \qquad \text{Despeje } b$$

La distancia del satélite a Los Ángeles es aproximadamente de 416 millas.

Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 31 ■

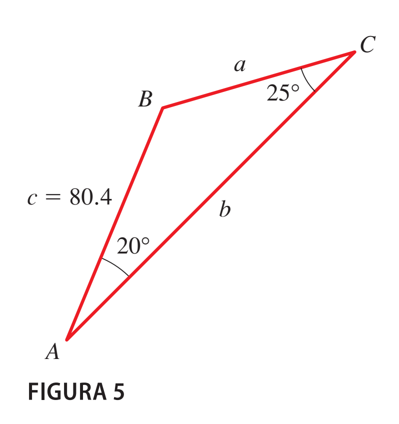


FIGURA 5

EJEMPLO 2 ■ Solución de un triángulo (LAA)

Resuelva el triángulo de la figura 5.

SOLUCIÓN Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Dado que se conoce el lado c, para encontrar el lado a usamos la relación

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

Del mismo modo, para encontrar b usamos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

El caso ambiguo

En los ejemplos 1 y 2 se determinó un triángulo único con la información dada. Esto siempre es cierto para el caso 1 (ALA o LAA). Pero en el caso 2 (LLA) puede haber dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo con las propiedades dadas. Por esta razón, el caso 2 a veces se denomina **caso ambiguo**. Para ver por qué esto es así, en la figura 6 se muestran las posibilidades cuando se dan el ángulo A y los lados a y b. En el inciso *a*) no es posible una solución, porque el lado a es demasiado corto para completar el triángulo. En el inciso *b*) la solución es un triángulo rectángulo. En el inciso *c*) son posibles dos soluciones, y en el inciso *d*) hay un triángulo único con las propiedades dadas. Ilustramos las posibilidades del caso 2 en los ejemplos siguientes.

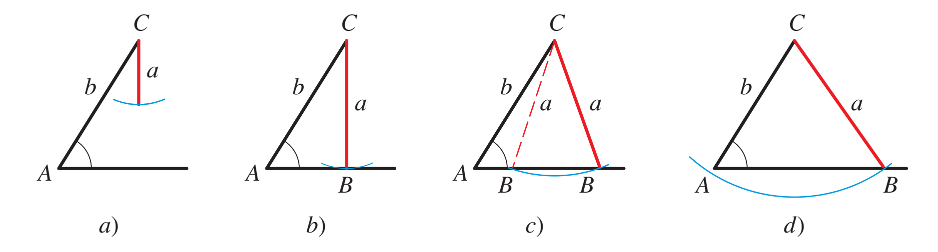


FIGURA 6 El caso ambiguo

EJEMPLO 3 ■ LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$ y $b = 7$.

SOLUCIÓN Primero trazamos el triángulo con la información que tenemos (vea la figura 7). Nuestro dibujo es necesariamente tentativo porque aún no conocemos los otros ángulos, pero podemos ver las posibilidades.

Primero encontramos $\angle B$.

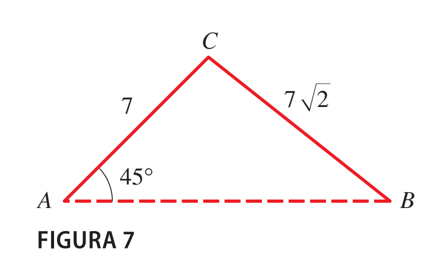


FIGURA 7

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \text{ sen } 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{Despeje sen } B$$

Consideramos sólo ángulos menores a 180° porque no hay triángulo que pueda contener un ángulo de 180° o mayor,

¿Qué ángulos B tienen sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección anterior sabemos que hay dos de estos ángulos menores a 180° (son 30 y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que sabemos acerca del triángulo ABC? Dado que $\angle A = 45°$ no podemos

tener $\angle B = 150°$ porque $45° + 150° > 180°$. Por tanto, $\angle B = 30°$, y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Ahora podemos encontrar el lado c.

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Despeje } c$$

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■



En el ejemplo 3 hay dos posibilidades para el ángulo B, y una de estas no es compatible con el resto de la información. En general, si sen $A < 1$, debemos comprobar el ángulo y su suplemento como posibilidades, porque cualquier ángulo menor a 180° puede estar en el triángulo. Para decidir si funciona cualquiera de las dos posibilidades, vemos si la suma resultante de los ángulos excede los 180°. Puede ocurrir, como en la figura 6*c*), que ambas posibilidades sean compatibles con la información dada. En ese caso, dos triángulos diferentes son las soluciones al problema.

El *suplemento* de un ángulo θ (donde $0 \leq \theta \leq 180°$) es el ángulo $180° - \theta$.

EJEMPLO 4 ■ LLA, el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo ABC si $\angle A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

SOLUCIÓN Con la información dada trazamos el triángulo que se muestra en la figura 8. Observe que el lado a puede trazarse en dos posiciones posibles para completar el triángulo. De la ley de senos

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{248.6 \text{ sen } 43.1°}{186.2} \approx 0.91225$$

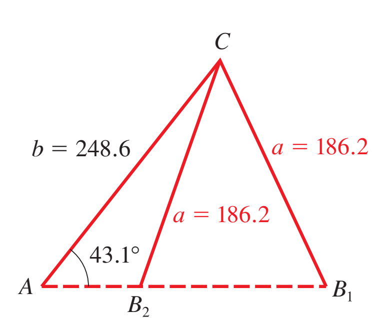


FIGURA 8

Hay dos posibles ángulos B entre 0 y 180° tales que sen $B = 0.91225$. Usando una calculadora encontramos que uno de los ángulos es

$$\text{sen}^{-1}(0.91225) \approx 65.8°$$

El otro ángulo es aproximadamente $180° - 65.8° = 114.2°$. Denotamos estos dos ángulos por B_1 y B_2 por lo que

$$\angle B_1 \approx 65.8° \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2°$$

Entonces dos triángulos satisfacen las condiciones dadas: el triángulo $A_1B_1C_1$ y el triángulo $A_2B_2C_2$.

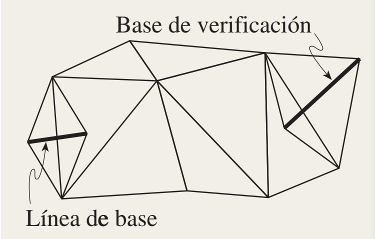
Resuelva el triángulo $A_1B_1C_1$:

$$\angle C_1 = 180° - (43.1° + 65.8°) = 71.1° \qquad \text{Encuentre } \angle C_1$$

Así, $$c_1 = \frac{a_1 \text{ sen } C_1}{\text{sen } A_1} \approx \frac{186.2 \text{ sen } 71.1°}{\text{sen } 43.1°} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de senos}$$



La **topografía** es un método de medir las tierras, y se utiliza para crear mapas. Los topógrafos usan un proceso llamado *triangulación* en el que se crea una red de miles de triángulos entrelazados en la región de la cual se hará un mapa. El proceso se inicia al medir la longitud de una *línea de base* entre dos estaciones de topografía. Luego, con el uso de un instrumento llamado *teodolito*, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera. El siguiente paso es usar la ley de senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Los lados calculados se usan como líneas de base y el proceso se repite una y otra vez para crear una red de triángulos. En este método la única distancia medida es la línea de base inicial; todas las otras distancias se calculan a partir de la ley de senos. Este método es práctico porque es mucho más fácil medir ángulos que distancias.



Uno de los esfuerzos más ambiciosos de todos los tiempos para hacer mapas fue el Gran Levantamiento Topográfico de la India (vea el problema 8, página 536), que requirió de varias expediciones y tardó más de un siglo en completarse. La famosa expedición de 1823, dirigida por **sir George Everest** duró 20 años. Pasando sobre terrenos engañosos y encontrando los temibles mosquitos portadores del paludismo, esta expedición llegó a la base de la cordillera del Himalaya. Una expedición posterior, mediante la triangulación, calculó que la altura del pico más alto de los Himalaya era de 29 002 pies; ese pico recibió el nombre de Everest en honor a sir George Everest.

Hoy en día, con el uso de satélites, se estima que la altura del Monte Everest es de 29 028 pies. La muy cercana concordancia de estas dos estimaciones muestra la gran precisión del método trigonométrico.

Resuelva el triángulo $A_2B_2C_2$:

$$\angle C_2 \approx 180° - (43.1° + 114.2°) = 71.1° \qquad \text{Encuentre } \angle C_2$$

Así,
$$c_2 = \frac{a_2 \text{ sen } C_2}{\text{sen } A_2} \approx \frac{186.2 \text{ sen } 22.7°}{\text{sen } 43.1°} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de senos}$$

En la figura 9 se muestran los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$.

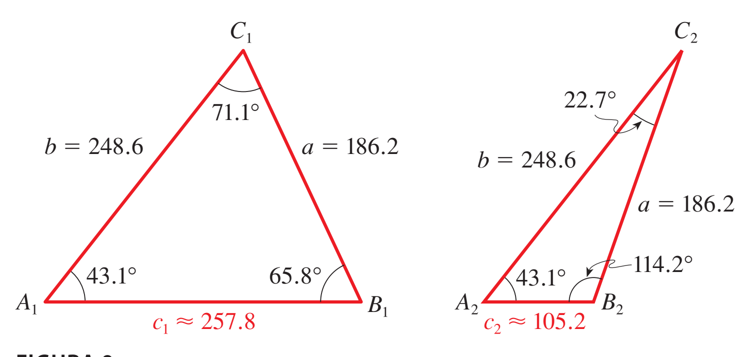


FIGURA 9

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

El siguiente ejemplo presenta una situación para la cual no hay un triángulo compatible con la información dada.

EJEMPLO 5 ■ LLA, el caso sin solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

SOLUCIÓN Para organizar la información dada trazamos el diagrama de la figura 10. Tratemos de encontrar el $\angle B$. Tenemos

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{122 \text{ sen } 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Despeje sen } B$$

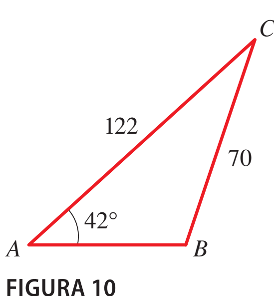
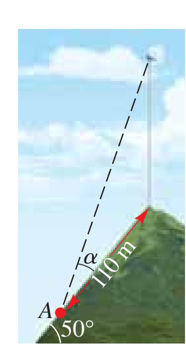


FIGURA 10

Puesto que el seno de un ángulo nunca es mayor a 1 concluimos que no hay triángulo que satisfaga las condiciones dadas en este problema.

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■



EJEMPLO 6 ■ Calcular una distancia

Tal como se muestra en la figura, un ave se coloca sobre un poste en una empinada colina y un observador se encuentra en el punto A al lado de la colina 110 m cuesta abajo desde la base del poste. El ángulo de inclinación de la colina es 50° y el ángulo α en la figura es de 9°. Encuentre la distancia entre observador y el ave.

SOLUCIÓN Primero se traza un diagrama tal como se muestra en la figura 11. Queremos encontrar la distancia b en la figura. El triángulo ADB es un triángulo rectángulo, así $\angle DBA = 90° - 50° = 40°$. Por lo que $\angle ABC = 180° - 40° = 140°$.

Ahora en el triángulo ABC tenemos $\angle A = 9°$ y $\angle B = 140°$, entonces $\angle C = 180° - 149° = 31°$. Por la ley de senos tenemos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de senos}$$

Sustituyendo $\angle B = 140°$, $\angle C = 31°$ y $c = 110$, obtenemos

$$\frac{\text{sen } 140°}{b} = \frac{\text{sen } 31°}{110}$$

$$b = \frac{110 \text{ sen } 140°}{\text{sen } 31°} \qquad \text{Despeje } b$$

$$\approx 137.3 \qquad \text{Calculadora}$$

Entonces la distancia entre observador y el ave es aproximadamente 137 m.

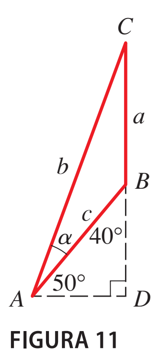


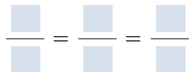
FIGURA 11

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

6.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. En el triángulo ABC con lados a, b y c la ley de senos dice que



2. Los cuatro casos que se pueden resolver son

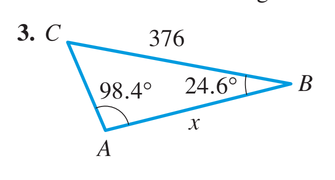
ALA LLA LAL LLL

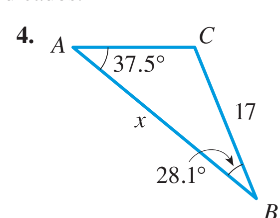
a) ¿En cuál de estos casos podemos usar la ley de senos para resolver un triángulo?

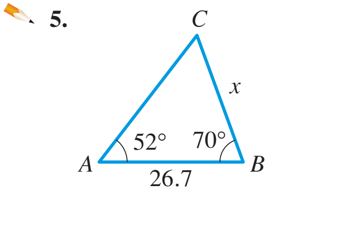
b) ¿En cuál de estos casos puede haber más de una solución (el caso ambiguo)?

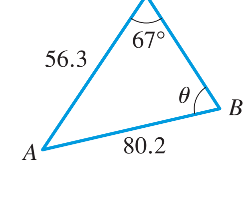
HABILIDADES

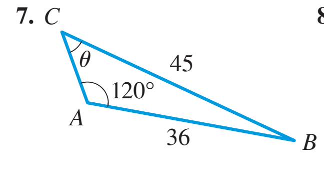
3–8 ■ Encontrar un ángulo o un lado Use la ley de senos para encontrar el lado x o el ángulo θ indicados.

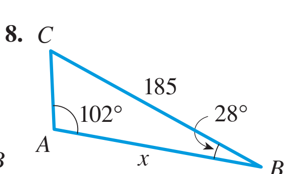
3.


4.


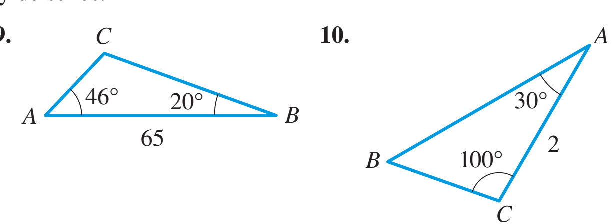
5.


6.


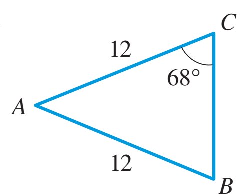
7.


8.


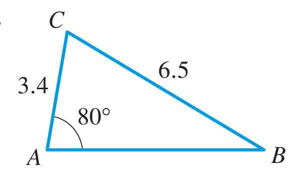
9–12 ■ Resolver un triángulo Resuelva el triángulo usando la ley de senos.

9. 10.


11.



12.



13–18 ■ Resolver un triángulo Trace cada triángulo y luego resuelva el triángulo usando la ley de senos.

13. $\angle A = 50°$, $\angle B = 68°$, $c = 230$

14. $\angle A = 23°$, $\angle B = 110°$, $c = 50$

15. $\angle A = 30°$, $\angle C = 65°$, $b = 10$

16. $\angle A = 22°$, $\angle B = 95°$, $a = 420$

17. $\angle B = 29°$, $\angle C = 51°$, $b = 44$

18. $\angle B = 10°$, $\angle C = 100°$, $c = 115$

19–28 ■ Resolver un triángulo Use la ley de senos para despejar todos los posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

19. $a = 28$, $b = 15$, $\angle A = 110°$

20. $a = 30$, $c = 40$, $\angle A = 37°$

21. $a = 20$, $c = 45$, $\angle A = 125°$

22. $b = 45$, $c = 42$, $\angle C = 38°$

23. $b = 25$, $c = 30$, $\angle B = 25°$

24. $a = 75$, $b = 100$, $\angle A = 30°$

25. $a = 50$, $b = 100$, $\angle A = 50°$

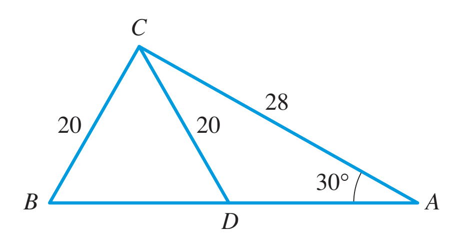
26. $a = 100$, $b = 80$, $\angle A = 135°$

27. $a = 26$, $c = 15$, $\angle C = 29°$

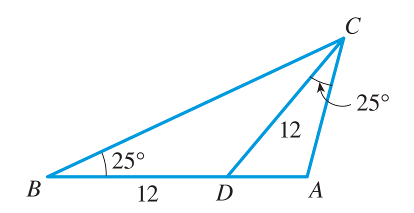
28. $b = 73$, $c = 82$, $\angle B = 58°$

HABILIDADES Plus

29. Encontrar ángulos Para el triángulo que se muestra encuentre ***a***) $\angle BCD$ y ***b***) $\angle DCA$.



30. Encontrar un lado Para el triángulo que se muestra encuentre la longitud AD.

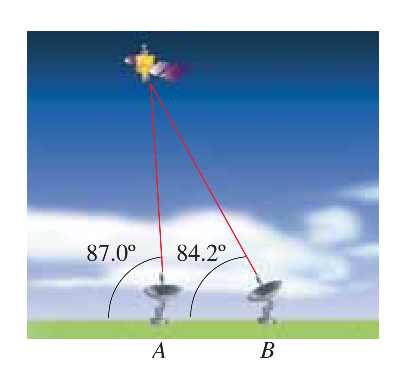


APLICACIONES

31. Rastreo de un satélite La trayectoria de un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra, lo lleva a pasar directamente sobre dos estaciones de rastreo A y B, que están a una distancia de 50 millas. Cuando el satélite está a un lado de las dos estaciones, los ángulos de elevación en A y B se miden y son de 87.0 y 84.2°, respectivamente.

a) ¿A qué distancia está el satélite de la estación A?

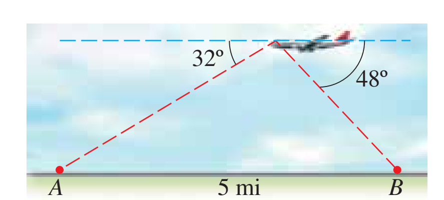
b) ¿Cuál es la altura del satélite sobre la Tierra?



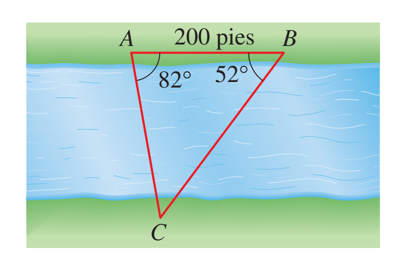
32. Vuelo de un avión Un piloto está sobrevolando una carretera recta. El piloto determina los ángulos de depresión hacia dos señales de distancia colocadas a 5 millas entre sí, y encuentra que son de 32 y 48°, como se muestra en la figura.

a) Encuentre la distancia entre el avión y el punto A.

b) Encuentre la elevación del avión.



33. Distancia a través de un río Para encontrar la distancia a través de un río una topógrafa elige los puntos A y B, que están a una distancia de 200 pies a un lado del río (vea la figura). Luego elige un punto de referencia C en el lado opuesto del río y encuentra que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Aproxime la distancia de A a C.

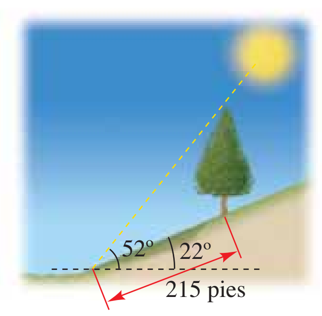


34. Distancia entre una orilla y otra de un lago Los puntos A y B están separados por un lago. Para encontrar la distancia entre ellos, un topógrafo localiza en tierra un punto C de manera que $\angle CAB = 48.6°$. También mide CA como 312 pies y CB como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

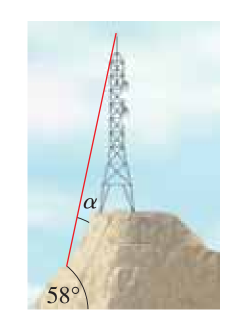
35. La torre inclinada de Pisa El campanario de la Catedral de Pisa, Italia, está inclinado 5.6° respecto a la vertical. Una turista está de pie a 105 m de su base, con la torre inclinada directamente hacia ella. Ella mide el ángulo de elevación hacia lo alto de la torre y ve que es de 29.2°. Encuentre la longitud de la torre al metro más cercano.

36. Antena de radio Una antena de radio de onda corta está sostenida por dos cables de retención, de 165 y 180 pies de largo. Cada cable está unido a lo alto de la antena y anclado al suelo en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma con el suelo un ángulo de 67°. ¿A qué distancia están entre sí los puntos de anclaje?

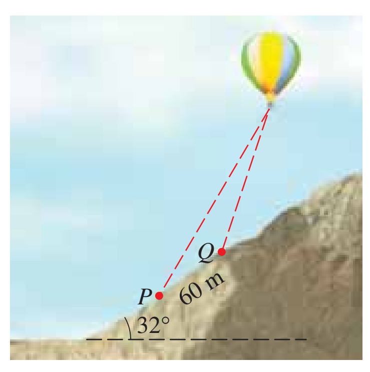
37. Altura de un árbol Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies cuesta abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22° respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es 52°, encuentre la altura del árbol.



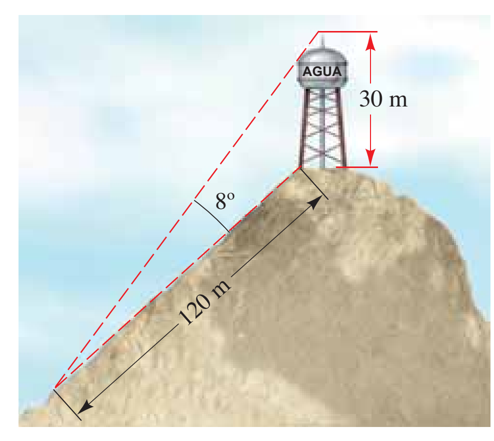
38. Longitud de un alambre de retención Una torre de comunicaciones está situada en lo alto de un empinado cerro, como se muestra en la figura. El ángulo de inclinación del cerro es de 58°. Un alambre de retención se ha de unir a lo alto de la torre y al suelo, a 100 metros colina abajo desde la base de la torre. El ángulo α de la figura está determinado como de 12°. Encuentre la longitud del cable requerido para el alambre de retención.



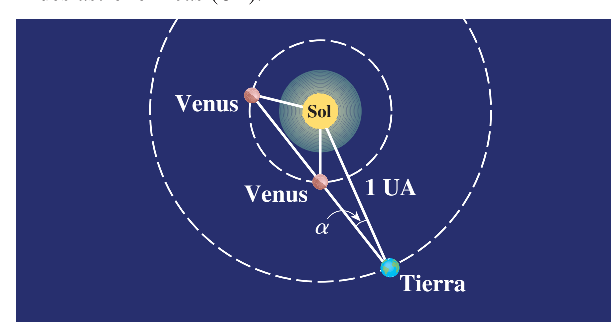
39. Cálculo de una distancia Dos observadores en P y Q están localizados en el costado de un cerro que está inclinado 32° con la horizontal, como se muestra. El observador en P determina que el ángulo de elevación hacia un globo de aire caliente es de 62°. Al mismo tiempo, el observador en Q mide el ángulo de elevación al globo de 71°. Si P está 60 metros colina abajo desde Q, encuentre la distancia de Q al globo.



40. Cálculo de un ángulo Una torre de agua de 30 m está situada en lo alto de un cerro. Desde una distancia de 120 m bajando por el cerro, se observa que el ángulo formado entre lo alto y la base de la torre es de 8°. Encuentre el ángulo de inclinación del cerro.



41. Distancias a Venus La *elongación* α de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Se sabe que la distancia del Sol a Venus es 0.723 UA (vea el ejercicio 71 en la sección 6.2). En cierto instante se ve que la elongación de Venus es de 39.4°. Encuentre las posibles distancias de la Tierra a Venus en ese momento en unidades astronómicas (UA).



42. Burbujas de jabón Cuando dos burbujas se unen entre sí en el aire, su superficie común es parte de una esfera cuyo centro D está en la línea que pasa por los centros de las burbujas (vea la figura). También los ángulos $\angle ACB$ y $\angle ACD$ miden 60° cada uno.

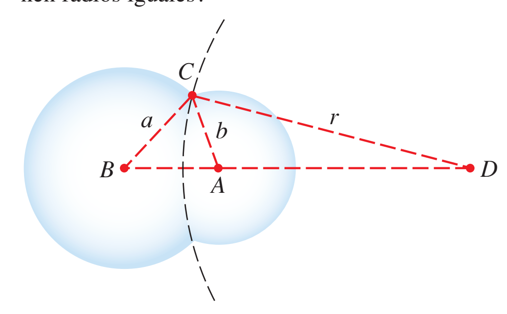
a) Demuestre que el radio r de la cara común está dado por

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[*Sugerencia:* use la ley de senos junto con el hecho de que un ángulo θ y su suplemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno.]

b) Encuentre el radio de la cara común si los radios de las burbujas son 4 y 3 cm.

c) ¿Qué forma toma la cara común si las dos burbujas tienen radios iguales?



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

43. DEMOSTRACIÓN: Área de un triángulo Demuestre que, dados los tres ángulos A, B y C de un triángulo y un lado, digamos, a, el área del triángulo es

$$\text{área} = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$$

44. DEMOSTRACIÓN: Áreas y el caso ambiguo Suponga que resolvemos un triángulo en el caso ambiguo. Se dan el $\angle A$ y los lados a y b, y encuentre las dos soluciones $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$. Demuestre que

$$\frac{\text{área de } \triangle ABC}{\text{area de } \triangle A'B'C'} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} C'}$$

45. DESCUBRIMIENTO: Número de soluciones en el caso ambiguo Hemos visto que cuando se usa la ley de senos para resolver un triángulo en el caso LLA puede haber dos soluciones, una solución o ninguna. Trace triángulos como los de la figura 6 para verificar los criterios de la tabla para el número de soluciones, si se dan $\angle A$ y los lados a y b.

Criterio	Número de soluciones
$a \geq b$	1
$b > a > b \operatorname{sen} A$	2
$a = b \operatorname{sen} A$	1
$a < b \operatorname{sen} A$	0

Si $\angle A = 30°$ y $b = 100$ use estos criterios para encontrar el intervalo de valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene dos soluciones, una solución o ninguna solución.

6.6 LA LEY DE COSENOS

■ La ley de cosenos ■ Navegación: orientación y rumbo ■ El área de un triángulo

■ La ley de cosenos

La ley de senos no se puede usar directamente para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos, o si conocemos los tres lados (casos 3 y 4 de la sección anterior). En estos dos casos aplica la **ley de cosenos**.

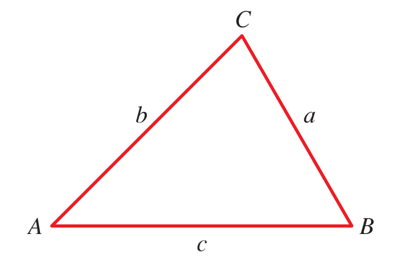


FIGURA 1

LA LEY DE COSENOS

En cualquier triángulo ABC (vea la figura 1), tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Demostración Para probar la ley de cosenos coloque el triángulo ABC de modo que $\angle A$ esté en el origen tal como se muestra en la figura 2. Las coordenadas de los vértices B y C son $(c, 0)$ y $(b \cos A, b \operatorname{sen} A)$, respectivamente. (Usted debe comprobar que las coordenadas de estos puntos son las mismas si trazamos el ángulo A como ángulo agudo.) Usando la fórmula de distancia, obtenemos

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2 \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc \cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \end{aligned}$$

Esto demuestra la primera fórmula. Las otras dos fórmulas se obtienen de la misma forma si se coloca cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y se repite el argumento anterior. ■

FIGURA 2

Es decir, la ley de cosenos dice que el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de esos dos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

Si uno de los ángulos de un triángulo, por ejemplo $\angle C$, es un ángulo recto entonces $\cos C = 0$, y la ley de cosenos se reduce al teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Por tanto, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de cosenos.

EJEMPLO 1 ■ Longitud de un túnel

Se va a construir un túnel en una montaña. Para estimar la longitud del túnel un topógrafo hace las mediciones que se ven en la figura 3. Use la información del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

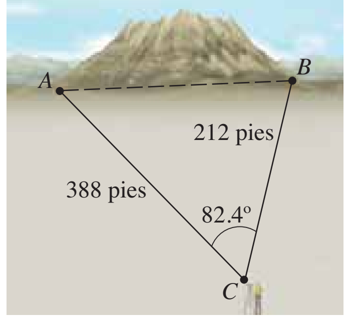
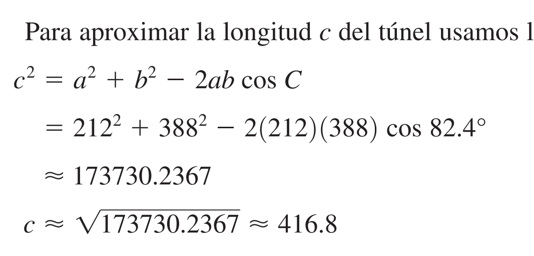


FIGURA 3

SOLUCIÓN Para aproximar la longitud c del túnel usamos la ley de cosenos.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad \text{Ley de cosenos}$$

$$= 212^2 + 388^2 - 2(212)(388)\cos 82.4° \qquad \text{Sustituya}$$

$$\approx 173730.2367 \qquad \text{Use calculadora}$$

$$c \approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Por tanto, el túnel será de aproximadamente de 417 pies de largo.

Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 39 ■

EJEMPLO 2 ■ LLL, la ley de cosenos

Los lados de un triángulo son $a = 5$, $b = 8$ y $c = 12$ (vea la figura 4). Encuentre los ángulos del triángulo.

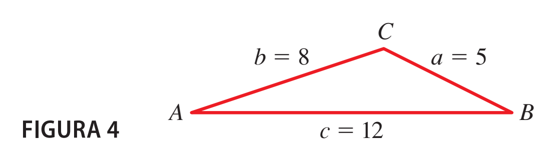


FIGURA 4

SOLUCIÓN Primero encontramos $\angle A$. De la ley de cosenos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Despejando $\cos A$ obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2(8)(12)} = \frac{183}{192} = 0.953125$$

COS⁻¹ o INV COS o ARC COS

Usando una calculadora encontramos que $\angle A = \cos^{-1}(0.953125) \approx 18°$. Del mismo modo obtenemos

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 12^2 - 8^2}{2(5)(12)} = 0.875$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)} = -0.6875$$

Usando una calculadora encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.875) \approx 29° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.6875) \approx 133°$$

Desde luego, una vez calculados dos ángulos el tercero se puede encontrar más fácilmente por el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. No obstante, es buena idea calcular los tres ángulos al usar la ley de cosenos y sumar los tres ángulos para revisar sus cálculos.



Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

EJEMPLO 3 ■ LAL, la ley de cosenos

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 46.5°$, $b = 10.5$ y $c = 18.0$.

SOLUCIÓN Podemos encontrar a usando la ley de cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$= (10.5)^2 + (18.0)^2 - 2(10.5)(18.0)(\cos 46.5°) \approx 174.05$$

Entonces, $a \approx \sqrt{174.05} \approx 13.2$. También usamos la ley de cosenos para encontrar $\angle B$ y $\angle C$, como en el ejemplo 2.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13.2^2 + 18.0^2 - 10.5^2}{2(13.2)(18.0)} \approx 0.816477$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13.2^2 + 10.5^2 - 18.0^2}{2(13.2)(10.5)} \approx -0.142532$$

Usando calculadora encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.816477) \approx 35.3° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.142532) \approx 98.2°$$

Para resumir: $\angle B \approx 35.3°$, $\angle C \approx 98.2°$ y $a \approx 13.2$. (Vea la figura 5.)

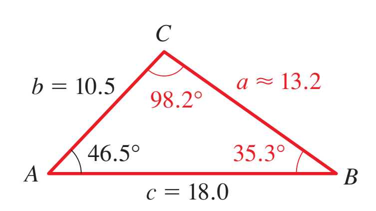


FIGURA 5

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

En el ejemplo 3 podíamos haber usado la ley de senos para encontrar $\angle B$ y $\angle C$ porque conocíamos los tres lados y un ángulo del triángulo. Pero, conocer el seno de un ángulo no da de manera única el ángulo porque un ángulo θ y su suplemento $180° - \theta$ tienen ambos el mismo seno. Entonces, necesitaríamos determinar cuál de los dos ángulos es la selección correcta. Esta ambigüedad no aparece cuando usamos la ley de cosenos porque todo ángulo entre 0 y 180° tiene un coseno único. Por tanto, usar sólo la ley de cosenos es preferible en problemas como el problema 3.

■ Navegación: orientación y rumbo

En la navegación es frecuente que una dirección se dé como **rumbo**, es decir, como un ángulo agudo medido directamente desde el norte o hacia el sur. El rumbo N 30° E, por ejemplo, indica una dirección que apunta 30° al este del norte (vea la figura 6).

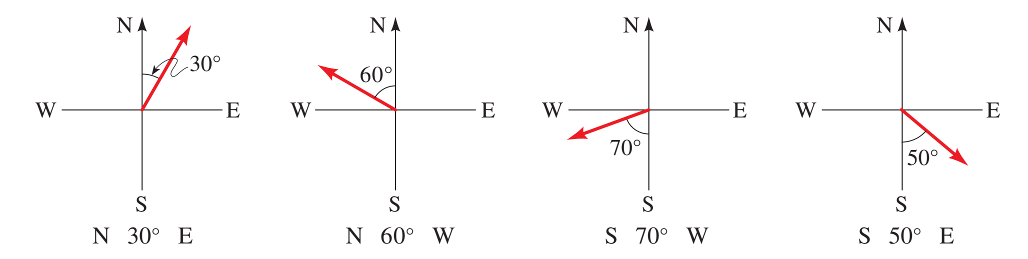


FIGURA 6

EJEMPLO 4 ■ Navegación

Un piloto aéreo despega de un aeropuerto y toma rumbo en la dirección N 20° E, volando a 200 mi/h. Después de una hora, corrige el curso y toma rumbo en la dirección N 40° E. Media hora después de esto, problemas en los motores lo obligan a hacer un aterrizaje de emergencia.

a) Encuentre la distancia entre el aeropuerto y su punto final de aterrizaje.

b) Encuentre el rumbo del aeropuerto a su punto final de aterrizaje.

SOLUCIÓN

a) En una hora el avión viaja 200 millas y, en media hora, 100 millas, de modo que podemos trazar el curso del piloto como en la figura 7. Cuando hace la corrección

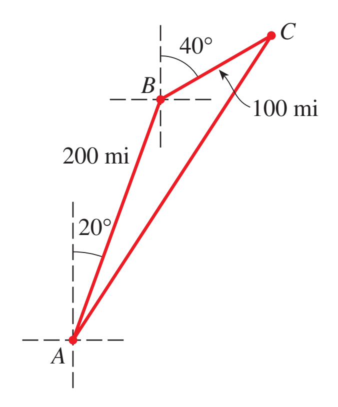
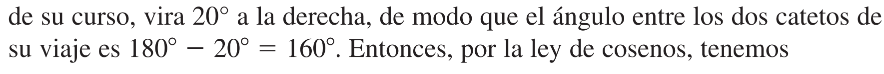


FIGURA 7


de su curso, vira 20° a la derecha, de modo que el ángulo entre los dos catetos de su viaje es $180° - 20° = 160°$. Entonces, por la ley de cosenos, tenemos

$$b^2 = 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 200 \cdot 100 \cos 160°$$
$$\approx 87\,587.70$$

Por tanto, $b \approx 295.95$. El piloto aterriza a unas 296 millas de su punto de partida.

b) Primero usamos la ley de senos para encontrar $\angle A$.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{100} = \frac{\operatorname{sen} 160°}{295.95}$$

$$\operatorname{sen} A = 100 \cdot \frac{\operatorname{sen} 160°}{295.95}$$

$$\approx 0.11557$$

Usando la tecla SIN⁻¹ en una calculadora encontramos que $\angle A \approx 6.636°$. De la figura 7 vemos que la línea del aeropuerto al punto final de aterrizaje apunta en la dirección $20° + 6.636° = 26.636°$ al este del norte. En consecuencia, el rumbo es aproximadamente N 26.6° E.

Otro ángulo con seno 0.11557 es $180° - 6.636° = 173.364°$. Pero este es claramente demasiado grande para ser $\angle A$ en $\angle ABC$.


Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■


El área de un triángulo

Una aplicación interesante de la ley de cosenos implica una fórmula para encontrar el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus tres lados (vea la figura 8).

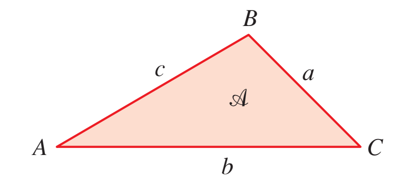


FIGURA 8

FÓRMULA DE HERÓN

El área $\mathscr{A}$ de un triángulo ABC está dada por

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el **semiperímetro** del triángulo; es decir, s es la mitad del perímetro.

Demostración Empezamos con la fórmula $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$ de la sección 6.3. Así,

$$\mathscr{A}^2 = \tfrac{1}{4}a^2b^2 \operatorname{sen}^2 C$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 C) \qquad \text{Identidad pitagórica}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos C)(1 + \cos C) \qquad \text{Factorice}$$

Ahora, escribimos las expresiones $1 - \cos C$ y $1 + \cos C$ en términos de a, b y c. Por la ley de cosenos tenemos

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{Ley de cosenos}$$

$$1 + \cos C = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{Sume 1}$$

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{Común denominador}$$

$$= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} \qquad \text{Diferencia de cuadrados}$$

Del mismo modo,

$$1 - \cos C = \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula que obtuvimos para $\mathcal{A}^2$ se obtiene

$$\mathcal{A}^2 = \tfrac{1}{4}a^2b^2 \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab}$$
$$= \frac{(a + b + c)}{2} \frac{(a + b - c)}{2} \frac{(c + a - b)}{2} \frac{(c - a + b)}{2}$$
$$= s(s - c)(s - b)(s - a)$$

Para ver que los factores de los últimos dos productos son iguales observe, por ejemplo, que

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c}{2} - c$$
$$= s - c$$

La fórmula de Herón se obtiene al tomar la raíz cuadrada de cada lado. ■

EJEMPLO 5 ■ Área de un lote

Un negociante desea comprar un lote triangular en una zona de gran movimiento en el centro de una ciudad (vea la figura 9). Los frentes del lote en las tres calles adyacentes miden 125, 280 y 315 pies. Encuentre el área del lote.

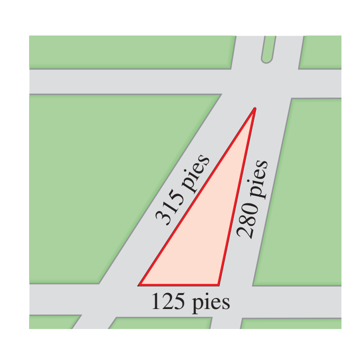


FIGURA 9

SOLUCIÓN El semiperímetro del lote es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Por la fórmula de Herón el área es

$$\mathcal{A} = \sqrt{360(360 - 125)(360 - 280)(360 - 315)} \approx 17\,451.6$$

Entonces, el área es aproximadamente 17 452 pies^2.

Ahora intente realizar los ejercicios 29 y 53 ■

6.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para el triángulo *ABC* con lados *a, b* y *c* la ley de cosenos dice que

$c^2 =$ ______________________

2. ¿En cuál de los siguientes casos debe usarse la ley de cosenos para resolver un triángulo?

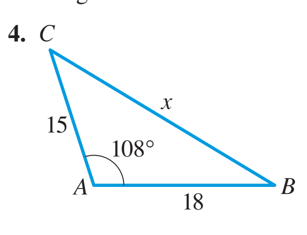
ALA LLL LAL LLA

HABILIDADES

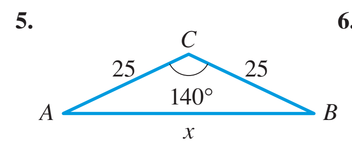
3–10 ■ Encontrar un ángulo o un lado Use la ley de cosenos para determinar el lado x indicado o el ángulo θ.

3. C, 21, x, A, 39°, B, 42

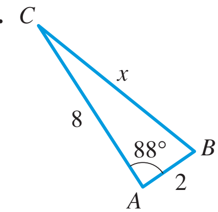
4.



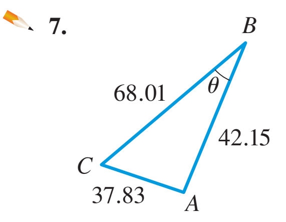
5.



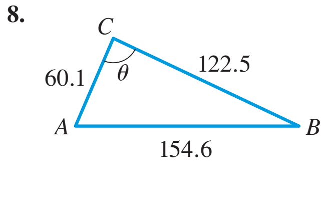
6.



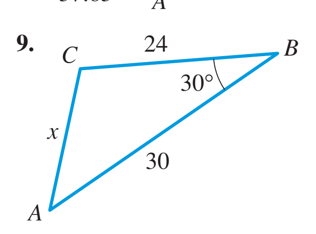
7.



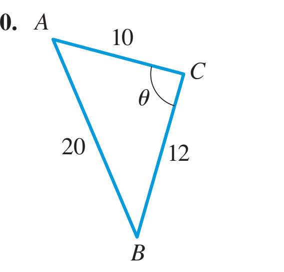
8.



9.

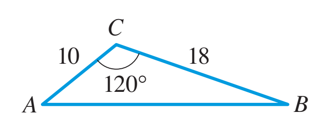


10.

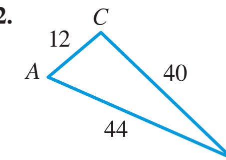


11–20 ■ Resolver un triángulo Resuelva el triángulo ABC.

11.



12.



13. $a = 3.0, \quad b = 4.0, \quad \angle C = 53°$

14. $b = 60, \quad c = 30, \quad \angle A = 70°$

15. $a = 20, \quad b = 25, \quad c = 22$

16. $a = 10, \quad b = 12, \quad c = 16$

17. $b = 125, \quad c = 162, \quad \angle B = 40°$

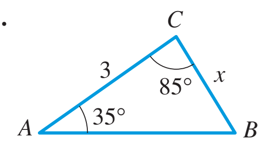
18. $a = 65, \quad c = 50, \quad \angle C = 52°$

19. $a = 50, \quad b = 65, \quad \angle A = 55°$

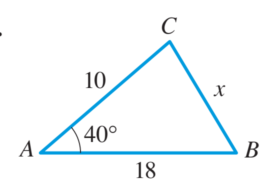
20. $a = 73.5, \quad \angle B = 61°, \quad \angle C = 83°$

21–28 ■ ¿Ley de senos o ley de cosenos? Encuentre el lado indicado x o el ángulo θ. (Use la ley de senos o la ley de cosenos, según sea lo apropiado.)

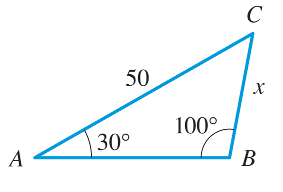
21.



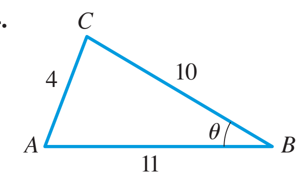
22.



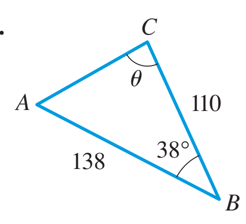
23.



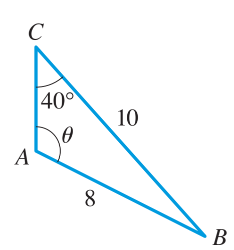
24.



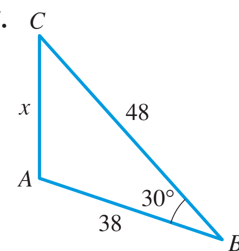
25.



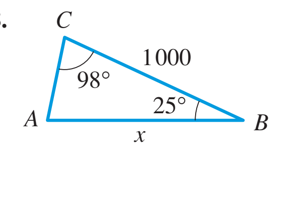
26.



27.



28.



29–32 ■ Fórmula de Herón Encuentre el área del triángulo cuyos lados tienen las longitudes dadas.

29. $a = 9, \quad b = 12, \quad c = 15$

30. $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 2$

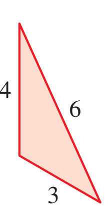
31. $a = 7, \quad b = 8, \quad c = 9$

32. $a = 11, \quad b = 100, \quad c = 101$

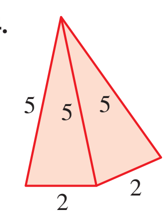
HABILIDADES Plus

33–36 ■ Fórmula de Herón Encuentre el área de la figura sombreada, redondeada a dos decimales.

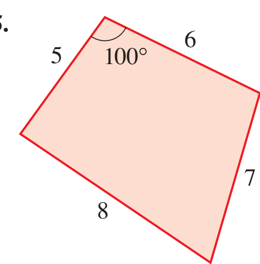
33.



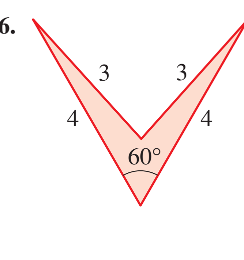
34.



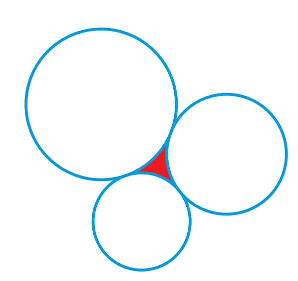
35.



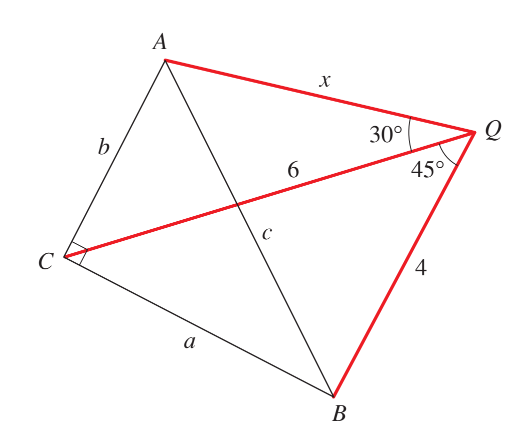
36.



37. Área de una región Tres círculos de radios 4, 5 y 6 cm son mutuamente tangentes. Encuentre el área sombreada encerrada entre los círculos.

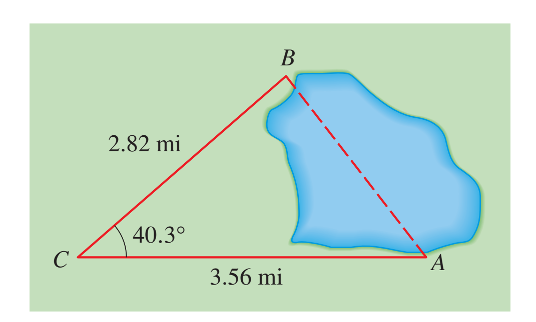


38. Encontrar una longitud En la figura el triángulo ABC es un triángulo recto, $CQ = 6$ y $BQ = 4$. También $\angle AQC = 30°$ y $\angle CQB = 45°$. Encuentre la longitud de AQ. [*Sugerencia:* primero utilice la ley de los cosenos para encontrar expresiones para a^2, b^2 y c^2.]



APLICACIONES

39. Topografía Para encontrar la distancia a través de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las mediciones que se muestran. Encuentre la distancia de uno a otro lado del lago usando esta información.



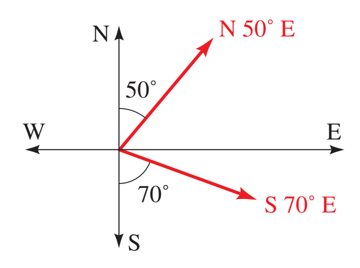
40. Geometría Un paralelogramo tiene lados de longitudes 3 y 5, y un ángulo es de 50°. Encuentre las longitudes de las diagonales.

41. Cálculo de una distancia Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°. Dos autos salen del crucero a las 2:00 p.m. uno viaja a 50 mi/h y el otro a 30 mi/h. ¿A qué distancia entre sí se hallan los autos a las 2:30 p.m.?

42. Cálculo de una distancia Un auto viaja por una carretera recta, dirigiéndose al este durante 1 hora, y luego viaja 30 minutos por otro camino con dirección al noreste. Si el auto ha mantenido una velocidad constante de 40 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

43. Navegación por estima Una aviadora vuela en una trayectoria recta durante 1 h 30 min. Entonces hace una corrección de curso, dirigiéndose 10° a la derecha de su curso original, y vuela 2 horas en la nueva dirección. Si mantiene una velocidad constante de 625 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

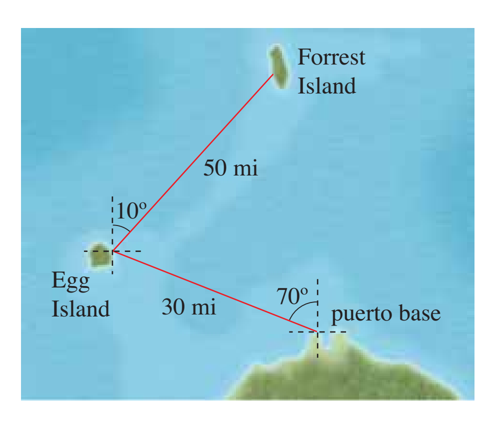
44. Navegación Dos botes zarpan del mismo puerto al mismo tiempo. Uno de ellos navega a una velocidad de 30 mi/h en la dirección N 50° E; el otro viaja a una velocidad de 26 mi/h en una dirección S 70° E (vea la figura). ¿A qué distancia están entre sí los dos botes después de una hora?



45. Navegación Un pescador sale de su puerto base y navega en dirección N 70° O. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. Al día siguiente navega al N 10° E durante 50 minutos y llega a Forrest Island.

a) Encuentre la distancia entre el puerto base del pescador y Forrest Island.

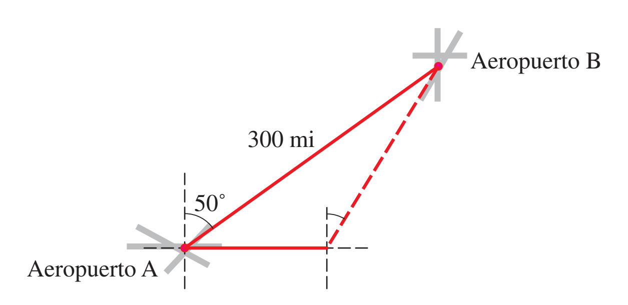
b) Encuentre el rumbo de Forrest Island de regreso a su puerto base.



46. Navegación El aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50° E (vea la figura). Un piloto que desea volar de A a B se equivoca y vuela en dirección al Este a 200 mi/h durante 30 minutos hasta que se da cuenta de su error.

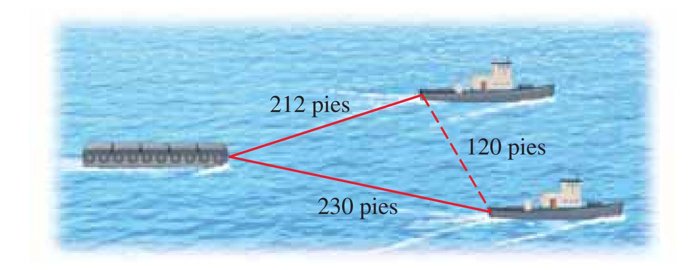
a) ¿A qué distancia está el piloto de su destino en el momento en que se percata del error?

b) ¿Qué rumbo debe tomar su avión para llegar al aeropuerto *B*?



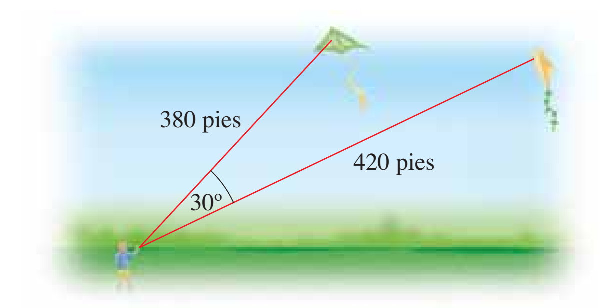
47. Campo triangular Un campo triangular tiene lados con longitudes de 22, 36 y 44 yardas. Encuentre el ángulo más grande.

48. Remolque de una barcaza Dos remolcadores que están a 120 pies entre sí tiran de una barcaza como se muestra. Si la longitud de un cable es de 212 pies y la longitud del otro es de 230 encuentre el ángulo formado por ambos cables.

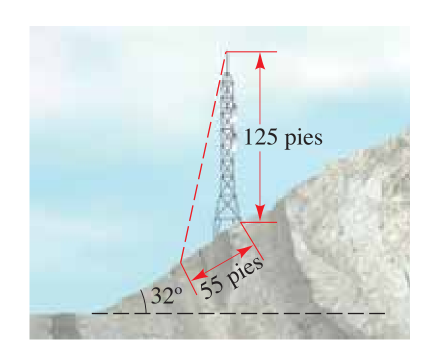


49. Cometas en vuelo Un niño hace volar dos cometas al mismo tiempo; tiene 380 pies de cuerda para una de las

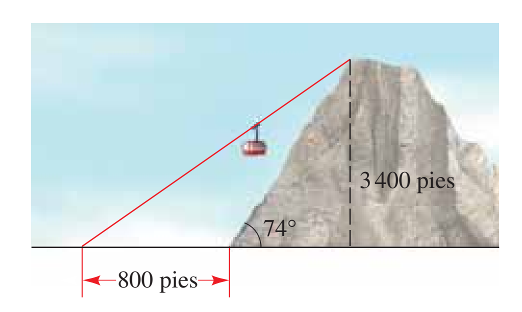
cometas y 420 pies para la otra. Él estima que el ángulo entre las dos cuerdas es de 30°. Aproxime la distancia entre las cometas.



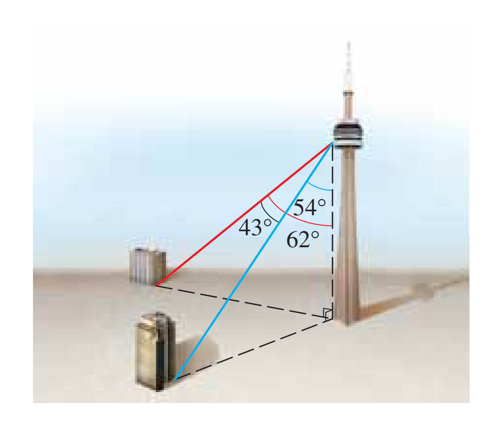
50. Asegurar una torre Una torre de 125 pies está situada en la ladera de una montaña que está inclinada 32° respecto a la horizontal. Un cable de retención se sujeta a la parte superior de la torre y se ancla en un punto a 55 pies debajo de la base de la torre. Encuentre la longitud más corta del alambre necesario.



51. Teleférico Una empinada montaña está inclinada 74° con la horizontal y se eleva a 3 400 pies sobre la llanura circundante. Se instalará un funicular desde un punto a 800 pies de la base hasta lo alto de la montaña, como se muestra. Encuentre la longitud más corta del cable necesario.



52. Torre CN La Torre CN en Toronto, Canadá, es la estructura libre más alta de Norteamérica. Una mujer que está en la plataforma de observación, a 1 150 pies sobre el suelo, desea determinar la distancia entre dos puntos de referencia que están al nivel del suelo. Ella observa que el ángulo formado por las líneas de vista a estos dos puntos de referencia es de 43°. También nota que el ángulo entre la vertical y la línea de vista a uno de los puntos de referencia es de 62° y al otro punto de referencia es de 54°. Encuentre la distancia entre los dos puntos de referencia.



53. Valor de un terreno Un terreno en el centro de Columbia está valuado en 20 dólares el pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitudes 112, 148 y 190 pies?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

54. DISCUSIÓN: Encontrar los ángulos de un triángulo El párrafo que sigue la solución del ejemplo 3 de la página 518 explica un método alternativo para encontrar $\angle B$ y $\angle C$, usando la ley de senos. Utilice este método para resolver el triángulo del ejemplo, encontrando $\angle B$ primero y $\angle C$ después. Explique cómo se escoge el valor apropiado para la medición de $\angle B$. ¿Cuál método prefiere usted para resolver un problema de triángulo LAL: el que se explicó en el ejemplo 3 o el que usó en este ejercicio?

55. DEMOSTRACIÓN: Leyes de proyección Demuestre que en el triángulo ABC

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

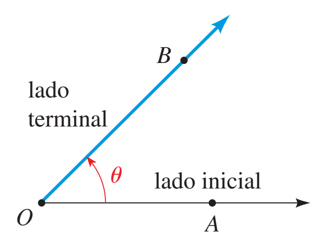
Estas se llaman *leyes de proyección*. [*Sugerencia:* para obtener la primera ecuación sume las ecuaciones segunda y tercera en la ley de cosenos y despeje a.]

CAPÍTULO 6 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Ángulos (p. 472)

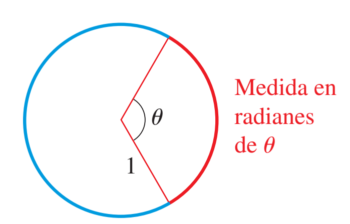
Un **ángulo** consiste en dos rayos con un vértice común. Uno de los rayos es el **lado inicial** y el otro el **lado terminal**. Un ángulo se puede considerar como un giro del lado inicial sobre el lado terminal. Si el giro es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo es **positivo**; si el giro es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es **negativo**.



Notación: el ángulo en la figura se puede referir como ángulo *AOB* o simplemente como ángulo *O*, o ángulo θ.

Medida de un ángulo (p. 472)

La **medida en radianes** de un ángulo (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo de un círculo de radio 1, como se muestra en la figura.



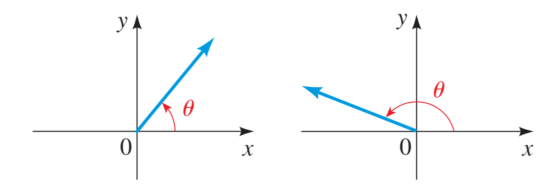
La **medida en grados** de un ángulo es el número de grados en el ángulo, donde un grado es $\frac{1}{360}$ de un círculo completo.

Para convertir grados a radianes multiplique por $\pi/180$.

Para convertir radianes a grados multiplíquelo por $180/\pi$.

Ángulos en posición estándar (pp. 473, 494)

Un ángulo está en **posición estándar** si se dibuja en el plano *xy* con su vértice en el origen y su lado inicial sobre el eje *x* positivo.

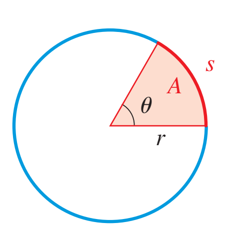


Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si sus lados coinciden.

El **ángulo de referencia** $\overline{\theta}$ asociado con un ángulo θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje *x*.

Longitud de arco; área de un sector (pp. 475-476)

Considere un círculo de radio *r*.



La **longitud** s **de un arco** que subtiende un ángulo central de θ radianes es $s = r\theta$.

El **área** A **de un sector** con un ángulo central de θ radianes es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

Movimiento circular (pp. 476-477)

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r y el rayo del centro del círculo al punto atraviesa θ radianes en el tiempo t. Sea $s = r\theta$ la distancia que el punto viaja en el tiempo t.

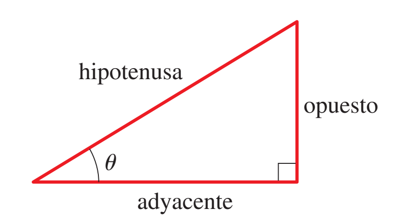
La **velocidad angular** del punto es $\omega = \theta/t$.

La **velocidad lineal** del punto es $v = s/t$.

La velocidad lineal v y la rapidez angular ω están relacionados por la fórmula $v = r\omega$.

Relaciones trigonométricas (p. 482)

Para un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ las relaciones trigonométricas se definen como sigue.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

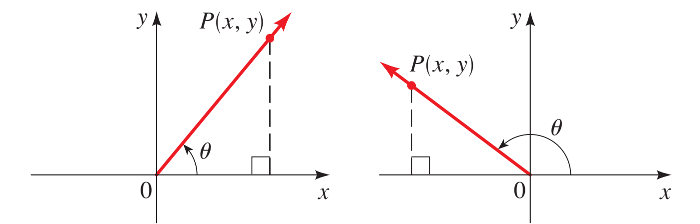
Relaciones trigonométricas especiales (p. 483)

Las funciones trigonométricas tienen los siguientes valores en los valores especiales de θ.

θ	θ	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Funciones trigonométricas de ángulos (p. 491)

Sea θ un ángulo en posición estándar, y $P(x, y)$ un punto del lado terminal. Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia desde el origen hasta el punto de $P(x, y)$.



Para valores distintos de cero del denominador las **funciones trigonométricas** se definen como sigue.

$$\text{sen}\ t = \frac{y}{r} \qquad \cos t = \frac{x}{r} \qquad \tan t = \frac{y}{x}$$

$$\csc t = \frac{r}{y} \qquad \sec t = \frac{r}{x} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$

Identidades trigonométricas básicas (p. 496)

Una identidad es una ecuación que es verdadera para todos los valores de la variable. Las identidades trigonométricas básicas son las siguientes.

Identidades recíprocas:

$$\csc \theta = \frac{1}{\text{sen}\ \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Identidades pitagóricas:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Área de un triángulo (p. 498)

El área $\mathscr{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo θ entre ellos es

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\ \text{sen}\ \theta$$

Funciones trigonométricas inversas (p. 502)

Las funciones inversas de las funciones trigonométricas se definen mediante la restricción de los dominios como sigue.

Función	Dominio	Rango
sen^{-1}	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Las funciones trigonométricas inversas se definen como sigue.

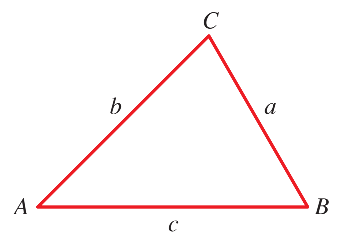
$$\text{sen}^{-1} x = y \iff \text{sen}\ y = x$$

$$\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x$$

$$\tan^{-1} x = y \iff \tan y = x$$

La ley de los senos y la ley de los cosenos (pp. 509, 516)

Seguimos la convención de marcar los ángulos de un triángulo como A, B, C y las longitudes de los correspondientes lados opuestos como a, b, c, tal como se indica en la figura.



Para un triángulo ABC tenemos las siguientes leyes.

La **ley de senos** se expresa como

$$\frac{\text{sen}\ A}{a} = \frac{\text{sen}\ B}{b} = \frac{\text{sen}\ C}{c}$$

La **ley de cosenos** se expresa como

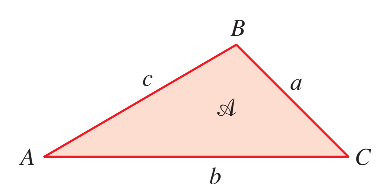
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Fórmula de Herón (p. 519)

Sea ABC un triángulo con lados a, b y c.



La **fórmula de Herón** expresa que el área $\mathscr{A}$ de un triángulo ABC es

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el semiperímetro del triángulo.

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a***) ¿Cómo se define un ángulo de 1 grado de medida?

b) ¿Cómo se define un ángulo de 1 radián de medida?

c) ¿Cómo se convierte de grados a radianes? Convierta 45° a radianes.

d) ¿Cómo se convierte de radianes a grados? Convierta 2 rad a grados.

2. ***a***) ¿Cuándo está un ángulo en la posición estándar? Ilustre con una gráfica.

b) ¿Cuándo están dos ángulos en posición estándar coterminal.

c) ¿Serán coterminales los ángulos 25° y 745°?

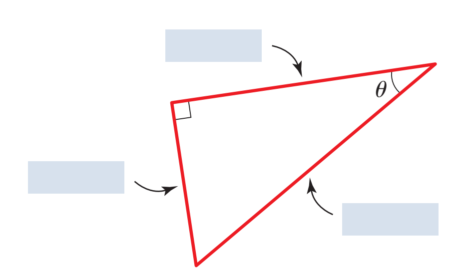
d) ¿Cómo es el ángulo de referencia para un ángulo θ definido?

e) Encuentre el ángulo de referencia para 150°.

3. ***a***) En un círculo de radio r, ¿cuál es la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes?

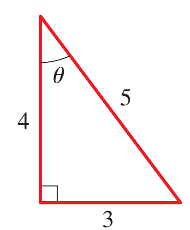
b) En un círculo de radio r, ¿cuál es el área A de un sector con ángulo central de θ radianes?

4. ***a***) Sea θ un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. En la figura identifique el lado opuesto, el lado adyacente y la hipotenusa.



b) Defina las seis relaciones trigonométricas en términos de los lados adyacentes y opuestos a θ y la hipotenusa.

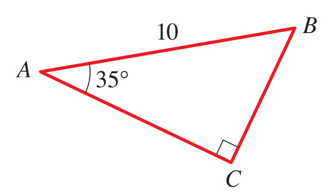
c) Determine las seis relaciones trigonométricas para el ángulo θ como se muestra en la figura.



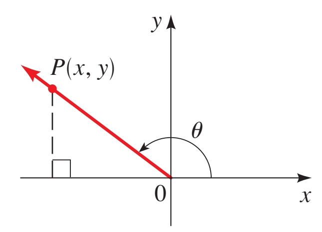
d) Haga una lista de valores especiales del seno, el coseno y la tangente.

5. ***a***) ¿Qué significa resolver un triángulo?

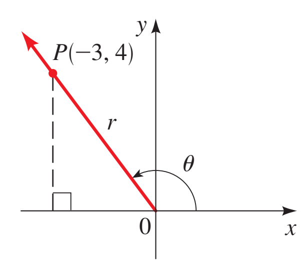
b) Resuelva el triángulo que se muestra.



6. ***a***) Sea θ es un ángulo en posición estándar, $P(x, y)$ un punto en el lado terminal y r la distancia del origen a P, como se muestra en la figura. Escriba expresiones para las seis funciones trigonométricas de θ.



b) Encuentre el seno, el coseno y la tangente para el ángulo θ que se muestra en la figura.



7. Para cada uno de los cuatro cuadrantes identifique las funciones trigonométricas que son positivas.

8. ***a***) Describa los pasos que usamos para encontrar el valor de una función trigonométrica de un ángulo θ.

b) Encuentre sen $5\pi/6$.

9. ***a***) Exprese las identidades recíprocas.

b) Exprese las identidades pitagóricas.

10. ***a***) ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a y b y con ángulo θ entre ellos?

b) ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a, b y c?

11. ***a***) Defina las funciones inversas seno, coseno y tangente de la función.

b) Encuentre $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ y $\tan^{-1} 1$.

c) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$? ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$?

12. ***a***) Exprese la ley de senos.

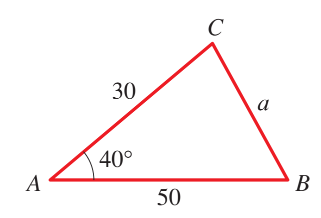
b) Encuentre el lado a en la figura.

C
b
a
85°
40°
A
100
B

c) Explique el caso ambiguo en la ley de senos.

13. ***a***) Exprese la ley de cosenos.

b) Encuentre el lado a en la figura.



LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–2 ■ De grados a radianes Encuentre la medida en radianes que corresponda a la medida dada en grados.

1. ***a***) 30° ***b***) 150° ***c***) −20° ***d***) −225°

2. ***a***) 105° ***b***) 72° ***c***) −405° ***d***) −315°

3–4 ■ De radianes a grados Encuentre la medida en grados que corresponda a la medida dada en radianes.

3. ***a***) $\frac{5\pi}{6}$ ***b***) $-\frac{\pi}{9}$ ***c***) $-\frac{4\pi}{3}$ ***d***) 4

4. ***a***) $-\frac{5\pi}{3}$ ***b***) $\frac{10\pi}{9}$ ***c***) −5 ***d***) $\frac{11\pi}{3}$

5–10 ■ Longitud de un arco circular Estos ejercicios implican la fórmula para la longitud de un arco circular.

5. Encuentre la longitud de un arco de una circunferencia de radio 10 m si el arco subtiende un ángulo central de $2\pi/5$ rad.

6. Un ángulo central θ en una circunferencia de radio 2.5 cm se subtiende por un arco de longitud de 7 cm. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

7. Un arco circular de 25 pies de longitud subtiende un ángulo central de 50°. Encuentre el radio del círculo.

8. Un arco circular de 13π de longitud subtiende un ángulo central de 130°. Encuentre el radio del círculo.

9. ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de 28 pulg de diámetro de un auto en media hora si el auto está viajando a 60 mi/h?

10. Nueva York y Los Ángeles están a 2 450 millas entre sí. Encuentre el ángulo al que el arco entre estas dos ciudades subtiende en el centro de la Tierra. (El radio de la Tierra es de 3 960 millas.)

11–14 ■ Área de un sector circular Estos ejercicios implican la fórmula para el área de un sector circular.

11. Encuentre el área de un sector con ángulo central de 2 rad en un círculo de 5 m de radio.

12. Encuentre el área de un sector con ángulo central de 52° en un círculo de 200 pies de radio.

13. Un sector de un círculo de 25 pies de radio tiene un área de 125 pies^2. Encuentre el ángulo central del sector.

14. El área de un sector de un círculo con un ángulo central de $11\pi/6$ radianes es de 50 m^2. Encuentre el radio del círculo.

15. Velocidades angular y lineal La rueda de un alfarero, con radio de 8 pulg, gira a 150 rpm. Encuentre las velocidades angular y lineal de un punto en el borde de la rueda.



16. Velocidades angular y lineal En la transmisión de un automóvil, una *relación de engranajes g* es la relación

$$g = \frac{\text{velocidad angular del motor}}{\text{velocidad angular de las ruedas}}$$

La velocidad angular del motor se ve en el tacómetro (en rpm).

Cierto auto deportivo tiene ruedas con radio de 11 pulg. Sus relaciones de engranes se ilustran en la tabla siguiente. Suponga que el auto está en cuarta y el tacómetro indica 3 500 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular del motor.

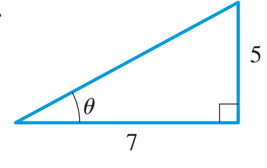
b) Encuentre la velocidad angular de las ruedas.

c) ¿A qué velocidad viaja el auto (en mi/h)?

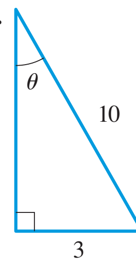
Velocidad	Relación
1a.	4.1
2a.	3.0
3a.	1.6
4a.	0.9
5a.	0.7

17–18 ■ Relaciones trigonométricas Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas de θ.

17.

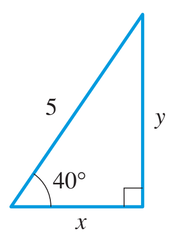


18.

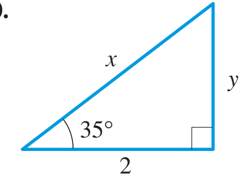


19–22 ■ Encontrar los lados en triángulos rectángulos Encuentre los lados marcados x y y, redondeados a dos lugares decimales.

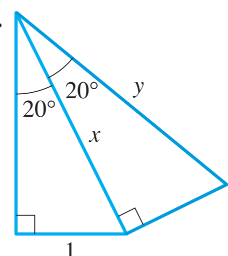
19.



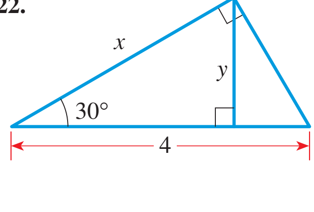
20.



21.

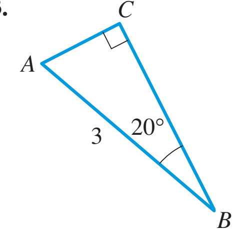


22.

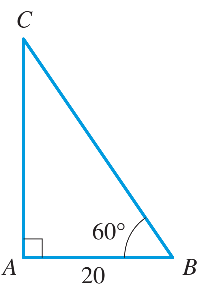


23–26 ■ Resolver un triángulo Resuelva el triángulo.

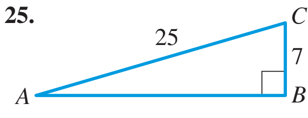
23.



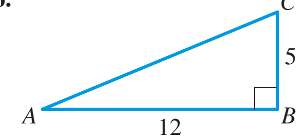
24.



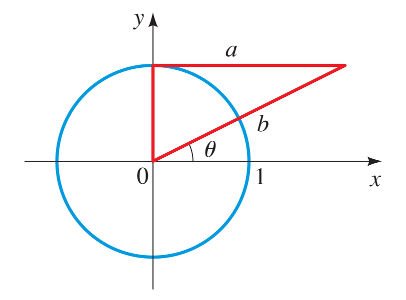
25.



26.



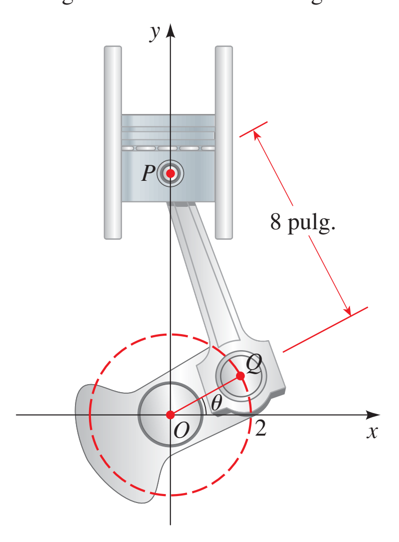
27. Relaciones trigonométricas Exprese las longitudes a y b de la figura en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



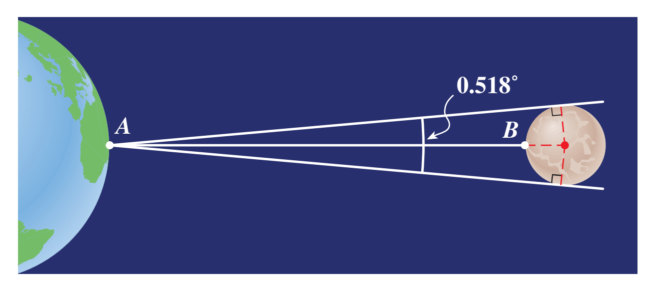
28. Torre CN La torre libre más alta de Norteamérica es la Torre CN de Toronto, Canadá. De 1 km de distancia a su base, el ángulo de elevación a lo alto de la torre es de 28.81°. Encuentre la altura de la torre.

29. Perímetro de un hexágono regular Encuentre el perímetro de un hexágono regular que está inscrito en un círculo de 8 m de radio.

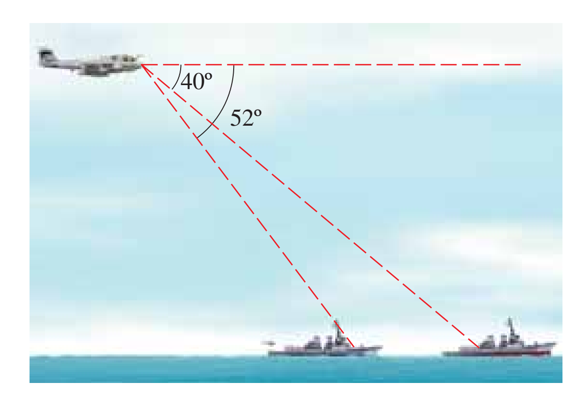
30. Pistones de un motor Los pistones en un motor de auto suben y bajan repetidamente para hacer girar el cigüeñal, como se muestra. Encuentre la altura del punto P sobre el centro O del cigüeñal en términos del ángulo θ.



31. Radio de la Luna Como se ve desde la Tierra, el ángulo subtendido por la Luna llena es de 0.518°. Utilice esta información y el hecho de que la distancia AB de la Tierra a la Luna es de 236 900 millas para encontrar el radio de la Luna.



32. Distancia entre dos barcos Un piloto mide que los ángulos de depresión a dos barcos son 40 y 52° (vea la figura). Si el piloto está volando a una elevación de 35 000 pies, encuentre la distancia entre los dos barcos.



33–44 ■ Valores de las funciones trigonométricas Encuentre el valor exacto.

33. $\operatorname{sen} 315°$ **34.** $\csc \dfrac{9\pi}{4}$ **35.** $\tan(-135°)$

36. $\cos \dfrac{5\pi}{6}$ **37.** $\cot\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$ **38.** $\operatorname{sen} 405°$

39. $\cos 585°$ **40.** $\sec \dfrac{22\pi}{3}$ **41.** $\csc \dfrac{8\pi}{3}$

42. $\sec \dfrac{13\pi}{6}$ **43.** $\cot(-390°)$ **44.** $\tan \dfrac{23\pi}{4}$

45. Valores de las funciones trigonométricas Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en posición estándar si el punto $(-5, 12)$ está en el lado terminal de θ.

46. Valores de las funciones trigonométricas Encuentre $\operatorname{sen} \theta$ si θ está en una posición estándar y su lado terminal corta la circunferencia de radio 1 con centro en el origen en el punto $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$.

47. Ángulo formado por una recta Encuentre el ángulo agudo que está formado por la recta $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ y el eje x.

48. Valores de funciones trigonométricas Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en posición estándar, si su lado terminal está en el tercer cuadrante y es paralelo a la recta $4y - 2x - 1 = 0$.

49–52 ■ Expresar una función trigonométrica en términos de otra Escriba la primera expresión en términos de la segunda, para θ en el cuadrante dado.

49. $\tan \theta$, $\cos \theta$; θ en el segundo cuadrante.

50. $\sec \theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en el tercer cuadrante.

51. $\tan^2\theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en cualquier cuadrante.

52. $\csc^2\theta \cos^2\theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en cualquier cuadrante.

53–56 ■ Valores de las funciones trigonométricas Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

53. $\tan \theta = \sqrt{7}/3$, $\sec \theta = \frac{4}{3}$

54. $\sec \theta = \frac{41}{40}$, $\csc \theta = -\frac{41}{9}$

55. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta < 0$

56. $\sec \theta = -\frac{13}{5}$, $\tan \theta > 0$

57–60 ■ Valor de una expresión Encuentre el valor de la expresión trigonométrica dada.

57. Si $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ para θ en el segundo cuadrante, encuentre $\operatorname{sen} \theta + \cos \theta$.

58. Si $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ para θ en el primer cuadrante, encuentre $\tan \theta + \sec \theta$.

59. Si $\tan \theta = -1$, encuentre $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.

60. Si $\cos \theta = -\sqrt{3}/2$ y $\pi/2 < \theta < \pi$, encuentre $\operatorname{sen} 2\theta$.

61–64 ■ Valores de las funciones trigonométricas inversas Encuentre el valor exacto de la expresión.

61. $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ **62.** $\tan^{-1}(\sqrt{3}/3)$

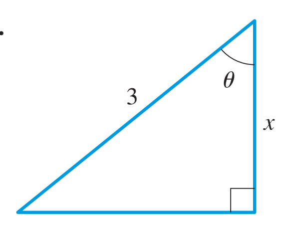
63. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{5})$ **64.** $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{3}{8})$

65–66 ■ Funciones trigonométricas inversas Reescriba la expresión como una expresión algebraica en x.

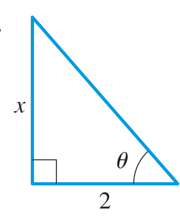
65. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$ **66.** $\sec(\operatorname{sen}^{-1} x)$

67–68 ■ Encontrar un lado desconocido Exprese θ en términos de x.

67.

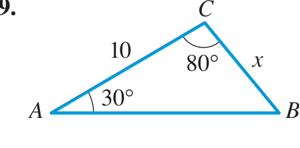


68.

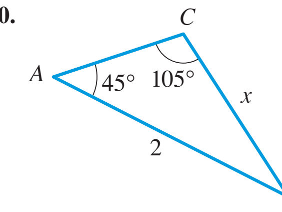


69–78 ■ Ley de senos y ley de cosenos Encuentre el lado marcado x o el ángulo marcado θ.

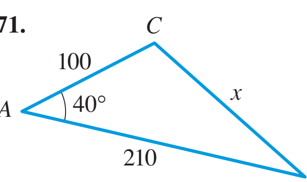
69.



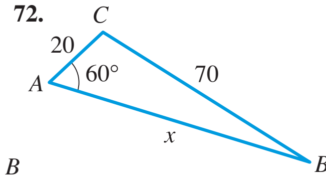
70.



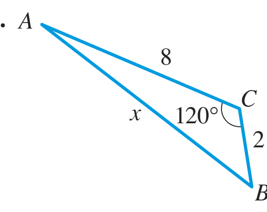
71.



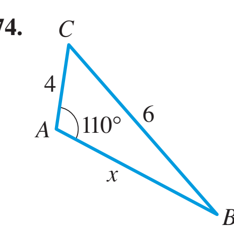
72.



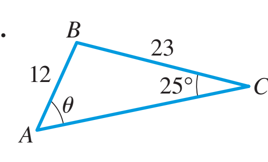
73.



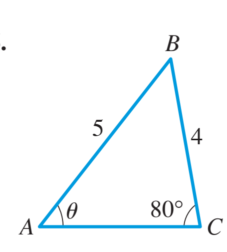
74.



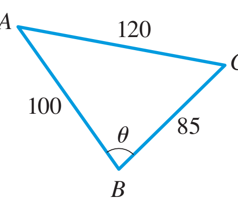
75.



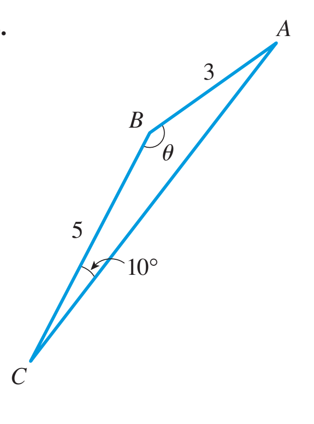
76.



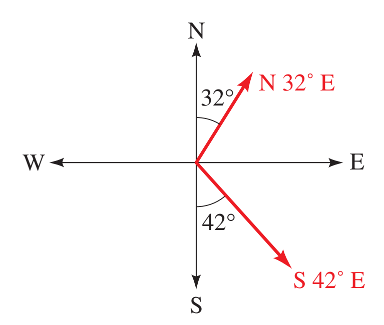
77.



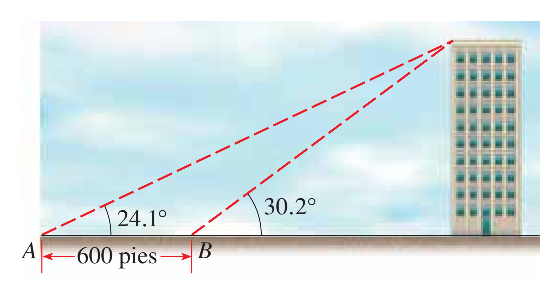
78.



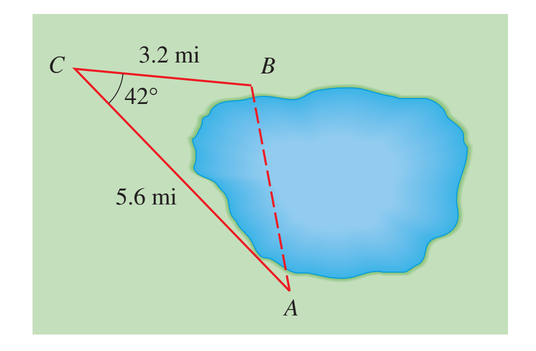
79. Distancias entre dos barcos Dos barcos zarpan de un puerto al mismo tiempo. Uno de ellos navega a 20 mi/h en dirección N 32° E; y el otro navega a 28 mi/h en dirección S 42° E (vea la figura). ¿A qué distancia están los dos barcos después de 2 horas?



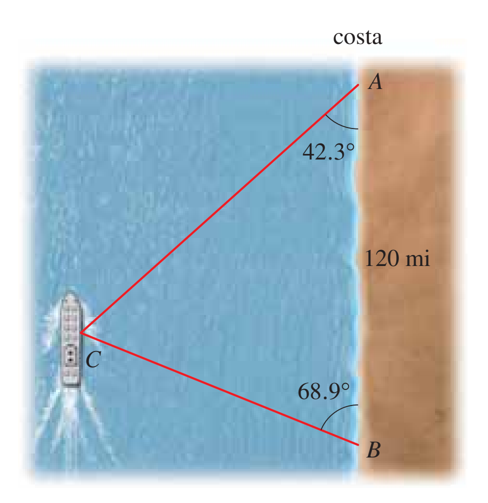
80. Altura de un edificio Del punto *A* en el suelo el ángulo de elevación a la parte superior de un edificio elevado es 24.1°. De un punto *B*, que está 600 pies más cercano al edificio, el ángulo de elevación que se mide es de 30.2°. Encuentre la altura del edificio.



81. Distancia entre dos puntos A partir de la información que se muestra encuentre la distancia entre los puntos *A* y *B* opuestos de un lago.



82. Distancia entre un barco y la costa Un barco está de viaje por el océano frente a una playa recta. Los puntos *A* y *B* están a 120 millas uno del otro en la costa, como se muestra en la figura. Se encuentra que $\angle A = 42.3°$ y $\angle B = 68.9°$. Encuentre la distancia más corta del barco a la costa.



83. Área de un triángulo Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 8 y 14; y un ángulo entre ellos de 35°.

84. Fórmula de Herón Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 5, 6 y 8.

1. Encuentre las medidas en radianes que corresponden a las medidas en grados de 330° y $-135°$.

2. Encuentre las medidas en grados que corresponden a las medidas en radianes de $4\pi/3$ y -1.3.

3. Las paletas del rotor de un helicóptero miden 16 pies de largo y están girando a 120 rpm.

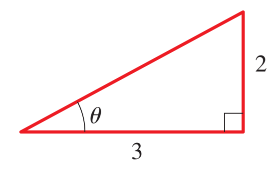
   ***a*)** Encuentre la velocidad angular del rotor.

   ***b*)** Encuentre la velocidad lineal de un punto situado en la punta de una paleta.

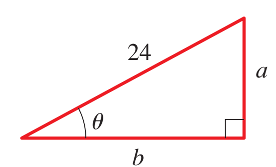
4. Encuentre el valor exacto de cada uno de los siguientes.

   ***a*)** sen 405° ***b*)** $\tan(-150°)$ ***c*)** $\sec \dfrac{5\pi}{3}$ ***d*)** $\csc \dfrac{5\pi}{2}$

5. Encuentre $\tan\theta + \text{sen}\,\theta$ para el ángulo θ de la figura.



6. Exprese las longitudes a y b que se muestran en la figura, en términos de θ.

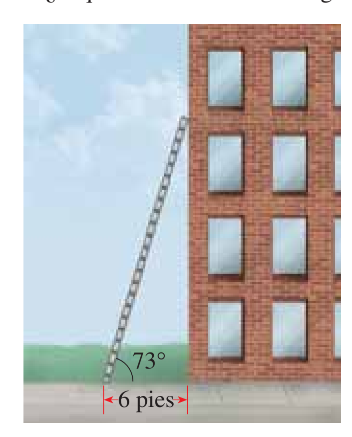


7. Si $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el tercer cuadrante, encuentre $\tan\theta\cot\theta + \csc\theta$.

8. Si sen $\theta = \frac{5}{13}$ y $\tan\theta = -\frac{5}{12}$, encuentre $\sec\theta$.

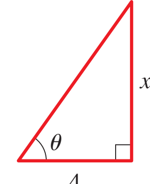
9. Exprese $\tan\theta$ en términos de $\sec\theta$ para θ en el segundo cuadrante.

10. La base de la escalera de la figura está a 6 pies del edificio, y el ángulo formado por la escalera y el suelo es de 73°. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

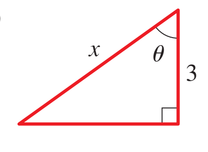


11. Exprese θ en cada figura en términos de x.

***a*)**



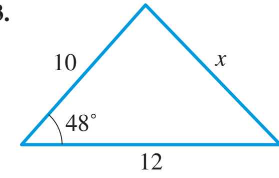
***b*)**



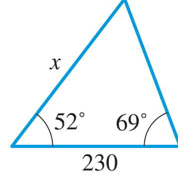
12. Encuentre el valor exacto de $\cos(\tan^{-1}\frac{9}{40})$.

13–18 ■ Encuentre el lado marcado x o el ángulo marcado θ.

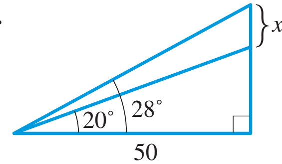
13.



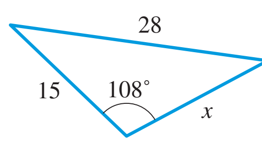
14.



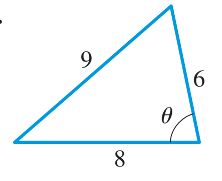
15.



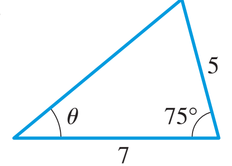
16.



17.



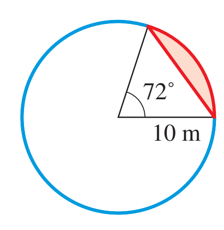
18.



19. Consulte la figura siguiente.

a) Encuentre el área de la región sombreada.

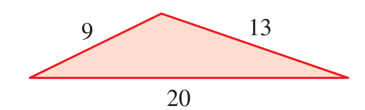
b) Encuentre el perímetro de la región sombreada.



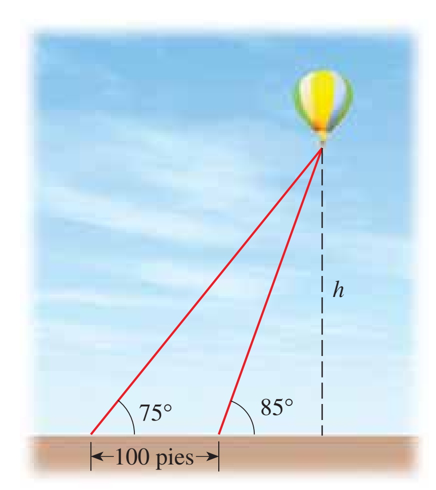
20. Consulte la figura siguiente.

a) Encuentre el ángulo opuesto al lado más largo.

b) Encuentre el área del triángulo.



21. Dos cables sujetan al suelo un globo, tal como se muestra. ¿A qué altura está el globo respecto del suelo?



¿Cómo podemos medir la altura de una montaña o la distancia de un lado a otro de un lago? Obviamente, puede ser difícil, incómodo o imposible medir estas distancias directamente (es decir, usando una cinta de medir). Por otra parte, puede ser fácil medir *ángulos* en donde intervienen objetos distantes. Aquí es donde la trigonometría entra en acción: las relaciones trigonométricas relacionan los ángulos con las distancias, de modo que se pueden usar para *calcular* distancias a partir de los ángulos *medidos*. En este *Enfoque* examinamos cómo la trigonometría se usa para trazar el mapa de una ciudad. Los modernos métodos de hacer mapas usan satélites y el sistema de posicionamiento global, pero la matemática sigue estando en el centro del proceso.

Trazar el mapa de una ciudad

Un estudiante desea trazar el mapa de su ciudad natal. Para construir un mapa preciso (o un modelo a escala) se necesitan encontrar distancias entre varios puntos de referencia de la ciudad. El estudiante hace las mediciones que se muestran en la figura 1. Observe que sólo se mide la distancia entre el Ayuntamiento y el primer puente. Todas las otras medidas son ángulos.

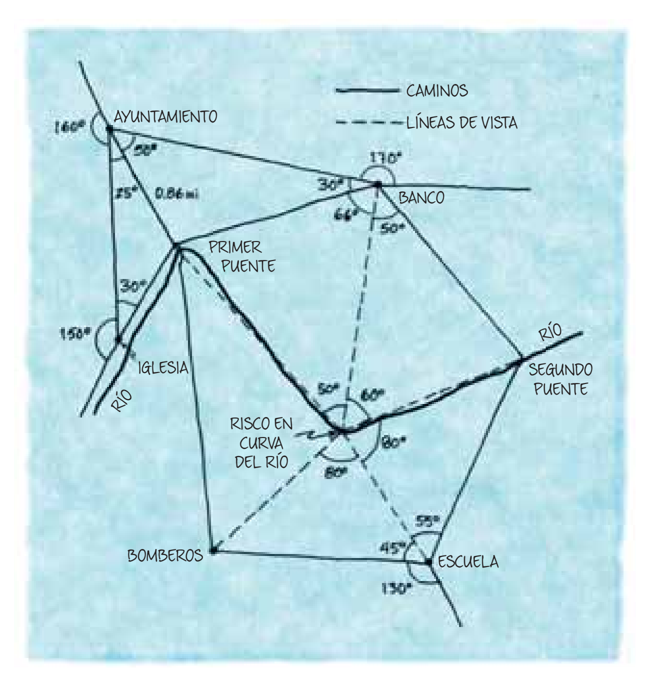


FIGURA 1

Las distancias entre otros puntos de referencia se pueden encontrar ahora usando la ley de senos. Por ejemplo, la distancia x del banco al primer puente se calcula aplicando la ley de senos al triángulo con vértices en el Ayuntamiento, el banco y el primer puente.

$$\frac{x}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{0.86}{\text{sen } 30^\circ} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$x = \frac{0.86 \text{ sen } 50^\circ}{\text{sen } 30^\circ} \qquad \text{Despeje } x$$

$$\approx 1.32 \text{ mi} \qquad \text{Calculadora}$$

Por lo que la distancia entre el banco y el primer puente es de 1.32 millas.

La distancia que acabamos de encontrar se puede usar ahora para encontrar otras distancias. Por ejemplo, encontramos la distancia y entre el banco y el risco como sigue:

$$\frac{y}{\text{sen } 64^\circ} = \frac{1.32}{\text{sen } 50^\circ} \qquad \text{Ley de senos}$$

$$y = \frac{1.32 \text{ sen } 64^\circ}{\text{sen } 50^\circ} \qquad \text{Despaje } y$$

$$\approx 1.55 \text{ mi} \qquad \text{Calculadora}$$

Si continuamos de esta forma podemos calcular todas las distancias entre los puntos de interés mostrados en el diagrama aproximado de la figura 1. Podemos usar esta información para trazar el mapa que se muestra en la figura 2.

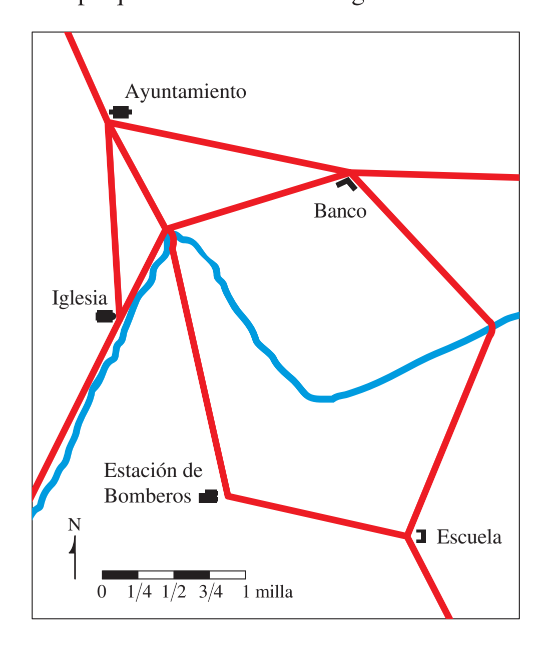


FIGURA 2

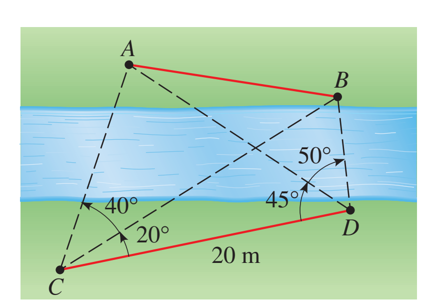
Para hacer un mapa topográfico necesitamos medir la elevación. Este concepto se explora en los problemas 4-6.

PROBLEMAS

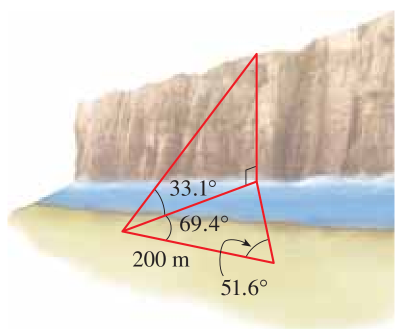
1. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la iglesia y el Ayuntamiento.

2. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la estación de bomberos y la escuela. [*Sugerencia:* primero necesitará encontrar otras distancias.]

3. **Determinar una distancia** Una topógrafa que se encuentra de un lado de un río desea encontrar la distancia entre los puntos A y B del lado opuesto del río. Ella escoge de su lado los puntos C y D, que están a 20 m entre sí, y mide los ángulos que se muestran en la figura siguiente. Encuentre la distancia entre A y B.



4. Altura de un risco Para medir la altura de un peñasco inaccesible en el lado opuesto de un río un topógrafo hace las mediciones que se ilustran en la figura. Encuentre la altura del risco.



5. Altura de una montaña Para calcular la altura h de una montaña se miden el ángulo α y β y la distancia d, como se muestra en la figura siguiente.

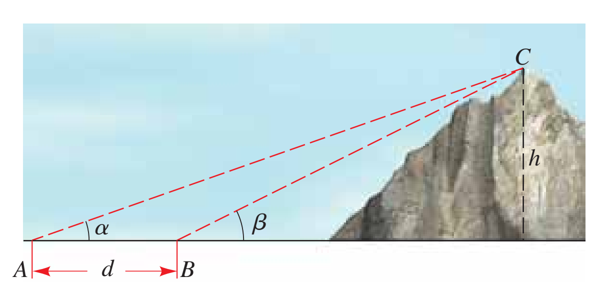
***a*)** Demuestre que

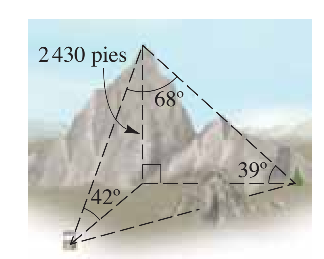
$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

***b*)** Demuestre que

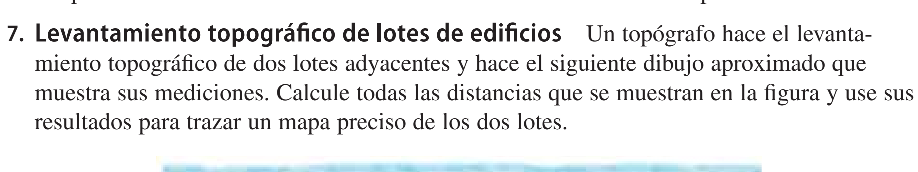
$$h = d\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

***c*)** Use las fórmulas de los incisos *a*) y *b*) para encontrar la altura de una montaña si $\alpha = 25°$, $\beta = 29°$ y $d = 800$ pies. ¿Se obtiene la misma respuesta de cada fórmula?

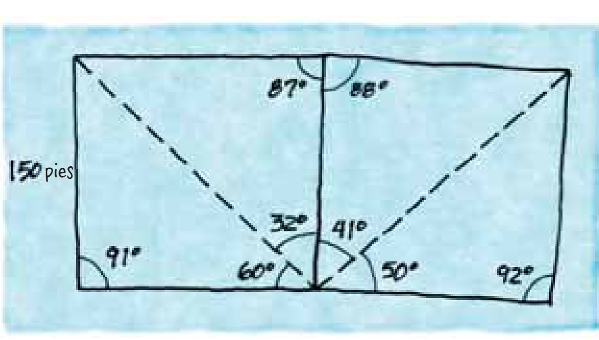




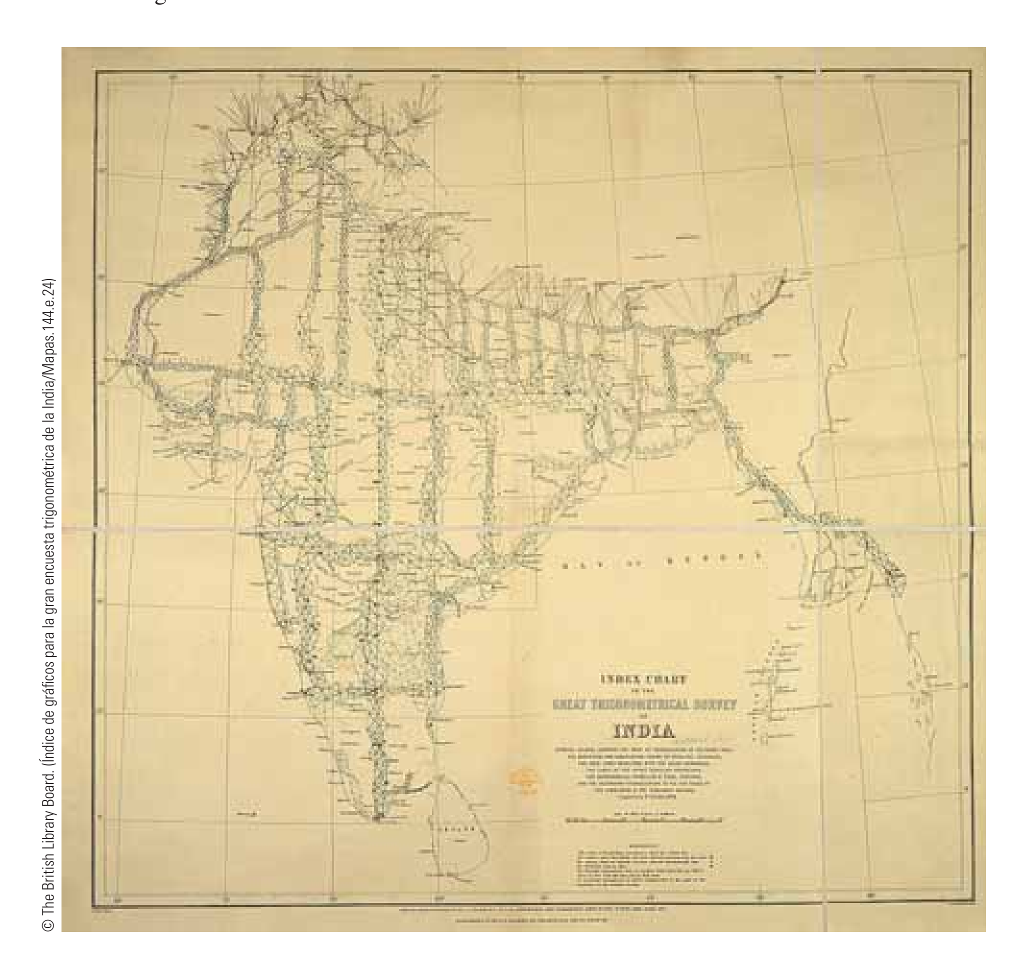
6. Determinación de una distancia Un topógrafo ha determinado que una montaña mide 2 430 pies de altura. Desde lo alto de la montaña él mide los ángulos de depresión hacia dos puntos de referencia en la base de la montaña y encuentra que son de 42 y 39°. (Observe que estos son los mismos que los ángulos de elevación de los puntos de referencia como se muestran en la figura de la izquierda.) El ángulo entre las líneas de vista hacia los puntos de referencia es de 68°. Calcule la distancia entre los dos puntos de referencia.



7. Levantamiento topográfico de lotes de edificios Un topógrafo hace el levantamiento topográfico de dos lotes adyacentes y hace el siguiente dibujo aproximado que muestra sus mediciones. Calcule todas las distancias que se muestran en la figura y use sus resultados para trazar un mapa preciso de los dos lotes.



8. **Gran Levantamiento Topográfico de la India** El Gran Levantamiento Topográfico de la India es uno de los más grandes proyectos de trazado de mapas que se hayan realizado (vea la nota al margen en la página 512). Investigue en su biblioteca o en internet para aprender más acerca del Levantamiento Topográfico y escriba un informe sobre sus hallazgos.




© Jule_Berlin/Shutterstock.com

7 Trigonometría analítica

En los capítulos 5 y 6 estudiamos propiedades gráficas y geométricas de las funciones trigonométricas. En este capítulo estudiaremos las propiedades algebraicas de estas funciones, es decir, simplificar y factorizar expresiones y resolver ecuaciones que tienen funciones trigonométricas.

Hemos empleado las funciones trigonométricas para modelar diferentes fenómenos reales, incluyendo movimiento periódico (por ejemplo, las ondas de sonido producidas por una banda). Para obtener información de un modelo con frecuencia necesitamos resolver ecuaciones. Si el modelo contiene funciones trigonométricas necesitamos resolver ecuaciones trigonométricas; y para resolverlas a veces se requiere usar identidades trigonométricas, algunas de las cuales las hemos encontrado ya en capítulos anteriores. Iniciamos este capítulo con el proceso para encontrar nuevas identidades.

7.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

■ Simplificación de expresiones trigonométricas ■ Demostración de identidades trigonométricas

Recuerde que una **ecuación** es un enunciado en el que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo, las siguientes expresiones son ecuaciones:

$$x + 2 = 5$$

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Una **identidad** es una ecuación que es verdadera para todos los valores de las variables. De las tres ecuaciones anteriores las dos últimas son identidades, pero la primera no lo es, ya que no es verdadera para todos los valores de x, únicamente de tres.

Una identidad **trigonométrica** es una identidad que implica funciones trigonométricas. Comenzamos haciendo una lista de algunas de las identidades trigonométricas básicas. La mayoría de estas las estudió en los capítulos 5 y 6; se le pidió demostrar identidades de cofunciones en el ejercicio 118.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares e impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

■ Simplificación de expresiones trigonométricas

Las identidades hacen posible que escribamos la misma expresión en formas diferentes. A veces una expresión que parece complicada se puede volver a escribir como una mucho más sencilla. Para simplificar expresiones algebraicas usamos factorización, denominadores comunes y las fórmulas de productos notables. Para simplificar expresiones trigonométricas usamos estas mismas técnicas junto con las identidades trigonométricas fundamentales.

EJEMPLO 1 ■ Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

SOLUCIÓN Empezamos por reescribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\begin{aligned} \cos t + \tan t \operatorname{sen} t &= \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) \operatorname{sen} t && \text{Identidad recíproca} \\ &= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} && \text{Común denominador} \\ &= \frac{1}{\cos t} && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \sec t && \text{Identidad recíproca} \end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Simplificación por combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \dfrac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}$.

SOLUCIÓN Combinamos las fracciones usando un común denominador.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} &= \frac{\operatorname{sen} \theta\,(1 + \operatorname{sen} \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta\,(1 + \operatorname{sen} \theta)} && \text{Común denominador} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta\,(1 + \operatorname{sen} \theta)} && \text{Distribuya sen } \theta \\ &= \frac{\operatorname{sen} \theta + 1}{\cos \theta\,(1 + \operatorname{sen} \theta)} && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta && \text{Elimine y use la identidad recíproca} \end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

■ Demostración de identidades trigonométricas

Numerosas identidades se originan en las identidades fundamentales. En los ejemplos que siguen aprenderemos a demostrar que una ecuación trigonométrica dada es una identidad, y en el proceso veremos cómo descubrir nuevas identidades.

En primer término, es fácil determinar cuándo una ecuación dada *no* es una identidad. Todo lo que se debe hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para alguno de los valores de la variable (o las variables). Entonces la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \pi/4$, tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para verificar que una ecuación trigonométrica es una identidad transformamos un lado de la ecuación en el otro lado mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

GUÍA PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Empezar con un lado.** Elija un lado de la ecuación y escríbalo. El objetivo es transformarlo en el otro lado. Suele ser más fácil empezar con el lado más complicado.
2. **Usar identidades conocidas.** Use álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Lleve las expresiones fraccionarias a un denominador común, factorice y use las identidades fundamentales para simplificar expresiones.
3. **Convertir a senos y cosenos.** Si se ha quedado bloqueado, puede que encuentre útil reescribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.



Advertencia: Para demostrar una identidad, *no* sólo realizamos las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo, si empezamos con una ecuación que no es una identidad, como

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

y si elevamos al cuadrado ambos lados obtenemos la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

que claramente es una identidad. ¿Significa que la ecuación original es una identidad? Por supuesto que no. El problema aquí es que la operación de elevar al cuadrado no es **reversible** en el sentido de que no podemos regresar a la ecuación original al sacar raíz cuadrada (invirtiendo el proceso). Sólo las operaciones que son reversibles necesariamente transformarán una identidad en una identidad.

EJEMPLO 3 ■ Demostrar una identidad reescribiéndola en términos de seno y coseno

Considere la ecuación $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

a) Verifique algebraicamente que la ecuación es una identidad.

b) Confirme gráficamente que la ecuación es una identidad.

SOLUCIÓN

a) El lado izquierdo (LI) se ve más complicado, de modo que empezamos con este y tratamos de transformarlo en el lado derecho (LD).

$$\begin{aligned} \text{LI} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) & \\ &= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) & \text{Identidad recíproca} \\ &= 1 - \cos^2\theta & \text{Desarrollar} \\ &= \operatorname{sen}^2\theta = \text{LD} & \text{Teorema de Pitágoras} \end{aligned}$$

b) Trazamos la gráfica de cada lado de la ecuación para ver si las gráficas coinciden. De la figura 1 vemos que las gráficas de $y = \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta)$ y $y = \operatorname{sen}^2\theta$ son idénticas. Esto confirma que la ecuación es una identidad.

1
−3.5 6.5
0

FIGURA 1

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

En el ejemplo 3 no es fácil ver cómo cambiar el lado derecho en el lado izquierdo, pero definitivamente es posible. Observe que cada paso es reversible. En otras palabras, si partimos de la última expresión en la prueba y trabajamos hacia atrás a través de los pasos, el lado derecho se transforma en el lado izquierdo. Es probable que usted concuerde, sin embargo, en que es más difícil demostrar la identidad de esta manera. Es por eso que a veces es mejor cambiar el lado más complicado de la identidad en el lado más sencillo.

EJEMPLO 4 ■ Demostrar una identidad combinando fracciones

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

SOLUCIÓN Al encontrar un denominador común y combinar las fracciones del lado derecho de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{LD} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} && \text{Denominador común} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplifique} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorice} \\
&= 2 \tan x \sec x = \text{LI} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 65 ■

Vea el prólogo: *Principios de solución de problemas,* página P2

En el ejemplo 5 hemos introducido "algo extra" al problema de multiplicar el numerador y el denominador por una expresión trigonométrica, elegida para que podamos simplificar el resultado.

EJEMPLO 5 ■ Demostrar una identidad introduciendo algo extra

Verifique la identidad $\dfrac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} = \sec u + \tan u$.

SOLUCIÓN Empezamos con el lado izquierdo y multiplicamos el numerador y el denominador por $1 + \operatorname{sen} u$.

Multiplicamos por $1 + \operatorname{sen} u$ ya que por la fórmula de la diferencia de cuadrados sabemos que

$$(1 - \operatorname{sen} u)(1 + \operatorname{sen} u) = 1 - \operatorname{sen}^2 u$$

y esto es precisamente $\cos^2 u$, una expresión más sencilla.

$$\begin{aligned}
\text{LI} &= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \\
&= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{sen} u} && \text{Multiplique el numerador y el denominador por } 1 + \operatorname{sen} u \\
&= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{1 - \operatorname{sen}^2 u} && \text{Desarrolle el denominador} \\
&= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{\cos^2 u} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= \frac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} && \text{Elimine el factor común} \\
&= \frac{1}{\cos u} + \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} && \text{Separe en dos fracciones} \\
&= \sec u + \tan u && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 77 ■

EUCLIDES (hacia el año 300 a.C.) impartió clases en Alejandría. Su obra *Elementos*, es el libro científico de mayor influencia en la historia. Durante 2 000 años fue la introducción estándar a la geometría en escuelas, y por muchas generaciones fue considerado el mejor modo de desarrollar el razonamiento lógico. Abraham Lincoln, por ejemplo, estudió los *Elementos* como una forma de agudizar su ingenio. Cuenta la leyenda que el rey Ptolomeo le preguntó una vez a Euclides si había una forma más rápida de aprender geometría que por los *Elementos*, a lo que Euclides respondió que "no había camino real a la geometría", queriendo decir con ello que las matemáticas no respetan riquezas ni condición social. Euclides fue reverenciado en su propio tiempo y se le conoció como el Geómetra o "el autor de los *Elementos*". La grandeza de los *Elementos* proviene del tratamiento preciso, lógico y sistemático de la geometría. Para trabajar con igualdades Euclides dio las siguientes reglas a las que llamó "conceptos comunes".

1. Las cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
3. Si iguales se restan de iguales, los residuos son iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales.
5. El todo es mayor que la parte.

Aquí presentamos otro método para demostrar que una ecuación es una identidad. Si podemos transformar cada lado de la ecuación por *separado*, mediante identidades, para llegar al mismo resultado, entonces la ecuación es una identidad. El ejemplo 6 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 6 ■ Demostrar una identidad trabajando por separado ambos lados

Verifique la identidad $\dfrac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1}$.

SOLUCIÓN Probamos la identidad al cambiar cada lado por separado en la misma expresión. (Dé las razones para cada paso.)

$$\text{LI} = \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + 1$$

$$\text{LD} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta - 1} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\sec\theta - 1} = \sec\theta + 1$$

Se deduce que LI = LD, de modo que la ecuación es una identidad.

Ahora intente realizar el ejercicio 83 ■

Concluimos esta sección describiendo la técnica de *sustitución trigonométrica*, que usamos para convertir expresiones algebraicas en trigonométricas. Esto con frecuencia es útil en cálculo, por ejemplo, para encontrar el área de un círculo o de una elipse.

EJEMPLO 7 ■ Sustitución trigonométrica

Sustituya sen θ por x en la expresión $\sqrt{1-x^2}$ y simplifique. Suponga que $0 \le \theta \le \pi/2$.

SOLUCIÓN Haciendo $x = \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} && \text{Sustituya } x = \operatorname{sen}\theta \\ &= \sqrt{\cos^2\theta} && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \cos\theta && \text{Tome raíz cuadrada} \end{aligned}$$

La última igualdad es verdadera porque $\cos\theta \ge 0$ para todos los valores de θ con que se tratan.

Ahora intente realizar el ejercicio 89 ■

7.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una ecuación se llama identidad si es válida para ________ valores de la variable. La ecuación $2x = x + x$ es una identidad algebraica y la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x =$ ________ es una identidad trigonométrica.

2. Para cualquier x es verdadero que $\cos(-x)$ tiene el mismo valor que $\cos x$.

   Expresamos este hecho como la identidad ________.

HABILIDADES

3–12 ■ Simplificar expresiones trigonométricas Escriba la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno, y luego simplifique.

3. $\cos t \tan t$
4. $\cos t \csc t$
5. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta$
6. $\tan\theta \csc\theta$
7. $\tan^2 x - \sec^2 x$
8. $\dfrac{\sec x}{\csc x}$

9. $\operatorname{sen} u + \cot u \cos u$

10. $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

11. $\dfrac{\sec\theta - \sec\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

12. $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta - \operatorname{sen}\theta}$

13–28 ■ Simplificar expresiones trigonométricas Simplifique la expresión trigonométrica.

13. $\dfrac{\operatorname{sen} x \sec x}{\tan x}$

14. $\dfrac{\cos x \sec x}{\cot x}$

15. $\dfrac{\operatorname{sen} t + \tan t}{\tan t}$

16. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A}$

17. $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$

18. $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$

19. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$

20. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$

21. $\dfrac{1 + \cos y}{1 + \sec y}$

22. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} y}{1 + \csc y}$

23. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} + \dfrac{\cos u}{1 + \operatorname{sen} u}$

24. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t} - \csc t$

25. $\dfrac{\cos x}{\sec x + \tan x}$

26. $\dfrac{\cot A - 1}{1 + \tan(-A)}$

27. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha}$

28. $\dfrac{2 + \tan^2 x}{\sec^2 x} - 1$

29–30 ■ Demostrar una identidad algebraica y gráficamente Considere la ecuación dada. ***a***) Verifique algebraicamente que la ecuación sea una identidad. ***b***) Confirme gráficamente que la ecuación sea una identidad.

29. $\dfrac{\cos x}{\sec x \operatorname{sen} x} = \csc x - \operatorname{sen} x$

30. $\dfrac{\tan y}{\csc y} = \sec y - \cos y$

31–88 ■ Demostrar identidades Verifique la identidad.

31. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta} = \cos\theta$

32. $\dfrac{\tan x}{\sec x} = \operatorname{sen} x$

33. $\dfrac{\cos u \sec u}{\tan u} = \cot u$

34. $\dfrac{\cot x \sec x}{\csc x} = 1$

35. $\dfrac{\tan y}{\csc y} = \dfrac{1}{\cos y} - \dfrac{1}{\sec y}$

36. $\dfrac{\cos^2 v}{\operatorname{sen} v} = \csc v - \operatorname{sen} v$

37. $\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

38. $\cot(-\alpha)\cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha) = -\csc\alpha$

39. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

40. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} x \cos x$

41. $(1 - \cos\beta)(1 + \cos\beta) = \dfrac{1}{\csc^2\beta}$

42. $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} = 1$

43. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 + \tan^2 y$

44. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$

45. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

46. $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

47. $(1 - \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)^2 + 4\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t = 4\cos^2 t$

48. $\dfrac{2\operatorname{sen} x \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1} = 1$

49. $\csc x \cos^2 x + \operatorname{sen} x = \csc x$

50. $\cot^2 t - \cos^2 t = \cot^2 t \cos^2 t$

51. $\dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$

52. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^4 = (1 + 2\operatorname{sen} x \cos x)^2$

53. $\dfrac{\sec t - \cos t}{\sec t} = \operatorname{sen}^2 t$

54. $(\cot x - \csc x)(\cos x + 1) = -\operatorname{sen} x$

55. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

56. $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

57. $\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

58. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

59. $\dfrac{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2}{\operatorname{sen} t \cos t} = 2 + \sec t \csc t$

60. $\sec t \csc t\,(\tan t + \cot t) = \sec^2 t + \csc^2 t$

61. $\dfrac{1 + \tan^2 u}{1 - \tan^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}$

62. $\dfrac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$

63. $\dfrac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x + \cos x$

64. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sec x + \csc x} = \operatorname{sen} x \cos x$

65. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2\csc x$

66. $\dfrac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$

67. $\tan^2 u - \operatorname{sen}^2 u = \tan^2 u \operatorname{sen}^2 u$

68. $\sec^4 x - \tan^4 x = \sec^2 x + \tan^2 x$

69. $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

70. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \csc\theta}{\cos\theta - \cot\theta}$

71. $\dfrac{1}{\sec x + \tan x} + \dfrac{1}{\sec x - \tan x} = 2\sec x$

72. $\dfrac{\cos^2 t + \tan^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \tan^2 t$

73. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4\tan x \sec x$

74. $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$

75. $\dfrac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{\text{sen}\, x + \cos x} = 1 - \text{sen}\, x \cos x$

76. $\dfrac{\tan v - \cot v}{\tan^2 v - \cot^2 v} = \text{sen}\, v \cos v$

77. $\dfrac{1 - \cos \alpha}{\text{sen}\, \alpha} = \dfrac{\text{sen}\, \alpha}{1 + \cos \alpha}$

78. $\dfrac{\text{sen}\, x - 1}{\text{sen}\, x + 1} = \dfrac{-\cos^2 x}{(\text{sen}\, x + 1)^2}$

79. $\dfrac{\text{sen}\, w}{\text{sen}\, w + \cos w} = \dfrac{\tan w}{1 + \tan w}$

80. $\dfrac{\text{sen}\, A}{1 - \cos A} - \cot A = \csc A$

81. $\dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x} = \sec x\,(\sec x + \tan x)$

82. $\sec v - \tan v = \dfrac{1}{\sec v + \tan v}$

83. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \text{sen}\, \theta} = \sec \theta + \tan \theta$

84. $\dfrac{\tan v\, \text{sen}\, v}{\tan v + \text{sen}\, v} = \dfrac{\tan v - \text{sen}\, v}{\tan v\, \text{sen}\, v}$

85. $\dfrac{1 - \text{sen}\, x}{1 + \text{sen}\, x} = (\sec x - \tan x)^2$

86. $\dfrac{1 + \text{sen}\, x}{1 - \text{sen}\, x} = (\tan x + \sec x)^2$

87. $\csc x - \cot x = \dfrac{1}{\csc x + \cot x}$

88. $\dfrac{\sec u - 1}{\sec u + 1} = \dfrac{\tan u - \text{sen}\, u}{\tan u + \text{sen}\, u}$

89–94 ■ Sustitución trigonométrica Haga la sustitución trigonométrica indicada en la expresión algebraica dada y simplifique (vea el ejemplo 7). Suponga que $0 < \theta < \pi/2$.

89. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = \text{sen}\, \theta$

90. $\sqrt{1 + x^2}$, $x = \tan \theta$

91. $\sqrt{x^2 - 1}$, $x = \sec \theta$

92. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$, $x = 2 \tan \theta$

93. $\sqrt{9 - x^2}$, $x = 3\, \text{sen}\, \theta$

94. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$, $x = 5 \sec \theta$

95–98 ■ Determinar identidades gráficamente Trace las gráficas de f y g en el mismo rectángulo de vista. ¿Sugieren las gráficas que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Demuestre su respuesta.

95. $f(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, $g(x) = 1 - 2\, \text{sen}^2 x$

96. $f(x) = \tan x\,(1 + \text{sen}\, x)$, $g(x) = \dfrac{\text{sen}\, x \cos x}{1 + \text{sen}\, x}$

97. $f(x) = (\text{sen}\, x + \cos x)^2$, $g(x) = 1$

98. $f(x) = \cos^4 x - \text{sen}^4 x$, $g(x) = 2\cos^2 x - 1$

HABILIDADES Plus

99–104 ■ Demostrar más identidades Verificar la identidad.

99. $(\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y - \cos x \cos y)(\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y + \cos x \cos y) = \text{sen}^2 y - \cos^2 x$

100. $\dfrac{1 + \cos x + \text{sen}\, x}{1 + \cos x - \text{sen}\, x} = \dfrac{1 + \text{sen}\, x}{\cos x}$

101. $(\tan x + \cot x)^4 = \sec^4 x \csc^4 x$

102. $(\text{sen}\, \alpha - \tan \alpha)(\cos \alpha - \cot \alpha) = (\cos \alpha - 1)(\text{sen}\, \alpha - 1)$

103. $\dfrac{\text{sen}^3 y - \csc^3 y}{\text{sen}\, y - \csc y} = \text{sen}^2 y + \csc^2 y + 1$

104. $\text{sen}^6 \beta + \cos^6 \beta = 1 - 3\, \text{sen}^2 \beta \cos^2 \beta$

105–108 ■ Demostrar identidades que implican otras funciones Estas identidades implican funciones trigonométricas, así como otras funciones que ya hemos estudiado.

105. $\ln |\tan x\, \text{sen}\, x| = 2 \ln |\text{sen}\, x| + \ln |\sec x|$

106. $\ln |\tan x| + \ln |\cot x| = 0$

107. $e^{\text{sen}^2 x} e^{\tan^2 x} = e^{\sec^2 x} e^{-\cos^2 x}$

108. $e^{x + 2 \ln |\text{sen}\, x|} = e^x\, \text{sen}^2 x$

109–112 ■ ¿La ecuación es una identidad? Determine si la función dada es una identidad. Si la ecuación no es una identidad encuentre todas sus soluciones.

109. $e^{\text{sen}^2 x} e^{\cos^2 x} = e$

110. $\dfrac{x}{x + 1} = 1 + x$

111. $\sqrt{\text{sen}^2 x + 1} = \sqrt{\text{sen}^2 x} + 1$

112. $x e^{\ln x^2} = x^3$

113. Una identidad que implica tres variables Suponga que $x = R \cos \theta\, \text{sen}\, \phi$, $y = R\, \text{sen}\, \theta\, \text{sen}\, \phi$ y $z = R \cos \phi$. Demuestre la identidad $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

114. DISCUSIÓN: Ecuaciones que son identidades Ha encontrado muchas identidades en este curso. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones reconoce como identidades? Para aquellas que considera que son identidades pruebe varios valores de las variables para confirmar que la ecuación es verdadera para las mismas.

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
b) $x^2 + y^2 = 1$
c) $x(y + z) = xy + xz$
d) $t^2 - \cos^2 t = (t - \cos t)(t + \cos t)$
e) $\text{sen}\, t + \cos t = 1$
f) $x^2 - \tan^2 x = 0$

115. DISCUSIÓN: Ecuaciones que no son identidades ¿Cómo puede saber si una ecuación no es una identidad? Demostrar que las siguientes ecuaciones no son identidades.

a) $\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x$
b) $\text{sen}(x + y) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y$
c) $\sec^2 x + \csc^2 x = 1$
d) $\dfrac{1}{\text{sen}\, x + \cos x} = \csc x + \sec x$

116. DISCUSIÓN: Gráficas e identidades Suponga que en una calculadora graficadora traza las gráficas de dos funciones, f y g, y las gráficas parecen idénticas en el rectángulo de

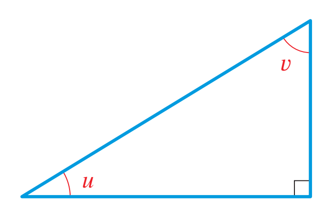
vista. ¿Demostrará esto que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Explique.

117. DESCUBRIMIENTO: Haga su propia identidad Si empieza con una expresión trigonométrica y la reescribe o la simplifica, y luego reescribe la expresión original igual a la expresión reescrita se obtiene una identidad trigonométrica. Por ejemplo, del ejemplo 1 obtenemos la identidad

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \sec t$$

Use esta técnica para hacer su propia identidad y compártala con un compañero de clase para que la verifique.

118. DISCUSIÓN: Identidades de cofunción En el triángulo rectángulo que se muestra explique por qué $v = (\pi/2) - u$. Explique cómo se pueden obtener las seis identidades de cofunción a partir de este triángulo para $0 < u < \pi/2$.



Observe que u y v son ángulos complementarios. Así las identidades de cofunción afirman que "una función trigonométrica de un ángulo u es igual a la correspondiente cofunción del ángulo v complementario".

7.2 FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

■ Fórmulas de adición y sustracción ■ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas ■ Expresiones de la forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x$

■ Fórmulas de adición y sustracción

Ahora deduciremos identidades para funciones trigonométricas de sumas y diferencias.

FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Fórmulas para el seno:

$$\operatorname{sen}(s + t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$$
$$\operatorname{sen}(s - t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para el coseno:

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$
$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para la tangente:

$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$
$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Demostración de la fórmula de adición del coseno Para demostrar la fórmula

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

usamos la figura 1. En la figura las distancias t, $s + t$ y $-s$ se han marcado en la circunferencia unitaria, empezando en $P_0(1, 0)$ y terminando en Q_1, P_1 y Q_0, respectivamente. Las coordenadas de estos puntos son las siguientes:

$$P_0(1, 0) \qquad Q_0(\cos(-s), \operatorname{sen}(-s))$$
$$P_1(\cos(s + t), \operatorname{sen}(s + t)) \qquad Q_1(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

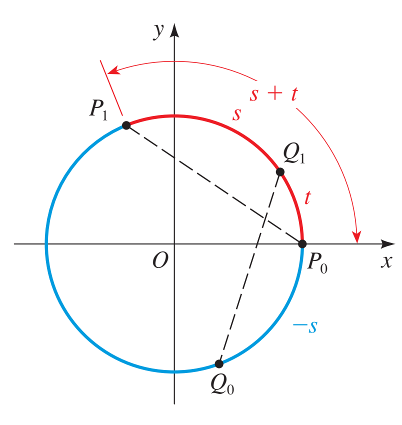


FIGURA 1

Dado que $\cos(-s) = \cos s$ y $\operatorname{sen}(-s) = -\operatorname{sen} s$, se deduce que el punto Q_0 tiene las coordenadas $Q_0(\cos s, -\operatorname{sen} s)$. Observe que las distancias entre P_0 y P_1 y entre Q_0 y Q_1 medidas a lo largo del arco de la circunferencia, son iguales. Puesto que arcos iguales están subtendidos por cuerdas iguales, se concluye que $d(P_0, P_1) = d(Q_0, Q_1)$. Usando la fórmula de distancia obtenemos

$$\sqrt{[\cos(s + t) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(s + t) - 0]^2} = \sqrt{(\cos t - \cos s)^2 + (\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} s)^2}$$


© Stock Montage/Archive Photos/Getty Images

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830) es el responsable de la aplicación más poderosa de las funciones trigonométricas (vea nota al margen en la página 427). Utilizó sumas de estas funciones para describir fenómenos físicos como la transmisión de sonido y el flujo de calor.

Huérfano desde niño, Fourier fue educado en una escuela militar donde fue maestro de matemáticas a los 20 años de edad. Posteriormente fue nombrado profesor en la École Polytechnique pero renunció a este puesto para acompañar a Napoleón en su expedición a Egipto, donde Fourier prestó servicio como gobernador. Después de regresar a Francia empezó a realizar experimentos de calor. La Academia Francesa se negó a publicar sus primeros trabajos sobre esta materia porque carecían de rigor. Fourier finalmente llegó a ser secretario de la Academia y, en este puesto, hizo que se publicaran sus obras en su forma original. Probablemente debido a sus estudios sobre el calor y a sus años en los desiertos de Egipto, Fourier se obsesionó por mantenerse caliente (vestía varias capas de ropas) incluso en verano, y mantenía su cuarto a temperaturas insoportables por el exceso de calor. Es evidente que estos hábitos recargaron demasiado su corazón y contribuyeron a su muerte a los 62 años de edad.

Elevando al cuadrado ambos lados y desarrollándolo tendremos

$$\underbrace{\cos^2(s+t)}_{\text{La suma es 1}} - 2\cos(s+t) + 1 + \underbrace{\text{sen}^2(s+t)}_{}$$

$$= \cos^2 t - 2\cos s\cos t + \cos^2 t + \text{sen}^2 t + 2\,\text{sen}\, s\,\text{sen}\, t + \text{sen}^2 s$$

La suma es 1 ($\cos^2(s+t)$ y $\text{sen}^2(s+t)$); La suma es 1 ($\cos^2 s$ y $\text{sen}^2 t$...); La suma es 1

Usando la identidad pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tres veces da

$$2 - 2\cos(s+t) = 2 - 2\cos s\cos t + 2\,\text{sen}\, s\,\text{sen}\, t$$

Finalmente, restando 2 de cada lado y dividiendo ambos lados entre -2, obtenemos

$$\cos(s+t) = \cos s\cos t - \text{sen}\, s\,\text{sen}\, t$$

lo que demuestra la fórmula de adición del coseno. ■

Demostración de la fórmula de sustracción del coseno Sustituyendo t con $-t$ en la fórmula de adición del coseno obtenemos

$$\cos(s-t) = \cos(s+(-t))$$

$$= \cos s\cos(-t) - \text{sen}\, s\,\text{sen}(-t) \qquad \text{Fórmula de adición del coseno}$$

$$= \cos s\cos t + \text{sen}\, s\,\text{sen}\, t \qquad \text{Identidades par-impar}$$

Esto demuestra la fórmula de sustracción del coseno. ■

Vea los ejercicios 77 y 78 para las pruebas de las otras fórmulas de adición.

EJEMPLO 1 ■ Uso de fórmulas para la adición y la sustracción

Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $\cos 75°$ ***b)*** $\cos\dfrac{\pi}{12}$

SOLUCIÓN

a) Observe que $75° = 45° + 30°$. Debido a que conocemos los valores exactos de seno y coseno en 45 y 30°, usando la fórmula de adición del coseno obtenemos

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°)$$

$$= \cos 45°\cos 30° - \text{sen}\, 45°\,\text{sen}\, 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

b) Dado que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, con la fórmula de la sustracción del coseno se obtiene

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\frac{\pi}{4}\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 9 ■

EJEMPLO 2 ■ Uso de la fórmula de adición del seno

Encuentre el valor exacto de la expresión sen 20° cos 40° + cos 20° sen 40°.

SOLUCIÓN Reconocemos la expresión como el lado derecho de la fórmula de adición del seno con $s = 20°$ y $t = 40°$. Tenemos entonces

$$\operatorname{sen} 20° \cos 40° + \cos 20° \operatorname{sen} 40° = \operatorname{sen}(20° + 40°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$


Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

EJEMPLO 3 ■ Demostrar una identidad de cofunción

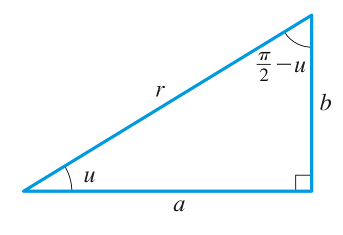
Demuestre la identidad de cofunción $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

SOLUCIÓN Por la fórmula de sustracción del coseno tenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u$$

$$= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u$$

Ahora intente realizar los ejercicios 21 y 25 ■



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{b}{r} = \operatorname{sen} u$

Para los ángulos agudos la identidad de cofunción del ejemplo 3 así como las otras identidades de cofunción también se pueden deducir de la figura que se muestra al margen.

EJEMPLO 4 ■ Demostrar una identidad

Demuestre la identidad $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

SOLUCIÓN Empezando con el lado derecho y usando la fórmula de adición de la tangente obtenemos

$$\text{LD} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$

$$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \text{LI}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

El siguiente ejemplo es un uso típico de las fórmulas de adición y sustracción en cálculo.

EJEMPLO 5 ■ Una identidad de cálculo

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, demuestre que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

SOLUCIÓN

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h} \qquad \text{Definición de } f$$

$$= \frac{\text{sen}\, x \cos h + \cos x \,\text{sen}\, h - \text{sen}\, x}{h} \qquad \text{Fórmula de adición del seno}$$

$$= \frac{\text{sen}\, x\,(\cos h - 1) + \cos x\,\text{sen}\, h}{h} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \text{sen}\, x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\text{sen}\, h}{h}\right) \qquad \text{Separe la fracción}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 65 ■

■ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

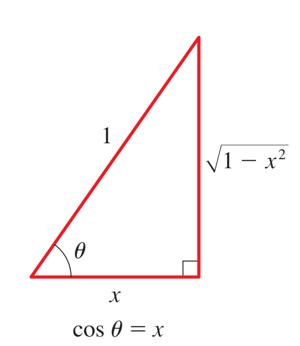
En cálculo aparecen las expresiones que contienen funciones trigonométricas y sus inversas. En los siguientes ejemplos ilustramos cómo evaluar dichas expresiones.

EJEMPLO 6 ■ Simplificación de una expresión que contiene funciones trigonométricas inversas

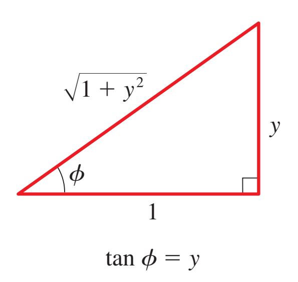
Escriba $\text{sen}(\cos^{-1} x + \tan^{-1} y)$ como una expresión en x y y, donde $-1 \le x \le 1$ y y es cualquier número real.

SOLUCIÓN Sea $\theta = \cos^{-1} x$ y $\phi = \tan^{-1} y$. Usando los métodos de la sección 6.4 trazamos triángulos con ángulos θ y ϕ tales que $\cos\theta = x$ y $\tan\phi = y$ (vea la figura 2). De los triángulos tenemos

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \qquad \text{sen}\,\phi = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$



$\cos\theta = x$



$\tan\phi = y$

FIGURA 2

De la fórmula de adición del seno tenemos

$$\text{sen}(\cos^{-1} x + \tan^{-1} y) = \text{sen}(\theta + \phi)$$

$$= \text{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi \qquad \text{Fórmula de adición del seno}$$

$$= \sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + x\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \qquad \text{De los triángulos}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left(\sqrt{1-x^2} + xy\right) \qquad \text{Factor } \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Ahora intente realizar el ejercicios 47 y 51 ■

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de una expresión que tiene funciones trigonométricas

Evalúe $\text{sen}(\theta + \phi)$, donde $\text{sen}\,\theta = \frac{12}{13}$ con θ en el segundo cuadrante y $\tan\phi = \frac{3}{4}$ con ϕ en el tercer cuadrante.

SOLUCIÓN Primero trazamos los ángulos θ y ϕ en posición estándar con lados terminales en los cuadrantes apropiados tal como en la figura 3. Dado que $\text{sen}\,\theta = y/r = \frac{12}{13}$,

podemos marcar un lado y la hipotenusa en el triángulo de la figura 3*a*). Para encontrar el lado restante usamos el teorema de Pitágoras.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 && \text{Teorema de Pitágoras} \\
x^2 + 12^2 &= 13^2 && y = 12, \quad r = 13 \\
x^2 &= 25 && \text{Despeje } x^2 \\
x &= -5 && \text{Debido a que } x < 0
\end{aligned}
$$

Del mismo modo, puesto que $\tan \phi = y/x = \frac{3}{4}$, podemos marcar dos lados del triángulo de la figura 3*b*) y luego usar el teorema de Pitágoras para encontrar la hipotenusa.

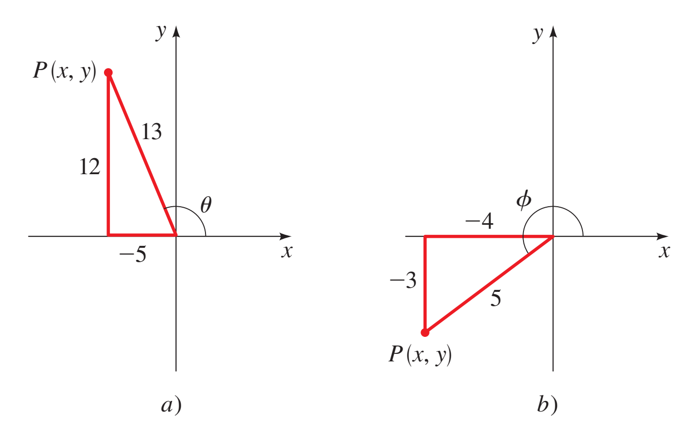
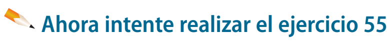


FIGURA 3

Ahora, para encontrar $\operatorname{sen}(\theta + \phi)$, usamos la fórmula de adición del seno y los triángulos de la figura 3.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\theta + \phi) &= \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \cos\theta \operatorname{sen}\phi && \text{Fórmula de adición} \\
&= \left(\tfrac{12}{13}\right)\left(-\tfrac{4}{5}\right) + \left(-\tfrac{5}{13}\right)\left(-\tfrac{3}{5}\right) && \text{De los triángulos} \\
&= -\tfrac{33}{65} && \text{Calcule}
\end{aligned}
$$


Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

■ Expresiones de la forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x$

Podemos escribir expresiones de la forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x$ en términos de una sola función trigonométrica usando la fórmula de adición del seno. Por ejemplo, considere la expresión

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

Si hacemos que $\phi = \pi/3$, entonces $\cos \phi = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} \phi = \sqrt{3}/2$, así podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x &= \cos\phi \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\phi \cos x \\
&= \operatorname{sen}(x + \phi) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Podemos hacer esto porque los coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{3}/2$ son precisamente el coseno y el seno de un número particular; en este caso, $\pi/3$. Podemos usar esta misma idea en general para escribir $A \operatorname{sen} x + B \cos x$ en la forma $k \operatorname{sen}(x + \phi)$. Empezamos por multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{A^2 + B^2}$ para obtener

$$A \operatorname{sen} x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x\right)$$

FIGURA 4

Necesitamos un número ϕ con la propiedad de que

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La figura 4 muestra que el punto (A, B) en el plano determina un número ϕ con precisamente esta propiedad. Con esta ϕ tenemos

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen} x + B \cos x &= \sqrt{A^2 + B^2}(\cos\phi \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\phi \cos x) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(x + \phi) \end{aligned}$$

Hemos probado el siguiente teorema.

SUMAS DE SENOS Y COSENOS

Si A y B son números reales, entonces

$$A \operatorname{sen} x + B \cos x = k \operatorname{sen}(x + \phi)$$

donde $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ y ϕ satisfacen

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJEMPLO 8 ■ Suma de los términos seno y coseno

Exprese $3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$ en la forma $k \operatorname{sen}(x + \phi)$.

SOLUCIÓN Por el teorema anterior, $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. El ángulo ϕ tiene la propiedad de que $\operatorname{sen}\phi = B/k = \frac{4}{5}$ y $\cos\phi = A/k = \frac{3}{5}$, y ϕ en el primer cuadrante (ya que $\operatorname{sen}\phi$ y $\cos\phi$ son positivos), así $\phi = \operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5}$. Usando la calculadora encontramos que $\phi \approx 53.1°$. Entonces

$$3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x \approx 5 \operatorname{sen}(x + 53.1°)$$

Ahora intente realizar el ejercicio 59 ■

EJEMPLO 9 ■ Trazar la gráfica de una función trigonométrica

Escriba la función $f(x) = -\operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ en la forma $k \operatorname{sen}(2x + \phi)$ y use la nueva forma para trazar la gráfica de la función.

SOLUCIÓN Dado que $A = -1$ y $B = \sqrt{3}$, tenemos $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$. El ángulo ϕ satisface $\cos\phi = -\frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\phi = \sqrt{3}/2$. De los signos de estas cantidades concluimos que ϕ está en el segundo cuadrante. Por tanto $\phi = 2\pi/3$. Por el teorema anterior podemos escribir

$$f(x) = -\operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Usando la forma

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

vemos que la gráfica es una curva seno con amplitud 2, periodo $2\pi/2 = \pi$ y desfase $-\pi/3$. En la figura 5 se muestra la gráfica.

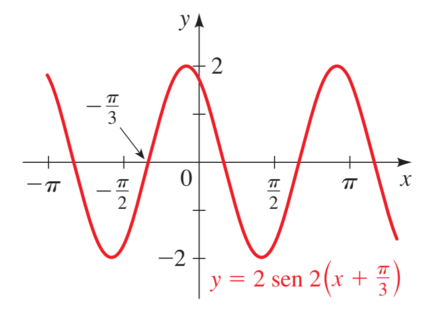


FIGURA 5

Ahora intente realizar el ejercicio 63 ■

7.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si conocemos los valores del seno y el coseno de x y y, podemos encontrar el valor de $\text{sen}(x + y)$ si usamos la fórmula ________ del seno. Exprese la fórmula: $\text{sen}(x + y) =$ ________________.

2. Si conocemos los valores del seno y el coseno de x y y, podemos encontrar el valor de $\cos(x - y)$ si usamos la fórmula ________ del coseno. Exprese la fórmula: $\cos(x - y) =$ ________________.

HABILIDADES

3–14 ■ Valores de funciones trigonométricas Use una fórmula de adición o sustracción para encontrar el valor exacto de la expresión, tal como se demuestra en el ejemplo 1.

3. $\text{sen } 75°$
4. $\text{sen } 15°$
5. $\cos 105°$
6. $\cos 195°$
7. $\tan 15°$
8. $\tan 165°$
9. $\text{sen } \dfrac{19\pi}{12}$
10. $\cos \dfrac{17\pi}{12}$
11. $\tan\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$
12. $\text{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$
13. $\cos \dfrac{11\pi}{12}$
14. $\tan \dfrac{7\pi}{12}$

15–20 ■ Valores de funciones trigonométricas Use una fórmula de adición o sustracción para escribir la expresión como una función trigonométrica de un número y luego encuentre su valor exacto.

15. $\text{sen } 18° \cos 27° + \cos 18° \text{ sen } 27°$
16. $\cos 10° \cos 80° - \text{sen } 10° \text{ sen } 80°$
17. $\cos \dfrac{3\pi}{7} \cos \dfrac{2\pi}{21} + \text{sen } \dfrac{3\pi}{7} \text{ sen } \dfrac{2\pi}{21}$
18. $\dfrac{\tan \dfrac{\pi}{18} + \tan \dfrac{\pi}{9}}{1 - \tan \dfrac{\pi}{18} \tan \dfrac{\pi}{9}}$
19. $\dfrac{\tan 73° - \tan 13°}{1 + \tan 73° \tan 13°}$
20. $\cos \dfrac{13\pi}{15} \cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) - \text{sen } \dfrac{13\pi}{15} \text{ sen}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$

21–24 ■ Identidades de cofunción Pruebe la identidad de cofunción usando las fórmulas de adición y sustracción.

21. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$
22. $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$
23. $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$
24. $\csc\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

25–46 ■ Demostrar identidades Pruebe la identidad.

25. $\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
26. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \text{sen } x$
27. $\text{sen}(x - \pi) = -\text{sen } x$
28. $\cos(x - \pi) = -\cos x$
29. $\tan(x - \pi) = \tan x$
30. $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$
31. $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$
32. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$
33. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3} + \tan x}{1 - \sqrt{3}\tan x}$
34. $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$
35. $\text{sen}(x + y) - \text{sen}(x - y) = 2 \cos x \text{ sen } y$
36. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$
37. $\cot(x - y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$
38. $\cot(x + y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$
39. $\tan x - \tan y = \dfrac{\text{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}$
40. $1 - \tan x \tan y = \dfrac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y}$
41. $\dfrac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \dfrac{\text{sen}(x - y)}{\cos(x + y)}$
42. $\dfrac{\text{sen}(x + y) - \text{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan y$
43. $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x - \text{sen}^2 y$
44. $\cos(x + y)\cos y + \text{sen}(x + y)\text{ sen } y = \cos x$
45. $\text{sen}(x + y + z) = \text{sen } x \cos y \cos z + \cos x \text{ sen } y \cos z + \cos x \cos y \text{ sen } z - \text{sen } x \text{ sen } y \text{ sen } z$
46. $\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$

47–50 ■ Expresiones que implican funciones trigonométricas inversas Escriba la expresión dada en términos de x y y solamente.

47. $\cos(\text{sen}^{-1} x - \tan^{-1} y)$
48. $\tan(\text{sen}^{-1} x + \cos^{-1} y)$
49. $\text{sen}(\tan^{-1} x - \tan^{-1} y)$
50. $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x + \cos^{-1} y)$

51–54 ■ Expresiones que implican funciones trigonométricas inversas Encuentre el valor exacto de la expresión.

51. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1} 1)$ **52.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cot^{-1}\sqrt{3})$

53. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{4} - \cos^{-1}\frac{1}{3})$ **54.** $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{2})$

55–58 ■ Evaluar expresiones que implican funciones trigonométricas inversas Evalúe cada expresión bajo las condiciones dadas.

55. $\cos(\theta - \phi)$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$, θ en el cuadrante IV, $\tan\phi = -\sqrt{3}$, ϕ en el cuadrante II

56. $\operatorname{sen}(\theta - \phi)$; $\tan\theta = \frac{4}{3}$, θ en el cuadrante III, $\operatorname{sen}\phi = -\sqrt{10}/10$, ϕ en el cuadrante IV

57. $\operatorname{sen}(\theta + \phi)$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$, θ en el cuadrante I, $\cos\phi = -2\sqrt{5}/5$, ϕ en el cuadrante II

58. $\tan(\theta + \phi)$; $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, θ en el cuadrante III, $\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{4}$, ϕ en el cuadrante II

59–62 ■ Expresiones en términos del seno Escriba la expresión en términos del seno únicamente.

59. $-\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$ **60.** $\operatorname{sen} x - \cos x$

61. $5(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$ **62.** $3\operatorname{sen}\pi x + 3\sqrt{3}\cos\pi x$

63–64 ■ Trace la gráfica de una función trigonométrica ***a)*** Exprese la función en términos del seno únicamente. ***b)*** Trace la gráfica de la función.

63. $g(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$ **64.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

HABILIDADES Plus

65–66 ■ Cociente de diferencias Sea $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Use las fórmulas de adición o sustracción para demostrar lo siguiente.

65. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\cos x\left(\dfrac{1 - \cos h}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$

66. $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \left(\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\cos x - \operatorname{sen} x\left(\dfrac{1 - \cos h}{h}\right)$



67–68 ■ Descubrir e identificar gráficamente En estos ejercicios descubrimos gráficamente una identidad y luego la demostramos. ***a)*** Trace la gráfica de la función y haga una conjetura; y ***b)*** demuestre que la conjetura es verdadera.

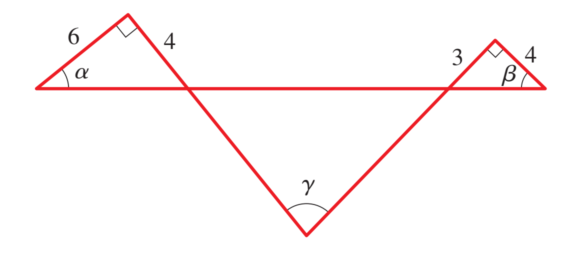
67. $y = \operatorname{sen}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

68. $y = -\frac{1}{2}[\cos(x + \pi) + \cos(x - \pi)]$

69. Diferencia de dos ángulos Demuestre que si $\beta - \alpha = \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(x + \alpha) + \cos(x + \beta) = 0$$

70. Suma de dos ángulos Refiérase a la figura. Demuestre que $\alpha + \beta = \gamma$, y encuentre $\tan\gamma$.



71–72 ■ Identidades que implican funciones trigonométricas inversas Demuestre la identidad.

71. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right) = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$

[*Sugerencia:* sea $u = \tan^{-1} x$ y $v = \tan^{-1} y$, entonces $x = \tan u$ y $y = \tan v$. Use una fórmula de adición para encontrar $\tan(u + v)$.]

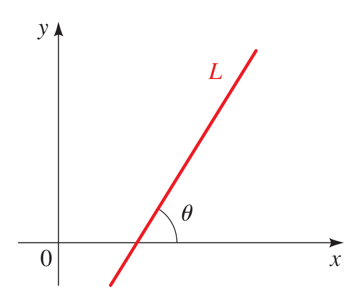
72. $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $x > 0$ [*Sugerencia:* sea $u = \tan^{-1} x$ y $v = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, entonces $x = \tan u$ y $\dfrac{1}{x} \tan v$.

Use una fórmula de adición para encontrar $\cot(u + v)$.]

73. Ángulo entre dos rectas En este ejercicio encontraremos una fórmula para el ángulo formado por dos rectas en un plano de coordenadas.

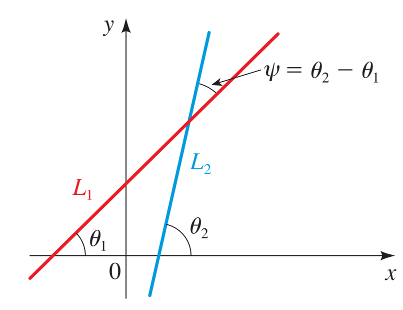
a) Si L es una recta en el plano y θ es el ángulo formado por la recta y el eje x como se muestra en la figura, demuestre que la pendiente m de la recta está dada por

$$m = \tan\theta$$



b) Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas en el plano con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Sea ψ el ángulo agudo formado por las dos rectas (vea la siguiente figura). Demuestre que

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

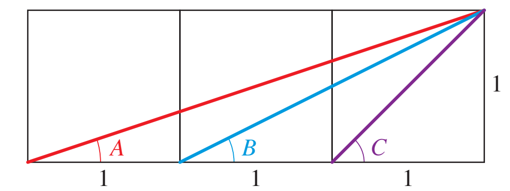


c) Encuentre el ángulo agudo formado por las dos rectas

$$y = \tfrac{1}{3}x + 1 \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2}x - 3$$

d) Demuestre que si dos rectas son perpendiculares entonces la pendiente de una es la recíproca negativa de la pendiente de la otra. [*Sugerencia:* primero encuentre una expresión para $\cot\psi$.]

74. Encuentre $\angle A + \angle B + \angle C$ en la figura. [*Sugerencia:* primero use una fórmula de adición para encontrar $\tan(A + B)$.]



APLICACIONES



75. Sumar un eco Un aparato digital de retardo hace eco de una señal de entrada al repetirla en un tiempo fijo después de recibida. Si ese aparato recibe la nota pura $f_1(t) = 5 \text{ sen } t$ y hace eco de la nota pura $f_2(t) = 5 \cos t$, entonces el sonido combinado es $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

***a*)** Trace la gráfica de $y = f(t)$, y observe que la gráfica tiene la forma de una curva sinusoidal $y = k \text{ sen}(t + \phi)$.

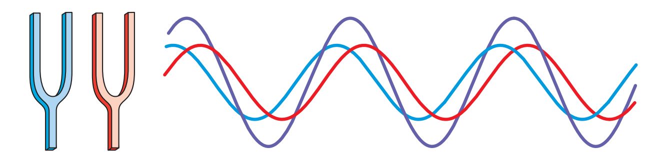
***b*)** Encuentre k y ϕ.

76. Interferencia Se pulsan dos diapasones idénticos, uno de ellos una fracción de segundo después que el otro. Los sonidos producidos están modelados por $f_1(t) = C \text{ sen } \omega t$ y $f_2(t) = C \text{ sen}(\omega t + \alpha)$. Las dos ondas sonoras se interfieren y producen una señal de sonido modelada por la suma de estas funciones

$$f(t) = C \text{ sen } \omega t + C \text{ sen}(\omega t + \alpha)$$

***a*)** Use la fórmula de adición para el seno con el fin de demostrar que $f(t) = A \text{ sen } \omega t + B \cos \omega t$, donde A y B son constantes que dependen de α.

***b*)** Suponga que $C = 10$ y $\alpha = \pi/3$. Encuentre las constantes k y ϕ para que $f(t) = k \text{ sen}(\omega t + \phi)$.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

77. DEMOSTRACIÓN: Fórmula de adición para el seno En el texto sólo se demostraron las fórmulas de adición y sustracción del coseno. Use estas fórmulas y las identidades de cofunción

$$\text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

para demostrar la fórmula de adición para el seno. [*Sugerencia:* para empezar use la primera identidad de cofunción para escribir

$$\text{sen}(s + t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s + t)\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right)$$

y use la fórmula de sustracción del coseno.]

78. DEMOSTRACIÓN: Fórmula de adición de la tangente Use las fórmulas de adición del coseno y del seno para demostrar la fórmula de adición de la tangente. [*Sugerencia:* use

$$\tan(s + t) = \frac{\text{sen}(s + t)}{\cos(s + t)}$$

y divida el numerador y el denominador entre $\cos s \cos t$.]

7.3 FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE, SEMIÁNGULO Y PRODUCTO A SUMA

■ Fórmulas de ángulo doble ■ Fórmulas de semiángulo ■ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas ■ Fórmulas de producto a suma

Las identidades que consideramos en esta sección son consecuencia de las fórmulas de adición. Las **fórmulas de ángulo doble** nos permiten encontrar los valores de las funciones trigonométricas en $2x$ desde sus valores en x. Las **fórmulas de semiángulo** relacionan los valores de las funciones trigonométricas en $\frac{1}{2}x$ con sus valores en x. Las **fórmulas de producto a suma** relacionan productos de senos y cosenos con sumas de senos y cosenos.

■ Fórmulas de ángulo doble

Las fórmulas del cuadro de la página siguiente son consecuencias inmediatas de las fórmulas de adición, mismas que demostramos en la sección 7.2.

FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

Fórmula de seno: $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Fórmula de coseno:
$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

Fórmula de tangente: $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

Presentamos las demostraciones para las fórmulas de coseno. Pedimos al estudiante que demuestre las fórmulas restantes en los ejercicios 35 y 36.

Demostración de las fórmulas de ángulo doble de coseno

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x + x) \\ &= \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Las fórmulas segunda y tercera para $\cos 2x$ se obtienen de la fórmula que acabamos de demostrar y de la identidad pitagórica. Sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

La tercera fórmula se obtiene en la misma forma, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. ■

EJEMPLO 1 ■ Uso de las fórmulas de ángulo doble

Si $\cos x = -\frac{2}{3}$ y x está en el segundo cuadrante, encuentre $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Usando una de las fórmulas de ángulo doble del coseno obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Para usar la fórmula $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$, primero necesitamos encontrar $\operatorname{sen} x$. Tenemos

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - (-\tfrac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

donde hemos usado la raíz cuadrada positiva porque $\operatorname{sen} x$ es positivo en el segundo cuadrante. Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= 2\operatorname{sen} x \cos x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Una fórmula de ángulo triple

Escriba $\cos 3x$ en términos de $\cos x$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x && \text{Fórmula de adición} \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\operatorname{sen} x \cos x)\operatorname{sen} x && \text{Fórmulas de ángulo doble} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x && \text{Desarrolle} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\,(1 - \cos^2 x) && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x && \text{Desarrolle} \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x && \text{Simplifique}
\end{aligned}
$$

Ahora intente realizar el ejercicio 109 ■

El ejemplo 2 muestra que $\cos 3x$ se puede escribir como un polinomio de grado 3 en $\cos x$. La identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ muestra que $\cos 2x$ es un polinomio de grado 2 en $\cos x$. De hecho, para cualquier número natural n podemos escribir $\cos nx$ como un polinomio en $\cos x$ de grado n (vea la nota que sigue al ejercicio 109). El resultado análogo para $\operatorname{sen} nx$ no es verdadero en general.

EJEMPLO 3 ■ Demostración de una identidad

Demuestre la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} = 4\cos x - \sec x$.

SOLUCIÓN Empezamos con el lado izquierdo.

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}(x + 2x)}{\operatorname{sen} x \cos x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmula de adición} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x\,(2\cos^2 x - 1) + \cos x\,(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmulas de ángulo doble} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x\,(2\cos^2 x - 1)}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos x\,(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fracción separada} \\
&= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Elimine} \\
&= 2\cos x - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Fracción separada} \\
&= 4\cos x - \sec x && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}
$$

Ahora intente realizar el ejercicio 87 ■

■ Fórmulas de semiángulo

Las siguientes fórmulas nos permiten escribir cualquier expresión trigonométrica que contiene potencias pares de seno y coseno en términos solamente de la primera potencia de coseno. Esta técnica es importante en cálculo. Las fórmulas de semiángulo son consecuencia inmediata de estas fórmulas.

FÓRMULAS PARA BAJAR POTENCIAS

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Demostración La primera fórmula se obtiene al despejar $\operatorname{sen}^2 x$ en la fórmula de doble ángulo $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. Del mismo modo la segunda fórmula se obtiene al despejar $\cos^2 x$ en la fórmula de doble ángulo $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

La última fórmula se deduce de las primeras dos y de las identidades recíprocas:

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

■

EJEMPLO 4 ■ Bajar potencias en una expresión trigonométrica

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia de coseno.

SOLUCIÓN Usamos las fórmulas para bajar potencias repetidamente.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \\
&= \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)
\end{aligned}$$

Otra forma de obtener esta identidad es usar la fórmula de ángulo doble para seno en la forma $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)
\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

FÓRMULAS DE SEMIÁNGULO

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

La opción del signo $+$ o $-$ depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$.

Demostración Sustituimos $x = u/2$ en las fórmulas para bajar potencias y tomar la raíz cuadrada de cada lado. Esto da las primeras dos fórmulas de semiángulo. En el caso de la fórmula de semiángulo de la tangente obtenemos

$$\tan\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)\left(\frac{1-\cos u}{1-\cos u}\right)}$$ Multiplicar el numerador y el denominador por $1 - \cos u$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos u)^2}{1-\cos^2 u}}$$ Simplificar

$$= \pm\frac{|1-\cos u|}{|\operatorname{sen} u|}$$ $\sqrt{A^2} = |A|$ y $1 - \cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u$

Ahora, $1 - \cos u$ es positivo para todos los valores de u. También es cierto que sen u y $\tan(u/2)$ siempre tienen el mismo signo. (Verifique esto.) Se deduce que

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

La otra fórmula de semiángulo de la tangente se deduce de esta al multiplicar el numerador y el denominador por $1 + \cos u$. ■

EJEMPLO 5 ■ Uso de una fórmula de semiángulo

Encuentre el valor exacto de sen 22.5°.

SOLUCIÓN Puesto que 22.5° es la mitad de 45° usamos la fórmula de semiángulo del seno con $u = 45°$. Elegimos el signo + porque 22.5° está en el primer cuadrante.

$$\operatorname{sen}\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$$ Fórmula de semiángulo

$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}}$$ $\cos 45° = \sqrt{2}/2$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$ Común denominador

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$ Simplifique

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

EJEMPLO 6 ■ Uso de una fórmula de semiángulo

Encuentre $\tan(u/2)$ si sen $u = \frac{2}{5}$ y u está en el segundo cuadrante.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula de semiángulo de la tangente primero necesitamos encontrar cos u. Dado que el coseno es negativo en el segundo cuadrante, tenemos

$$\cos u = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}$$

$$= -\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Por tanto,

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$= \frac{1+\sqrt{21}/5}{\frac{2}{5}} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

En cálculo se presentan expresiones que tienen funciones trigonométricas y sus inversas. En los siguientes ejemplos ilustramos la forma de evaluar estas expresiones.

EJEMPLO 7 ■ Simplificación de una expresión que tiene una función trigonométrica inversa

Escriba $\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en x solamente, donde $-1 \le x \le 1$.

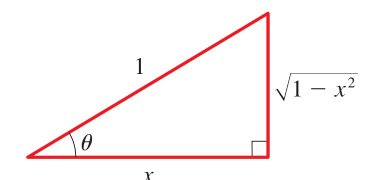


FIGURA 1

SOLUCIÓN Sea $\theta = \cos^{-1}x$ y trace un triángulo como en la figura 1. Necesitamos encontrar sen 2θ pero del triángulo sólo podemos encontrar funciones trigonométricas de θ, no de 2θ. Por tanto, usamos la fórmula de ángulo doble del seno.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x) &= \operatorname{sen} 2\theta && \cos^{-1}x = \theta \\
&= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta && \text{Fórmula de ángulo doble} \\
&= 2x\sqrt{1-x^2} && \text{Del triángulo}
\end{aligned}
$$



EJEMPLO 8 ■ Evaluación de una expresión que tiene funciones trigonométricas inversas

Evalúe sen 2θ, donde $\cos\theta = -\frac{2}{5}$ con θ en el segundo cuadrante.

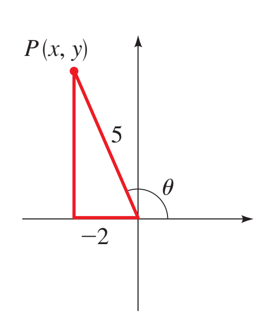


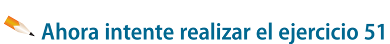
FIGURA 2

SOLUCIÓN Primero trazamos el ángulo θ en posición normal con el lado terminal en el segundo cuadrante, como en la figura 2. Dado que $\cos\theta = x/r = -\frac{2}{5}$, podemos marcar un lado y la hipotenusa del triángulo en la figura 2. Para encontrar el lado que falta usamos el teorema de Pitágoras.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 && \text{Teorema de Pitágoras} \\
(-2)^2 + y^2 &= 5^2 && x = -2, \quad r = 5 \\
y &= \pm\sqrt{21} && \text{Despeje } y^2 \\
y &= +\sqrt{21} && \text{Porque } y > 0
\end{aligned}
$$

Ahora podemos usar la fórmula de ángulo doble del seno:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta && \text{Fórmula de ángulo doble} \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) && \text{Del triángulo} \\
&= -\frac{4\sqrt{21}}{25} && \text{Simplifique}
\end{aligned}
$$



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Dónde sentarse en el cine

Para ver mejor una pintura o una película se requiere que el ángulo de visión sea lo más grande posible. Si la pintura o la pantalla de la película están a una altura arriba del nivel de los ojos, ya sea que se esté demasiado lejos o demasiado cerca, se tendrá un ángulo de visión pequeño y por tanto en una experiencia visual pobre. ¿Cuál es la mejor distancia para ver una película o una pintura? En este proyecto utilizamos trigonometría para encontrar la mejor ubicación para ver una pintura o una película. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Fórmulas de producto a suma

Es posible escribir el producto sen u cos v como una suma de funciones trigonométricas. Para ello considere las fórmulas de adición y sustracción de la función seno:

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

Sumando los lados izquierdo y derecho de estas fórmulas se obtiene

$$\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v$$

Dividiendo entre 2 se obtiene la fórmula

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

Las otras tres **fórmulas de producto a suma** se deducen de las fórmulas de adición en una forma semejante.

FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

EJEMPLO 9 ■ Expresar un producto trigonométrico como una suma

Exprese sen $3x$ sen $5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN Usando la cuarta fórmula de producto a suma con $u = 3x$ y $v = 5x$, y ante el hecho de que coseno es una función par obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x &= \tfrac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)] \\ &= \tfrac{1}{2}\cos(-2x) - \tfrac{1}{2}\cos 8x \\ &= \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 8x \end{aligned}$$


Ahora intente realizar el ejercicio 55 ■

Las fórmulas de producto a suma también se pueden usar como fórmulas de suma a producto. Esto es posible porque el lado derecho de cada fórmula de producto a suma es una suma y el lado izquierdo es un producto. Por ejemplo, si hacemos

$$u = \frac{x + y}{2} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{x - y}{2}$$

en la primera fórmula de producto a suma obtenemos

$$\operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)$$

entonces $$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

Las tres restantes de las siguientes **fórmulas de suma a producto** se obtienen de una manera semejante.

FÓRMULAS DE SUMA A PRODUCTO

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

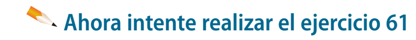
$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

EJEMPLO 10 ■ Expresar una suma trigonométrica como producto

Escriba $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x$ como producto.

SOLUCIÓN La primera fórmula de suma a producto da

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x &= 2 \operatorname{sen} \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} \\ &= 2 \operatorname{sen} 5x \cos 2x \end{aligned}$$



Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

EJEMPLO 11 ■ Demostrar una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$.

SOLUCIÓN Aplicamos la segunda fórmula de suma a producto en el numerador y la tercera fórmula en el denominador.

$$\begin{aligned} \text{LI} = \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x} &= \frac{2 \cos \dfrac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \dfrac{3x-x}{2}}{2 \cos \dfrac{3x+x}{2} \cos \dfrac{3x-x}{2}} && \text{Fórmulas de suma a producto} \\ &= \frac{2 \cos 2x \operatorname{sen} x}{2 \cos 2x \cos x} && \text{Simplifique} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x = \text{LD} && \text{Elimine} \end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 93 ■

7.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si conocemos los valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ podemos encontrar el valor de $\operatorname{sen} 2x$ usando la fórmula ________ del seno. Exprese la fórmula: $\operatorname{sen} 2x =$ ________.

2. Si conocemos los valores de $\cos x$ y el cuadrante en el que se encuentra $x/2$, podemos encontrar el valor de $\operatorname{sen}(x/2)$ usando la fórmula ________ del seno. Exprese la fórmula: $\operatorname{sen}(x/2) =$ ________.

HABILIDADES

3–10 ■ Fórmulas de ángulos dobles Encuentre sen $2x$, cos $2x$ y tan $2x$ a partir de la información dada.

3. $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$, x en el cuadrante I

4. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x en el cuadrante II

5. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\csc x < 0$

6. $\csc x = 4$, $\tan x < 0$

7. $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, x en el cuadrante III

8. $\sec x = 2$, x en el cuadrante IV

9. $\tan x = -\frac{1}{3}$, $\cos x > 0$

10. $\cot x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} x > 0$

11–16 ■ Bajar las potencias a una expresión trigonométrica Use las fórmulas para bajar potencias y volver a escribir la expresión en términos de la primera potencia de coseno como en el ejemplo 4.

11. $\operatorname{sen}^4 x$

12. $\cos^4 x$

13. $\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x$

14. $\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x$

15. $\cos^4 x \operatorname{sen}^4 x$

16. $\cos^6 x$

17–28 ■ Fórmulas de semiángulos Use una fórmula de semiángulo apropiada para encontrar el valor exacto de la expresión.

17. sen 15°

18. tan 15°

19. tan 22.5°

20. sen 75°

21. cos 165°

22. cos 112.5°

23. $\tan \dfrac{\pi}{8}$

24. $\cos \dfrac{3\pi}{8}$

25. $\cos \dfrac{\pi}{12}$

26. $\tan \dfrac{5\pi}{12}$

27. $\operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{8}$

28. $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{12}$

29–34 ■ Fórmulas de ángulo doble y de semiángulo Simplifique la expresión usando una fórmula de ángulo doble o una fórmula de semiángulo.

29. *a)* $2 \operatorname{sen} 18° \cos 18°$ *b)* $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$

30. *a)* $\dfrac{2 \tan 7°}{1 - \tan^2 7°}$ *b)* $\dfrac{2 \tan 7\theta}{1 - \tan^2 7\theta}$

31. *a)* $\cos^2 34° - \operatorname{sen}^2 34°$ *b)* $\cos^2 5\theta - \operatorname{sen}^2 5\theta$

32. *a)* $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$ *b)* $2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$

33. *a)* $\dfrac{\operatorname{sen} 8°}{1 + \cos 8°}$ *b)* $\dfrac{1 - \cos 4\theta}{\operatorname{sen} 4\theta}$

34. *a)* $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 30°}{2}}$ *b)* $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8\theta}{2}}$

35. Demostración de una fórmula de ángulo doble Use la fórmula de adición del seno para demostrar la fórmula de ángulo doble del seno.

36. Demostración de una fórmula de ángulo doble Use la fórmula de adición de la tangente para demostrar la fórmula de ángulo doble de la tangente.

37–42 ■ Uso de una fórmula de semiángulo Encuentre $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$, $\cos \dfrac{x}{2}$ y $\tan \dfrac{x}{2}$ a partir de la información dada.

37. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $0° < x < 90°$

38. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $180° < x < 270°$

39. $\csc x = 3$, $90° < x < 180°$

40. $\tan x = 1$, $0° < x < 90°$

41. $\sec x = \frac{3}{2}$, $270° < x < 360°$

42. $\cot x = 5$, $180° < x < 270°$

43–46 ■ Expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas Escriba la expresión dada como una expresión algebraica en x.

43. $\operatorname{sen}(2 \tan^{-1} x)$

44. $\tan(2 \cos^{-1} x)$

45. $\operatorname{sen}(\frac{1}{2} \cos^{-1} x)$

46. $\cos(2 \operatorname{sen}^{-1} x)$

47–50 ■ Expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas Encuentre el valor exacto de la expresión dada.

47. $\operatorname{sen}(2 \cos^{-1} \frac{7}{25})$

48. $\cos(2 \tan^{-1} \frac{12}{5})$

49. $\sec(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4})$

50. $\tan(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{2}{3})$

51–54 ■ Evaluar una expresión que tiene funciones trigonométricas Evalúe cada expresión bajo las condiciones dadas.

51. $\cos 2\theta$; $\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$, θ en el cuadrante III

52. $\operatorname{sen}(\theta/2)$; $\tan \theta = -\frac{5}{12}$, θ en el cuadrante IV

53. $\operatorname{sen} 2\theta$; $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{7}$, θ en el cuadrante II

54. $\tan 2\theta$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$, θ en el cuadrante I

55–60 ■ Fórmulas producto a suma Escriba el producto como una suma.

55. $\operatorname{sen} 2x \cos 3x$

56. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x$

57. $\cos x \operatorname{sen} 4x$

58. $\cos 5x \cos 3x$

59. $3 \cos 4x \cos 7x$

60. $11 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{4}$

61–66 ■ Fórmulas producto a suma Escriba la suma como producto.

61. $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

62. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x$

63. $\cos 4x - \cos 6x$

64. $\cos 9x + \cos 2x$

65. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 7x$

66. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$

67–72 ■ Valor de un producto o suma Encuentre el valor del producto o suma.

67. $2 \operatorname{sen} 52.5° \operatorname{sen} 97.5°$

68. $3 \cos 37.5° \cos 7.5°$

69. $\cos 37.5° \operatorname{sen} 7.5°$

70. $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$

71. $\cos 255° - \cos 195°$

72. $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

73–92 ■ Demostración de identidades Demuestre la identidad.

73. $\cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x = \cos 10x$

74. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

75. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

76. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

77. $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

78. $\dfrac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \tan x$

79. $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos x \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

80. $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) + \csc x = \dfrac{2 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

81. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} = 4 \cos x \cos 2x$

82. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \frac{1}{2} \sec x \csc x$

83. $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

84. $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x}$

85. $\cot 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

86. $4(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3 \operatorname{sen}^2 2x$

87. $\tan 3x = \dfrac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

88. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \cos 3x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + 4 \operatorname{sen} x \cos x$

89. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x$

90. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}{\cos 3x - \cos 7x} = \cot 2x$

91. $\dfrac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$

92. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$

93. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$

94. $\tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$

95. $\tan^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

96. $(1 - \cos 4x)(2 + \tan^2 x + \cot^2 x) = 8$

97–100 ■ Fórmulas suma a producto Utilice una fórmula suma a producto para demostrar lo siguiente.

97. $\operatorname{sen} 130° - \operatorname{sen} 110° = -\operatorname{sen} 10°$

98. $\cos 100° - \cos 200° = \operatorname{sen} 50°$

99. $\operatorname{sen} 45° + \operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen} 75°$

100. $\cos 87° + \cos 33° = \operatorname{sen} 63°$

HABILIDADES Plus

101. Demostrar una identidad Demuestre la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x} = \tan 3x$$

102. Demostrar una identidad Utilice la identidad

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

n veces para demostrar que

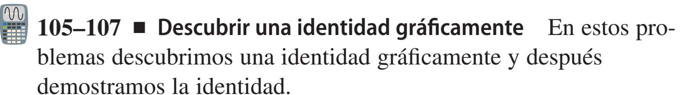
$$\operatorname{sen}(2^n x) = 2^n \operatorname{sen} x \cos x \cos 2x \cos 4x \cdots \cos 2^{n-1} x$$

103–104 ■ Identidades que tienen funciones trigonométricas inversas Demuestre la identidad.

103. $2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2)$, $0 \le x \le 1$ [*Sugerencia:* sea $u = \operatorname{sen}^{-1} x$, tal que $x = \operatorname{sen} u$. Utilice la fórmula del ángulo doble para demostrar que $1 - 2x^2 = \cos 2u$.]

104. $2 \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

[*Sugerencia:* sea $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, tal que $x = \dfrac{1}{\tan u} = \cot u$. Utilice la fórmula del ángulo doble para demostrar que $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{\cot^2 u - 1}{\csc^2 u} = \cos 2u$.]



105–107 ■ Descubrir una identidad gráficamente En estos problemas descubrimos una identidad gráficamente y después demostramos la identidad.

105. ***a)*** Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$, y haga una conjetura.

b) Demuestre la conjetura que hizo en el inciso *a*).

106. ***a)*** Trace la gráfica de $f(x) = \cos 2x + 2 \operatorname{sen}^2 x$, y haga una conjetura.

b) Demuestre la conjetura que hizo en el inciso *a*).

107. Sea $f(x) = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 7x$.

a) Trace la gráfica de $y = f(x)$.

b) Verifique que $f(x) = 2 \cos \frac{1}{2}x \operatorname{sen} \frac{13}{2}x$.

c) Trace la gráfica de $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$ y $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$, junto con la gráfica del inciso *a*), en el mismo rectángulo de vista. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas con la gráfica de f?

108. Una ecuación cubica Sea $3x = \pi/3$, y sea $y = \cos x$. Use el resultado del ejemplo 2 para demostrar que y satisface la ecuación

$$8y^3 - 6y - 1 = 0$$

[*Nota:* esta ecuación tiene raíces de cierta clase que se usan para demostrar que el ángulo $\pi/3$ no se puede dividir en tres, únicamente con regla y compás.]

109. Polinomios de Tchebycheff

a) Demuestre que hay un polinomio $P(t)$ de grado 4 tal que $\cos 4x = P(\cos x)$ (vea el ejemplo 2).

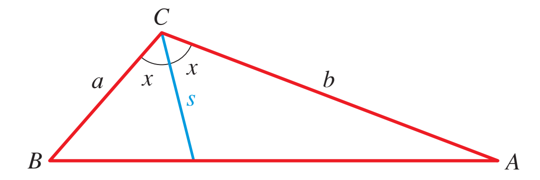
b) Demuestre que hay un polinomio $Q(t)$ de grado 5 tal que $\cos 5x = Q(\cos x)$.

[*Nota:* en general, hay un polinomio $P_n(t)$ de grado n tal que $\cos nx = P_n(\cos x)$. Estos polinomios se denominan *polinomios de Tchebychef* en honor al matemático ruso P. L. Tchebycheff (1821-1894).]

110. Longitud de un bisector En el triángulo ABC (vea la figura) el segmento de recta s biseca el ángulo C. Demuestre que la longitud de s está dada por

$$s = \frac{2ab\cos x}{a + b}$$

[*Sugerencia:* use la ley de senos.]



111. Ángulos de un triángulo Si A, B y C son los ángulos en un triángulo demuestre que

$$\text{sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C = 4 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C$$

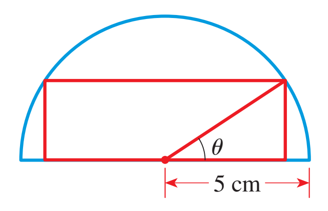
112. Área máxima Un rectángulo se ha de inscribir en un semicírculo de 5 cm de radio tal como se muestra en la figura siguiente.

a) Demuestre que el área del rectángulo está modelada por la función

$$A(\theta) = 25 \text{ sen } 2\theta$$

b) Encuentre la máxima área posible para ese rectángulo inscrito. [*Sugerencia:* utilice el hecho de que sen u alcanza su valor máximo en $u = \pi/2$.]

c) Encuentre las dimensiones del rectángulo inscrito con la máxima área posible.



APLICACIONES

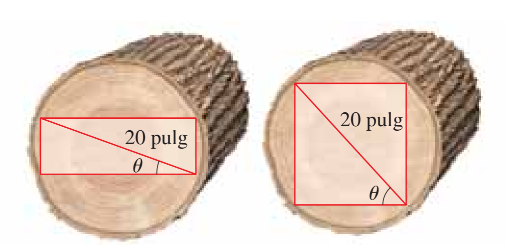
113. Cortar una viga de madera Se corta una viga rectangular de un tronco cilíndrico de 20 pulgadas de diámetro.

a) Demuestre que el área de sección transversal de la viga está modelada por la función

$$A(\theta) = 200 \text{ sen } 2\theta$$

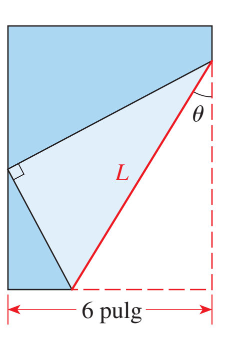
donde θ es como se muestra en la figura.

b) Demuestre que la máxima área de sección transversal de esa viga es de 200 pulg^2. [*Sugerencia:* use el hecho de que sen u alcanza su valor máximo en $u = \pi/2$.]



114. Longitud de un doblez La esquina inferior derecha de una pieza grande de papel de 6 pulgadas de ancho se dobla sobre el borde izquierdo, como se muestra. La longitud L del doblez depende del ángulo θ. Demuestre que

$$L = \frac{3}{\text{sen } \theta \cos^2 \theta}$$



115. Pulsaciones de sonido Cuando dos notas puras que son cercanas en frecuencia se ejecutan juntas, sus sonidos interfieren produciendo *pulsos*; esto es, la intensidad (o amplitud) del sonido aumenta y disminuye alternadamente. Si las dos notas están dadas por

$$f_1(t) = \cos 11t \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = \cos 13t$$

el sonido resultante es $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

a) Trace la gráfica de la función $y = f(t)$.

b) Verifique que $f(t) = 2 \cos t \cos 12t$.

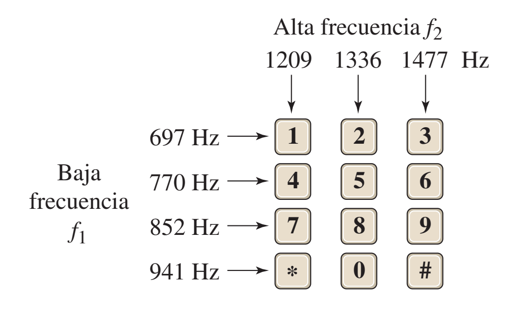
c) Trace la gráfica de $y = 2 \cos t$ y $y = -2 \cos t$, junto con la gráfica del inciso *a*), en el mismo rectángulo de vista. ¿Cómo describen estas gráficas la variación en intensidad del sonido?

116. Teléfonos de tonos Cuando se presiona una tecla en un teléfono de tonos, el teclado genera dos tonos puros que se combinan para producir un sonido que, de manera única, identifica la tecla. La figura siguiente muestra la baja frecuencia f_1 y la alta frecuencia f_2 asociadas con cada tecla. La presión de una tecla produce la onda de sonido $y = \text{sen}(2\pi f_1 t) + \text{sen}(2\pi f_2 t)$.

a) Encuentre la función que modele el sonido producido cuando se presiona la tecla 4.

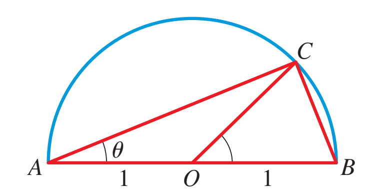
b) Use una fórmula de suma a producto para expresar el sonido generado por la tecla 4 como producto de una función seno y una función coseno.

c) Trace la gráfica de la onda de sonido generada por la tecla 4, de $t = 0$ a $t = 0.006$ segundos.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

117. DEMOSTRACIÓN: Prueba geométrica de una fórmula de ángulo doble Use la figura siguiente para demostrar que sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ.



[*Sugerencia:* encuentre el área del triángulo ABC de dos formas diferentes. Necesitará los siguientes hechos de geometría:

Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, de modo que $\angle ACB$ es un ángulo recto.

El ángulo central subtendido por la cuerda de un círculo es dos veces el ángulo subtendido por la cuerda del círculo, de modo que $\angle BOC$ es 2θ.]

7.4 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

■ Ecuaciones trigonométricas básicas ■ Solución de ecuaciones trigonométricas por factorización

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica** como, por ejemplo, las siguientes:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$2 \text{ sen } \theta - 1 = 0$$

$$\tan 2\theta - 1 = 0$$

La primera ecuación es una *identidad*, es decir, es verdadera para todo valor de la variable θ. Las otras dos ecuaciones son verdaderas sólo para ciertos valores de θ. Para resolver una ecuación trigonométrica encontramos todos los valores de la variable que hagan verdadera la ecuación.

■ Ecuaciones trigonométricas básicas

La resolución de cualquier ecuación trigonométrica siempre se reduce a resolver una **ecuación trigonométrica básica**, es decir, una ecuación de la forma $T(\theta) = c$, donde T es una función trigonométrica y c es una constante. En los siguientes tres ejemplos resolvemos estas ecuaciones básicas.

EJEMPLO 1 ■ Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación sen $\theta = \dfrac{1}{2}$.

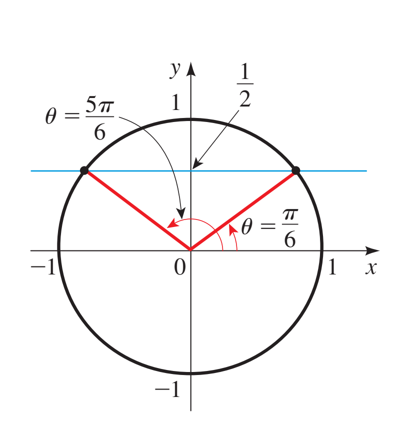


FIGURA 1

SOLUCIÓN **Encontrar las soluciones en un periodo.** Dado que el seno tiene un periodo 2π, primero encontramos las soluciones en cualquier intervalo de longitud 2π. Para encontrar estas soluciones veamos la circunferencia unitaria de la figura 1. Vemos que sen $\theta = \frac{1}{2}$ en los cuadrantes primero y segundo, de modo que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Encontrar todas las soluciones. Debido a que la función seno repite sus valores cada 2π unidades, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. La figura 2 da una representación gráfica de las soluciones.

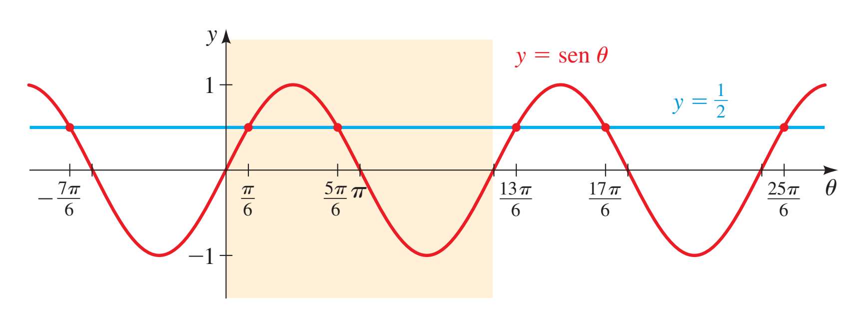


FIGURA 2

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

EJEMPLO 2 ■ Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y haga una lista de ocho soluciones específicas.

SOLUCIÓN **Encontrar las soluciones en un periodo.** Debido a que el coseno tiene periodo 2π, primero encontramos las soluciones en cualquier intervalo de longitud 2π. De la circunferencia unitaria de la figura 3 vemos que $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$ en los cuadrantes segundo y tercero, de modo que las soluciones del intervalo $[0, 2\pi)$ son

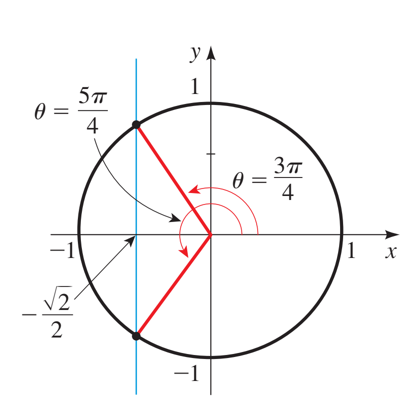


FIGURA 3

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \theta = \frac{5\pi}{4}$$

Encontrar todas las soluciones. Debido a que la función coseno repite sus valores cada 2π unidades, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. Se puede comprobar que para $k = -1, 0, 1, 2$ obtenemos las siguientes soluciones específicas:

$$\theta = \underbrace{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}}_{k=-1}, \underbrace{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}}_{k=0}, \underbrace{\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}}_{k=1}, \underbrace{\frac{19\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}}_{k=2}$$

La figura 4 da una representación gráfica de las soluciones.

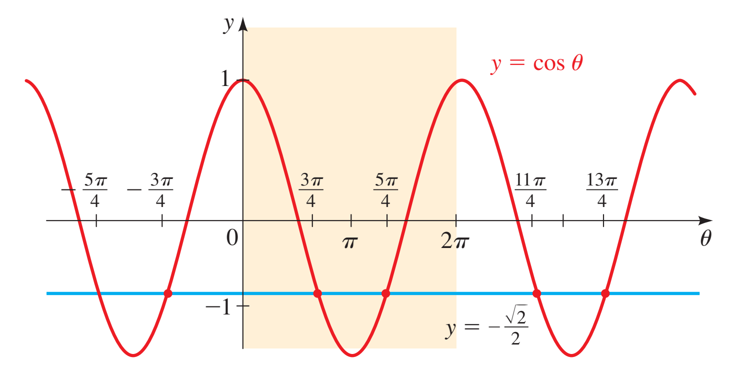


FIGURA 4

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

EJEMPLO 3 ■ Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación $\cos\theta = 0.65$.

SOLUCIÓN **Encontrar las soluciones en un periodo.** Primero encontramos una solución al tomar $\cos^{-1}$ de cada lado de la ecuación.

$$\cos\theta = 0.65 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$\theta = \cos^{-1}(0.65) \qquad \text{Tome } \cos^{-1} \text{ de cada lado}$$
$$\theta \approx 0.86 \qquad \text{Calculadora (en modo radianes)}$$

Debido a que el coseno tiene periodo 2π, encontraremos las soluciones en cualquier intervalo de longitud 2π. Para encontrar estas soluciones vemos la circunferencia unitaria de la figura 5. Observamos que $\cos\theta = 0.86$ en los cuadrantes primero y cuarto, por lo que las soluciones son

$$\theta \approx 0.86 \qquad \theta \approx 2\pi - 0.86 \approx 5.42$$

Encontrar todas las soluciones. Para obtener todas las soluciones de la ecuación sumamos múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$\theta \approx 0.86 + 2k\pi \qquad \theta \approx 5.42 + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

FIGURA 5

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

EJEMPLO 4 ■ Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación $\tan\theta = 2$.

SOLUCIÓN **Encontrar las soluciones en un periodo.** Primero encontramos una solución al tomar $\tan^{-1}$ de cada lado de la ecuación.

$$\tan\theta = 2 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$\theta = \tan^{-1}(2) \qquad \text{Tome } \tan^{-1} \text{ de cada lado}$$
$$\theta \approx 1.12 \qquad \text{Calculadora (en modo de radianes)}$$

Por la definición de $\tan^{-1}$, la solución que obtuvimos es la única solución en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (que es un intervalo de longitud π).

Encontrar todas las soluciones. Dado que la tangente tiene periodo π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de π:

$$\theta \approx 1.12 + k\pi$$

donde k es cualquier entero. En la figura 6 se muestra una representación gráfica de las soluciones. Se puede comprobar que las soluciones en la gráfica corresponden a $k = -1, 0, 1, 2, 3$.

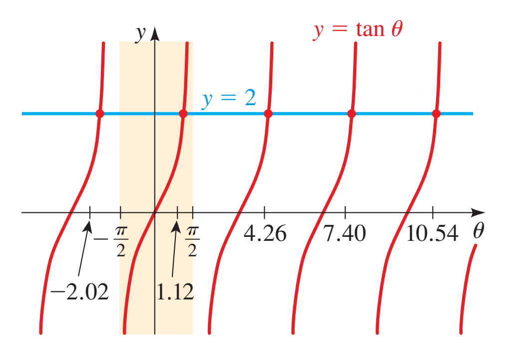


FIGURA 6

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

En el siguiente ejemplo resolvemos ecuaciones trigonométricas que son algebraicamente equivalentes a las ecuaciones trigonométricas básicas.

EJEMPLO 5 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas

Primero empezamos por despejar.

a) $2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$ ***b***) $\tan^2 \theta - 3 = 0$

SOLUCIÓN

a) Primero empezamos por despejar sen θ.

$$2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$2 \operatorname{sen} \theta = 1 \quad \text{Sume 1}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \quad \text{Divida entre 2}$$

Esta última ecuación es la misma que en el ejemplo 1. Las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

b) Empezamos por despejar tan θ.

$$\tan^2 \theta - 3 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$\tan^2 \theta = 3 \quad \text{Sume 3}$$

$$\tan \theta = \pm\sqrt{3} \quad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

Debido a que la tangente tiene periodo π, primero encontramos las soluciones en cualquier intervalo de longitud π. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ las soluciones son $\theta = \pi/3$ y $\theta = -\pi/3$. Para obtener todas las soluciones sumamos múltiplos enteros de π a estas soluciones:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ahora intente realizar el ejercicios 27 y 33 ■

■ Solución de ecuaciones trigonométricas por factorización

Propiedad de producto cero

Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

La factorización es una de las técnicas más útiles para resolver ecuaciones, incluyendo ecuaciones trigonométricas. La idea es mover todos los términos a un lado de la ecuación, factorizar y luego usar la propiedad del producto cero (vea la sección 1.5).

EJEMPLO 6 ■ Una ecuación trigonométrica de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $2 \cos^2 \theta - 7 \cos \theta + 3 = 0$.

Ecuación de tipo cuadrática

$$2C^2 - 7C + 3 = 0$$

$$(2C - 1)(C - 3) = 0$$

SOLUCIÓN Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$2 \cos^2 \theta - 7 \cos \theta + 3 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta - 3) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$2 \cos \theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \cos \theta - 3 = 0 \quad \text{Iguale a 0 cada factor}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos \theta = 3 \quad \text{Despeje } \cos \theta$$

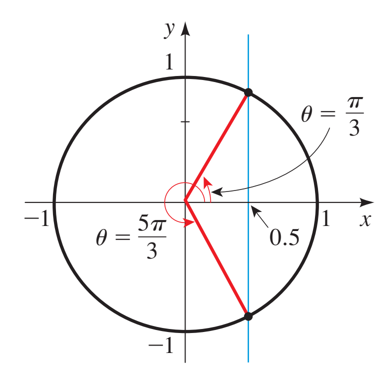


FIGURA 7

Debido a que el coseno tiene periodo 2π, primero encontramos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. Para la primera ecuación las soluciones son $\theta = \pi/3$ y $\theta = 5\pi/3$ (vea la figura 7). La segunda ecuación no tiene solución porque $\cos\theta$ nunca es mayor a 1. Entonces las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

EJEMPLO 7 ■ Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Resuelva la ecuación $5 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 4\cos\theta = 0$.

SOLUCIÓN Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$5 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 2\cos\theta = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\cos\theta\,(5\operatorname{sen}\theta + 2) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad 5\operatorname{sen}\theta + 4 = 0 \qquad \text{Iguale a 0 cada factor}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -0.8 \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}\theta$$

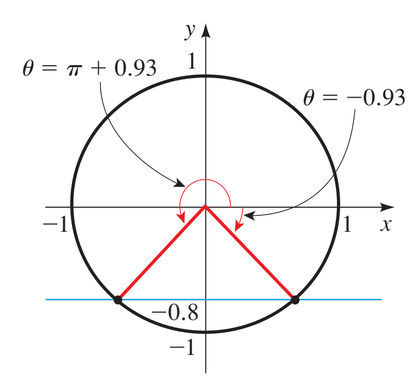


FIGURA 8

Puesto que seno y coseno tienen periodo 2π, primero encontramos las soluciones de estas ecuaciones en un intervalo de longitud 2π. Para la primera ecuación las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$. Para resolver la segunda ecuación, tomamos sen^{-1} de cada lado.

$$\operatorname{sen}\theta = -0.80 \qquad \text{Segunda ecuación}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-0.80) \qquad \text{Tome } \operatorname{sen}^{-1} \text{ de cada lado}$$

$$\theta \approx -0.93 \qquad \text{Calculadora (en modo de radianes)}$$

Entonces las soluciones en un intervalo de longitud 2π son $\theta = -0.93$ y $\theta = \pi + 0.93 \approx 4.07$ (vea la figura 8). Obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de 2π a estas soluciones.

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \theta \approx -0.93 + 2k\pi \qquad \theta \approx 4.07 + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

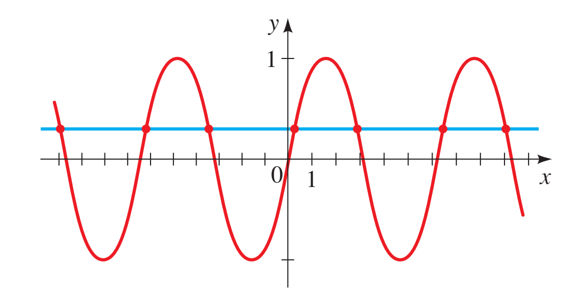
7.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Debido a que las funciones trigonométricas son periódicas, si una ecuación trigonométrica básica tiene una solución, tiene ________ (varias/número infinito de) soluciones.

2. La ecuación básica $\operatorname{sen} x = 2$ tiene ________ (no tiene/una/infinitas soluciones) soluciones, mientras que la ecuación básica $\operatorname{sen} x = 0.3$ tiene ________ (varias/número infinito de) soluciones.

3. Gráficamente podemos encontrar algunas de las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0.3$ si trazamos la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y $y =$ ________. Use la gráfica siguiente para estimar algunas de las soluciones.



4. Podemos encontrar las soluciones de sen $x = 0.3$ algebraicamente.

a) Primero encontramos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. Obtenemos una de estas soluciones al tomar sen^{-1} para obtener $x \approx$ ________. La otra solución en este intervalo es $x \approx$ ________.

b) Encontramos todas las soluciones al sumar múltiplos de ________ a las soluciones en $[0, 2\pi)$. Las soluciones son $x \approx$ ________ y $x \approx$ ________.

HABILIDADES

5–16 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas básicas Resuelva la ecuación dada.

5. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\cos\theta = -1$

8. $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. $\cos\theta = \frac{1}{4}$

10. $\text{sen}\,\theta = -0.3$

11. $\text{sen}\,\theta = -0.45$

12. $\cos\theta = 0.32$

13. $\tan\theta = -\sqrt{3}$

14. $\tan\theta = 1$

15. $\tan\theta = 5$

16. $\tan\theta = -\frac{1}{3}$

17–24 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas básicas Resuelva la ecuación dada y haga una lista de seis soluciones específicas.

17. $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

18. $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

19. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

20. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

21. $\cos\theta = 0.28$

22. $\tan\theta = 2.5$

23. $\tan\theta = -10$

24. $\text{sen}\,\theta = -0.9$

25–38 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas Encuentre todas las soluciones de la ecuación dada.

25. $\cos\theta + 1 = 0$

26. $\text{sen}\,\theta + 1 = 0$

27. $\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$

28. $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

29. $5\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0$

30. $4\cos\theta + 1 = 0$

31. $3\tan^2\theta - 1 = 0$

32. $\cot\theta + 1 = 0$

33. $2\cos^2\theta - 1 = 0$

34. $4\,\text{sen}^2\theta - 3 = 0$

35. $\tan^2\theta - 4 = 0$

36. $9\,\text{sen}^2\theta - 1 = 0$

37. $\sec^2\theta - 2 = 0$

38. $\csc^2\theta - 4 = 0$

39–56 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas factorizando Resuelva la ecuación dada.

39. $(\tan^2\theta - 4)(2\cos\theta + 1) = 0$

40. $(\tan\theta - 2)(16\,\text{sen}^2\theta - 1) = 0$

41. $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

42. $2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

43. $3\,\text{sen}^2\theta - 7\,\text{sen}\,\theta + 2 = 0$

44. $\tan^4\theta - 13\tan^2\theta + 36 = 0$

45. $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

46. $\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 2 = 0$

47. $\cos^2\theta - \cos\theta - 6 = 0$

48. $2\,\text{sen}^2\theta + 5\,\text{sen}\,\theta - 12 = 0$

49. $\text{sen}^2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta + 3$

50. $3\tan^3\theta = \tan\theta$

51. $\cos\theta\,(2\,\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

52. $\sec\theta\,(2\cos\theta - \sqrt{2}) = 0$

53. $\cos\theta\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta = 0$

54. $\tan\theta\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

55. $3\tan\theta\,\text{sen}\,\theta - 2\tan\theta = 0$

56. $4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta = 0$

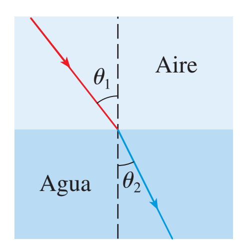
APLICACIONES

57. Refracción de luz Desde tiempos antiguos se ha observado que la luz se refracta o se "dobla" al pasar de un medio a otro (del aire al agua, por ejemplo). Si v_1 es la velocidad de la luz en un medio y v_2 es su velocidad en otro medio, entonces, de acuerdo con la **ley de Snell**,

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 es el *ángulo de incidencia* y θ_2 es el *ángulo de refracción* (vea la figura). El número v_1/v_2 recibe el nombre de *índice de refracción*. El índice de refracción para varias sustancias se da en la tabla siguiente.

Si un rayo de luz pasa por la superficie de un lago a un ángulo de incidencia de 70°, ¿cuál es el ángulo de refracción?



Sustancia	Refracción de aire a sustancia
Agua	1.33
Alcohol	1.36
Vidrio	1.52
Diamante	2.41

58. Reflexión interna total Cuando la luz pasa de un medio denso a otro menos denso, de vidrio a aire, por ejemplo, el ángulo de refracción pronosticado por la ley de Snell (vea el ejercicio 57) puede ser de 90° o mayor. En este caso el rayo de luz es en realidad reflejado de nuevo hacia el medio más denso. Este fenómeno, llamado *reflexión interna total*, es el principio que hay detrás de las fibras ópticas. Sea $\theta_2 = 90°$ en la ley de Snell y despeje θ_1 para determinar el ángulo crítico de incidencia en el que se inicia la reflexión interna total cuando la luz pasa del vidrio al aire. (Observe que el índice de refracción de vidrio a aire es el recíproco del índice de aire a vidrio.)

59. Fases de la Luna Cuando la Luna gira alrededor de la Tierra, el lado que da a la Tierra por lo general sólo está parcialmente iluminado por el Sol. Las fases de la Luna describen cuánto de la superficie parece estar a la luz del Sol. Una medida astronómica está dada por la fracción F del disco lunar que está iluminado. Cuando el ángulo entre el Sol, la Tierra y la Luna es θ ($0 \leq \theta \leq 360°$), entonces

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

Determine los ángulos θ que corresponden a las siguientes fases:

a) $F = 0$ (luna nueva)

b) $F = 0.25$ (cuarto creciente)

c) $F = 0.5$ (primero o último cuarto)

d) $F = 1$ (Luna llena)

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

60. DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN: Ecuaciones e identidades ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

A. Toda identidad es una ecuación.

B. Toda ecuación es una identidad.

Dé ejemplos para ilustrar su respuesta. Escriba un breve párrafo para explicar la diferencia entre una ecuación y una identidad.

7.5 MÁS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

■ Solución de ecuaciones trigonométricas con uso de identidades ■ Ecuaciones con funciones trigonométricas de múltiplos de ángulos

En esta sección resolvemos ecuaciones trigonométricas al usar primero identidades para simplificar la ecuación. También resolvemos ecuaciones trigonométricas en las que los términos contienen múltiplos de ángulos.

■ Solución de ecuaciones trigonométricas con uso de identidades

En los siguientes dos ejemplos usamos identidades trigonométricas para expresar una ecuación trigonométrica en una forma en la que se puede factorizar.

EJEMPLO 1 ■ Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + \operatorname{sen}\theta = 2\cos^2\theta$.

SOLUCIÓN Primero necesitamos volver a escribir esta ecuación de modo que contenga sólo una función trigonométrica. Para ello usamos una identidad trigonométrica.

$$1 + \operatorname{sen}\theta = 2\cos^2\theta \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$1 + \operatorname{sen}\theta = 2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \qquad \text{Pase todos los términos a un lado}$$

$$(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta + 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \qquad \text{Iguale a cero}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\theta = -1 \qquad \text{Despeje sen }\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \qquad \text{Despeje }\theta\text{ en el intervalo }[0, 2\pi)$$

Debido a que el seno tiene periodo 2π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de 2π a las mismas. Entonces las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 11

EJEMPLO 2 ■ Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $\text{sen } 2\theta - \cos\theta = 0$.

SOLUCIÓN El primer término es una función de 2θ, y el segundo es una función de θ, de modo que empezamos usando una identidad trigonométrica para volver a escribir el primer término como función de θ únicamente.

$$\text{sen } 2\theta - \cos\theta = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2\,\text{sen }\theta\cos\theta - \cos\theta = 0 \qquad \text{Fórmula de ángulo doble}$$

$$\cos\theta\,(2\,\text{sen }\theta - 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad 2\,\text{sen }\theta - 1 = 0 \qquad \text{Iguale cada factor a 0}$$

$$\text{sen }\theta = \frac{1}{2} \qquad \text{Despeje sen } \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad \text{Despeje } \theta \text{ en el intervalo } [0, 2\pi)$$

Tanto el seno como el coseno tienen periodo 2π, de modo que obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar a estas soluciones múltiplos enteros de 2π. Entonces, las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ahora intente realizar los ejercicios 7 y 9 ■

EJEMPLO 3 ■ Elevar al cuadrado y usar una identidad

Resuelva la ecuación $\cos\theta + 1 = \text{sen }\theta$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Para obtener una ecuación que tenga únicamente seno o coseno elevamos al cuadrado ambos lados y usamos la identidad pitagórica.

$$\cos\theta + 1 = \text{sen }\theta \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = \text{sen}^2\theta \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 1 - \cos^2\theta \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2\cos^2\theta + 2\cos\theta = 0 \qquad \text{Simplifique}$$

$$2\cos\theta\,(\cos\theta + 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$2\cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta + 1 = 0 \qquad \text{Iguale a 0 cada uno de los factores}$$

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta = -1 \qquad \text{Despeje cos } \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o} \quad \theta = \pi \qquad \text{Valores de } \theta \text{ en } [0, 2\pi)$$

Dado que elevamos al cuadrado ambos lados, necesitamos comprobar si hay soluciones extrañas. En *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones de la ecuación dada son $\pi/2$ y π.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{2} + 1 = \text{sen }\frac{\pi}{2}$$

$$0 + 1 = 1 \quad ✓$$

$\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

$$\cos\frac{3\pi}{2} + 1 = \text{sen }\frac{3\pi}{2}$$

$$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1 \quad ✗$$

$\theta = \pi$

$$\cos\pi + 1 = \text{sen }\pi$$

$$-1 + 1 = 0 \quad ✓$$

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

EJEMPLO 4 ■ Encontrar puntos de intersección

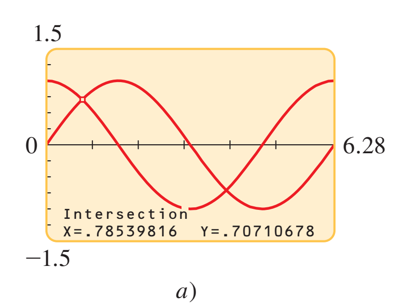
Encuentre los valores de x para los cuales las gráficas de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ se cruzan.

SOLUCIÓN 1: Gráficamente

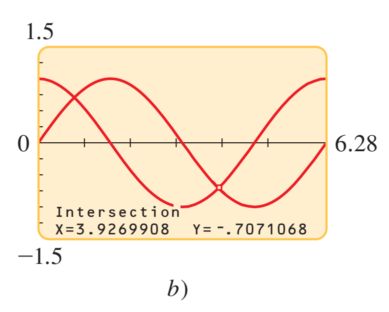
Las gráficas se cruzan en donde $f(x) = g(x)$. En la figura 1 trazamos la gráfica de $y_1 = \text{sen } x$ y $y_2 = \cos x$ en la misma pantalla, para x entre 0 y 2π. Usando la instrucción TRACE o la instrucción `intersect` en la calculadora graficadora, vemos que los dos puntos de intersección en este intervalo se presentan donde $x \approx 0.785$ y $x \approx 3.927$. Dado que el seno y el coseno son periódicos con periodo 2π, los puntos de intersección ocurren donde

$$x \approx 0.785 + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad x \approx 3.927 + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.



a)



b)

FIGURA 1

SOLUCIÓN 2: Algebraica

Para encontrar la solución exacta hacemos que $f(x) = g(x)$ y resolvemos algebraicamente la ecuación resultante:

$$\text{sen } x = \cos x \qquad \text{Iguale las funciones}$$

Dado que los números x para los cuales $\cos x = 0$ no son soluciones de la ecuación, podemos dividir ambos lados entre $\cos x$:

$$\frac{\text{sen } t}{\cos t} = 1 \qquad \text{Divida entre cos } x$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{Identidad recíproca}$$

La única solución de esta ecuación en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es $x = \pi/4$. Puesto que la tangente tiene periodo π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación si sumamos múltiplos enteros de π:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. Las gráficas se cruzan para estos valores de x. El lector debe usar su calculadora para comprobar que, redondeados a tres lugares decimales, estos son los valores que obtuvimos en la solución 1.

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

■ Ecuaciones con funciones trigonométricas de múltiplos de ángulos

Cuando resolvamos ecuaciones trigonométricas que tienen funciones de múltiplos de ángulos, primero despejamos el múltiplo del ángulo y luego dividimos para despejarlo.

EJEMPLO 5 ■ Una ecuación trigonométrica que tiene un múltiplo de un ángulo

Considere la ecuación $2 \text{ sen } 3\theta - 1 = 0$.

a) Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

b) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN

a) Primero despejamos sen 3θ y luego despejamos el ángulo 3θ.

$$
\begin{aligned}
2 \text{ sen } 3\theta - 1 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\
2 \text{ sen } 3\theta &= 1 && \text{Sume 1} \\
\text{sen } 3\theta &= \frac{1}{2} && \text{Divida entre 2} \\
3\theta &= \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} && \text{Valores de } 3\theta \text{ en el intervalo } [0, 2\pi) \text{ (vea la figura 2)}
\end{aligned}
$$

Para obtener todas las soluciones les sumamos múltiplos enteros de 2π. Por tanto, las soluciones son de la forma

$$3\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad 3\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Para despejar θ, dividimos entre 3 para obtener las soluciones

$$\theta = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

donde k es cualquier entero.

b) Las soluciones del inciso *a*) que están en el intervalo $[0, 2\pi)$ corresponden a $k = 0$, 1 y 2. Para todos los otros valores de k los valores correspondientes de θ se encuentran fuera de este intervalo. Por tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$\theta = \underbrace{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}}_{k=0}, \underbrace{\frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}}_{k=1}, \underbrace{\frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}}_{k=2}$$

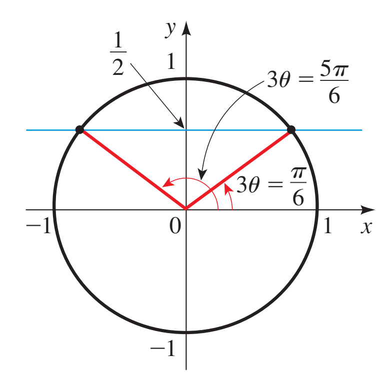


FIGURA 2

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

EJEMPLO 6 ■ Una ecuación trigonométrica que tiene un semiángulo

Considere la ecuación $\sqrt{3} \tan \frac{\theta}{2} - 1 = 0$.

a) Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

b) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 4\pi)$.

SOLUCIÓN

a) Empezamos por despejar $\tan \frac{\theta}{2}$.

$$\sqrt{3} \tan \frac{\theta}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\sqrt{3} \tan \frac{\theta}{2} = 1 \qquad \text{Sume 1}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{Divida entre } \sqrt{3}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \text{Valor de } \frac{\theta}{2} \text{ en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dado que la tangente tiene periodo π, obtenemos todas las soluciones para sumar múltiplos enteros de π a esta solución. Por tanto, las soluciones son de la forma

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Multiplicando por 2, obtenemos las soluciones

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

b) Las soluciones del inciso *a*) que están en el intervalo $[0, 4\pi)$ corresponden a $k = 0$ y $k = 1$. Para todos los demás valores de k los valores correspondientes de x se encuentran fuera de este intervalo. Entonces, las soluciones en el intervalo $[0, 4\pi)$ son

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$$



Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

7.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1–2 ■ Podemos usar identidades para ayudarnos a resolver ecuaciones trigonométricas.

1. Usando una identidad pitagórica vemos que la ecuación $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ es equivalente a la ecuación básica ________________ cuyas soluciones son $x =$ ________.

2. Usando una fórmula de ángulo doble vemos que la ecuación $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$ es equivalente a la ecuación ________. Factorizando, vemos que resolver esta ecuación es equivalente a resolver las dos ecuaciones básicas ________ y ________.

HABILIDADES

3–16 ■ **Resolver ecuaciones trigonométricas usando identidades** Resuelva la ecuación dada.

3. $2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 1$

4. $\operatorname{sen}^2\theta = 4 - 2\cos^2\theta$

5. $\tan^2\theta - 2\sec\theta = 2$

6. $\csc^2\theta = \cot\theta + 3$

7. $2\operatorname{sen} 2\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 0$

8. $3\operatorname{sen} 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0$

9. $\cos 2\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 1$

10. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \frac{1}{2}$

11. $2\operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta = 1$

12. $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

13. $\operatorname{sen}\theta - 1 = \cos\theta$

14. $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 1$

15. $\tan\theta + 1 = \sec\theta$

16. $2\tan\theta + \sec^2\theta = 4$

17–30 ■ **Resolver ecuaciones trigonométricas que tienen el múltiplo de un ángulo** Se da una ecuación. ***a***) Encuentre todas las soluciones de la ecuación. ***b***) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

17. $2\cos 3\theta = 1$

18. $2\operatorname{sen} 2\theta = 1$

19. $2\cos 2\theta + 1 = 0$

20. $2\operatorname{sen} 3\theta + 1 = 0$

21. $\sqrt{3}\tan 3\theta + 1 = 0$

22. $\sec 4\theta - 2 = 0$

23. $\cos\frac{\theta}{2} - 1 = 0$

24. $\tan\frac{\theta}{4} + \sqrt{3} = 0$

25. $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{3} + \sqrt{3} = 0$

26. $\sec\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$

27. $\operatorname{sen} 2\theta = 3\cos 2\theta$

28. $\csc 3\theta = 5 \operatorname{sen} 3\theta$

29. $1 - 2\operatorname{sen}\theta = \cos 2\theta$

30. $\tan 3\theta + 1 = \sec 3\theta$

31–34 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas Resuelva la ecuación factorizando.

31. $3\tan^3\theta - 3\tan^2\theta - \tan\theta + 1 = 0$

32. $4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$

33. $2\operatorname{sen}\theta\tan\theta - \tan\theta = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$

34. $\sec\theta\tan\theta - \cos\theta\cot\theta = \operatorname{sen}\theta$



35–38 ■ Encontrar los puntos de intersección gráficamente
a) Trace las gráficas de f y g en el rectángulo de vista dado y encuentre gráficamente los puntos de intersección, redondeados a dos decimales. ***b)*** Encuentre algebraicamente los puntos de intersección de f y g algebraicamente. Dé respuestas exactas.



35. $f(x) = 3\cos x + 1, \quad g(x) = \cos x - 1;$
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2.5, 4.5]$

36. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + 1, \quad g(x) = 2\operatorname{sen} 2x + 1;$
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.5, 3.5]$

37. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \sqrt{3};$
$[-\pi/2, \pi/2]$ por $[-10, 10]$

38. $f(x) = \operatorname{sen} x - 1, \quad g(x) = \cos x;$
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2.5, 1.5]$

39–42 ■ Uso de fórmulas de adición o de sustracción Use una fórmula de la adición o sustracción para simplificar la ecuación. Luego encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

39. $\cos\theta\cos 3\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 3\theta = 0$

40. $\cos\theta\cos 2\theta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}$

41. $\operatorname{sen} 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$

42. $\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta = 0$

43–52 ■ Uso de fórmulas de ángulo doble o de semiángulo Use una fórmula de ángulo doble o de semiángulo para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

43. $\operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta = 0$

44. $\tan\dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\theta = 0$

45. $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

46. $\tan\theta + \cot\theta = 4\operatorname{sen} 2\theta$

47. $\cos 2\theta - \cos^2\theta = 0$

48. $2\operatorname{sen}^2\theta = 2 + \cos 2\theta$

49. $\cos 2\theta - \cos 4\theta = 0$

50. $\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} 6\theta = 0$

51. $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$

52. $\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$

53–56 ■ Uso de fórmulas de suma a producto Resuelva la ecuación primero mediante una fórmula de suma a producto.

53. $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta = 0$

54. $\cos 5\theta - \cos 7\theta = 0$

55. $\cos 4\theta + \cos 2\theta = \cos\theta$

56. $\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta = \cos 4\theta$



57–62 ■ Resolver gráficamente ecuaciones trigonométricas Use una calculadora graficadora para encontrar las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

57. $\operatorname{sen} 2x = x$

58. $\cos x = \dfrac{x}{3}$

59. $2^{\operatorname{sen} x} = x$

60. $\operatorname{sen} x = x^3$

61. $\dfrac{\cos x}{1 + x^2} = x^2$

62. $\cos x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

HABILIDADES Plus

63–64 ■ Ecuaciones que tienen funciones trigonométricas inversas Resuelva la ecuación dada para x.

63. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}2x = \dfrac{\pi}{4}$ [*Sugerencia:* sea $u = \tan^{-1}x$ y $v = \tan^{-1}2x$. Resuelva la ecuación $u + v = \dfrac{\pi}{4}$ tomando la tangente de cada lado.]

64. $2\operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi$ [*Sugerencia:* tome el coseno de cada lado.]

APLICACIONES

65. Alcance de un proyectil Si un proyectil es disparado con velocidad v_0 a un ángulo θ, entonces su *alcance*, es decir, la distancia horizontal que recorre (en pies) está modelada por la función

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{32}$$

(Vea la página 627.) Si $v_0 = 2200$ pies/s, ¿qué ángulo (en grados) debe elegirse para que el proyectil pegue en el blanco en tierra a 5000 pies de distancia?

66. Vibraciones amortiguadas El desplazamiento de un resorte que vibra en movimiento armónico amortiguado está dado por

$$y = 4e^{-3t}\operatorname{sen} 2\pi t$$

Encuentre los tiempos cuando el resorte está en su posición de equilibrio $(y = 0)$.

67. Horas de luz de día En Filadelfia el número de horas de luz de día en el día t (donde t es el número de días después del 1° de enero) está modelado por la función

$$L(t) = 12 + 2.83\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$$

a) ¿Qué días del año tienen alrededor de 10 horas de luz de día?

b) ¿Cuántos días del año tienen más de 10 horas de luz de día?

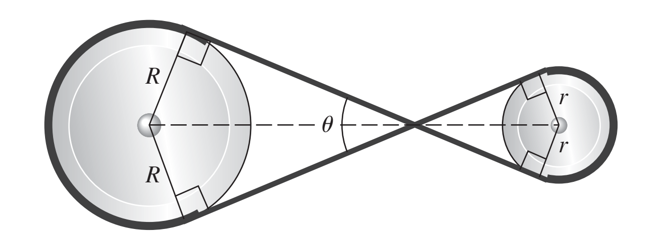
68. Bandas y poleas Una banda delgada de longitud L rodea dos poleas de radios R y r, como se muestra en la figura de la derecha.

a) Demuestre que el ángulo θ (en rad) donde la banda se cruza satisface la ecuación

$$\theta + 2\cot\frac{\theta}{2} = \frac{L}{R + r} - \pi$$

[*Sugerencia:* exprese L en términos de R, r y θ sumando las longitudes de las partes curvas y rectas de la banda.]

b) Suponga que $R = 2.42$ pies, $r = 1.21$ pies y $L = 27.78$ pies. Encuentre θ al resolver gráficamente la ecuación del inciso *a*). Exprese su respuesta tanto en radianes como en grados.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

69. DISCUSIÓN: Una ecuación trigonométrica especial ¿Qué hace a la ecuación $\text{sen}(\cos x) = 0$ diferente de todas las ecuaciones que hemos visto en esta sección? Encuentre todas las soluciones de esta ecuación.

CAPÍTULO 7 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Identidades trigonométricas fundamentales (p. 538)

Una **identidad** es una ecuación que es verdadera para todos los valores de las variables. Una **identidad trigonométrica** es una identidad que tiene funciones trigonométricas. Las identidades trigonométricas fundamentales son las siguientes.

Identidades recíprocas:

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

Identidades pitagóricas:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades par-impar:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunción:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\, x \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

Demostración de identidades trigonométricas (p. 540)

Para demostrar que una ecuación trigonométrica es una identidad, utilizamos la siguiente guía.

1. **Empezar con un lado.** Elija un lado de la ecuación.
2. **Usar identidades conocidas.** Use álgebra e identidades conocidas para cambiar el lado con el que empezó del otro lado.
3. **Convertir a senos y cosenos.** A veces es útil convertir a senos y cosenos todas las funciones en la ecuación.

Fórmulas de adición y sustracción (p. 545)

Estas identidades tienen funciones trigonométricas de una suma o una diferencia.

Fórmulas del seno:

$$\text{sen}(s + t) = \text{sen}\, s \cos t + \cos s\, \text{sen}\, t$$
$$\text{sen}(s - t) = \text{sen}\, s \cos t - \cos s\, \text{sen}\, t$$

Fórmulas del coseno:

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$$
$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$$

Fórmulas de la tangente:

$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Sumas de senos y cosenos (p. 550)

Si A y B son números reales, entonces

$$A\, \text{sen}\, x + B \cos x = k\, \text{sen}(x + \phi)$$

donde $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ y ϕ satisface

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{sen}\,\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Fórmulas de ángulo doble (p. 554)

Estas identidades tienen funciones trigonométricas del doble de la variable.

Fórmula del seno:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Fórmulas del coseno:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

Fórmulas de la tangente:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Fórmulas para bajar potencias (p. 556)

Estas fórmulas nos permiten escribir una expresión trigonométrica que tiene potencias de seno y coseno en términos sólo de la primera potencia del coseno.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Fórmulas de semiángulo (p. 556)

Estas fórmulas implican funciones trigonométricas de un semiángulo.

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

Fórmulas de producto a suma (pp. 559-560)

Estas fórmulas consisten en productos y sumas de funciones trigonométricas.

Fórmulas de producto a suma:

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

Fórmulas de suma a producto:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x + y}{2}\operatorname{sen}\frac{x - y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x + y}{2}\operatorname{sen}\frac{x - y}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas (p. 564)

Una **ecuación trigonométrica** es aquella que contiene funciones trigonométricas. Una ecuación trigonométrica básica es una ecuación de la forma $T(\theta) = c$, donde T es una función trigonométrica y c es una constante. Por ejemplo, $\operatorname{sen} \theta = 0.5$ y $\tan \theta = 2$ son ecuaciones trigonométricas básicas. Resolver cualquier ecuación trigonométrica implica resolver una ecuación trigonométrica básica.

Si una ecuación trigonométrica tiene una solución, entonces tiene un número infinito de soluciones.

Para encontrar todas las soluciones, primero encuentre las soluciones en un periodo y luego agregue múltiplos enteros del mismo.

A veces podemos usar identidades trigonométricas para simplificar una ecuación trigonométrica.

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Qué es una identidad? ¿Qué es una identidad trigonométrica?

2. ***a)*** Exprese las identidades pitagóricas.
b) Utilice una identidad pitagórica para expresar el coseno en términos del seno.

3. ***a)*** Exprese las identidades recíprocas para la cosecante, la secante y la cotangente.
b) Exprese las identidades par-impar para el seno y el coseno.
c) Exprese las identidades de cofunción para el seno, la tangente y la secante.
d) Suponga $\cos(-x) = 0.4$; utilice las identidades de los incisos *a)* y *b)* para encontrar $\sec x$.
e) Suponga que $\operatorname{sen} 10° = a$; utilice las identidades del inciso *c)* para encontrar $\cos 80°$.

4. ***a)*** ¿Cómo se demuestra una identidad?
b) Demuestre la identidad $\operatorname{sen} x(\csc x - \operatorname{sen} x) = \cos^2 x$

5. ***a)*** Exprese las fórmulas de adición y sustracción del seno y el coseno.
b) Utilice una fórmula del inciso *a)* para encontrar $\operatorname{sen} 75°$.

6. ***a)*** Exprese la fórmula para $A \operatorname{sen} x + B \cos x$.
b) Exprese $3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$ como una función sólo del seno.

7. ***a)*** Exprese la fórmula del ángulo doble para seno y las fórmulas del ángulo doble para coseno.
b) Demuestre la identidad $\sec x \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$.

8. ***a)*** Exprese las fórmulas para bajar potencias del seno y del coseno.
b) Demuestre la identidad $4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 2x$.

9. ***a)*** Exprese las fórmulas de semiángulo del seno y el coseno.
b) Encuentre $\cos 15°$.

10. ***a)*** Exprese las fórmulas de producto a suma para el producto $\operatorname{sen} u \cos v$.
b) Exprese $\operatorname{sen} 5x \cos 3x$ como una suma de funciones trigonométricas.

11. ***a)*** Exprese las fórmulas de suma a producto para la suma sen x + sen y.

b) Exprese sen $5x$ + sen $7x$ como un producto de funciones trigonométricas.

12. ¿Qué es una ecuación trigonométrica? ¿Cómo se resuelve una ecuación trigonométrica?

a) Resuelva la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$.

b) Resuelva la ecuación $2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}$.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

■ EJERCICIOS

1–22 ■ Demostración de identidades Verifique la identidad.

1. $\operatorname{sen}\theta\,(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

2. $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta$

3. $\cos^2 x \csc x - \csc x = -\operatorname{sen} x$

4. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1 + \tan^2 x$

5. $\dfrac{\cos^2 x - \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \cot^2 x - \sec^2 x$

6. $\dfrac{1 + \sec x}{\sec x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

7. $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos x}{\sec x - \tan x}$

8. $(1 - \tan x)(1 - \cot x) = 2 - \sec x \csc x$

9. $\operatorname{sen}^2 x \cot^2 x + \cos^2 x \tan^2 x = 1$

10. $(\tan x + \cot x)^2 = \csc^2 x \sec^2 x$

11. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$

12. $\dfrac{\cos(x + y)}{\cos x \operatorname{sen} y} = \cot y - \tan x$

13. $\csc x - \tan\dfrac{x}{2} = \cot x$

14. $1 + \tan x \tan\dfrac{x}{2} = \sec x$

15. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x} = \sec x$

16. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

17. $\dfrac{\sec x - 1}{\operatorname{sen} x \sec x} = \tan\dfrac{x}{2}$

18. $(\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2 = 2 + 2\cos(x + y)$

19. $\left(\cos\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} x$

20. $\dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x} = \tan 2x$

21. $\dfrac{\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan x$

22. $\operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

23–26 ■ Comprobar identidades gráficamente ***a)*** Trace la gráfica de f y g. ***b)*** ¿Sugieren las gráficas que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Demuestre su respuesta.

23. $f(x) = 1 - \left(\cos\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)^2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

24. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$

25. $f(x) = \tan x \tan\dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

26. $f(x) = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 x, \quad g(x) = \cos 4x$



27–28 ■ Determinar identidades gráficamente ***a)*** Trace la gráfica de las funciones y haga una conjetura, y ***b)*** demuestre su conjetura.

27. $f(x) = 2\operatorname{sen}^2 3x + \cos 6x$

28. $f(x) = \operatorname{sen} x \cot\dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \cos x$

29–46 ■ Resolver ecuaciones trigonométricas Resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

29. $4\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$

30. $5\cos\theta + 3 = 0$

31. $\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 0$

32. $\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

33. $2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$

34. $\operatorname{sen} x - \cos x - \tan x = -1$

35. $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

36. $4\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 3$

37. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 3$

38. $\operatorname{sen} x = \cos 2x$

39. $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$

40. $\cos 2x \csc^2 x = 2\cos 2x$

41. $\tan\frac{1}{2}x + 2\operatorname{sen} 2x = \csc x$

42. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$

43. $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$

44. $2\cos x - 3\tan x = 0$

45. $\cos x = x^2 - 1$

46. $e^{\operatorname{sen} x} = x$

47. Alcance de un proyectil Si un proyectil es disparado con velocidad v_0 a un ángulo θ, entonces la altura máxima que alcanza (en pies) está modelada por la función

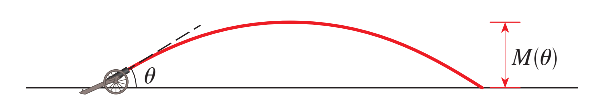
$$M(\theta) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{64}$$

Suponga que $v_0 = 400$ pies/s.

a) ¿A qué ángulo θ debe ser disparado el proyectil para que la altura máxima que alcance sea de 2 000 pies?

b) ¿Es posible que el proyectil llegue a una altura de 3 000 pies?

c) Encuentre el ángulo θ para el cual el proyectil llegará más alto.



48. Desplazamiento de un amortiguador El desplazamiento de un amortiguador de automóvil está modelado por la función

$$f(t) = 2^{-0.2t} \operatorname{sen} 4\pi t$$

Encuentre los tiempos cuando el amortiguador está en su posición de equilibrio (esto es, cuando $f(t) = 0$). [*Sugerencia:* $2^x > 0$ para toda x real.]

49–58 ■ Valores de expresiones Encuentre el valor exacto de la expresión.

49. $\cos 15°$ **50.** $\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{12}$

51. $\tan \dfrac{\pi}{8}$ **52.** $2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12} \cos \dfrac{\pi}{12}$

53. $\operatorname{sen} 5° \cos 40° + \cos 5° \operatorname{sen} 40°$

54. $\dfrac{\tan 66° - \tan 6°}{1 + \tan 66° \tan 6°}$

55. $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{8}$ **56.** $\dfrac{1}{2} \cos \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}$

57. $\cos 37.5° \cos 7.5°$ **58.** $\cos 67.5° + \cos 22.5°$

59–64 ■ Evaluar expresiones que tienen funciones trigonométricas Encuentre el valor exacto de la expresión dado que $\sec x = \frac{3}{2}$, $\csc y = 3$ y x y y están en el primer cuadrante.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$ **60.** $\cos(x - y)$

61. $\tan(x + y)$ **62.** $\operatorname{sen} 2x$

63. $\cos \dfrac{y}{2}$ **64.** $\tan \dfrac{y}{2}$

65–66 ■ Evaluar expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas Encuentre el valor exacto de la expresión.

65. $\tan(2 \cos^{-1} \frac{3}{7})$ **66.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1} \frac{3}{4} + \cos^{-1} \frac{5}{13})$

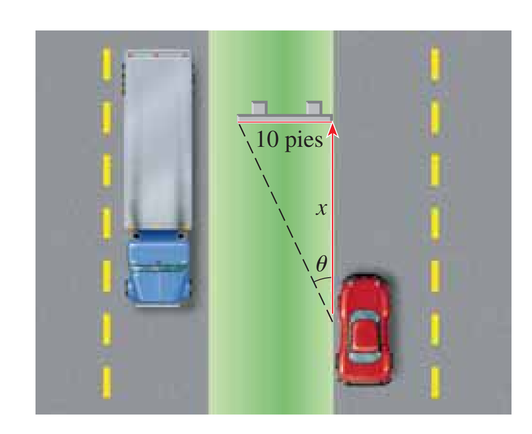
67–68 ■ Expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas Escriba la expresión como una expresión algebraica con las variables.

67. $\tan(2 \tan^{-1} x)$ **68.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} y)$

69. Ángulo de visión de una señal A un costado de una avenida pavimentada existe una señal de carretera, de 10 pies de ancho, tal como se muestra en la figura. Cuando un conductor se aproxima a la señal cambia el ángulo de visión θ.

a) Exprese el ángulo de visión θ como función de la distancia x entre el conductor y la señal.

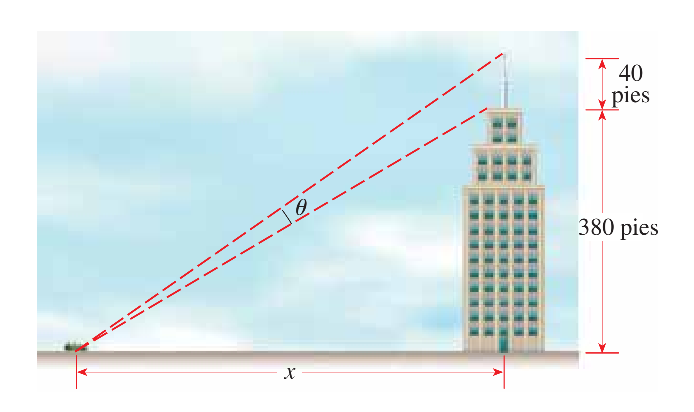
b) La señal es legible cuando el ángulo de visión es 2° o mayor. ¿A qué distancia x se hace legible primeramente la señal?



70. Ángulo de visión de una torre Un edificio de 380 pies de alto soporta una torre de 40 pies para comunicaciones (vea la figura). Cuando un automovilista se aproxima al edificio cambia el ángulo de visión θ de la torre.

a) Exprese el ángulo de visión θ como función de la distancia x entre el automovilista y el edificio.


b) ¿A qué distancia del edificio el ángulo de visión θ es tan grande como sea posible?



EXAMEN

1–8 ■ Verifique cada una de las identidades siguientes.

1. $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

2. $\dfrac{\tan x}{1 - \cos x} = \csc x\,(1 + \sec x)$

3. $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

4. $\operatorname{sen} x \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$

5. $2\operatorname{sen}^2(3x) = 1 - \cos(6x)$

6. $\cos 4x = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 x$

7. $\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 = 1 + \operatorname{sen} x$

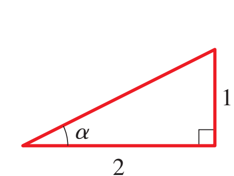
8. Sea $x = 2\operatorname{sen}\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Simplifique la expresión

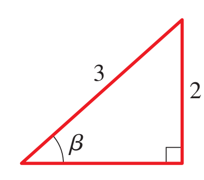
$$\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

9. Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

a) $\operatorname{sen} 8° \cos 22° + \cos 8° \operatorname{sen} 22°$ ***b)*** $\operatorname{sen} 75°$ ***c)*** $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$

10. Para los ángulos α y β de las figuras, encuentre $\cos(\alpha + \beta)$.





11. Escriba $\operatorname{sen} 3x \cos 5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

12. Escriba $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 5x$ como un producto de funciones trigonométricas.

13. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el tercer cuadrante, encuentre $\tan(\theta/2)$.

14–20 ■ Resuelva cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$. Dé el valor exacto, si es posible, y redondee su respuesta a dos decimales.

14. $3\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

15. $(2\cos\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$

16. $2\cos^2\theta + 5\cos\theta + 2 = 0$

17. $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$

18. $5\cos 2\theta = 2$

19. $2\cos^2 x + \cos 2x = 0$

20. $2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) - \csc x = 0$

21. Encuentre el valor exacto de $\cos(2\tan^{-1}\frac{9}{40})$.

22. Reescriba la expresión como una función algebraica de x y y: $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x - \tan^{-1} y)$.

EN NUESTRO SITIO WEB SE PUEDE ENCONTRAR UN EXAMEN DE REPASO ACUMULATIVO DE LOS CAPÍTULOS 5, 6 Y 7.
Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

Ondas viajeras y estacionarias

Hemos aprendido que la posición de una partícula en movimiento armónico simple está descrita por una función de la forma $y = A \operatorname{sen} \omega t$ (vea la sección 5.6). Por ejemplo, si una cuerda sube y baja como en la figura 1, entonces el punto rojo sobre la cuerda sube y baja en movimiento armónico simple. Por supuesto, se cumple lo mismo para cada punto de la cuerda.

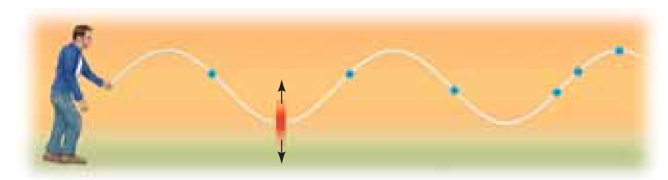


FIGURA 1

¿Qué función describe la forma de toda la cuerda? Si fijamos un instante en el tiempo ($t = 0$) y tomamos una instantánea de la cuerda, obtenemos la forma de la figura 2, que está modelada por

$$y = A \operatorname{sen} kx$$

donde y es la altura de la cuerda arriba del eje x en el punto x.

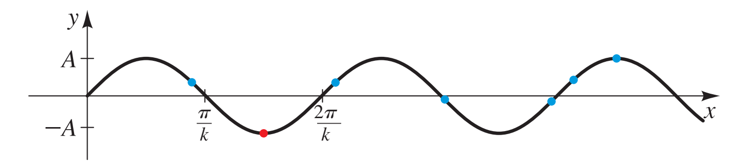


FIGURA 2 $y = A \operatorname{sen} kx$

Ondas viajeras

Si tomamos fotos de la cuerda en otros instantes, como en la figura 3, parece que las ondas de la cuerda "viajan" o se desplazan a la derecha.

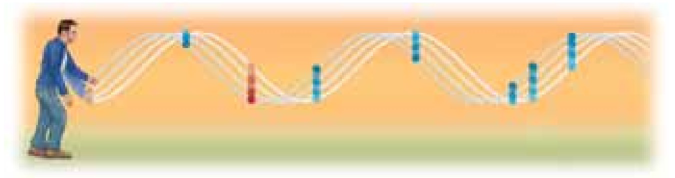


FIGURA 3

La **velocidad** de la onda es la rapidez a la cual se mueve a la derecha. Si la onda tiene velocidad v, entonces se mueve a la derecha una distancia vt en el tiempo t. Por tanto, la gráfica de la onda desplazada en el tiempo t es

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt)$$

Esta función modela la posición de cualquier punto x en la cuerda en cualquier tiempo t. Usamos la notación $y(x, t)$ para indicar que la función depende de las *dos* variables x y t. Ahora veamos la forma en que esta función modela el movimiento de la cuerda.

- **Si fijamos x**, entonces $y(x, t)$ es una función sólo de t lo cual da la posición del punto fijo x en el tiempo t.
- **Si fijamos t**, entonces $y(x, t)$ es una función sólo de x cuya gráfica es la forma de la cuerda en el tiempo fijo t.

EJEMPLO 1 ■ Una onda viajera

Una onda viajera está descrita por la función

$$y(x, t) = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}t\right) \qquad x \geq 0$$

a) Encuentre la función que modela la posición del punto $x = \pi/6$ en cualquier tiempo t. Observe que el punto se mueve en movimiento armónico simple.

b) Trace la forma de la onda cuando $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5$ y 2.0. ¿La onda parece estar viajando a la derecha?

c) Encuentre la velocidad de la onda.

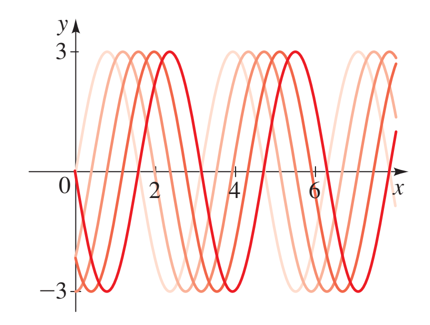


FIGURA 4 Onda viajera

SOLUCIÓN

a) Al sustituir $x = \pi/6$, obtenemos

$$y\left(\frac{\pi}{6}, t\right) = 3 \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}t\right) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}t\right)$$

La función $y = 3 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}t)$ describe un movimiento armónico simple con amplitud 3 y periodo $2\pi/(\pi/2) = 4$.

b) En la figura 4 se muestran las gráficas. Cuando t aumenta, la onda se mueve a la derecha.

c) Expresamos la función dada en la forma normal $y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt)$.

$$y(x, t) = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}t\right) \qquad \text{Dado}$$

$$= 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}t\right) \qquad \text{Factorice 2}$$

Al comparar esto con la forma normal vemos que la onda se mueve con velocidad $v = \pi/4$. ■

■ Ondas estacionarias

Si dos ondas viajan a lo largo de la misma cuerda, entonces el movimiento de la cuerda está determinado por la suma de las ondas. Por ejemplo, si la cuerda está unida a una pared, entonces las ondas rebotan con las mismas amplitud y velocidad, pero en dirección opuesta. En este caso una onda está descrita por $y = A \operatorname{sen} k(x - vt)$, y la onda reflejada por $y = A \operatorname{sen} k(x + vt)$. La onda resultante es

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt) + A \operatorname{sen} k(x + vt) \qquad \text{Sume las dos ondas}$$

$$= 2A \operatorname{sen} kx \cos kvt \qquad \text{Fórmula de suma a producto}$$

Los puntos donde kx es un múltiplo de 2π son especiales porque en estos puntos $y = 0$ para cualquier tiempo t. En otras palabras, estos puntos nunca se mueven y reciben el nombre de **nodos**. La figura 5 muestra la gráfica de la onda para varios valores de t. Vemos que la onda no viaja, sino que simplemente vibra hacia arriba y abajo. Esta onda recibe el nombre de **onda estacionaria**.

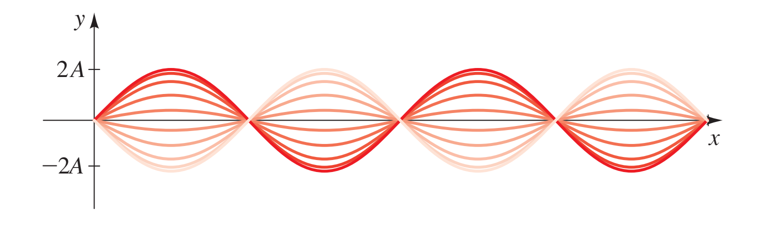


FIGURA 5 Una onda estacionaria

EJEMPLO 2 ■ Una onda estacionaria



Se generan ondas estacionarias en cada extremo de un tanque de ondas de 30 pies de largo, con ecuaciones

$$y = 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x - 3t\right)$$

y

$$y = 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x + 3t\right)$$

a) Encuentre la ecuación de la onda combinada y encuentre los nodos.

b) Trace la gráfica para $t = 0, 0.17, 0.34, 0.51, 0.68, 0.85$ y 1.02. ¿Será esta una onda estacionaria?

SOLUCIÓN

a) La onda combinada se obtiene al sumar dos ecuaciones.

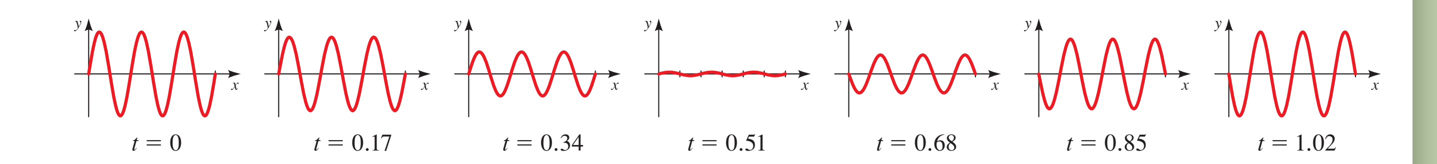
$$y = 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x - 3t\right) + 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x + 3t\right) \qquad \text{Sume las dos ondas}$$

$$= 3 \text{ sen} \frac{\pi}{5} x \cos 3t \qquad \text{Fórmula de suma a producto}$$

Los nodos se presentan en los valores de x para los cuales sen $\frac{\pi}{5}x = 0$, es decir, donde $\frac{\pi}{5}x = k\pi$ (k es un entero). Despejando x, obtenemos $x = 5k$. Por tanto, los nodos se presentan en

$$x = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$$

b) En la figura 6 se muestran las gráficas, de las cuales vemos que esta es una onda estacionaria.



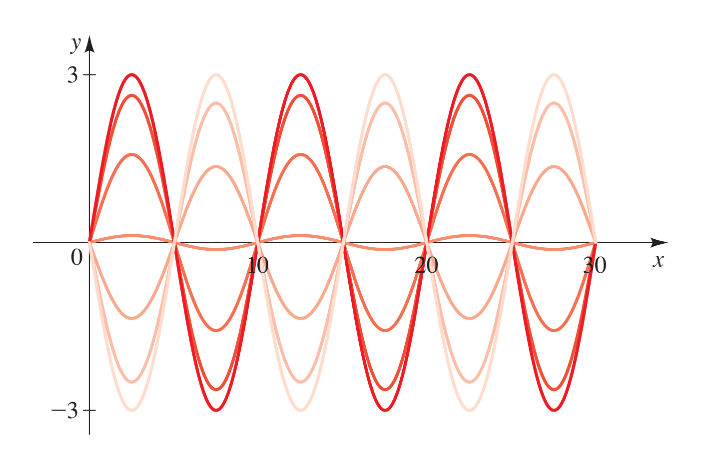


FIGURA 6
$y(x, t) = 3 \text{ sen} \frac{\pi}{5} x \cos 3t$

■



PROBLEMAS

1. Onda en un canal Una onda en la superficie de un largo canal está descrita por la función

$$y(x, t) = 5 \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{2} t\right) \qquad x \geq 0$$

a) Encuentre la función que modele la posición del punto $x = 0$ en cualquier tiempo t.

b) Trace la forma de la onda cuando $t = 0, 0.4, 0.8, 1.2$ y 1.6. ¿Es esta una onda viajera?

c) Encuentre la velocidad de la onda.

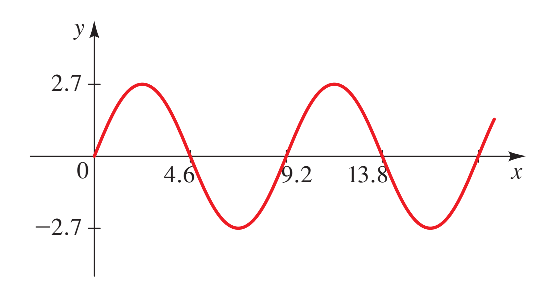
2. Onda en una cuerda Las ondas viajeras son generadas en cada extremo de una cuerda de 24 pies de largo, estirada de manera tensa, con ecuaciones

$$y = 0.2 \text{ sen}(1.047x - 0.524t) \qquad \text{y} \qquad y = 0.2 \text{ sen}(1.047x + 0.524t)$$

a) Encuentre la ecuación de la onda combinada, así como los nodos.

b) Trace la gráfica para $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Es esta una onda estacionaria?

3. Onda viajera Una onda viajera está graficada en el instante $t = 0$. Si se está moviendo a la derecha con velocidad 6 encuentre una ecuación de la forma $y(x, t) = A \text{ sen}(kx - kvt)$ para esta onda.

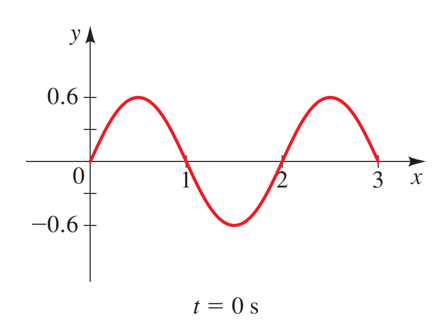


4. Onda viajera Una onda viajera tiene periodo $2\pi/3$, amplitud 5 y velocidad 0.5.

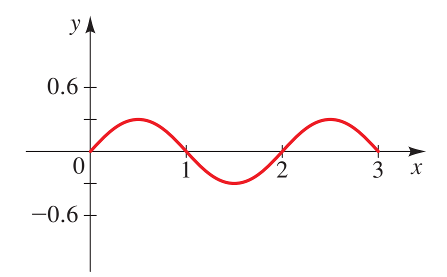
a) Encuentre la ecuación de la onda.

b) Trace la gráfica para $t = 0, 0.5, 1, 1.5$ y 2.

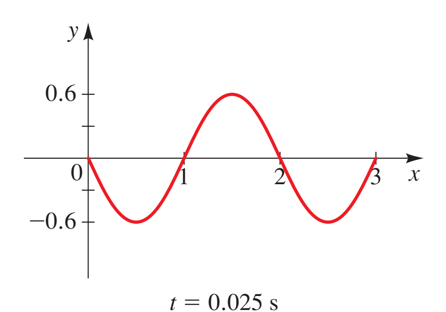
5. Onda estacionaria Una onda estacionaria con amplitud 0.6 se grafica en diferentes tiempos t, tal como se muestra en la figura. Si la vibración tiene una frecuencia de 20 Hz, encuentre una ecuación de la forma $y(x, t) = A \text{ sen } \alpha x \cos \beta t$ que modela esta onda.



$t = 0$ s

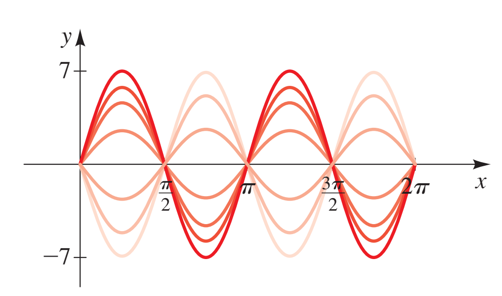


$t = 0.010$ s



$t = 0.025$ s

6. Onda estacionaria Una onda estacionaria tiene una amplitud máxima de 7 y nodos en 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π, tal como se muestra en la figura. Cada punto que no es un nodo sube y baja con periodo 4π. Encuentre una función de la forma $y(x, t) = A$ sen αx cos βt que modele esta onda.



7. Cuerda vibrando Cuando vibra una cuerda de violín el sonido producido resulta de una combinación de ondas estacionarias que tienen nodos espaciados de manera uniforme. La figura ilustra algunas de las posibles ondas estacionarias. Supongamos que la cuerda tiene longitud π.

a) Para t fijo la cuerda tiene la forma de una curva seno $y = A$ sen αx. Encuentre el valor apropiado de α por cada una de las ondas estacionarias mostradas.

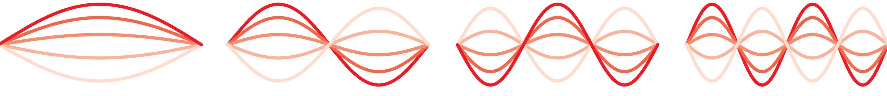
b) ¿Se observa un patrón en los valores de α que se encontraron en el inciso *a*)? ¿Cuáles serían los siguientes dos valores de α? Trace las gráficas aproximadas de las ondas estacionarias asociadas con estos nuevos valores de α.

c) Suponga que para t fijo cada punto en la cuerda que no es un nodo vibra con una frecuencia de 440 Hz. Encuentre el valor β para el cual una ecuación de la forma $y = A$ cos βt modelaría este movimiento.

d) Combine sus respuestas para los incisos *a*) y *c*) para encontrar funciones de la forma $y(x, t) = A$ sen αx cos βt que modele cada una de las ondas estacionarias de la figura. (Suponga que $A = 1$.)







8. Ondas en un tubo Las ondas estacionarias en una cuerda de violín deben tener nodos en los extremos de la cuerda porque la cuerda está fija en esos puntos extremos. Pero este no tiene que ser el caso con ondas de sonido en un tubo (por ejemplo, el de una flauta o de un tubo de órgano). La figura muestra algunas posibles ondas estacionarias en un tubo.

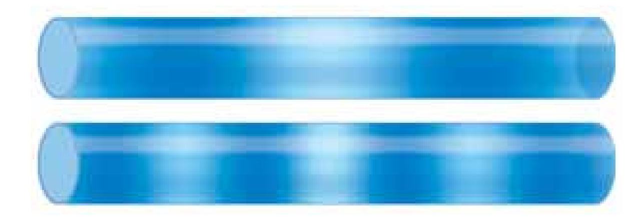
Suponga que una onda estacionaria en un tubo de 37.7 pies de largo está modelada por la función

$$y(x, t) = 0.3 \cos \tfrac{1}{2}x \cos 50\pi t$$

Aquí $y(x, t)$ representa la variación de la presión normal del aire en el punto a x pies del extremo del tubo, en un tiempo de t segundos.

a) ¿En qué puntos x están localizados los nodos? ¿Son nodos los puntos extremos del tubo?

b) ¿A qué frecuencia vibra el aire en los puntos que no son nodos?




© gary718/Shutterstock.com

8 Coordenadas polares y ecuaciones paramétricas

En la sección 1.9 aprendimos a trazar la gráfica de puntos en coordenadas rectangulares. En este capítulo estudiaremos una forma diferente de localizar puntos en el plano llamada *coordenadas polares*. Usar coordenadas rectangulares es como describir un lugar en una ciudad diciendo que está en la esquina de la Calle 2 y la Avenida 4; estas direcciones ayudarán a un taxista a encontrar el lugar. Pero también podemos describir este mismo lugar “a vuelo de pájaro”; podemos decir que está a 1.5 millas al noreste del Ayuntamiento. Por tanto, en lugar de dar la ubicación del lugar respecto a una red de calles y avenidas, lo hacemos en referencia a la distancia y la dirección a partir de un punto fijo. Esto es lo que hacemos en el sistema de coordenadas polares; es decir, el lugar de un punto está dado por un par ordenado de números: la distancia del punto desde el origen (o polo) y el ángulo desde el eje x positivo.

¿Por qué estudiamos diferentes sistemas de coordenadas? Porque ciertas curvas se describen en forma más natural en un sistema de coordenadas que en otro. Por ejemplo, en coordenadas rectangulares las rectas y parábolas tienen ecuaciones sencillas, pero las ecuaciones de circunferencias son más bien complicadas. Veremos cómo en coordenadas polares las circunferencias tienen ecuaciones muy sencillas.

8.1 COORDENADAS POLARES

■ Definición de coordenadas polares ■ Relación entre coordenadas polares y rectangulares ■ Ecuaciones polares

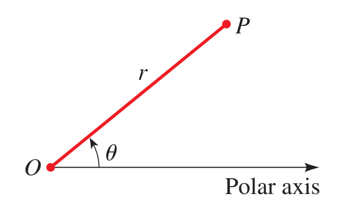


FIGURA 1

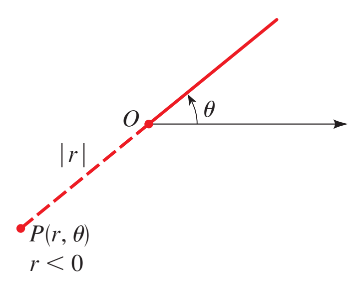


FIGURA 2

En esta sección definiremos coordenadas polares y aprenderemos la forma en que las coordenadas polares se relacionan con las coordenadas rectangulares.

Definición de coordenadas polares

El **sistema de coordenadas polares** usa distancias y direcciones para especificar la posición de un punto en un plano. Para establecer este sistema escogemos un punto fijo O del plano llamado **polo** (u **origen**) y desde O trazamos un rayo (media recta) llamado **eje polar** como se muestra en la figura 1. Entonces a cada punto P se le pueden asignar coordenadas polares $P(r, \theta)$ donde

r es la *distancia* desde O hasta P

θ es el *ángulo* entre el eje polar y el segmento $\overline{OP}$

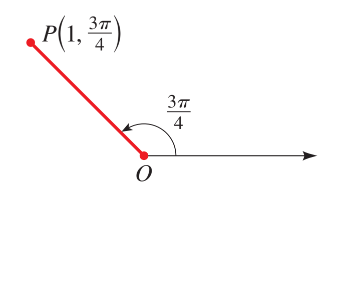
Usamos la convención de que θ es positivo si se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj desde el eje polar, o negativo si se mide en la dirección de las manecillas del reloj. Si r es negativa, entonces $P(r, \theta)$ se define como el punto que se encuentra a $|r|$ unidades del polo en la dirección opuesta a la dada por θ (vea la figura 2).

EJEMPLO 1 ■ Colocar puntos en coordenadas polares

Coloque los puntos cuyas coordenadas polares se dan.

a) $(1, 3\pi/4)$ ***b)*** $(3, -\pi/6)$ ***c)*** $(3, 3\pi)$ ***d)*** $(-4, \pi/4)$

SOLUCIÓN Los puntos están colocados en la figura 3. Observe que el punto del inciso *d*) se encuentra a 4 unidades del origen a lo largo del ángulo $5\pi/4$ porque el valor dado de r es negativo.



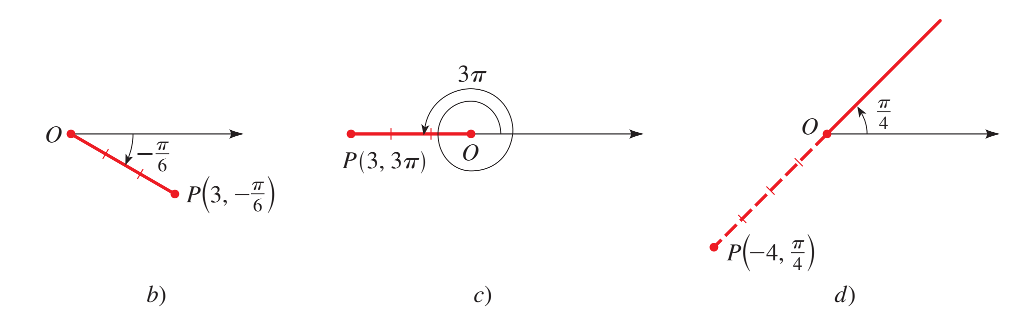


FIGURA 3

Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 7 ■

Observe que las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto, como se muestra en la figura 4. Además, dado que los ángulos $\theta + 2n\pi$ (donde n es cualquier

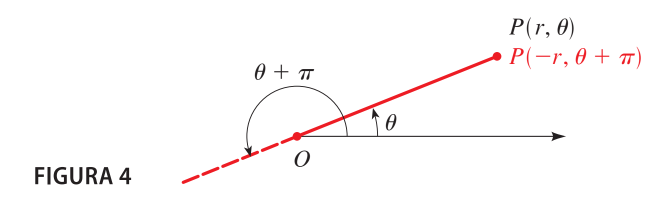


FIGURA 4

entero) tienen el mismo lado terminal que el ángulo θ, cada punto del plano tiene un número infinito de representaciones en coordenadas polares. De hecho, cualquier punto $P(r, \theta)$ también se puede representar por

$$P(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad P(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

para cualquier entero n.

EJEMPLO 2 ■ Diferentes coordenadas polares para el mismo punto

a) Trace la gráfica del punto con coordenadas polares $P(2, \pi/3)$.

b) Encuentre otras dos representaciones de coordenadas polares de P con $r > 0$ y dos con $r < 0$.

SOLUCIÓN

a) La gráfica se muestra en la figura 5*a*).

b) Otras representaciones con $r > 0$ son

$$\left(2, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \left(2, \frac{7\pi}{3}\right) \qquad \text{Sume } 2\pi \text{ a } \theta$$

$$\left(2, \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = \left(2, -\frac{5\pi}{3}\right) \qquad \text{Sume } -2\pi \text{ a } \theta$$

Otras representaciones con $r < 0$ son

$$\left(-2, \frac{\pi}{3} + \pi\right) = \left(-2, \frac{4\pi}{3}\right) \qquad \text{Sustituya } r \text{ con } -r \text{ y sume } \pi \text{ a } \theta$$

$$\left(-2, \frac{\pi}{3} - \pi\right) = \left(-2, -\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{Sustituya } r \text{ con } -r \text{ y sume } -\pi \text{ a } \theta$$

Las gráficas de la figura 5 explican por qué estas coordenadas representan el mismo punto.

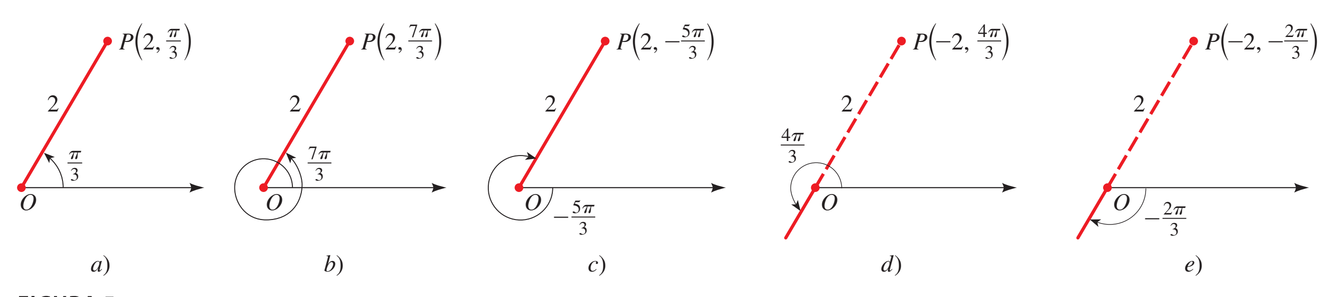


FIGURA 5

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

■ Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Es frecuente que aparezcan situaciones en las que es necesario considerar coordenadas polares y rectangulares simultáneamente. La conexión entre los dos sistemas se muestra en la figura 6 (vea la siguiente página) donde el eje polar coincide con el eje x positivo. Las fórmulas del cuadro siguiente se obtienen de la figura, usando las definiciones de las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. (Aun cuando hemos descrito el caso donde $r > 0$ y θ es agudo, las fórmulas se cumplen para cualquier ángulo θ y para cualquier valor de r.)

FIGURA 6

RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

1. Para cambiar de coordenadas polares a rectangulares use las fórmulas

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

2. Para cambiar de coordenadas rectangulares a polares use las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

EJEMPLO 3 ■ Convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Encuentre coordenadas rectangulares para el punto que tiene coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$.

SOLUCIÓN Dado que $r = 4$ y $\theta = 2\pi/3$ tenemos

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 4\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Entonces el punto tiene coordenadas rectangulares $(-2, 2\sqrt{3})$.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

EJEMPLO 4 ■ Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Encuentre coordenadas polares para el punto que tiene coordenadas rectangulares $(2, -2)$.

SOLUCIÓN Usando $x = 2$, $y = -2$ obtenemos

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

de modo que $r = 2\sqrt{2}$ o $-2\sqrt{2}$. También

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

por lo que $\theta = 3\pi/4$ o $-\pi/4$. Puesto que el punto $(2, -2)$ se encuentra en el cuarto cuadrante (vea la figura 7), podemos representarlo en coordenadas polares como $(2\sqrt{2}, -\pi/4)$ o $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

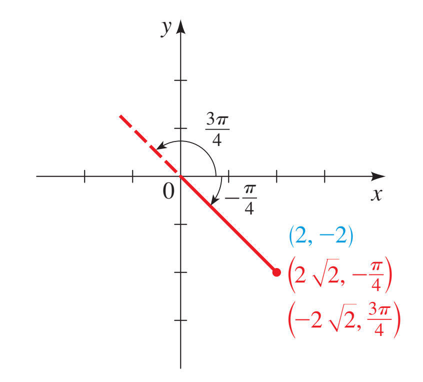


FIGURA 7

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Hacer un mapa del mundo

En el *Enfoque sobre modelado* de la página 533 aprendimos cómo los topógrafos pueden trazar el mapa de una ciudad o un pueblo. Pero hacer el mapa de todo el mundo presenta una nueva dificultad. ¿Cómo es posible representar el mundo *esférico* mediante un mapa *plano*? A este desafío se enfrentaron los exploradores del Renacimiento y sus cartógrafos quienes desarrollaron diferentes e ingeniosas soluciones. En este proyecto vemos cómo las coordenadas polares y la trigonometría nos pueden ayudar a trazar un mapa de todo el mundo en una hoja plana. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*





*Este material se encuentra disponible en inglés.

Observe que las ecuaciones que relacionan coordenadas polares y rectangulares no determinan r o θ de manera única. Cuando usamos estas ecuaciones para encontrar las coordenadas polares de un punto debemos tener cuidado de que los valores que elijamos para r y θ nos den un punto en el cuadrante correcto, tal como hicimos en el ejemplo 4.

Ecuaciones polares

En los ejemplos 3 y 4 convertimos puntos de un sistema de coordenadas a otro. Luego consideramos el mismo problema para las ecuaciones.

EJEMPLO 5 ■ Convertir una ecuación de coordenadas rectangulares a polares

Exprese la ecuación $x^2 = 4y$ en coordenadas polares.

SOLUCIÓN Usamos las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

$$x^2 = 4y \qquad \text{Ecuación rectangular}$$
$$(r\cos\theta)^2 = 4(r\,\text{sen}\,\theta) \qquad \text{Sustituya } x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$r^2\cos^2\theta = 4r\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Desarrolle}$$
$$r = 4\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta} \qquad \text{Divida entre } r\cos^2\theta$$
$$r = 4\sec\theta\tan\theta \qquad \text{Simplifique}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

Tal como muestra el ejemplo 5, convertir de coordenadas rectangulares a polares es sencillo: simplemente sustituya x por $r\cos\theta$ y y por $r\,\text{sen}\,\theta$, y luego simplifique. Pero convertir ecuaciones polares a forma rectangular con frecuencia requiere más razonamiento.

EJEMPLO 6 ■ Convertir ecuaciones de coordenadas polares a rectangulares

Exprese la ecuación polar en coordenadas rectangulares. Si es posible, determine la gráfica de la ecuación a partir de su forma rectangular.

a) $r = 5\sec\theta$ ***b)*** $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ ***c)*** $r = 2 + 2\cos\theta$

SOLUCIÓN

a) Dado que $\sec\theta = 1/\cos\theta$, multiplicamos ambos lados por $\cos\theta$.

$$r = 5\sec\theta \qquad \text{Ecuación polar}$$
$$r\cos\theta = 5 \qquad \text{Multiplique por } \cos\theta$$
$$x = 5 \qquad \text{Sustituya } x = r\cos\theta$$

La gráfica de $x = 5$ es la recta vertical de la figura 8.

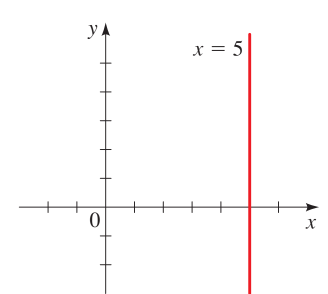


FIGURA 8

b) Multiplicamos ambos lados de la ecuación por r, porque entonces podemos usar las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\,\text{sen}\,\theta = y$.

$$r = 2\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Ecuación polar}$$
$$r^2 = 2r\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Multiplique por } r$$
$$x^2 + y^2 = 2y \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r\,\text{sen}\,\theta = y$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad \text{Reste } 2y$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad \text{Complete el cuadrado en } y$$

Esta es la ecuación de una circunferencia de radio 1 con centro en el punto $(0, 1)$. En la figura 9 se presenta su gráfica.

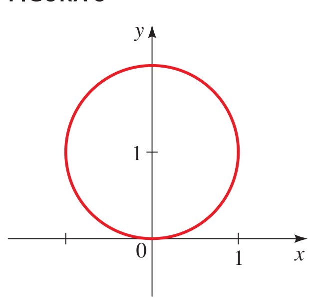


FIGURA 9

***c*)** Primero multiplicamos ambos lados de la ecuación por r:

$$r^2 = 2r + 2r\cos\theta$$

Usando $r^2 = x^2 + y^2$ y $x = r\cos\theta$ podemos convertir dos términos de la ecuación en coordenadas rectangulares, pero eliminar la r restante exige más trabajo.

$$x^2 + y^2 = 2r + 2x \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r\cos\theta = x$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 2r \qquad \text{Reste } 2x$$

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4r^2 \qquad \text{Se elevan al cuadrado ambos lados}$$

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

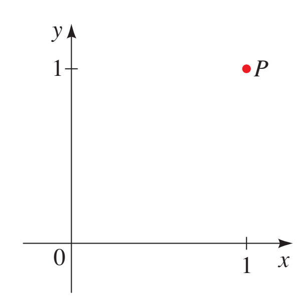
En este caso la ecuación rectangular parece más complicada que la ecuación polar. Aun cuando no podemos determinar fácilmente la gráfica de la ecuación a partir de su forma rectangular, en la siguiente sección veremos cómo trazar su gráfica mediante la ecuación polar.

Ahora intente realizar los ejercicios 55, 57 y 59 ■

8.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Podemos describir la ubicación de un punto en el plano usando diferentes sistemas de ________. El punto P que se muestra en la figura tiene coordenadas rectangulares (,) y coordenadas polares (,).



2. Sea P un punto en el plano.

***a*)** Si P tiene coordenadas polares (r, θ) entonces tiene coordenadas rectangulares (x, y) donde $x =$ ________ y $y =$ ________.

***b*)** Si P tiene coordenadas rectangulares (x, y) entonces tiene coordenadas polares (r, θ) donde $r^2 =$ ________ y $\tan\theta =$ ________.

3–4 ■ *¿Sí o no?* Si es *no*, explique.

3. Las coordenadas polares $(2, \pi/6)$ y $(-2, 7\pi/6)$ ¿representan el mismo punto?

4. ¿Las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y rectangulares determinan en forma única a r y θ?

HABILIDADES

5–10 ■ **Trazar puntos en coordenadas polares** Coloque el punto que tienen las coordenadas polares dadas.

5. $(4, \pi/4)$ **6.** $(1, 0)$ **7.** $(6, -7\pi/6)$

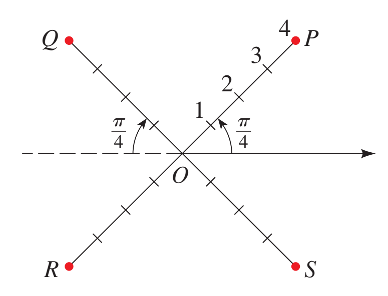
8. $(3, -2\pi/3)$ **9.** $(-2, 4\pi/3)$ **10.** $(-5, -17\pi/6)$

11–16 ■ **Diferentes coordenadas polares para el mismo punto** Coloque el punto que tienen las coordenadas polares dadas. Luego proporcione otras dos representaciones de coordenadas del punto, una con $r < 0$ y la otra con $r > 0$.

11. $(3, \pi/2)$ **12.** $(2, 3\pi/4)$ **13.** $(-1, 7\pi/6)$

14. $(-2, -\pi/3)$ **15.** $(-5, 0)$ **16.** $(3, 1)$

17–24 ■ **Puntos en coordenadas polares** Determine qué punto de la figura, P, Q, R o S, tiene las coordenadas polares.



17. $(4, 3\pi/4)$ **18.** $(4, -3\pi/4)$

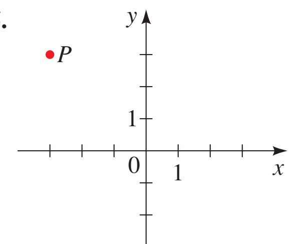
19. $(-4, -\pi/4)$ **20.** $(-4, 13\pi/4)$

21. $(4, -23\pi/4)$ **22.** $(-4, 23\pi/4)$

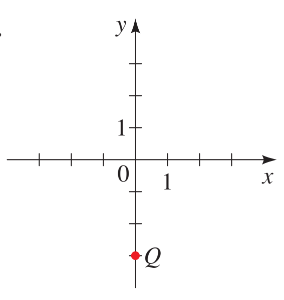
23. $(-4, 101\pi/4)$ **24.** $(4, 103\pi/4)$

25–26 ■ De coordenadas rectangulares a coordenadas polares Se presenta la gráfica de un punto en forma rectangular. Encuentre las coordenadas polares para el punto, con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$.

25.

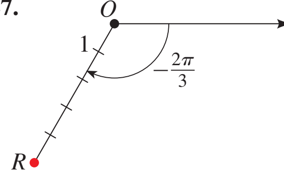


26.

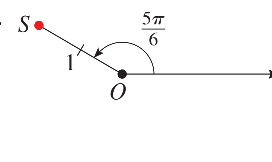


27–28 ■ De coordenadas polares a coordenadas rectangulares Se presenta la gráfica de un punto en forma polar. Encuentre sus coordenadas rectangulares.

27.



28.



29–36 ■ Coordenadas polares a coordenadas rectangulares Encuentre las coordenadas rectangulares para el punto cuyas coordenadas polares están dadas.



29. $(4, \pi/6)$ **30.** $(6, 2\pi/3)$

31. $(\sqrt{2}, -\pi/4)$ **32.** $(-1, 5\pi/2)$

33. $(5, 5\pi)$ **34.** $(0, 13\pi)$

35. $(6\sqrt{2}, 11\pi/6)$ **36.** $(\sqrt{3}, -5\pi/3)$

37–44 ■ Coordenadas rectangulares a polares Convierta las coordenadas rectangulares en coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$.

37. $(-1, 1)$ **38.** $(3\sqrt{3}, -3)$

39. $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$ **40.** $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$

41. $(3, 4)$ **42.** $(1, -2)$

43. $(-6, 0)$ **44.** $(0, -\sqrt{3})$

45–50 ■ Ecuaciones rectangulares a ecuaciones polares Convierta la ecuación a forma polar.

45. $x = y$ **46.** $x^2 + y^2 = 9$

47. $y = x^2$ **48.** $y = 5$

49. $x = 4$ **50.** $x^2 - y^2 = 1$

51–70 ■ Ecuaciones polares a rectangulares Convierta la ecuación polar a coordenadas rectangulares.

51. $r = 7$ **52.** $r = -3$

53. $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ **54.** $\theta = \pi$



55. $r \cos\theta = 6$ **56.** $r = 2 \csc\theta$

57. $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ **58.** $r = 6\cos\theta$

59. $r = 1 + \cos\theta$ **60.** $r = 3(1 - \operatorname{sen}\theta)$

61. $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ **62.** $r = 2 - \cos\theta$

63. $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$ **64.** $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

65. $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$ **66.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

67. $r^2 = \tan\theta$ **68.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

69. $\sec\theta = 2$ **70.** $\cos 2\theta = 1$

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

71. DISCUSIÓN ■ DEMOSTRACIÓN: La fórmula de la distancia en coordenadas polares

a) Use la ley de cosenos para demostrar que la distancia entre los puntos polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

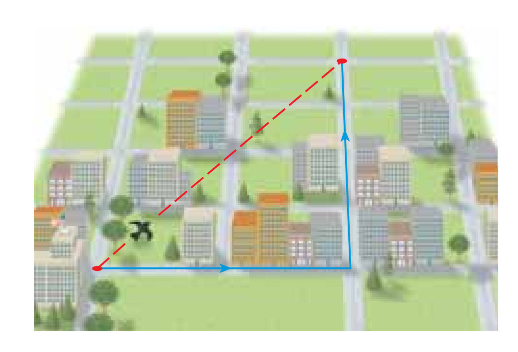
b) Encuentre la distancia entre los puntos cuyas coordenadas polares son $(3, 3\pi/4)$ y $(1, 7\pi/6)$, usando la fórmula del inciso *a*).

c) Ahora convierta los puntos del inciso *b*) a coordenadas rectangulares. Encuentre la distancia entre ellos usando la fórmula de distancia. ¿Se obtiene la misma respuesta?

72. DISCUSIÓN: Diferentes sistemas coordenados Tal como se indicó en la descripción del capítulo, algunas curvas se describen más naturalmente en un sistema de coordenadas que en otro. En cada una de las siguientes situaciones, ¿qué sistema de coordenadas sería apropiado: rectangular o polar? Dé razones para justificar su respuesta.

a) Necesita darle instrucciones a un taxista para ir a su casa.

b) Necesita dar instrucciones para ir a su casa a una paloma mensajera.



8.2 GRÁFICAS DE ECUACIONES POLARES

■ Gráficas de ecuaciones polares ■ Simetría ■ Gráficas de ecuaciones polares con calculadora graficadora

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$ está formada por todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Muchas curvas que se representan en matemáticas y sus aplicaciones son representadas en forma más fácil y natural con ecuaciones polares que con ecuaciones rectangulares.

Gráficas de ecuaciones polares

Una cuadrícula rectangular es útil para colocar puntos en coordenadas rectangulares (vea la figura 1*a*)). Para colocar puntos en coordenadas polares es conveniente usar una cuadrícula formada por circunferencias centradas en el polo y rayos que emanan de este, como se muestra en la figura 1*b*). Usaremos estas cuadrículas para ayudarnos a trazar gráficas polares.

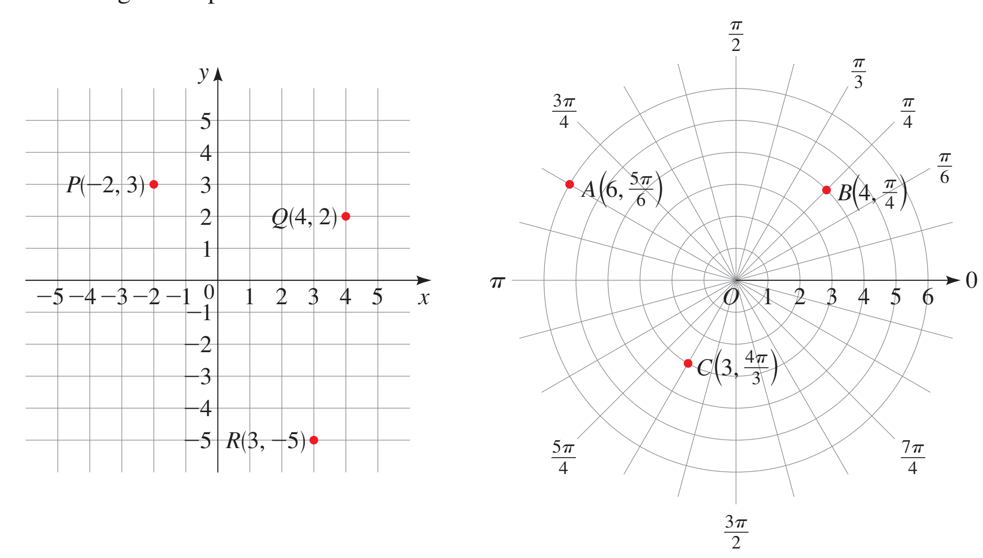


FIGURA 1 *a*) Cuadrícula para coordenadas rectangulares *b*) Cuadrícula para coordenadas polares

En los ejemplos 1 y 2 vemos que las circunferencias centradas en el origen y las rectas que pasan por el origen tienen ecuaciones particularmente sencillas en coordenadas polares.

EJEMPLO 1 ■ Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace una gráfica de la ecuación $r = 3$, y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN La gráfica está formada por todos los puntos cuya coordenada r es 3, es decir, todos los puntos que están a 3 unidades de distancia del origen. Por tanto, la gráfica es una circunferencia de radio 3 con centro en el origen, como se muestra en la figura 2.

Si se elevan al cuadrado ambos lados obtenemos

$$r^2 = 3^2 \quad \text{Se elevan al cuadrado ambos lados}$$
$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Sustituya } r^2 = x^2 + y^2$$

Por tanto, la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = 9$.

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

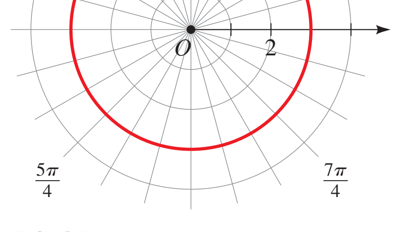


FIGURA 2

En general, la gráfica de la ecuación $r = a$ es una circunferencia de radio $|a|$ con centro en el origen. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación vemos que la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = a^2$.



EJEMPLO 2 ■ Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace una gráfica de la ecuación $\theta = \pi/3$ y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

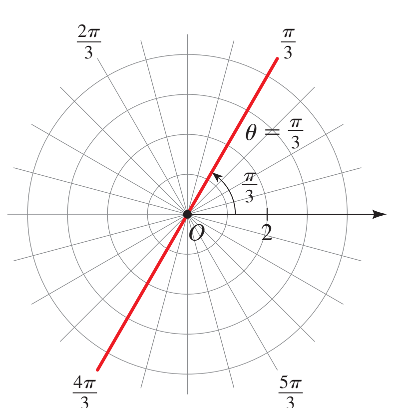


FIGURA 3

SOLUCIÓN La gráfica está formada por todos los puntos cuya coordenada θ es $\pi/3$. Esta es la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar (vea la figura 3). Observe que los puntos $(r, \pi/3)$ sobre la recta con $r > 0$ se encuentran en el primer cuadrante, mientras que los puntos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante. Si el punto (x, y) está sobre esta recta, entonces

$$\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Por tanto, la ecuación rectangular de esta recta es $y = \sqrt{3}x$.

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

Para trazar una curva polar cuya gráfica no es tan obvia como las de los ejemplos anteriores colocamos los puntos calculados para un número suficiente de valores de θ y los unimos en una curva continua. (Esto es lo que hicimos cuando aprendimos a trazar las gráficas de funciones en coordenadas rectangulares.)

EJEMPLO 3 ■ Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace una gráfica de la ecuación polar $r = 2$ sen θ.

SOLUCIÓN Primero usamos la ecuación para determinar las coordenadas polares de varios puntos en la curva. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$r = 2$ sen θ	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

Colocamos estos puntos en la figura 4 y luego los unimos para trazar la curva. La gráfica parece ser una circunferencia. Hemos utilizado valores de θ sólo entre 0 y π, porque los mismos puntos (esta vez expresados con coordenadas r negativas) podrían obtenerse si permitimos que θ varíe de π a 2π.

La ecuación polar $r = 2$ sen θ en coordenadas rectangulares es

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

(vea en la sección 8.1 el ejemplo 6*b*)). De la forma rectangular de la ecuación vemos que la gráfica es una circunferencia de radio 1 con centro en $(0, 1)$.

FIGURA 4 $r = 2$ sen θ

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

En general, las gráficas de las ecuaciones de la forma

$$r = 2a \text{ sen } \theta \qquad \text{y} \qquad r = 2a \cos \theta$$

son **circunferencias** con radio $|a|$ con centro en los puntos con coordenadas polares $(a, \pi/2)$ y $(a, 0)$, respectivamente.

EJEMPLO 4 ■ Trazado de la gráfica de una cardioide

Trace una gráfica de $r = 2 + 2 \cos \theta$.

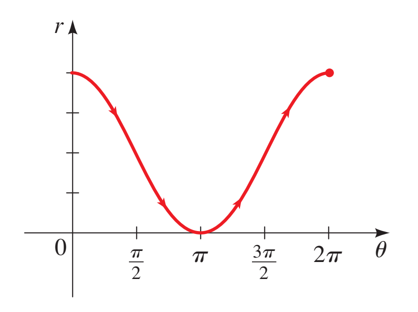


FIGURA 5 $r = 2 + 2 \cos \theta$

SOLUCIÓN En lugar de colocar puntos como en el ejemplo 3, primero trazamos la gráfica de $r = 2 + 2 \cos \theta$ en coordenadas *rectangulares* en la figura 5. Podemos considerar esta gráfica como una tabla de valores que nos permite leer de un vistazo los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, vemos que cuando θ aumenta de 0 a $\pi/2$, r (la distancia desde O) decrece de 4 a 2, de modo que trazamos la parte correspondiente de la gráfica polar de la figura 6*a*). Cuando θ aumenta de $\pi/2$ a π, la figura 5 muestra que r decrece de 2 a 0, de modo que trazamos la siguiente parte de la gráfica como en la figura 6*b*). Cuando θ aumenta de π a $3\pi/2$, r aumenta de 0 a 2, como se muestra en el inciso *c*). Finalmente, cuando θ aumenta de $3\pi/2$ a 2π, r aumenta de 2 a 4, como se muestra en el inciso *d*). Si hacemos que θ aumente a más de 2π o que disminuya a menos de 0, simplemente volveríamos a trazar nuestra trayectoria. Combinando las partes de la gráfica de los incisos *a*) a *d*) de la figura 6 trazamos la gráfica completa del inciso *e*).

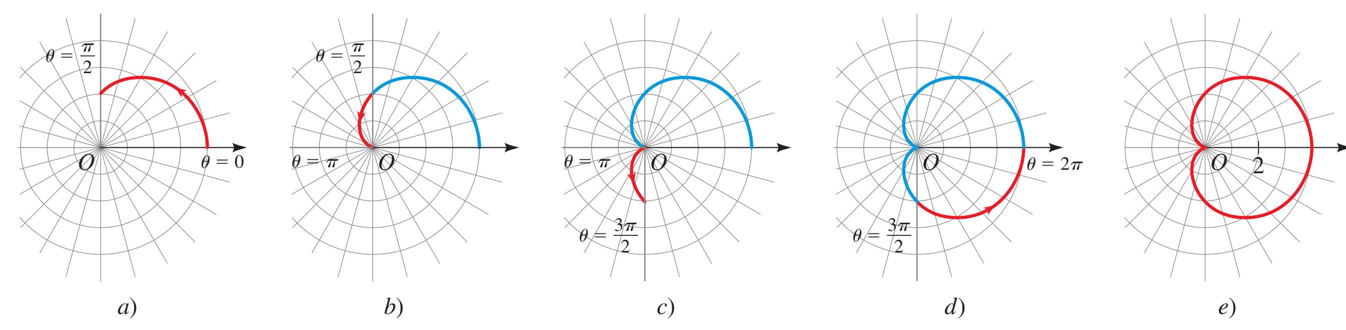


FIGURA 6 Pasos para trazar $r = 2 + 2 \cos \theta$

La ecuación polar $r = 2 + 2 \cos \theta$ en coordenadas rectangulares es

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

(vea en la sección 8.1 el ejemplo 6*c*)). La forma más simple de la ecuación polar muestra que es más natural describir las cardioides usando coordenadas polares.

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

La curva de la figura 6 se llama **cardioide** debido a su forma de corazón. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$r = a(1 \pm \cos \theta) \qquad \text{o} \qquad r = a(1 \pm \text{sen } \theta)$$

es una cardioide.

EJEMPLO 5 ■ Trazado de la gráfica de una rosa de cuatro pétalos

Trace la curva $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 4 primero trazamos la gráfica de $r = \cos 2\theta$ en coordenadas *rectangulares*, como se muestra en la figura 7. Cuando θ aumenta de 0 a $\pi/4$ la figura 7 muestra que r decrece de 1 a 0, de modo que trazamos la parte correspondiente de la curva polar de la figura 8 (indicada por ①). Cuando θ aumenta de $\pi/4$ a $\pi/2$, el valor de r pasa de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde el origen aumenta de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante, esta parte de la curva polar (indicada por ②) se encuentra en el lado opuesto del origen en el tercer cuadrante. El resto de la curva se traza de forma similar, con las flechas y los números

indicando el orden en el que están trazadas las partes. La curva resultante tiene cuatro pétalos y se denomina **rosa de cuatro pétalos**.

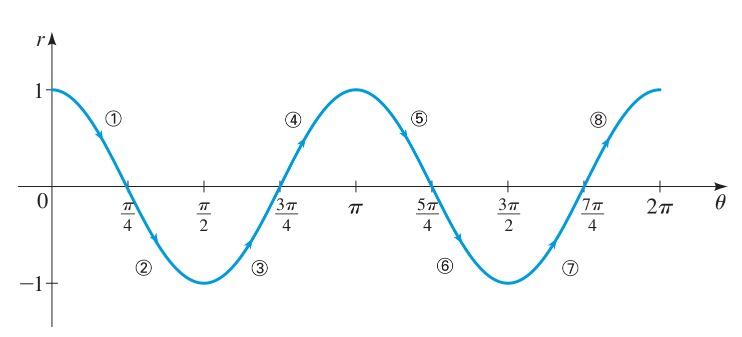


FIGURA 7 Gráfica de $r = \cos 2\theta$ trazada en coordenadas rectangulares

FIGURA 8 Rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$ trazada en coordenadas polares

 **Ahora intente realizar el ejercicio 29**

En general, la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a \cos n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

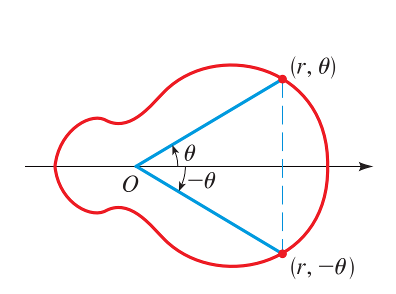
es una **rosa de *n* pétalos** si n es impar o una rosa de $2n$ pétalos si n es par (como se muestra en el ejemplo 5).

Simetría

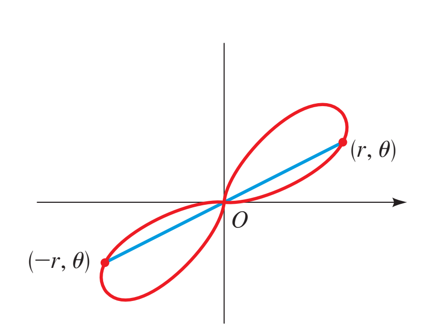
Al trazar la gráfica de una ecuación polar a veces es útil aprovechar la simetría. A continuación mencionamos tres pruebas de simetría; la figura 9 muestra por qué funcionan estas pruebas.

PRUEBAS DE SIMETRÍA

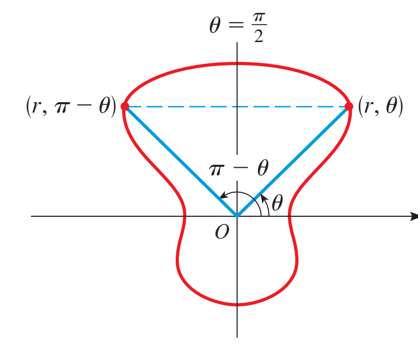
1. Si una ecuación polar no cambia cuando sustituimos θ por $-\theta$, entonces la gráfica es simétrica alrededor del eje polar (figura 9*a*)).
2. Si la ecuación no cambia cuando sustituimos r por $-r$, o θ por $\theta + \pi$, entonces la gráfica es simétrica alrededor del polo (figura 9*b*)).
3. Si la ecuación no cambia cuando sustituimos θ por $\pi - \theta$, la gráfica es simétrica alrededor de la recta vertical $\theta = \pi/2$ (el eje y) (figura 9*c*)).



a) Simetría alrededor del eje polar



b) Simetría alrededor del polo



c) Simetría alrededor de la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

FIGURA 9

Las gráficas de las figuras 2, 6*e*) y 8 son simétricas alrededor del eje polar. La gráfica de la figura 8 es también simétrica alrededor del polo. Las figuras 4 y 8 muestran gráficas que son simétricas alrededor de $\theta = \pi/2$. Observe que la rosa de cuatro pétalos de la figura 8 satisface las tres pruebas de simetría.

En coordenadas rectangulares los ceros de la función $y = f(x)$ corresponden a los puntos de intersección x de la gráfica. En coordenadas polares los ceros de la función $r = f(\theta)$ son los ángulos θ en los que la curva cruza el polo. Los ceros nos ayudan a trazar la gráfica, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

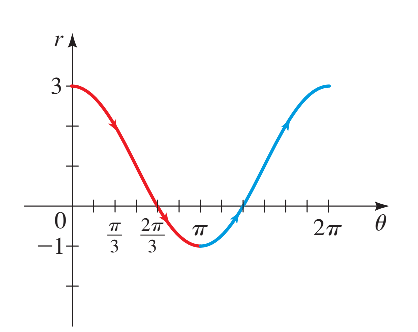


FIGURA 10

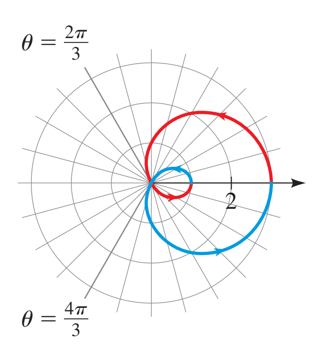


FIGURA 11 $r = 1 + 2\cos\theta$

EJEMPLO 6 ■ Uso de simetría para trazar un caracol

Trace una gráfica de la ecuación $r = 1 + 2\cos\theta$.

SOLUCIÓN Usamos lo siguiente como guía para trazar la gráfica.

Simetría. En vista de que la ecuación no cambia cuando θ se sustituye por $-\theta$, la gráfica es simétrica alrededor del eje polar.

Ceros. Para encontrar los ceros resolvemos

$$0 = 1 + 2\cos\theta$$
$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

Tabla de valores. Al igual que en el ejemplo 4, trazamos la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ en coordenadas *rectangulares* para que sirva como tabla de valores (figura 10).

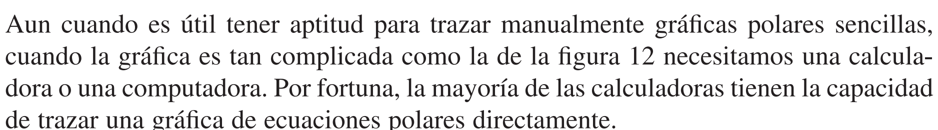
Ahora trazamos la gráfica polar de $r = 1 + 2\cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ y después usamos simetría para completar la gráfica de la figura 11.


Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

La curva de la figura 11 se llama **limaçon**, por la palabra francesa que significa **caracol**. En general, la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a \pm b\cos\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$$

es un caracol. La forma del caracol depende del tamaño relativo de a y b (vea el cuadro de la página siguiente).



■ Trazar la gráfica de ecuaciones polares con calculadora graficadora

Aun cuando es útil tener aptitud para trazar manualmente gráficas polares sencillas, cuando la gráfica es tan complicada como la de la figura 12 necesitamos una calculadora o una computadora. Por fortuna, la mayoría de las calculadoras tienen la capacidad de trazar una gráfica de ecuaciones polares directamente.

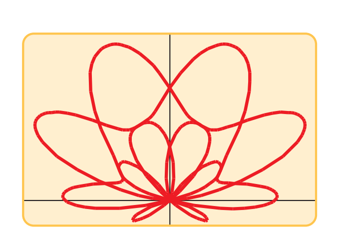


FIGURA 12 $r = \text{sen}\,\theta + \text{sen}^3(5\theta/2)$



EJEMPLO 7 ■ Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace la gráfica de la ecuación $r = \cos(2\theta/3)$.

SOLUCIÓN Necesitamos determinar el dominio para θ, por tanto, nos preguntamos: ¿cuántas veces debe θ hacer una revolución completa (2π radianes) antes de que la gráfica empiece a repetirse? La gráfica se repite cuando el mismo valor de r se obtiene en θ y en $\theta + 2n\pi$. Entonces necesitamos encontrar un entero n de modo que

$$\cos\frac{2(\theta + 2n\pi)}{3} = \cos\frac{2\theta}{3}$$

Para que se cumpla esta igualdad, $4n\pi/3$ debe ser múltiplo de 2π, y esto primero ocurre cuando $n = 3$. Por tanto, obtenemos toda la gráfica si escogemos valores de θ entre $\theta = 0$ y $\theta = 0 + 2(3)\pi = 6\pi$. En la figura 13 se muestra la gráfica.

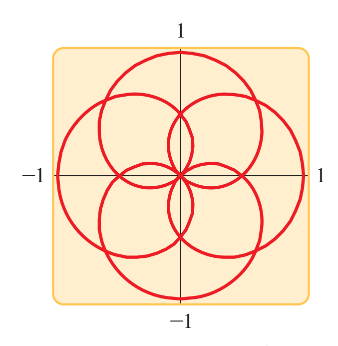


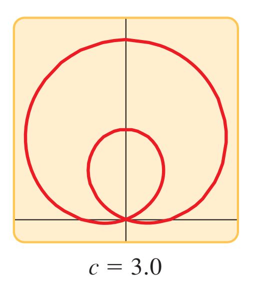
FIGURA 13 $r = \cos(2\theta/3)$

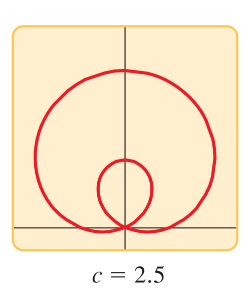

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

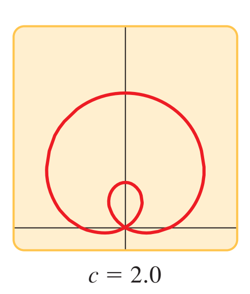
EJEMPLO 8 ■ Una familia de ecuaciones polares

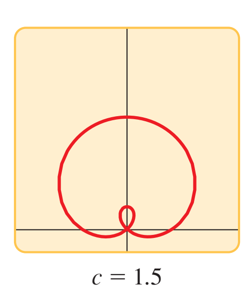
Trace la gráfica de la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ para $c = 3, 2.5, 2, 1.5, 1$. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando cambia c?

SOLUCIÓN La figura 14 muestra gráficas generadas por computadora para los valores dados de c. Cuando $c > 1$, la gráfica tiene un lazo interior y este disminuye en tamaño a medida que disminuye c. Cuando $c = 1$ el lazo desaparece y la gráfica se convierte en una cardioide (vea el ejemplo 4).


$c = 3.0$


$c = 2.5$


$c = 2.0$


$c = 1.5$

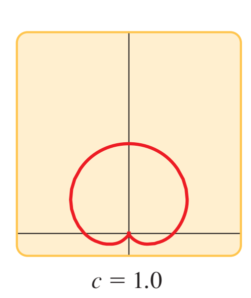

$c = 1.0$

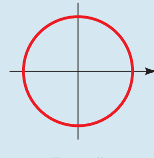
FIGURA 14 Familia de caracoles, $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ en el rectángulo de vista $[-2.5, 2.5]$ por $[-0.5, 4.5]$

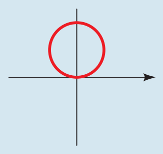
Ahora intente realizar el ejercicio 51 ■

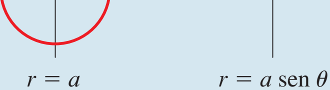
El cuadro siguiente proporciona un resumen de algunas de las gráficas polares básicas que se usan en cálculo.

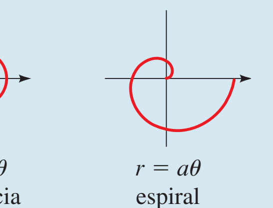
ALGUNAS CURVAS POLARES COMUNES

Circunferencias y espiral


$r = a$
circunferencia


$r = a \operatorname{sen} \theta$
circunferencia


$r = a \cos \theta$
circunferencia


$r = a\theta$
espiral

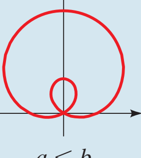
Caracoles

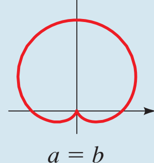
$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$

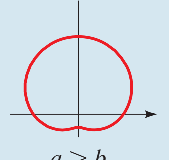
$r = a \pm b \cos \theta$

$(a > 0, b > 0)$

La orientación depende de la función trigonométrica (seno o coseno) y del signo de b.


$a < b$
caracol con lazo interior


$a = b$
cardioide


$a > b$
caracol alveolado

$a \geq 2b$
caracol convexo

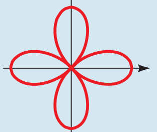
Rosas

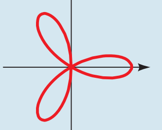
$r = a \operatorname{sen} n\theta$

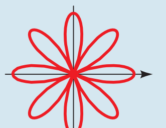
$r = a \cos n\theta$

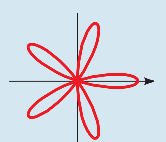
n hojas si n es impar

$2n$ hojas si n es par


$r = a \cos 2\theta$
rosa de 4 hojas

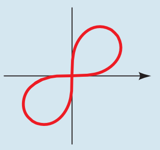

$r = a \cos 3\theta$
rosa de 3 hojas

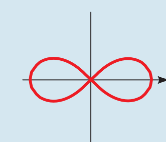

$r = a \cos 4\theta$
rosa de 8 hojas


$r = a \cos 5\theta$
rosa de 5 hojas

Lemniscatas

Curvas en forma de ocho


$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$
lemniscata


$r^2 = a^2 \cos 2\theta$
lemniscata

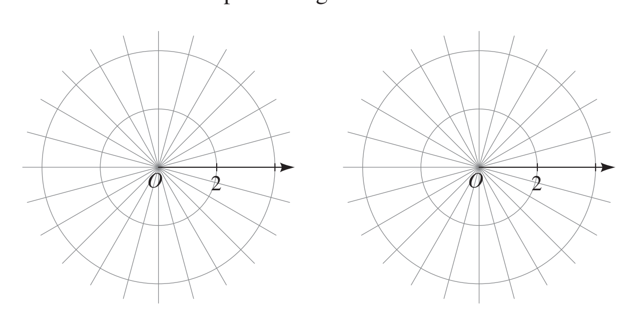
8.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para determinar puntos en coordenadas polares usamos una cuadrícula formada por ________ con centro en el polo y ________ que emanan del mismo.

2. ***a*)** Para trazar la gráfica una ecuación polar $r = f(\theta)$, colocamos todos los puntos (r, θ) que ________ la ecuación.

***b*)** Las ecuaciones polares más sencillas se obtienen haciendo r o θ iguales a una constante. La gráfica de la ecuación polar $r = 3$ es una ________ con radio ________ con centro en el ________. La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/4$ es una ________ que pasa por el ________ con pendiente ________. Trace la gráfica de las ecuaciones polares siguientes.



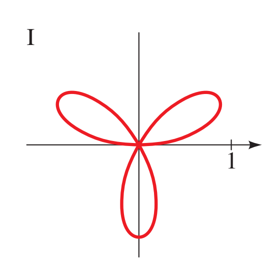
HABILIDADES

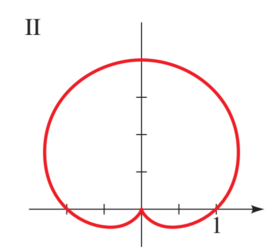
3–8 ■ Gráficas de ecuaciones polares Relacione la ecuación polar con las gráficas marcadas I-VI. Use la tabla de la página 519 para ayudarse.

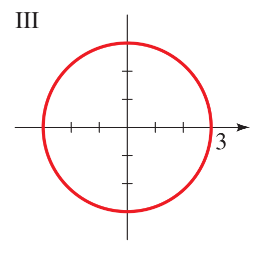
3. $r = 3 \cos \theta$ **4.** $r = 3$

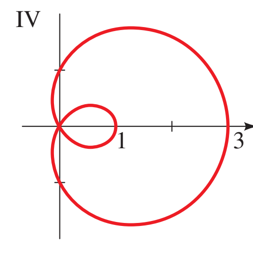
5. $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$ **6.** $r = 1 + 2 \cos \theta$

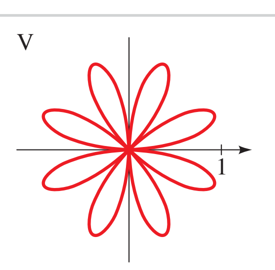
7. $r = \operatorname{sen} 3\theta$ **8.** $r = \operatorname{sen} 4\theta$

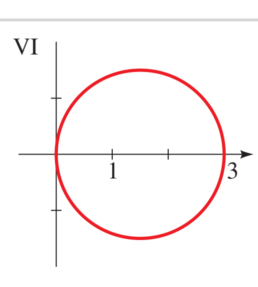












9–16 ■ Demostrar por simetría Demuestre que sí hay simetría en la ecuación polar respecto al eje polar, el polo y la recta $\theta = \pi/2$.

9. $r = 2 - \operatorname{sen} \theta$ **10.** $r = 4 + 8 \cos \theta$

11. $r = 3 \sec \theta$ **12.** $r = 5 \cos \theta \csc \theta$

13. $r = \dfrac{4}{3 - 2 \operatorname{sen} \theta}$ **14.** $r = \dfrac{5}{1 + 3 \cos \theta}$

15. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ **16.** $r^2 = 9 \operatorname{sen} \theta$

17–22 ■ De polares a rectangulares Trace una gráfica de la ecuación polar y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

17. $r = 2$ **18.** $r = -1$

19. $\theta = -\pi/2$ **20.** $\theta = 5\pi/6$

21. $r = 6 \operatorname{sen} \theta$ **22.** $r = \cos \theta$

23–46 ■ Trazar las gráficas de ecuaciones polares Trace una gráfica de la ecuación polar.

23. $r = -2 \cos \theta$ **24.** $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

25. $r = 2 - 2 \cos \theta$ **26.** $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

27. $r = -3(1 + \operatorname{sen} \theta)$ **28.** $r = \cos \theta - 1$

29. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **30.** $r = 2 \cos 3\theta$

31. $r = -\cos 5\theta$ **32.** $r = \operatorname{sen} 4\theta$

33. $r = 2 \operatorname{sen} 5\theta$ **34.** $r = -3 \cos 4\theta$

35. $r = \sqrt{3} - 2 \operatorname{sen} \theta$ **36.** $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

37. $r = \sqrt{3} + \cos \theta$ **38.** $r = 1 - 2 \cos \theta$

39. $r = 2 - 2\sqrt{2} \cos \theta$ **40.** $r = 3 + 6 \operatorname{sen} \theta$

41. $r^2 = \cos 2\theta$ **42.** $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

43. $r = \theta, \quad \theta \geq 0$ (espiral)

44. $r\theta = 1, \quad \theta > 0$ (espiral recíproca)

45. $r = 2 + \sec \theta$ (concoide)

46. $r = \operatorname{sen} \theta \tan \theta$ (cisoide)

47–50 ■ Trazar las gráficas de ecuaciones polares Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la ecuación polar. Elija el dominio de θ para asegurarse de producir toda la gráfica.

47. $r = \cos(\theta/2)$ **48.** $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

49. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide)

50. $r = \sqrt{1 - 0.8 \operatorname{sen}^2 \theta}$ (hipopeda)



51–52 ■ Familias de ecuaciones polares Estos ejercicios tienen familias de ecuaciones polares.

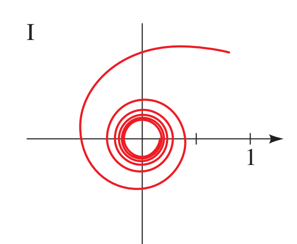
51. Trace la gráfica de la familia de ecuaciones polares $r = 1 + \text{sen } n\theta$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Cómo está relacionado el número de lazos respecto a n?

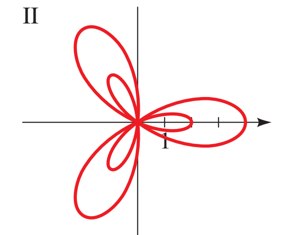
52. Trace la gráfica de la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c \text{ sen } 2\theta$ para $c = 0.3, 0.6, 1, 1.5$ y 2. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c aumenta?

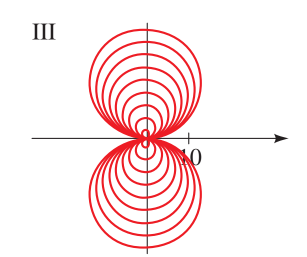
53–56 ■ Ecuaciones polares especiales Relacione la ecuación polar con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

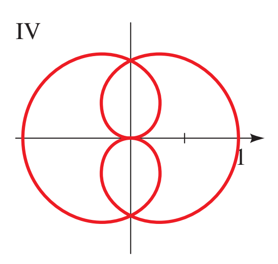
53. $r = \text{sen}(\theta/2)$ **54.** $r = 1/\sqrt{\theta}$

55. $r = \theta \text{ sen } \theta$ **56.** $r = 1 + 3\cos(3\theta)$









HABILIDADES Plus

57–60 ■ De rectangulares a polares Trace una gráfica de la ecuación rectangular. [*Sugerencia:* primero convierta la ecuación a coordenadas polares.]

57. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ **58.** $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$

59. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ **60.** $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x^2)$

61. Una circunferencia en coordenadas polares Considere la ecuación polar $r = a\cos\theta + b \text{ sen } \theta$.

a) Exprese la ecuación en coordenadas rectangulares y use esto para demostrar que la gráfica de la ecuación es una circunferencia. ¿Cuáles son el centro y el radio?

b) Use su respuesta del inciso *a*) para trazar la gráfica de la ecuación $r = 2 \text{ sen } \theta + 2\cos\theta$.



62. Una parábola en coordenadas polares

a) Trace la gráfica de la ecuación polar $r = \tan\theta \sec\theta$ en el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-1, 9]$.

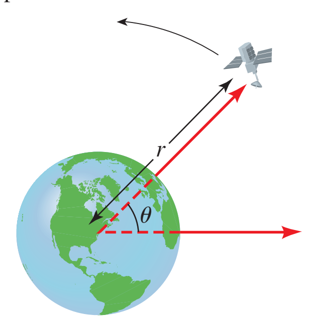
b) Observe que su gráfica del inciso *a*) se parece a una parábola (vea la sección 3.1). Confirme esto convirtiendo la ecuación a coordenadas rectangulares.

APLICACIONES

63. Órbita de un satélite Es frecuente que científicos e ingenieros usen ecuaciones polares para modelar el movimiento de los satélites en la órbita de la Tierra. Consideremos un satélite cuya órbita esté modelada por la ecuación $r = 22\,500/(4 - \cos\theta)$, donde r es la distancia en millas entre el satélite y el centro de la Tierra y θ es el ángulo que se muestra en la figura siguiente.

a) En la misma pantalla de vista trace la gráfica de la circunferencia $r = 3\,960$ (para representar la Tierra, que supondremos es una esfera de 3 960 millas de radio) y la ecuación polar de la órbita del satélite. Describa el movimiento del satélite cuando θ aumenta de 0 a 2π.

b) ¿Para qué ángulo θ está más cercano el satélite a la Tierra? Encuentre la altura del satélite sobre la superficie terrestre para este valor de θ.





64. Una órbita inestable La órbita descrita en el ejercicio 63 es estable porque el satélite recorre la misma trayectoria una y otra vez cuando θ aumenta. Suponga que un meteoro choca contra el satélite y cambia su órbita a

$$r = \frac{22\,500\left(1 - \dfrac{\theta}{40}\right)}{4 - \cos\theta}$$

a) En la misma pantalla de observación trace la gráfica de la circunferencia $r = 3\,960$ y la nueva ecuación de órbita, con θ creciente de 0 a 3π. Describa el nuevo movimiento del satélite.

b) Use la instrucción TRACE de su calculadora graficadora para encontrar el valor de θ en el momento en que el satélite choca en la Tierra.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN



65. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Una transformación de gráficas polares ¿Cómo están relacionadas las gráficas de

$$r = 1 + \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

y

$$r = 1 + \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

con la gráfica de $r = 1 + \text{sen } \theta$? En general, ¿cómo está relacionada la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

66. DISCUSIÓN: Selección de un sistema de coordenadas conveniente Compare la ecuación polar de la circunferencia $r = 2$ con su ecuación en coordenadas rectangulares. ¿En qué sistema de coordenadas es más sencilla la ecuación? Haga lo mismo para la ecuación de la rosa de cuatro pétalos $r = \text{sen } 2\theta$. ¿Qué sistema de coordenadas elegiría usted para estudiar estas curvas?

67. DISCUSIÓN: Selección de un sistema de coordenadas útil Compare la ecuación rectangular de la recta $y = 2$ con su ecuación polar. ¿En cuál sistema de coordenadas es más sencilla la ecuación? ¿Qué sistema de coordenadas elegiría usted para estudiar rectas?

8.3 FORMA POLAR DE NÚMEROS COMPLEJOS: TEOREMA DE DE MOIVRE

■ Gráficas de números complejos ■ Forma polar de números complejos ■ Teorema de De Moivre ■ Raíces *n*-ésimas de números complejos

En esta sección representamos números complejos en forma polar (o trigonométrica). Esto hace posible que encontremos las raíces *n*-ésimas de números complejos. Para describir la forma polar de números complejos debemos primero aprender a trabajar gráficamente con números complejos.

Gráficas de números complejos

Para trazar la gráfica de números reales o conjuntos de números reales hemos estado empleando la recta, que tiene sólo una dimensión. Sin embargo, los números complejos tienen dos componentes: una parte real y una parte imaginaria. Esto sugiere que necesitamos dos ejes para trazar la gráfica de números complejos: uno para la parte real y uno para la parte imaginaria. A estos se les da el nombre de **eje real** y **eje imaginario**, respectivamente. El plano determinado por estos dos ejes se denomina **plano complejo**. Para trazar la gráfica del número complejo $a + bi$ colocamos el par ordenado de números (a, b) en este plano, como se indica en la figura 1.

FIGURA 1

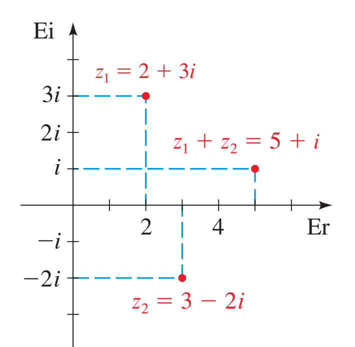


FIGURA 2

EJEMPLO 1 ■ Trazar la gráfica de números complejos

Trace la gráfica de los números complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$ y $z_1 + z_2$.

SOLUCIÓN Tenemos $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = 5 + i$. En la figura 2 se muestra la gráfica.

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

EJEMPLO 2 ■ Trazar la gráfica de conjuntos de números complejos

Trace la gráfica de cada conjunto de números complejos.

a) $S = \{a + bi \mid a \geq 0\}$

b) $T = \{a + bi \mid a < 1, b \geq 0\}$

SOLUCIÓN

a) *S* es el conjunto de números complejos cuya parte real es no negativa. En la figura 3*a*) se muestra la gráfica.

b) *T* es el conjunto de números complejos para el cual la parte real es menor a 1 y la parte imaginara es no negativa. En la figura 3*b*) se muestra la gráfica.

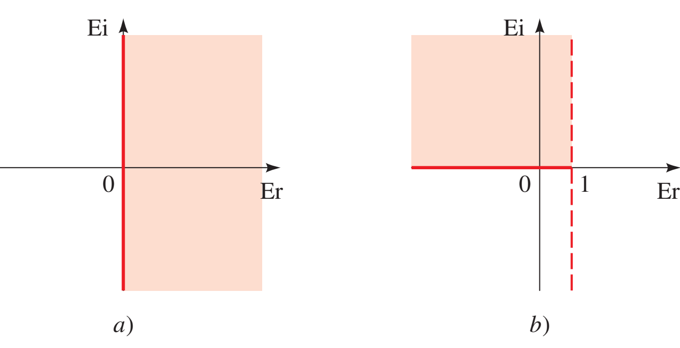


FIGURA 3

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

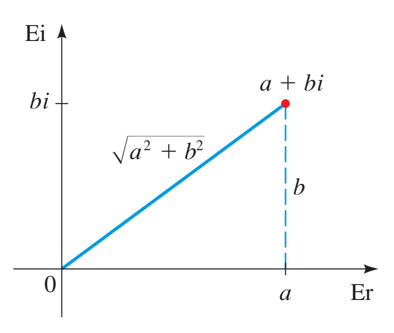


FIGURA 4

Recuerde que el valor absoluto de un número real se puede considerar como su distancia desde el origen en la recta de números reales (vea la sección 1.1). Definimos el valor absoluto para números complejos en forma semejante. Usando el teorema de Pitágoras podemos ver a partir de la figura 4 que la distancia entre $a + bi$ y el origen en el plano complejo es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esto conduce a la siguiente definición.

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El **módulo** (o **valor absoluto**) del número complejo $z = a + bi$ es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 3 ■ Calcular el módulo

Encuentre los módulos de los números complejos $3 + 4i$ y $8 - 5i$.

SOLUCIÓN

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|8 - 5i| = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

EJEMPLO 4 ■ Valor absoluto de números complejos

Trace la gráfica de los siguientes conjuntos de números complejos.

a) $C = \{z \mid |z| = 1\}$ ***b)*** $D = \{z \mid |z| \leq 1\}$

SOLUCIÓN

a) C es el conjunto de números complejos cuya distancia desde el origen es 1. Entonces C es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen, como se muestra en la figura 5.

b) D es el conjunto de números complejos cuya distancia desde el origen es menor o igual a 1. Entonces D es el disco que está formado por todos los números complejos en y dentro del círculo C del inciso *a*), como se muestra en la figura 6.

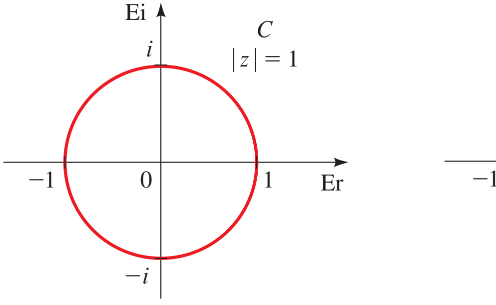




FIGURA 5

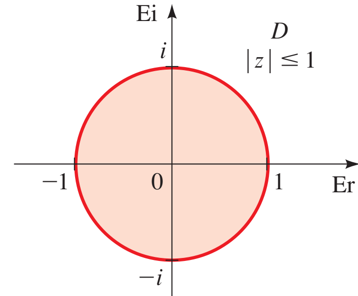


FIGURA 6

Ahora intente realizar los ejercicios 23 y 25 ■

■ Forma polar de números complejos

Sea $z = a + bi$ un número complejo y tracemos en el plano complejo el segmento de recta que une al origen con el punto $a + bi$ (vea la figura 7). La longitud de este segmento de recta es $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si θ es un ángulo en posición normal cuyo lado

terminal coincide con este segmento de recta, entonces por las definiciones de seno y coseno (vea la sección 6.3)

$$a = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r \operatorname{sen}\theta$$

de modo que $z = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. Hemos demostrado lo siguiente.

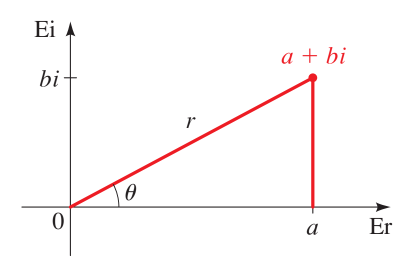


FIGURA 7

FORMA POLAR DE NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo $z = a + bi$ tiene la **forma polar** (o **forma trigonométrica**)

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = b/a$. El número r es el **módulo** de z y θ es un **argumento** de z.

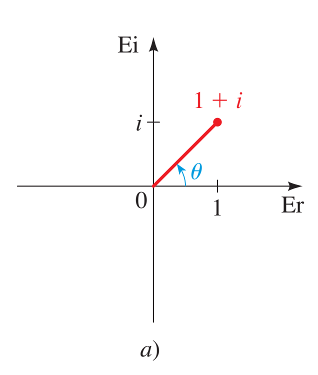
El argumento de z no es único, sino que cualesquier dos argumentos de z difieren por un múltiplo de 2π. Cuando determinemos el argumento, debemos considerar el cuadrante en el que se encuentre z, como vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 ■ Escribir números complejos en forma polar

Escriba cada número complejo en forma polar.

a) $1 + i$ ***b)*** $-1 + \sqrt{3}i$ ***c)*** $-4\sqrt{3} - 4i$ ***d)*** $3 + 4i$

SOLUCIÓN Estos números complejos están graficados en la figura 8, lo cual nos ayuda a encontrar sus argumentos.



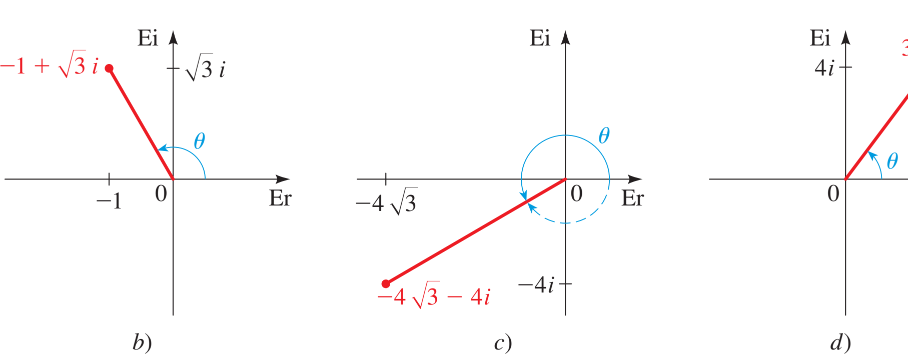


FIGURA 8

$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

a) Un argumento es $\theta = \pi/4$ y $r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Entonces

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$

b) Un argumento es $\theta = 2\pi/3$ y $r = \sqrt{1 + 3} = 2$. Entonces

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{-4}{-4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$

c) Un argumento es $\theta = 7\pi/6$ (o podríamos usar $\theta = -5\pi/6$), y $r = \sqrt{48 + 16} = 8$. Entonces

$$-4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$$

$\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$

d) Un argumento es $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ y $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Por tanto,

$$3 + 4i = 5\left[\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right)\right]$$

Ahora intente realizar los ejercicios 29, 31, 33 y 43 ■

Las fórmulas de adición del seno y el coseno que estudiamos en la sección 7.2 simplifican en gran medida la multiplicación y división de números complejos en forma polar. El siguiente teorema nos muestra cómo.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Si los dos números complejos z_1 y z_2 tienen las formas polares

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

entonces

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{Multiplicación}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0 \qquad \text{División}$$

Este teorema dice lo siguiente:

Para multiplicar dos números complejos multiplique los módulos y sume los argumentos.

Para dividir dos números complejos divida los módulos y reste los argumentos.

Demostración Para probar la fórmula de la multiplicación, simplemente multiplicamos los dos números complejos:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

En el último paso usamos las fórmulas de la adición del seno y el coseno.

La demostración de la fórmula de división se deja como ejercicio. (Vea el ejercicio 101.) ■

EJEMPLO 6 ■ Multiplicación y división de números complejos

Sea

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{y} \qquad z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Encuentre ***a)*** z_1z_2 y ***b)*** z_1/z_2.

SOLUCIÓN

a) Por la fórmula de la multiplicación

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (2)(5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 10\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Para aproximar la respuesta usamos una calculadora en modo de radianes y obtenemos

$$\begin{aligned} z_1z_2 &\approx 10(-0.2588 + 0.9659i) \\ &= -2.588 + 9.659i \end{aligned}$$

b) Por la fórmula de la división

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]\\ &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]\\ &= \frac{2}{5}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

Usando una calculadora en modo de radianes obtenemos la respuesta aproximada:

$$\frac{z_1}{z_2} \approx \frac{2}{5}(0.9659 - 0.2588i) = 0.3864 - 0.1035i$$

Ahora intente realizar el ejercicio 49 ■

Teorema de De Moivre

El uso repetido de la fórmula de la multiplicación da la siguiente fórmula útil para elevar un número complejo a una potencia n para cualquier entero positivo n.

TEOREMA DE DE MOIVRE

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces para cualquier entero n

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Este teorema dice: *Tomamos la n-ésima potencia del número complejo, tomamos la n-ésima potencia del módulo y multiplicamos el argumento por n.*

Demostración Por la fórmula de la multiplicación

$$\begin{aligned}z^2 = zz &= r^2[\cos(\theta+\theta) + i\,\text{sen}(\theta+\theta)]\\ &= r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos z^2 por z para obtener

$$\begin{aligned}z^3 = z^2z &= r^3[\cos(2\theta+\theta) + i\,\text{sen}(2\theta+\theta)]\\ &= r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)\end{aligned}$$

Repitiendo este argumento vemos que para cualquier entero positivo n

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Un argumento similar, usando la fórmula de la división, demuestra que esto también se cumple para enteros negativos. ■

EJEMPLO 7 ■ Encontrar una potencia usando el teorema de De Moivre

Encuentre $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$.

SOLUCIÓN Dado que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+i)$ del ejemplo 5*a*) se deduce que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Entonces, por el teorema de De Moivre

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

Ahora intente realizar el ejercicio 65 ■

■ Raíces *n*-ésimas de números complejos

Una **raíz *n*-ésima** de un número complejo z es cualquier número complejo w tal que $w^n = z$. El teorema de De Moivre da un método para calcular las raíces n-ésimas de cualquier número complejo.

RAÍCES *n*-ÉSIMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y si n es un entero positivo, entonces z tiene las n raíces n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Demostración Para encontrar las raíces n-ésimas de z necesitamos encontrar un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Escribamos z en forma polar:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Una n-ésima raíz de z es

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right)$$

ya que por el teorema de De Moivre, $w^n = z$. Pero el argumento θ de z se puede sustituir por $\theta + 2k\pi$ para cualquier entero k. Dado que esta expresión da un valor diferente de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, hemos demostrado la fórmula de este teorema. ■

Las siguientes observaciones nos ayudan a usar la fórmula anterior.

ENCONTRAR LAS *n*-ÉSIMAS RAÍCES $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

1. El módulo de cada raíz n-ésima es $r^{1/n}$.
2. El argumento de la primera raíz es θ/n.
3. Repetidamente sumamos $2\pi/n$ para obtener el argumento de cada raíz sucesiva.

Estas observaciones muestran que cuando se traza la gráfica las raíces n-ésimas de z están igualmente espaciadas en la circunferencia de radio $r^{1/n}$.

EJEMPLO 8 ■ Encontrar raíces de un número complejo

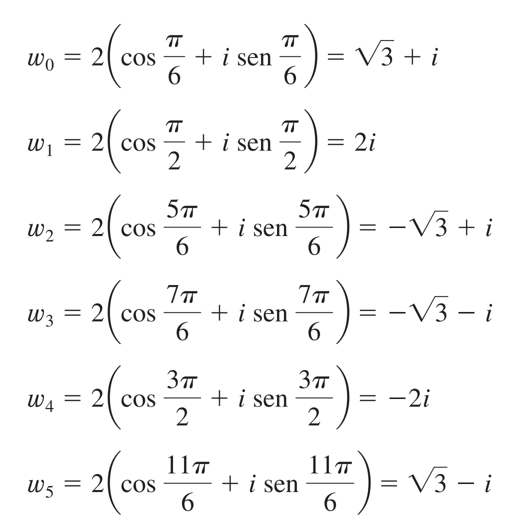
Encuentre las seis raíces sextas de $z = -64$ y trace su gráfica en el plano complejo.

SOLUCIÓN En forma polar, $z = 64(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$. Aplicando la fórmula para raíces n-ésimas con $n = 6$ obtenemos

$$w_k = 64^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Usando $64^{1/6} = 2$ encontramos que las seis raíces sextas de -64 son

Sumamos $2\pi/6 = \pi/3$ a cada argumento para obtener el argumento de la siguiente raíz.



$$w_0 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$w_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_3 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$w_4 = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

$$w_5 = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

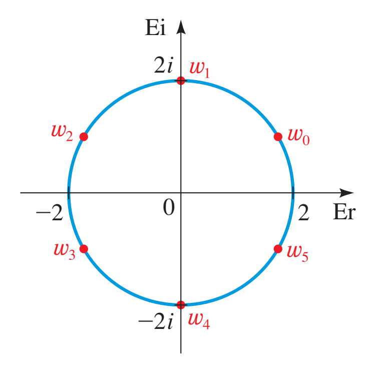


FIGURA 9 Las seis raíces sextas de $z = -64$

Todos estos puntos se encuentran en una circunferencia de radio 2, tal como se muestra en la figura 9.

Ahora intente realizar el ejercicio 81 ■

Cuando encontramos raíces de números complejos, a veces escribimos el argumento θ del número complejo en grados. En este caso las raíces n-ésimas se obtienen a partir de la fórmula

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Fractales

La mayoría de las cosas que modelamos en este libro sigue patrones predecibles regulares. Pero muchos fenómenos del mundo real como una nube, una costa irregular o una llama vacilante parecen tener formas aleatorias o hasta caóticas. Los fractales nos permiten modelar esas formas y muchos otras. Sorprendentemente, las formas extremadamente complejas de los fractales y su detalle infinito son producidas por reglas extremadamente simples y repeticiones sin fin que implican la iteración de funciones simples cuyas entradas y salidas son números complejos. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

EJEMPLO 9 ■ Encontrar raíces cúbicas de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$, y trace la gráfica de estas raíces en el plano complejo.

SOLUCIÓN Primero escribimos z en forma polar usando grado $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ y $\theta = 45°$. Por tanto

$$z = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$$

Sumamos $360°/3 = 120°$ a cada argumento para obtener el argumento de la siguiente raíz.

Aplicando la fórmula para las raíces n-ésimas (en grados) con $n = 3$ encontramos que las raíces cúbicas de z son de la forma

$$w_k = (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{45° + 360°k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{45° + 360°k}{3}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2$. Entonces las tres raíces cúbicas de z son de la forma

$$w_0 = \sqrt{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) \approx 1.366 + 0.366i$$

$$w_1 = \sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = -1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°) \approx -0.366 - 1.366i$$

$(2\sqrt{2})^{3/2} = (2^{2/3})^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

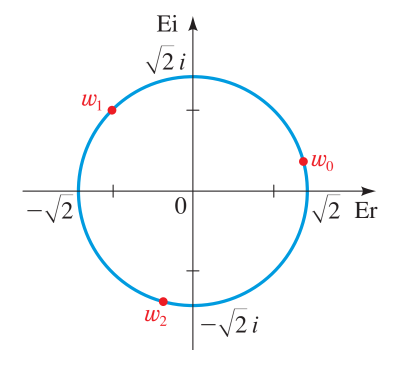


FIGURA 10 Las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$

En la figura 10 se presentan las gráficas de las tres raíces cúbicas de z. Estas raíces están igualmente espaciadas en la circunferencia de radio $\sqrt{2}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 77 ■

EJEMPLO 10 ■ Resolver una ecuación usando la fórmula para raíces *n*-ésimas

Resuelva la ecuación $z^6 + 64 = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación se puede escribir como $z^6 = -64$. Entonces las soluciones son las raíces sextas de -64 que encontramos en el ejemplo 8.

Ahora intente realizar el ejercicio 87 ■

8.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Un número complejo $z = a + bi$ tiene dos partes: a es la parte ________, y b es la parte ________. Para trazar la gráfica $a + bi$, trazamos la gráfica del par ordenado (___ , ___) en el plano complejo.

2. Sea $z = a + bi$.

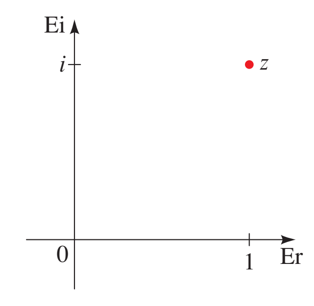
a) El módulo de z es $r =$ ________, y un argumento de z es un ángulo θ que satisface $\tan \theta =$ ________.

b) Podemos expresar z en forma polar como $z =$ ____________, donde r es el módulo de z y θ es el argumento de z.

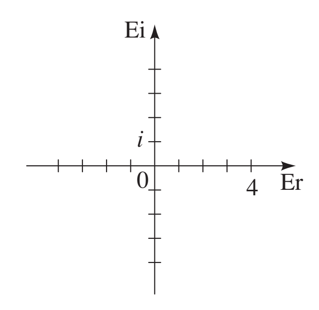
3. *a*) El número complejo $z = -1 + i$ en forma polar es $z =$ ________.

b) El número complejo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ en forma rectangular es $z =$ ________.

c) El número complejo graficado a continuación se puede expresar en forma rectangular como ______ o en forma polar como ______.



4. ¿Cuántas raíces n-ésimas diferentes tiene un número complejo diferente de cero? ________. El número 16 tiene ________ raíces cuartas. Estas raíces son ________, ________, ________ y ________. En el plano complejo estas raíces se encuentran en una circunferencia de radio ________. Trace la gráfica de las raíces en la gráfica siguiente.



HABILIDADES

5–14 ■ Un número complejo y su módulo Trace la gráfica del número complejo y encuentre su módulo.

5. $4i$ **6.** $-3i$

7. -2 **8.** 6

9. $5 + 2i$ **10.** $7 - 3i$

11. $\sqrt{3} + i$ **12.** $-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

13. $\dfrac{3 + 4i}{5}$ **14.** $\dfrac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

15–16 ■ Gráfica de números complejos Trace los números complejos z, $2z$, $-z$ y $\frac{1}{2}z$ en el mismo plano complejo.

15. $z = 1 + i$ **16.** $z = -1 + i\sqrt{3}$

17–18 ■ Gráfica de un número complejo y de su complejo conjugado Trace el número complejo z y su complejo conjugado $\bar{z}$ en el mismo plano complejo.

17. $z = 8 + 2i$ **18.** $z = -5 + 6i$

19–20 ■ Gráfica de números complejos Trace z_1, z_2, $z_1 + z_2$, y z_1z_2 en el mismo plano complejo.

19. $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 2 + i$

20. $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 2 - 3i$

21–28 ■ Gráfica de conjuntos de números complejos Trace el conjunto en el plano complejo.

21. $\{z = a + bi \mid a \le 0, b \ge 0\}$

22. $\{z = a + bi \mid a > 1, b > 1\}$

23. $\{z \mid |z| = 3\}$ **24.** $\{z \mid |z| \ge 1\}$

25. $\{z \mid |z| < 2\}$ **26.** $\{z \mid 2 \le |z| \le 5\}$

27. $\{z = a + bi \mid a + b < 2\}$

28. $\{z = a + bi \mid a \ge b\}$

29–48 ■ Forma polar de números complejos Escriba el número complejo en forma polar con argumento θ entre 0 y 2π.

29. $1 + i$ **30.** $1 - i$ **31.** $-2 + 2i$

32. $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ **33.** $-\sqrt{3} - i$ **34.** $-5 + 5\sqrt{3}i$

35. $2\sqrt{3} - 2i$ **36.** $3 + 3\sqrt{3}i$ **37.** $2i$

38. $-5i$ **39.** -3 **40.** $\sqrt{2}$

41. $-\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ **42.** $-\sqrt{5} - \sqrt{15}i$ **43.** $4 + 3i$

44. $3 + 2i$ **45.** $4(\sqrt{3} - i)$ **46.** $i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)$

47. $-3(1 - i)$ **48.** $2i(1 + i)$

49–56 ■ Productos y cocientes de números complejos Encuentre el producto z_1z_2 y el cociente z_1/z_2. Exprese su respuesta en forma polar.

49. $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

50. $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right), \quad z_2 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

51. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{3}\right),$
$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$

52. $z_1 = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}, \quad z_2 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}$

53. $z_1 = 4(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°),$
$z_2 = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

54. $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°),$
$z_2 = 3\sqrt{2}(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

55. $z_1 = 4(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°),$
$z_2 = 25(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

56. $z_1 = \frac{4}{5}(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°),$
$z_2 = \frac{1}{5}(\cos 155° + i \operatorname{sen} 155°)$

57–64 ■ Productos y cocientes de números complejos Escriba z_1 y z_2 en forma polar y luego encuentre el producto z_1z_2 y los cocientes z_1/z_2 y $1/z_1$.

57. $z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

58. $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad z_2 = 1 - i$

59. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = -1 + i$

60. $z_1 = -\sqrt{2}i, \quad z_2 = -3 - 3\sqrt{3}i$

61. $z_1 = 5 + 5i, \quad z_2 = 4$ **62.** $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i, \quad z_2 = 8i$

63. $z_1 = -20, \quad z_2 = \sqrt{3} + i$ **64.** $z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 2 - 2i$

65–76 ■ Potencia usando el teorema De Moivre Encuentre la potencia indicada usando el teorema de De Moivre.

65. $(-\sqrt{3} + i)^6$ **66.** $(1 - i)^{10}$

67. $(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^5$ **68.** $(1 + i)^7$

69. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{12}$ **70.** $(\sqrt{3} - i)^{-10}$

71. $(2 - 2i)^8$

72. $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$

73. $(-1 - i)^7$

74. $(3 + \sqrt{3}i)^4$

75. $(2\sqrt{3} + 2i)^{-5}$

76. $(1 - i)^{-8}$

77–86 ■ Raíces de números complejos Encuentre las raíces indicadas y luego trace la gráfica de las raíces en el plano complejo.

77. Las raíces cuadradas de $4\sqrt{3} + 4i$

78. Las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} + 4i$

79. Las raíces cuartas de $-81i$

80. Las raíces quintas de 32

81. Las raíces octavas de 1

82. Las raíces cúbicas de $1 + i$

83. Las raíces cúbicas de i

84. Las raíces quintas de i

85. Las raíces cuartas de -1

86. Las raíces quintas de $-16 - 16\sqrt{3}i$

87–92 ■ Resolver ecuaciones usando raíces *n*-ésimas Encontrar raíces *n*-ésimas de un número complejo.

87. $z^4 + 1 = 0$

88. $z^8 - i = 0$

89. $z^3 - 4\sqrt{3} - 4i = 0$

90. $z^6 - 1 = 0$

91. $z^3 + 1 = -i$

92. $z^3 - 1 = 0$

HABILIDADES Plus

93–96 ■ Los coeficientes complejos y la fórmula cuadrática La fórmula cuadrática funciona si los coeficientes de la ecuación son reales o complejos. Resuelva las siguientes ecuaciones usando la fórmula cuadrática y, si es necesario, el teorema de De Moivre.

93. $z^2 - iz + 1 = 0$

94. $z^2 + iz + 2 = 0$

95. $z^2 - 2iz - 2 = 0$

96. $z^2 + (1 + i)z + i = 0$

97–98 ■ Encontrar raíces *n*-ésimas de un número complejo Sea $w = \cos(2\pi/n) + i\,\text{sen}(2\pi/n)$, donde n es un entero positivo.

97. Demuestre que las n raíces n-ésimas distintas de 1 son

$$1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}$$

98. Si $z \neq 0$ y s es cualquier raíz n-ésima de z, demuestre que las n raíces n-ésimas distintas son

$$s, sw, sw^2, sw^3, \ldots, sw^{n-1}$$

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

99. DISCUSIÓN: Sumas de raíces de la unidad Encuentre los valores exactos de las tres raíces cúbicas de 1 (vea el ejercicio 97) y luego súmelos. Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál piensa usted que es la suma de las n-ésimas raíces de 1 para cualquier n?

100. DISCUSIÓN: Productos de raíces de la unidad Encuentre el producto de las tres raíces cúbicas de 1 (vea el ejercicio 97). Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál piensa usted que es el producto de las n-ésimas raíces de 1 para cualquier n?

101. DEMOSTRACIÓN: División en forma polar Si los números complejos z_1 y z_2 tienen las formas polares

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$

y

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

demuestre que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

[*Sugerencia:* multiplique el numerador y el denominador por el complejo conjugado de z_2 y simplifique.]

8.4 CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

■ Curvas planas y ecuaciones paramétricas ■ Eliminación del parámetro ■ Encontrar ecuaciones paramétricas para una curva ■ Uso de una calculadora graficadora para trazar las gráficas de curvas paramétricas

Hasta ahora hemos descrito una curva dando una ecuación (en coordenadas rectangulares o polares) en la cual las coordenadas de todos los puntos deben satisfacer la curva. Pero no todas las curvas del plano pueden ser descritas de esta forma. En esta sección estudiaremos ecuaciones paramétricas como un método general para describir cualquier curva.

■ Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Podemos considerar una curva como la trayectoria de un punto que se mueve en el plano; las coordenadas x y y del punto son entonces función del tiempo. Esta idea conduce a la siguiente definición.

CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Si f y g son funciones definidas sobre un intervalo I, entonces el conjunto de puntos $(f(t), g(t))$ es una **curva plana**. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde $t \in I$ son **ecuaciones paramétricas** para la curva, con **parámetro** t.

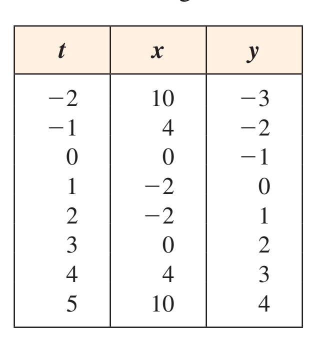
EJEMPLO 1 ■ Trazar una curva plana

Trace la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 3t \qquad y = t - 1$$

SOLUCIÓN Para todo valor de t obtenemos un punto sobre la curva. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$ y $y = -1$, de modo que el punto correspondiente es $(0, -1)$. En la figura 1 colocamos los puntos (x, y) determinados por los valores de t que se muestran en la tabla siguiente.

Las flechas sobre la curva indican la dirección de la curva en la cual aumentan los valores de t.



t	x	y
-2	10	-3
-1	4	-2
0	0	-1
1	-2	0
2	-2	1
3	0	2
4	4	3
5	10	4

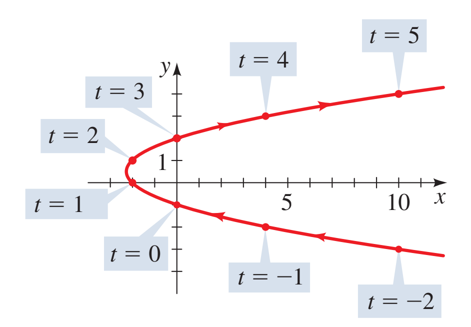


FIGURA 1

Cuando t aumenta, una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas.

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

Si sustituimos t por $-t$ en el ejemplo 1 obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 + 3t \qquad y = -t - 1$$

La gráfica de estas ecuaciones paramétricas (vea la figura 2) es la misma que la curva de la figura 1, pero trazada en la dirección opuesta. Por otra parte, si sustituimos t por $2t$ en el ejemplo 1, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 6t \qquad y = 2t - 1$$

La gráfica de estas ecuaciones paramétricas (vea la figura 3) es otra vez la misma, pero está trazada "el doble de rápido". *Entonces, la parametrización contiene más información que sólo la forma de la curva; también indica* cómo *se traza la curva.*

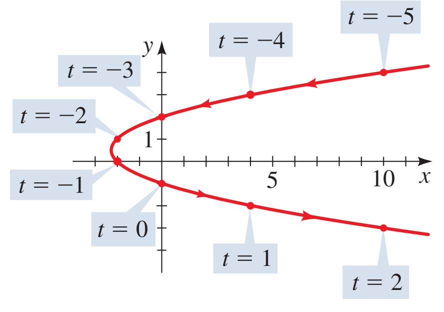


FIGURA 2 $x = t^2 + 3t$, $y = -t - 1$

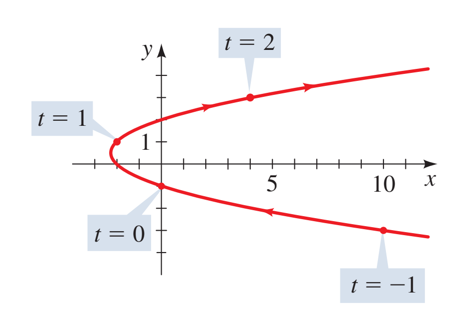
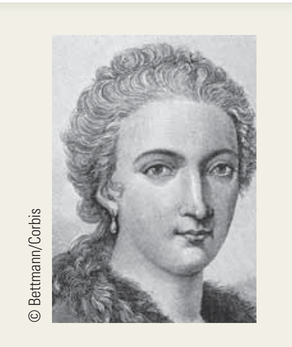


FIGURA 3 $x = 4t^2 - 6t$, $y = 2t - 1$



MARÍA GAETANA AGNESI (1718-1799) es famosa por haber escrito *Instituzioni Analitiche*, uno de los primeros libros de texto sobre cálculo.

María nació dentro de una familia pudiente de Milán, Italia, y fue la mayor de 21 hijos. Fue niña prodigio; dominaba varios idiomas desde temprana edad incluyendo latín, griego y hebreo. A los 20 años de edad publicó una serie de ensayos sobre filosofía y ciencias naturales. Después de la muerte de su madre se echó a cuestas la educación de sus hermanos y, en 1748, publicó su famoso libro que originalmente escribió como texto para educar a sus hermanos; ese libro compilaba y explicaba el conocimiento matemático de su época; contenía numerosos ejemplos cuidadosamente escogidos entre los cuales está la curva ahora conocida como "bruja de Agnesi" (vea el ejercicio 66 de la página 619). Una publicación considera que este libro es una "exposición por ejemplos y no por teoría" y le ganó inmediato reconocimiento. El papa Benedicto XIV le otorgó un cargo en la Universidad de Bolonia, para lo cual escribió "hemos tenido la idea de concederle el bien ganado cargo de matemáticas por el cual usted no debería agradecernos a nosotros, sino nosotros a usted". Este nombramiento fue un honor extraordinariamente alto para una mujer, dado que en aquel tiempo a muy pocas mujeres se les permitía incluso ingresar a una universidad. Apenas dos años después de esto moría el padre de Agnesi y ella abandonó las matemáticas por completo, se hizo monja y dedicó el resto de su vida y su riqueza a cuidar mujeres enfermas y moribundas. Agnesi murió en la pobreza en la casa de los pobres de la cual ella misma había sido directora.

Eliminación del parámetro

Con frecuencia una curva dada por ecuaciones paramétricas también puede estar representada por una sola ecuación rectangular en x y y. El proceso de encontrar esta ecuación se denomina *eliminación del parámetro*. Una forma de hacer esto es despejar t de una ecuación y, y luego sustituir en la otra.

EJEMPLO 2 ■ Eliminación del parámetro

Elimine el parámetro de las ecuaciones paramétricas del ejemplo 1.

SOLUCIÓN Primero despejamos t de la ecuación más sencilla y luego sustituimos en la otra ecuación. De la ecuación $y = t - 1$ obtenemos $t = y + 1$. Al sustituir en la ecuación de x, obtenemos

$$x = t^2 - 3t = (y + 1)^2 - 3(y + 1) = y^2 - y - 2$$

Entonces la curva del ejemplo 1 tiene la ecuación rectangular $x = y^2 - y - 2$, de modo que es una parábola.

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

La eliminación del parámetro con frecuencia nos ayuda a identificar la forma de una curva, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3 ■ Modelado del movimiento circular

Las siguientes ecuaciones paramétricas modelan la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo t (en segundos):

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad t \geq 0$$

Describa y trace la gráfica de la trayectoria del cuerpo.

SOLUCIÓN Para identificar la curva eliminamos el parámetro. Dado que $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ y puesto que $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ para todo punto (x, y) en la curva, tenemos

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$$

Esto significa que todos los puntos en la curva satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por lo que la gráfica es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto dado por las ecuaciones paramétricas arranca en $(1, 0)$ y se mueve una vez alrededor del círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 4. Entonces el cuerpo completa una revolución alrededor del círculo en 2π segundos. Observe que el parámetro t se puede interpretar como el ángulo que se muestra en la figura.

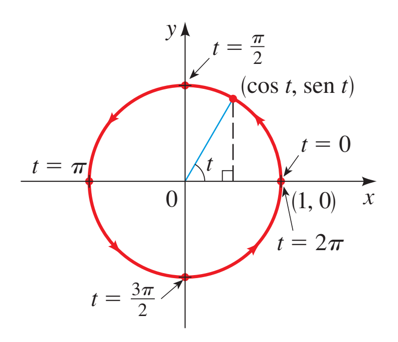


FIGURA 4

Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

EJEMPLO 4 ■ Trazar una curva paramétrica

Elimine el parámetro y trace la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = 2 - \cos^2 t$$

SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro primero usamos la identidad trigonométrica $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$ para cambiar la segunda ecuación:

$$y = 2 - \cos^2 t = 2 - (1 - \operatorname{sen}^2 t) = 1 + \operatorname{sen}^2 t$$

Ahora podemos sustituir $\operatorname{sen} t = x$ de la primera ecuación para obtener

$$y = 1 + x^2$$

de modo que el punto (x, y) se mueve a lo largo de la parábola $y = 1 + x^2$. Sin embargo, dado que $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$, tenemos $-1 \leq x \leq 1$, por lo que las ecuaciones paramétricas representan sólo la parte de la parábola entre $x = -1$ y $x = 1$. Puesto que $\operatorname{sen} t$ es periódico, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, 2 - \cos^2 t)$ se mueve hacia adelante y hacia atrás con frecuencia infinita a lo largo de la parábola entre los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$, como se muestra en la figura 5.

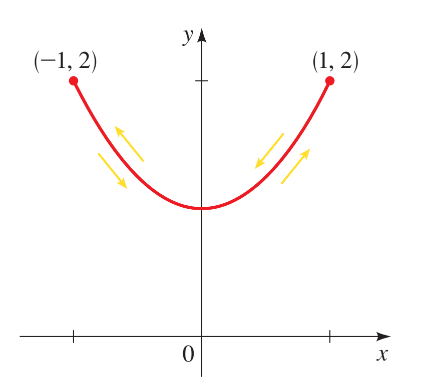
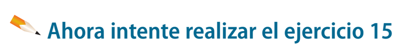


FIGURA 5


Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

■ Encontrar ecuaciones paramétricas para una curva

A veces es posible encontrar ecuaciones paramétricas para una curva usando algunas propiedades geométricas que la definen, tal como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 ■ Encontrar ecuaciones paramétricas para una gráfica

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(2, 6)$.

SOLUCIÓN Empecemos en el punto $(2, 6)$ moviéndonos hacia arriba y a la derecha a lo largo de esta recta. Dado que la recta tiene pendiente 3, por cada unidad que nos movamos a la derecha debemos subir 3 unidades. En otras palabras, si aumentamos la coordenada x en t unidades, debemos aumentar de manera correspondiente la coordenada y en $3t$ unidades. Esto conduce a las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 6 + 3t$$

Para confirmar que estas ecuaciones dan la recta deseada eliminamos el parámetro. Despejamos t de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda para obtener

$$y = 6 + 3(x - 2) = 3x$$

Entonces la forma de la pendiente y el punto de intersección de la ecuación de esta recta es $y = 3x$, que es una recta de pendiente 3 que pasa por $(2, 6)$ como se requirió. En la figura 6 se muestra la gráfica.

FIGURA 6


Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

EJEMPLO 6 ■ Ecuaciones paramétricas para la cicloide

Cuando un círculo rueda a lo largo de una recta, la curva trazada por un punto fijo P en la circunferencia del círculo se llama **cicloide** (vea la figura 7). Si el círculo tiene radio a y rueda a lo largo del eje x, con una posición del punto P estando en el origen, encuentre ecuaciones paramétricas para la cicloide.

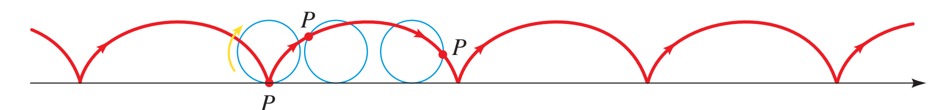


FIGURA 7

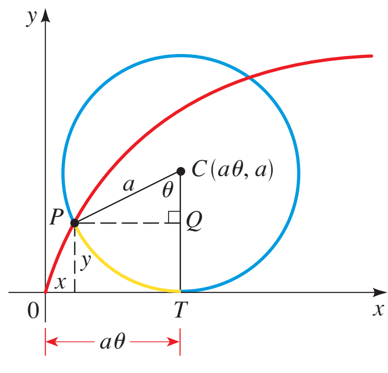


FIGURA 8

SOLUCIÓN La figura 8 muestra el círculo y el punto P después de que el círculo ha rodado todo un ángulo θ (en radianes). La distancia $d(O, T)$ que el círculo ha rodado debe ser la misma que la longitud del arco PT que, por la fórmula de la longitud de un arco, es $a\theta$ (vea la sección 6.1). Esto significa que el centro del círculo es $C(a\theta, a)$.

Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces, de la figura 8 (que ilustra el caso $0 < \theta < \pi/2$), vemos que

$$x = d(O, T) - d(P, Q) = a\theta - a \text{ sen } \theta = a(\theta - \text{sen } \theta)$$

$$y = d(T, C) - d(Q, C) = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$$

entonces las ecuaciones paramétricas para la cicloide son

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \qquad y = a(1 - \cos \theta)$$

Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

La cicloide tiene varias propiedades físicas interesantes. Es la "curva de descenso más rápido" en el siguiente sentido. Elegimos dos puntos P y Q que no se encuentren directamente uno sobre el otro y los unimos con un alambre. Suponga que dejamos que una cuenta se deslice por el alambre por influencia de la gravedad (despreciando la fricción). De todas las formas posibles en las que el alambre pueda doblarse, la cuenta se deslizará con más rapidez de P a Q, cuando la forma sea la mitad de un arco de una cicloide invertido (vea la figura 9). La cicloide también es la "curva de igual descenso" en el sentido de que sin importar dónde se coloque la cuenta B en un alambre en forma de cicloide, tardará el mismo tiempo en deslizarse al fondo (vea la figura 10). Estas propiedades de la cicloide, más bien sorprendentes, fueron demostradas (usando cálculo) en el siglo XVII por varios matemáticos y físicos incluyendo Johann Bernoulli, Blaise Pascal y Christiaan Huygens.

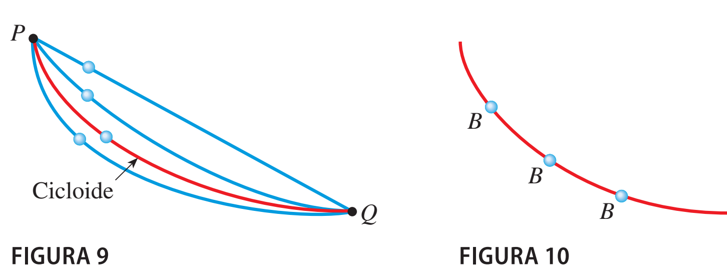


FIGURA 9 **FIGURA 10**

■ Uso de una calculadora graficadora para trazar la gráfica de curvas paramétricas



Se pueden usar muchas calculadoras graficadoras y programas de gráficas de computadoras para trazar la gráfica de ecuaciones paramétricas. Estos equipos son particularmente útiles para trazar curvas complicadas como la que se muestra en la figura 11.

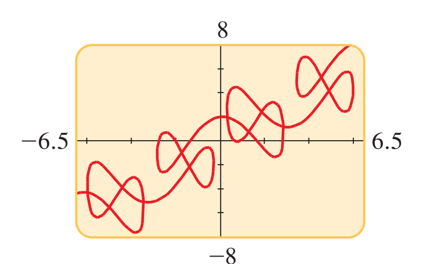


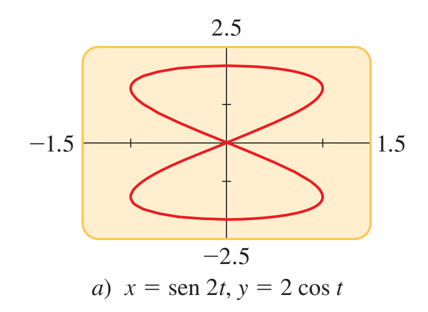
FIGURA 11
$x = t + 2 \text{ sen } 2t,\ y = t + 2 \cos 5t$

EJEMPLO 7 ■ Trazar la gráfica de curvas paramétricas

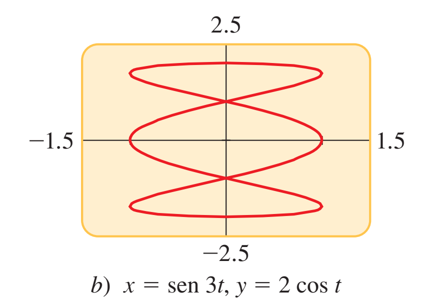
Use una calculadora graficadora para trazar las siguientes curvas paramétricas. Analice sus similitudes y diferencias.

a) $x = \text{sen } 2t$
$y = 2 \cos t$

b) $x = \text{sen } 3t$
$y = 2 \cos t$



a) $x = \text{sen } 2t$, $y = 2 \cos t$



b) $x = \text{sen } 3t$, $y = 2 \cos t$

FIGURA 12

SOLUCIÓN En los incisos *a)* y *b)* la gráfica estará dentro del rectángulo dado por $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$, ya que el seno y el coseno de cualquier número estarán entre -1 y 1. Entonces, podemos usar el rectángulo de vista $[-1.5, 1.5]$ por $[-2.5, 2.5]$.

a) Dado que $2 \cos t$ es periódico con periodo 2π (vea la sección 5.3) y $\text{sen } 2t$ tiene periodo π, la variación de t en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ da la gráfica completa, la cual se muestra en la figura 12*a*).

b) De nuevo, si t toma valores entre 0 y 2π tendremos la gráfica completa que se ve en la figura 12*b*).

Ambas gráficas son *curvas cerradas*, lo cual significa que forman lazos con el mismo punto inicial y final; también, ambas gráficas se cruzan. No obstante, la gráfica de la figura 12*a*) tiene dos lazos, en forma de ocho, en tanto que la gráfica de la figura 12*b*) tiene tres lazos.

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

Las curvas graficadas en el ejemplo 7 reciben el nombre de figuras de Lissajous. Una **figura de Lissajous** es la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = A \text{ sen } \omega_1 t \qquad y = B \cos \omega_2 t$$

donde A, B, ω_1 y ω_2 son constantes reales. Dado que $\text{sen } \omega_1 t$ y $\cos \omega_2 t$ están entre -1 y 1, una figura de Lissajous estará dentro del rectángulo determinado por $-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$. Este hecho se puede usar para escoger un rectángulo de vista cuando se grafica una figura de Lissajous, como en el ejemplo 7.

Recuerde, de la sección 8.1, que las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) están relacionadas por las ecuaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$. Así, podemos graficar la ecuación polar $r = f(\theta)$ cambiándola a la forma paramétrica como sigue.

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \qquad \text{Dado que } r = f(\theta)$$

$$y = r \text{ sen } \theta = f(\theta) \text{ sen } \theta$$

Al sustituir θ por la variable paramétrica estándar t tenemos el siguiente resultado.

ECUACIONES POLARES EN FORMA PARAMÉTRICA

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ es la misma que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \cos t \qquad y = f(t) \text{ sen } t$$

EJEMPLO 8 ■ Forma paramétrica de una ecuación polar



Considere la ecuación polar $r = \theta$, $1 \leq \theta \leq 10\pi$.

a) Exprese la ecuación en forma paramétrica.

b) Trace una gráfica de las ecuaciones paramétricas del inciso *a*).

SOLUCIÓN

a) La ecuación polar dada es equivalente a las ecuaciones paramétricas

$$x = t \cos t \qquad y = t \text{ sen } t$$

b) Dado que $10\pi \approx 31.42$ usamos el rectángulo de vista $[-32, 32]$ por $[-32, 32]$ y hacemos que t varíe de 1 a 10π. La gráfica resultante se muestra en la figura 13 como una *espiral*.

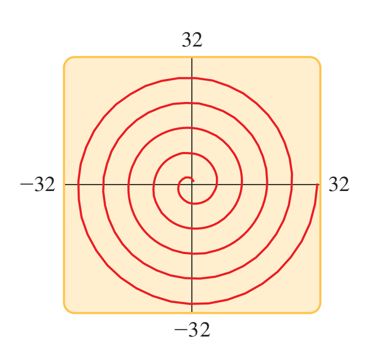


FIGURA 13 $x = t \cos t$, $y = t \text{ sen } t$


Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

8.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. ***a)*** Las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ dan las coordenadas de un punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ para valores apropiados de t. La variable t se denomina ________.

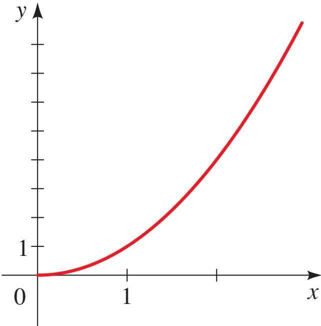
b) Suponga que las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $t \geq 0$, modelan la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo t. Cuando $t = 0$, el cuerpo está en (,), y cuando $t = 1$, el cuerpo está en (,).

c) Si eliminamos el parámetro del inciso *b)* obtenemos la ecuación $y =$ ________. Vemos a partir de esta ecuación que la trayectoria del cuerpo en movimiento es una ________.

2. ***a)*** *¿Verdadero o falso?* La misma curva puede ser descrita por ecuaciones paramétricas de muchas formas diferentes.

b) Las ecuaciones paramétricas $x = 2t$, $y = (2t)^2$ modelan la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo t. Cuando $t = 0$, el cuerpo está en (,), y cuando $t = 1$, el cuerpo está en (,).

c) Si eliminamos el parámetro obtenemos la ecuación $y =$ ________, que es la misma ecuación que en el ejercicio 1*c*). Por tanto, los cuerpos de los ejercicios 1*b*) y 2*b*) se mueven a lo largo de la misma ________ pero atraviesan la trayectoria de manera diferente. Indique la posición de cada uno de los cuerpos cuando $t = 0$ y cuando $t = 1$ en la gráfica siguiente.



HABILIDADES

3–26 ■ Trazar una curva eliminando el parámetro Se da un par de ecuaciones paramétricas. ***a)*** Trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas. Utilice flechas para indicar la dirección de crecimiento de t. ***b)*** Encuentre una ecuación de coordenadas rectangulares para la curva al eliminar el parámetro.

3. $x = 2t, \quad y = t + 6$

4. $x = 6t - 4, \quad y = 3t, \quad t \geq 0$

5. $x = t^2, \quad y = t - 2, \quad 2 \leq t \leq 4$

6. $x = 2t + 1, \quad y = (t + \frac{1}{2})^2$

7. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

8. $x = t^2, \quad y = t^4 + 1$

9. $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = t + 1$

10. $x = t + 1, \quad y = \dfrac{t}{t + 1}$

11. $x = 4t^2, \quad y = 8t^3$

12. $x = |t|, \quad y = |1 - |t||$

13. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

14. $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

15. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^4 t$

16. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos t$

17. $x = \cos t, \quad y = \cos 2t$

18. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

19. $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad 0 \leq t < \pi/2$

20. $x = \cot t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi$

21. $x = \tan t, \quad y = \cot t, \quad 0 < t < \pi/2$

22. $x = e^{-t}, \quad y = e^t$

23. $x = e^{2t}, \quad y = e^t$

24. $x = \sec t, \quad y = \tan^2 t, \quad 0 \leq t < \pi/2$

25. $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$

26. $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

27–30 ■ Movimiento circular La posición de un objeto en movimiento circular está modelada por las ecuaciones paramétricas dadas. Describa la trayectoria del cuerpo indicando el radio del círculo, la posición en el tiempo $t = 0$, la orientación del movimiento (en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) y el tiempo t que tarda en completar una revolución alrededor del círculo.

27. $x = 3 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t$

28. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t$

29. $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \cos 2t$

30. $x = 4 \cos 3t, \quad y = 4 \operatorname{sen} 3t$

31–36 ■ Ecuaciones paramétricas de curvas Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta con las propiedades dadas.

31. La recta con pendiente $\frac{1}{2}$, que pasa por $(4, -1)$

32. La recta con pendiente -2, que pasa por $(-10, -20)$

33. La recta que pasa por $(6, 7)$ y $(7, 8)$

34. La recta que pasa por $(12, 7)$ y el origen

35. El círculo $x^2 + y^2 = a^2$

36. La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

37. Trayectoria de un proyectil Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de v_0 pies/s a un ángulo α arriba de la horizontal, entonces su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - 16t^2$$

(donde x y y se miden en pies). Demuestre que la trayectoria del proyectil es una parábola al eliminar el parámetro t.

38. Trayectoria de un proyectil En referencia al ejercicio 37, suponga que un cañón dispara una bala al aire con una velocidad inicial de 2 048 pies/s a un ángulo de 30° respecto a la horizontal.

a) ¿Después de cuántos segundos llegará la bala al suelo?

b) ¿A qué distancia del cañón llegará la bala al suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la bala?

39–44 ■ Gráficas de ecuaciones paramétricas Use una calculadora graficadora para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

39. $x = \text{sen } t, \quad y = 2 \cos 3t$

40. $x = 2 \text{ sen } t, \quad y = \cos 4t$

41. $x = 3 \text{ sen } 5t, \quad y = 5 \cos 3t$

42. $x = \text{sen } 4t, \quad y = \cos 3t$

43. $x = \text{sen}(\cos t), \quad y = \cos(t^{3/2}), \quad 0 \le t \le 2\pi$

44. $x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = 2 \text{ sen } t - \text{sen } 2t$



45–48 ■ Forma paramétrica de una ecuación polar Se da una ecuación polar. ***a)*** Exprese la ecuación polar en forma paramétrica. ***b)*** Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas que encontró en el inciso *a*).

45. $r = 2^{\theta/12}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

46. $r = \text{sen } \theta + 2 \cos \theta$

47. $r = \dfrac{4}{2 - \cos \theta}$

48. $r = 2^{\text{sen } \theta}$

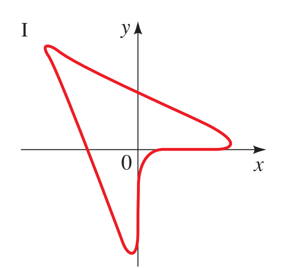
49–52 ■ Gráficas de ecuaciones paramétricas Relacione las ecuaciones paramétricas con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

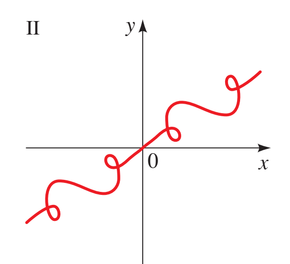
49. $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$

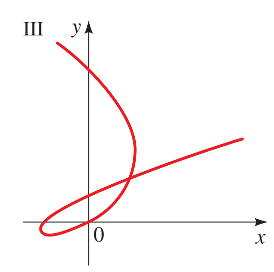
50. $x = \text{sen } 3t, \quad y = \text{sen } 4t$

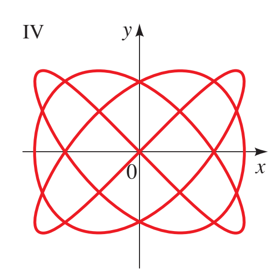
51. $x = t + \text{sen } 2t, \quad y = t + \text{sen } 3t$

52. $x = \text{sen}(t + \text{sen } t), \quad y = \cos(t + \cos t)$









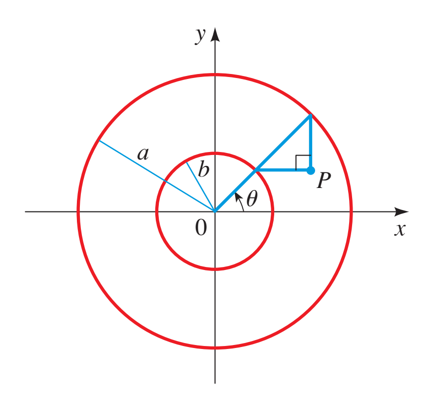
53. Encontrar ecuaciones paramétricas para una curva Dos circunferencias de radios a y b están centradas en el origen, como se muestra en la figura. Conforme aumenta el ángulo θ el punto P traza hacia afuera una curva que se encuentra entre los círculos.

a) Encuentre ecuaciones paramétricas de la curva usando θ como parámetro.



b) Trace la gráfica de la curva utilizando una calculadora graficadora, con $a = 3$ y $b = 2$.

c) Elimine el parámetro e identifique la curva.

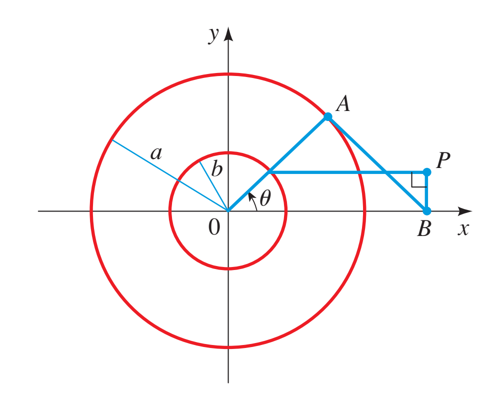


54. Encontrar ecuaciones paramétricas de una curva Dos circunferencias de radio a y b están centradas en el origen, como se muestra en la figura.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva trazada por el punto P, utilizando el ángulo θ como parámetro. (Observe que el segmento de recta AB siempre es tangente a la circunferencia más grande.)



b) Trace la gráfica de la curva utilizando una calculadora graficadora, como $a = 3$ y $b = 2$.



55. Cicloide acortada

a) En el ejemplo 6 suponga que el punto P que traza la curva se encuentra no en el borde del círculo, sino más bien en un punto fijo dentro del borde, a una distancia b del centro (con $b < a$). La curva trazada por P se denomina **cicloide acortada** (o **trocoide**). Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la cicloide acortada son

$$x = a\theta - b \text{ sen } \theta \qquad y = a - b \cos \theta$$



b) Trace la gráfica usando $a = 3$ y $b = 2$.

56. Cicloide alargada

a) En el ejercicio 55, si el punto P está *fuera* del círculo a una distancia b del centro (con $b > a$), entonces la curva trazada por P recibe el nombre de **cicloide alargada**. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la cicloide alargada son las mismas que las ecuaciones para la cicloide acortada.



b) Trace la gráfica para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$.

HABILIDADES Plus

57. Ecuaciones paramétricas de una hipérbola Elimine el parámetro θ en las siguientes ecuaciones paramétricas. (Esta curva se llama **hipérbola**; vea la página 800.)

$$x = a \tan \theta \qquad y = b \sec \theta$$

58. Ecuaciones paramétricas de una hipérbola Demuestre que las siguientes ecuaciones paramétricas representan una parte de la hipérbola del ejercicio 57.

$$x = a\sqrt{t} \qquad y = b\sqrt{t+1}$$

59–62 ■ Gráfica de ecuaciones paramétricas Trace la curva dada por las ecuaciones paramétricas.

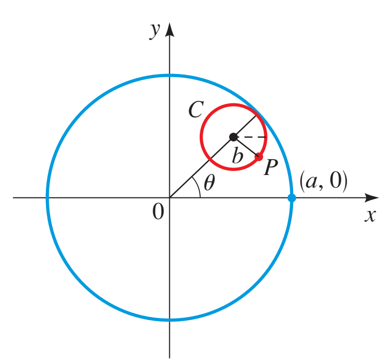
59. $x = t \cos t, \quad y = t \operatorname{sen} t, \quad t \geq 0$

60. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

61. $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

62. $x = \cot t, \quad y = 2 \operatorname{sen}^2 t, \quad 0 < t < \pi$

63. Hipocicloide Un círculo C de radio b rueda en el interior de un círculo más grande de radio a con centro en el origen. Sea P un punto fijo en el círculo más pequeño con posición inicial en el punto $(a, 0)$ como se muestra en la figura. La curva trazada por P recibe el nombre de **hipocicloide**.



a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la hipocicloide son

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

$$x = (a - b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

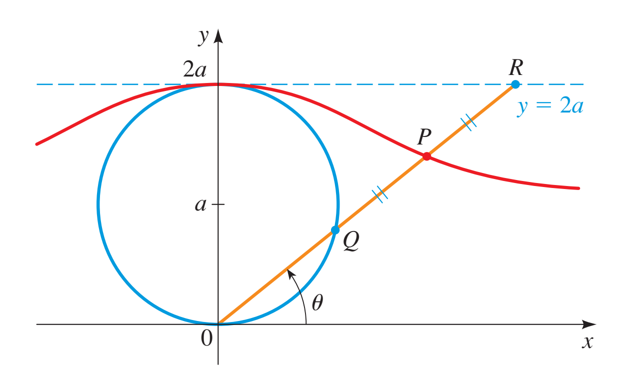
b) Si $a = 4b$, la hipocicloide se denomina **astroide**. Demuestre que en este caso las ecuaciones paramétricas se pueden reducir a

$$x = a \cos^3 \theta \qquad y = a \operatorname{sen}^3 \theta$$

Trace la curva. Elimine el parámetro para obtener una ecuación para el astroide en coordenadas rectangulares.

64. Epicicloide Si el círculo C del ejercicio 63 rueda en el *exterior* del círculo más grande, la curva trazada por P se denomina **epicicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para la epicicloide.

65. Curva de ballesta En la figura, el círculo de radio a está estacionario y, para todo θ, el punto P es el punto medio del segmento QR. La curva trazada por P para $0 < \theta < \pi$ se denomina **curva de ballesta**. Encuentre las ecuaciones paramétricas para esta curva.



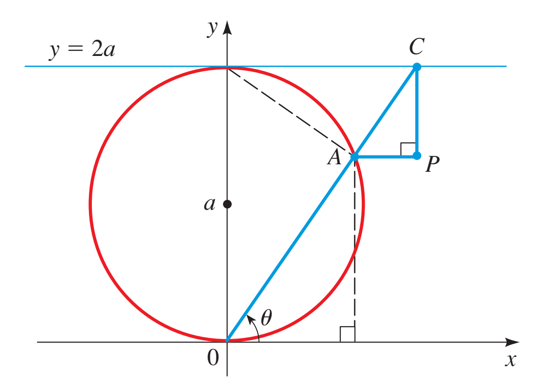
66. La bruja de Agnesi Una curva, llamada **bruja de Agnesi** está formada por todos los puntos P determinados, tal como se muestra en la figura.

a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva se pueden escribir como

$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$



b) Trace la gráfica de la curva usando una calculadora graficadora, con $a = 3$.



67. Eliminar el parámetro Elimine el parámetro θ en las ecuaciones paramétricas para la cicloide (ejemplo 6) para obtener una ecuación de coordenadas rectangulares para la sección de la curva dada por $0 \leq \theta \leq \pi$.

APLICACIONES

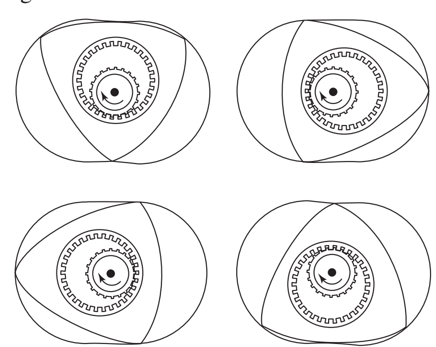
68. El motor giratorio El Mazda RX-8 usa un motor no convencional (inventado por Felix Wankel en 1954) en el que los pistones son sustituidos por un rotor triangular que gira en una caja especial, tal como se muestra en la figura de la página siguiente. Los vértices del rotor mantienen contacto con la caja en todo momento, mientras que el centro del triángulo traza un círculo de radio r, haciendo girar el eje de transmisión. La forma de la caja está dada por las ecuaciones paramétricas siguientes (donde R es la distancia entre los vértices y centro del rotor):

$$x = r \cos 3\theta + R \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} 3\theta + R \operatorname{sen} \theta$$



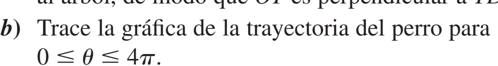
a) Suponga que el eje de transmisión tiene radio $r = 1$. Trace la gráfica de la curva dada por las ecuaciones paramétricas para los valores siguientes de R: 0.5, 1, 3, 5.

***b*)** ¿Cuál de los cuatro valores de R dados en el inciso *a*) parece modelar mejor la caja del motor que se muestra en la figura?



69. Trayectoria espiral de un perro Un perro está atado con una larga correa al tronco de un árbol con radio de un pie. El animal se las ha arreglado para rodear el árbol con la correa y se encuentra en el punto $(1, 0)$ de la figura. Al ver a una ardilla, el perro *corre* alrededor del árbol en sentido contrario a las manecillas del reloj, manteniendo tensa la correa en persecución de la intrusa.

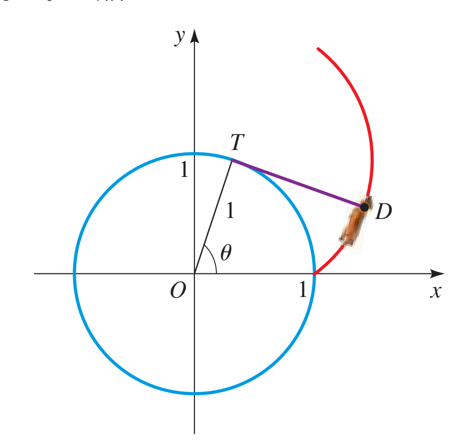
***a*)** Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del perro (llamada **involuta de círculo**) son



$$x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$$

[*Sugerencia:* observe que la correa está siempre tangente al árbol, de modo que OT es perpendicular a TD.]

***b*)** Trace la gráfica de la trayectoria del perro para $0 \le \theta \le 4\pi$.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

70. DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN: Más información en ecuaciones paramétricas En esta sección dijimos que las ecuaciones paramétricas contienen más información que sólo la forma de una curva. Escriba un breve párrafo que explique este enunciado. Para ello use el siguiente ejemplo y sus respuestas a los incisos *a*) y *b*) siguientes.

La posición de una partícula está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = \cos t$$

donde t representa el tiempo. Sabemos que la forma de la trayectoria de la partícula es una circunferencia.

***a*)** ¿Cuánto tiempo tarda la partícula en dar una vuelta alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve el doble de rápido alrededor del círculo.

***b*)** ¿La partícula se mueve en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del círculo.

71. DISCUSIÓN: Formas diferentes de trazar una curva Las curvas C, D, E y F están definidas en forma paramétrica como sigue, donde el parámetro t toma todos los valores reales a menos que se indique de otra forma:

$$C: \quad x = t, \quad y = t^2$$

$$D: \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$$

$$E: \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$$

$$F: \quad x = 3^t, \quad y = 3^{2t}$$

***a*)** Demuestre que los puntos en las cuatro curvas satisfacen la misma ecuación de coordenadas rectangulares.

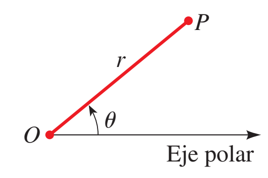
***b*)** Trace la gráfica de cada curva y explique cómo difieren las curvas entre sí.

CAPÍTULO 8 ■ REPASO

■ PROPIEDADES Y FÓRMULAS

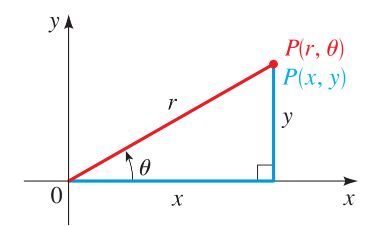
Coordenadas polares (p. 588)

En el sistema de **coordenadas polares** la ubicación de un punto P en el plano está determinada por un par ordenado (r, θ), donde r es la distancia del polo O a P y θ es el ángulo formado por el eje polar y el rayo $\overrightarrow{OP}$, como se muestra en la figura.



Coordenadas polares y rectangulares (p. 590)

Cualquier punto P en el plano tiene coordenadas polares $P(r, \theta)$ y coordenadas rectangulares $P(x, y)$, como se muestra.



- **Para cambiar de coordenadas polares a rectangulares** utilizamos las ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

- **Para cambiar de coordenadas rectangulares a polares** utilizamos las ecuaciones

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{x}{y}$$

Ecuaciones polares y gráficas (pp. 594, 599)

Una **ecuación polar** es una ecuación con variables r y θ. La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$ consiste en todos los puntos (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

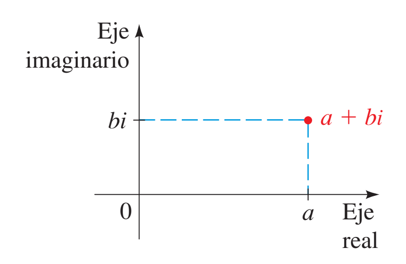
Simetría de las gráficas de ecuaciones polares (p. 597)

Podemos probar la simetría de una ecuación polar como sigue. La gráfica de una ecuación polar es

- **simétrica alrededor del eje polar**, si la ecuación no cambia cuando se sustituye θ por $-\theta$;
- **simétrica alrededor del polo**, si la ecuación no cambia cuando se sustituye r por $-r$, o θ por $\theta + \pi$;
- **simétrica alrededor de la recta vertical**, $\theta = \pi/2$ si la ecuación no cambia cuando se sustituye θ por $\pi - \theta$.

Números complejos (pp. 602-603)

Un **número complejo** es un número de la forma $a + bi$, donde $i^2 = -1$ y donde a y b son números reales. Para el número complejo $z = a + bi$, a se llama **parte real** y b se llama **parte imaginaria**. Se traza la gráfica de un número complejo $a + bi$ en el plano complejo como se muestra.



El **módulo** (o **valor absoluto**) de un numero complejo $z = a + bi$ es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Forma polar de números complejos (p. 604)

Un número complejo $z = a + bi$ tiene la **forma polar** (o **forma trigonométrica**)

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

donde $r = |z|$ y $\tan\theta = b/a$. El número r es el módulo de z y θ es el argumento de z.

Multiplicación y división de números complejos en forma polar (p. 605)

Supongamos que los números complejos z_1 y z_2 tienen la siguiente forma polar:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Teorema de De Moivre (p. 606)

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es un número complejo en forma polar y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Raíces *n*-ésimas de números complejos (p. 607)

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es un número complejo en forma polar y n es un entero positivo, entonces z tiene n raíces n-ésimas diferentes $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, donde

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

Determinar las raíces *n*-ésimas de *z* (p. 607)

Para encontrar las raíces n-ésimas de $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ usamos las siguientes observaciones:

1. El módulo de cada raíz n-ésima es $r^{1/n}$.
2. El argumento de la primera raíz w_0 es θ/n.
3. Sume repetidamente $2\pi/n$ para obtener el argumento de cada raíz sucesiva.

Ecuaciones paramétricas (p. 612)

Si f y g son funciones definidas en un intervalo I, entonces el conjunto de puntos $(f(t), g(t))$ es una **curva plana**. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde $t \in I$, son **ecuaciones paramétricas** para la curva con **parámetro** t.

Ecuaciones polares en forma paramétrica (p. 616)

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ es igual que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t)\cos t \qquad y = f(t)\,\text{sen}\,t$$

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a***) Explique el sistema coordenado polar.
   b) Trace la gráfica de los puntos con coordenadas polares $(2, \pi/3)$ y $(-1, 3\pi/4)$.
   c) Escriba las ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares de un punto con sus coordenadas polares.
   d) Encuentre las coordenadas rectangulares de $(2, \pi/3)$.
   e) Encuentre las coordenadas polares de $P(-2, 2)$.

2. ***a***) ¿Qué es una ecuación polar?

b) Convierta la ecuación polar $r = \text{sen}\,\theta$ a una ecuación rectangular equivalente.

3. ***a***) ¿Cómo se traza la gráfica de una ecuación polar?

b) Trace una gráfica de la ecuación polar $r = 4 + 4\cos\theta$. ¿Cómo se llama la gráfica?

4. ***a***) ¿Qué es el plano complejo? ¿Cómo se traza la gráfica de un número complejo $z = a + bi$ en el plano complejo?

b) ¿Cuáles son el módulo y el argumento del número complejo $z = a + bi$?

c) Trace la gráfica del punto $z = \sqrt{3} - i$, y encuentre el módulo y el argumento de z.

5. ***a***) ¿Cómo expresamos el número complejo z en forma polar?

b) Exprese $z = \sqrt{3} - i$ en forma polar.

6. Sea $$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

y $$z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

a) Encuentre el producto z_1z_2.

b) Encuentre el cociente z_1/z_2.

7. ***a***) Exprese el teorema de De Moivre.

b) Utilice el teorema de De Moivre para encontrar la quinta potencia de $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$.

8. ***a***) Exprese la fórmula para las raíces n-ésimas de un número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$.

b) ¿Cómo se encuentran las raíces n-ésimas de un número complejo?

c) Encuentre las tres raíces terceras de $z = -8$.

9. ***a***) ¿Qué son las ecuaciones paramétricas?

b) Trace una gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas utilizando flechas para indicar la dirección de la curva.

$$x = t + 1 \qquad y = t^2 \qquad -2 \le t \le 2$$

c) Elimine el parámetro para obtener una ecuación en x y y.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

■ EJERCICIOS

1–6 ■ Coordenadas polares a coordenadas rectangulares Un punto $P(r, \theta)$ está dado en coordenadas polares. ***a***) Trazar el punto P. ***b***) Encuentre las coordenadas rectangulares de P.

1. $(12, \pi/6)$ **2.** $(8, -3\pi/4)$

3. $(-3, 7\pi/4)$ **4.** $(-\sqrt{3}, 2\pi/3)$

5. $(4\sqrt{3}, -5\pi/3)$ **6.** $(-6\sqrt{2}, -\pi/4)$

7–12 ■ Coordenadas rectangulares a polares Un punto $P(x, y)$ está dado en coordenadas rectangulares. ***a***) Trace el punto P. ***b***) Encuentre las coordenadas polares de P con $r \ge 0$. ***c***) Encuentre las coordenadas polares de P con $r \le 0$.

7. $(8, 8)$ **8.** $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$

9. $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$ **10.** $(3\sqrt{3}, 3)$

11. $(-3, \sqrt{3})$ **12.** $(4, -4)$

13–16 ■ Ecuaciones rectangulares a ecuaciones polares ***a***) Convierta la ecuación en coordenadas polares y simplifique. ***b***) Trace la gráfica de la ecuación. [*Sugerencia:* utilice la forma de la ecuación cuya gráfica sea más fácil de trazar.]

13. $x + y = 4$ **14.** $xy = 1$

15. $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ **16.** $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

17–24 ■ Ecuaciones polares a ecuaciones rectangulares ***a***) Trace la gráfica de la ecuación polar. ***b***) Exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

17. $r = 3 + 3\cos\theta$ **18.** $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

19. $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$ **20.** $r = 4\cos 3\theta$

21. $r^2 = \sec 2\theta$ **22.** $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

23. $r = \text{sen}\,\theta + \cos\theta$ **24.** $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

25–28 ■ Gráfica de la ecuación polar Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la ecuación polar. Elija el dominio de θ para asegurarse de obtener toda la gráfica.

25. $r = \cos(\theta/3)$

26. $r = \text{sen}(9\theta/4)$

27. $r = 1 + 4\cos(\theta/3)$

28. $r = \theta\,\text{sen}\,\theta, \quad -6\pi \le \theta \le 6\pi$

29–34 ■ Números complejos Se da un número complejo. ***a***) Trace la gráfica del número en el plano complejo. ***b***) Encuentre el módulo y el argumento. ***c***) Escriba el número en forma polar.

29. $4 + 4i$ **30.** $-10i$

31. $5 + 3i$ **32.** $1 + \sqrt{3}i$

33. $-1 + i$ **34.** -20

35–38 ■ Potencias usando el teorema de De Moivre Use el teorema de De Moivre para encontrar la potencia indicada.

35. $(1 - \sqrt{3}i)^4$ **36.** $(1 + i)^8$

37. $(\sqrt{3} + i)^{-4}$ **38.** $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$

39–42 ■ Raíces de números complejos Encuentre las raíces indicadas.

39. Las raíces cuadradas de $-16i$

40. Las raíces cúbicas de $4 + 4\sqrt{3}i$

41. Las raíces sextas de 1

42. Las raíces octavas de i

43–46 ■ Curvas paramétricas Se da un par de ecuaciones paramétricas. ***a***) Trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas. ***b***) Encuentre una ecuación de coordenadas rectangulares para la curva eliminando el parámetro.

43. $x = 1 - t^2, \quad y = 1 + t$

44. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1$

45. $x = 1 + \cos t, \quad y = 1 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

46. $x = \dfrac{1}{t} + 2, \quad y = \dfrac{2}{t^2}, \quad 0 < t \le 2$

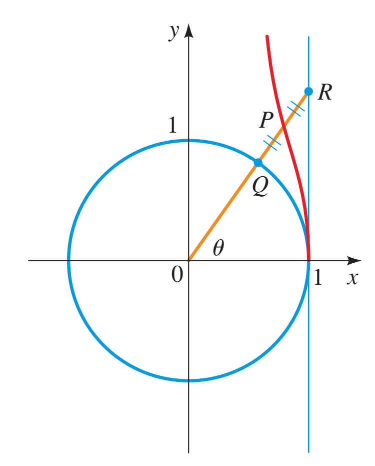


47–48 ■ Gráficas de ecuaciones paramétricas Use calculadora graficadora para trazar la curva paramétrica.

47. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 3t$

48. $x = \operatorname{sen}(t + \cos 2t), \quad y = \cos(t + \operatorname{sen} 3t)$

49. Encontrar las ecuaciones paramétricas de una curva En la figura el punto P está en el punto medio del segmento QR y $0 \le \theta < \pi/2$. Usando θ como el parámetro, encuentre una representación paramétrica para la curva trazada por P.



EXAMEN

1. ***a*)** Convierta el punto cuyas coordenadas polares son $(8, 5\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

***b*)** Encuentre dos representaciones de coordenadas polares para el punto de coordenadas rectangulares $(-6, 2\sqrt{3})$, una con $r > 0$ y una con $r < 0$ y ambas con $0 \le \theta < 2\pi$.

2. ***a*)** Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$. ¿Qué tipo de curva es esta?

***b*)** Convierta la ecuación a coordenadas rectangulares.

3. Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 3 + 6 \operatorname{sen} \theta$. ¿Qué tipo de curva es esta?

4. Sea $z = 1 + \sqrt{3}i$.

***a*)** Trace la gráfica de z en el plano complejo.

***b*)** Escriba z en forma polar.

***c*)** Encuentre el número complejo z^9.

5. Sea $z_1 = 4\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12}\right)$ y $z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}\right)$.

Encuentre $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$.

6. Encuentre las raíces cúbicas de $27i$, y trace estas raíces en el plano complejo.

7. ***a*)** Trace la gráfica de la curva paramétrica.

$$x = 3 \operatorname{sen} t + 3 \qquad y = 2 \cos t \qquad 0 \le t \le \pi$$

***b*)** Elimine el parámetro t del inciso *a*) para obtener una ecuación para esta curva en coordenadas rectangulares.

8. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de pendiente 2 que pasa por el punto $(3, 5)$.

9. La posición de un objeto en movimiento circular es modelada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 \operatorname{sen} 2t \qquad y = 3 \cos 2t$$

donde t se mide en segundos.

***a*)** Describa la trayectoria del objeto indicando el radio del círculo, la posición en el tiempo $t = 0$, la orientación del movimiento (en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) y el tiempo t que tarda en completar una revolución alrededor del círculo.

***b*)** Suponga que se duplica la velocidad del objeto. Encuentre nuevas ecuaciones paramétricas que modelen el movimiento del objeto.

***c*)** Encuentre una ecuación de la coordenada rectangular para la misma curva eliminando el parámetro.

***d*)** Encuentre una ecuación polar para la misma curva.

La trayectoria de un proyectil

Modelar el movimiento es una de las ideas más importantes tanto en la física clásica como en la moderna. Gran parte de las obras de Isaac Newton fue para crear un modelo matemático para ver cómo se mueven y cómo interaccionan los cuerpos; esta fue la razón principal para que inventara el cálculo. Albert Einstein ideó su teoría especial de la relatividad a principios del siglo XX para refinar las leyes de Newton del movimiento.

En esta sección usamos geometría de coordenadas para modelar el movimiento de un proyectil, por ejemplo, una pelota lanzada hacia arriba al aire, una bala disparada por un fusil o cualquier otro tipo de proyectil. Un modelo similar fue creado por Galileo, pero nosotros tenemos la ventaja de usar nuestra moderna notación matemática para hacer mucho más fácil la descripción del modelo de lo que fue para Galileo.

Ecuaciones paramétricas para la trayectoria de un proyectil

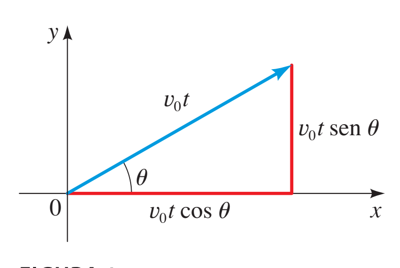
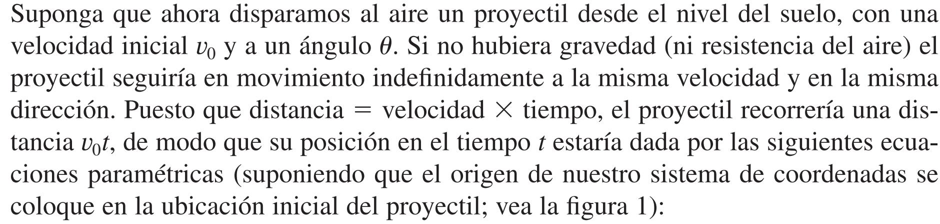


FIGURA 1



Suponga que ahora disparamos al aire un proyectil desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial v_0 y a un ángulo θ. Si no hubiera gravedad (ni resistencia del aire) el proyectil seguiría en movimiento indefinidamente a la misma velocidad y en la misma dirección. Puesto que distancia = velocidad × tiempo, el proyectil recorrería una distancia v_0t, de modo que su posición en el tiempo t estaría dada por las siguientes ecuaciones paramétricas (suponiendo que el origen de nuestro sistema de coordenadas se coloque en la ubicación inicial del proyectil; vea la figura 1):

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t \qquad \text{Sin gravedad}$$

Pero, desde luego, sabemos que la gravedad atraerá al proyectil otra vez al nivel del suelo. Mediante el cálculo se puede demostrar que el efecto de la gravedad se puede explicar al restar $\frac{1}{2}gt^2$ de la posición vertical del proyectil. En esta expresión, g es la aceleración gravitacional: $g \approx 32$ pies/s$^2 \approx 9.8$ m/s^2. Entonces tenemos las siguientes ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil:

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{Con gravedad}$$

EJEMPLO ■ La trayectoria de una bala de cañón

Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la trayectoria de una bala de cañón disparada al aire con una velocidad inicial de 150 m/s a un ángulo de elevación de 30°. Trace la trayectoria de la bala.

SOLUCIÓN Al sustituir la velocidad inicial y el ángulo dados en las ecuaciones paramétricas generales de la trayectoria de un proyectil obtenemos

$$x = (150.0 \cos 30°)t \qquad y = (150.0 \operatorname{sen} 30°)t - \tfrac{1}{2}(9.8)t^2 \qquad \text{Sustituya } v_0 = 150.0,\ \theta = 30°$$

$$x = 129.9t \qquad y = 75.0t - 4.9t^2 \qquad \text{Simplifique}$$

La trayectoria está graficada en la figura 2.

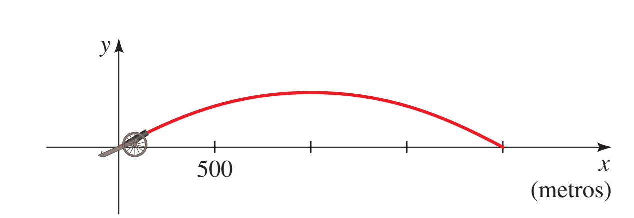


FIGURA 2 Trayectoria de una bala de cañón

■

Alcance de un proyectil

¿Cómo saber en dónde y cuándo caerá al suelo la bala de cañón del ejemplo anterior? Dado que el nivel del suelo corresponde a $y = 0$ sustituimos este valor por y y despejamos t.

$$0 = 75.0t - 4.9t^2 \qquad \text{Haga que } y = 0$$

$$0 = t(75.0 - 4.9t) \qquad \text{Factorice}$$

$$t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \frac{75.0}{4.9} \approx 15.3 \qquad \text{Despeje } t$$

La primera solución, $t = 0$, es el tiempo cuando el cañón se dispara; la segunda solución significa que la bala de cañón cae al suelo después de 15.3 segundos de vuelo. Para ver *dónde* ocurre esto sustituimos este valor en la ecuación por x, la ubicación horizontal de la bala de cañón.

$$x = 129.9(15.3) \approx 1\,987.5 \text{ m}$$

La bala de cañón recorre casi 2 km antes de caer al suelo.

La figura 3 muestra las trayectorias de varios proyectiles todos ellos disparados con la misma velocidad inicial, pero a ángulos diferentes. De las gráficas vemos que, si el ángulo de disparo es demasiado alto o demasiado bajo, el proyectil no llega muy lejos.

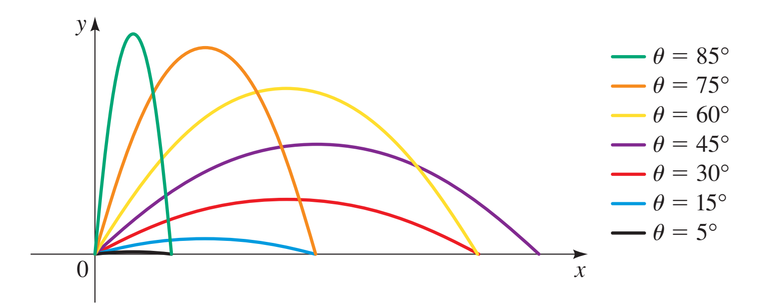


FIGURA 3 Trayectoria de los proyectiles

Intentemos encontrar el ángulo óptimo de disparo, es decir, el ángulo al cual se dispara el proyectil lo más lejos posible. Seguiremos los mismos pasos que en el ejemplo anterior, pero ahora usaremos ecuaciones paramétricas generales. Primero despejamos el tiempo cuando el proyectil cae al suelo al sustituir $y = 0$.

$$0 = (v_0 \text{ sen } \theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{Sustituya } y = 0$$

$$0 = t(v_0 \text{ sen } \theta - \tfrac{1}{2}gt) \qquad \text{Factorice}$$

$$0 = v_0 \text{ sen } \theta - \tfrac{1}{2}gt \qquad \text{Iguale a 0 el segundo factor}$$

$$t = \frac{2v_0 \text{ sen } \theta}{g} \qquad \text{Despeje } t$$



© World History Archive/Alamy

GALILEO GALILEI (1564-1642) nació en Pisa, Italia. Estudió medicina, pero abandonó esta carrera en favor de las ciencias y las matemáticas. A los 25 años de edad, al dejar caer balas de cañón de varios tamaños desde la torre inclinada de Pisa, demostró que los cuerpos ligeros caen a la misma velocidad que los cuerpos pesados. Esto contradecía el entonces aceptado punto de vista de Aristóteles de que los cuerpos más pesados caen con más rapidez. Galileo también demostró que la distancia a la que un cuerpo cae es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado en caída, y a partir de esto pudo demostrar que la trayectoria de un proyectil es una parábola.

Galileo construyó el primer telescopio y cuando lo utilizó descubrió las lunas de Júpiter. Al apoyar la idea de Copérnico de que la Tierra gira alrededor del Sol (en lugar de mantenerse estacionaria) hizo que fuera llevado ante la Inquisición. Para entonces, siendo ya viejo, fue obligado a retractarse de sus ideas, pero se dice que finalmente musitó: "Y, sin embargo, se mueve", en referencia a la Tierra. Galileo revolucionó la ciencia al expresar principios científicos en el idioma de las matemáticas. Él afirmaba que "El gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos".

Ahora sustituimos esto por x para ver qué distancia recorrió el proyectil horizontalmente cuando llegó al suelo.

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x$$

$$= (v_0 \cos \theta)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}\right) \qquad \text{Sustituya } t = (2v_0 \operatorname{sen} \theta)/g$$

$$= \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{g} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad \text{Use la identidad sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$$

Deseamos escoger θ de modo que x sea tan grande como sea posible. El máximo valor que el seno de cualquier ángulo puede tener es 1, el seno de 90°. Entonces buscamos $2\theta = 90°$, o sea $\theta = 45°$. De la última ecuación presentada podemos ver que recorrerá una distancia $x = v_0^2/g$.

PROBLEMAS

1. **Las trayectorias son parábolas** De las gráficas de la figura 3, las de los proyectiles parecen ser parábolas que abren hacia abajo. Elimine el parámetro t de las ecuaciones paramétricas generales para verificar que en realidad sean parábolas.

2. **Trayectoria de una pelota de béisbol** Suponga que una pelota de béisbol se lanza a 30 pies/s a un ángulo de 60° con la horizontal desde una altura de 4 pies sobre el suelo.
   a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota de béisbol y trace su gráfica.
   b) ¿Qué distancia recorre la pelota y cuándo cae al suelo?

3. **Trayectoria de un cohete** Suponga que un cohete es disparado a un ángulo de 5° de la vertical con una velocidad inicial de 1 000 pies/s.
   a) Encuentre el tiempo que el cohete está en el aire.
   b) Encuentre la máxima altura que alcanza.
   c) Encuentre la distancia vertical que ha recorrido cuando cae al suelo.
   d) Trace la gráfica de la trayectoria del cohete.

4. **Disparo de un proyectil** La velocidad inicial de un proyectil es de 330 m/s.
   a) ¿Con qué ángulo se debe disparar el proyectil para que haga blanco en un objetivo situado a 10 km de distancia? (Se debe encontrar que hay dos ángulos posibles.) Trace la gráfica de las trayectorias del proyectil para ambos ángulos.
   b) ¿Para qué ángulo el proyectil hará blanco antes del objetivo?

5. **Máxima altura** Demuestre que la máxima altura alcanzada por un proyectil, como función de su velocidad inicial v_0 y de su ángulo de disparo θ, es

$$y = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$$

6. **Disparo al aire** Suponga que se dispara un proyectil de frente hacia un viento que le ofrece resistencia para reducir su velocidad en una cantidad constante w. Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil.

7. **Disparo al aire** Usando las ecuaciones paramétricas que se dedujeron en el problema 6 trace las gráficas de la trayectoria de un proyectil con velocidad inicial $v_0 = 32$ pies/s, disparado de frente hacia un viento de $w = 24$ pies/s, para los ángulos $\theta = 5°$, 15°, 30°, 40°, 45°, 55°, 60° y 75°. ¿Aún es cierto que el máximo alcance se logra al disparar a 45°? Trace algunas gráficas más para ángulos diferentes, y úselas para estimar el ángulo óptimo de disparo.

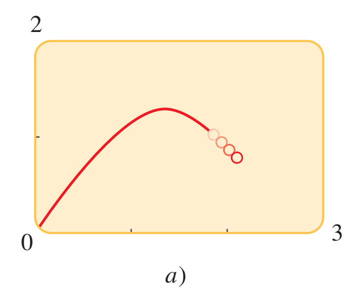


8. Simulación de la trayectoria de un proyectil La trayectoria de un proyectil puede simularse en una calculadora graficadora. En una TI-83 use el estilo de gráfica "Path" (trayectoria) para trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas generales para la trayectoria de un proyectil, y observe el movimiento del cursor circular que simula el movimiento del proyectil. La selección del tamaño de `Tstep` determina la velocidad del "proyectil".

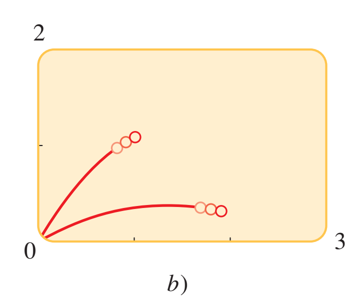
a) Simule la trayectoria de un proyectil. Experimente con varios valores de θ. Use $v_0 = 10$ pies/s y `Tstep` $= 0.02$. El inciso *a*) de la figura siguiente muestra una de estas trayectorias.

b) Simule la trayectoria de dos proyectiles, disparados en forma simultánea: uno a $\theta = 30°$ y el otro a $\theta = 60°$. Esto puede hacerse en la TI-83 usando el modo `Simul` (modo "simultáneo"). Use $v_0 = 10$ pies/s y `Tstep` $= 0.02$. Vea el inciso *b*) de la figura. ¿Dónde caen los proyectiles? ¿Cuál llega primero al suelo?

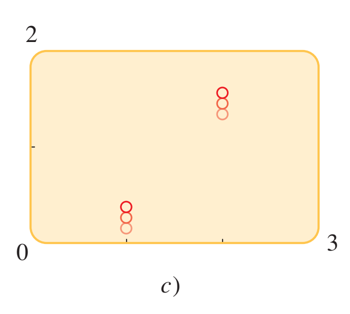
c) Simule la trayectoria de una pelota lanzada hacia arriba en línea recta ($\theta = 90°$). Experimente con valores de v_0 entre 5 y 20 pies/s. Use el estilo de gráfica "Animate" y `Tstep` $= 0.02$. Simule la trayectoria de dos pelotas que se lanzan simultáneamente a diferentes velocidades. Para distinguirlas mejor, ubíquelas en diferentes coordenadas x (por ejemplo $x = 1$ y $x = 2$). Vea el inciso *c*) de la figura. Si v_0 se duplica, ¿cómo cambia la máxima altura a la que llega la pelota?



a)



b)



c)


© James L. Amos/SuperStock

9 Vectores en dos y tres dimensiones

Muchas cantidades del mundo real se describen matemáticamente mediante sólo un número: su "tamaño" o magnitud. Por ejemplo, cantidades como masa, volumen, distancia y temperatura son descritas por su magnitud, pero muchas otras cantidades comprenden magnitud *y* dirección. Estas últimas son descritas matemáticamente por vectores. Por ejemplo, cuando una persona empuja un carro con cierta fuerza es importante la dirección en la que empuja; se obtienen diferentes resultados según si se empuja el carro hacia adelante, en reversa o hacia los lados. Entonces, la fuerza es un vector. El resultado de varias fuerzas que actúan sobre un objeto se puede evaluar usando vectores. Por ejemplo, veremos cómo podemos combinar las fuerzas vectoriales del viento y el agua en las velas y el casco de un velero para encontrar la dirección a la que navegará. El análisis de estas fuerzas vectoriales ayuda a los marinos a navegar contra el viento, por medio de virajes. (Vea el *Proyecto de descubrimiento Navegando contra el viento* citado en la página 645.)

9.1 VECTORES EN DOS DIMENSIONES

■ Descripción geométrica de vectores ■ Vectores en el plano coordenado ■ Uso de vectores para modelar velocidad y fuerza

En las aplicaciones de las matemáticas ciertas cantidades están determinadas completamente por su magnitud, por ejemplo: longitud, masa, área, temperatura y energía. Solemos hablar de una longitud de 5 m o de una masa de 3 kg; sólo es necesario un número para describir cada una de estas cantidades. Esa cantidad se denomina **escalar**.

Por otra parte, para describir el desplazamiento de un objeto se requieren dos números: la *magnitud* y la *dirección* del desplazamiento. Para describir la velocidad de un objeto en movimiento debemos especificar la *rapidez* y la *dirección* de viaje. Cantidades como desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza, que comprenden magnitud y dirección, se denominan *cantidades dirigidas*. Una forma de representar matemáticamente estas cantidades es mediante el uso de *vectores*.

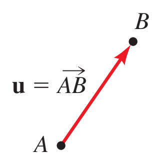
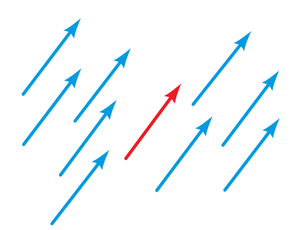


FIGURA 1


FIGURA 2

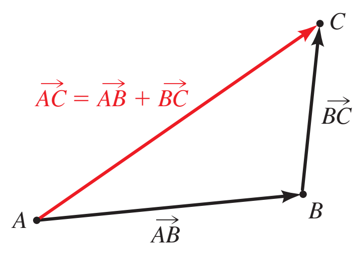


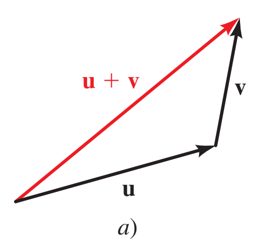
FIGURA 3

■ Descripción geométrica de vectores

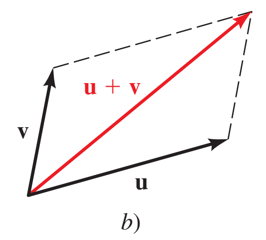
Un **vector** en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. Trazamos un vector, como se muestra en la figura 1, con una flecha para especificar la dirección. Denotamos este vector con $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el **punto inicial** y el punto B es el **punto terminal** del vector $\overrightarrow{AB}$. La longitud del segmento de recta AB recibe el nombre de **magnitud** o **longitud** del vector y está denotado por $|\overrightarrow{AB}|$. Usamos letras negritas para denotar vectores. Entonces, escribimos $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$.

Dos vectores son considerados **iguales** si tienen magnitud igual y la misma dirección. En consecuencia, todos los vectores de la figura 2 son iguales. Esta definición de igualdad tiene sentido si consideramos que un vector representa un desplazamiento. Dos de estos desplazamientos son iguales si tienen magnitudes iguales y la misma dirección. Por tanto, los vectores de la figura 2 se pueden considerar como el *mismo* desplazamiento aplicado a objetos en diferentes lugares del plano.

Si el desplazamiento $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ es seguido por el desplazamiento $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, entonces el desplazamiento resultante es $\overrightarrow{AC}$ como se muestra en la figura 3. En otras palabras, sólo el desplazamiento representado por el vector $\overrightarrow{AC}$ tiene el mismo efecto que los otros dos desplazamientos juntos. Llamamos al vector $\overrightarrow{AC}$ la **suma** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y escribimos $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (El **vector cero**, denotado por $\mathbf{0}$, no representa desplazamiento.) Entonces, para encontrar la suma de cualesquier dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, trazamos vectores iguales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con la punta inicial de uno en el punto terminal del otro (vea la figura 4*a*)). Si trazamos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ iniciando en el mismo punto, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que es la diagonal del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que se muestra en la figura 4*b*).



a)



b)

FIGURA 4 Adición de vectores

Si c es un número real y $\mathbf{v}$ es un vector, definimos un nuevo vector $c\mathbf{v}$ como sigue: el vector $c\mathbf{v}$ tiene magnitud $|c||\mathbf{v}|$ y tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $c > 0$ y la dirección opuesta si $c < 0$. Si $c = 0$, entonces $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el vector cero. Este proceso se denomina **multiplicación de un vector por un escalar**. La multiplicación de un vector por un escalar tiene el efecto de estirar o reducir el vector. La figura 5 muestra gráficas del vector $c\mathbf{v}$ para diferentes valores de c. Escribimos el vector $(-1)\mathbf{v}$ como $-\mathbf{v}$. Entonces, $-\mathbf{v}$ es el vector con la misma longitud que $\mathbf{v}$ pero con la dirección opuesta.

La **diferencia** de dos vectores **u** y **v** está definida por $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. La figura 6 muestra que el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es la otra diagonal del paralelogramo formado por **u** y **v**.

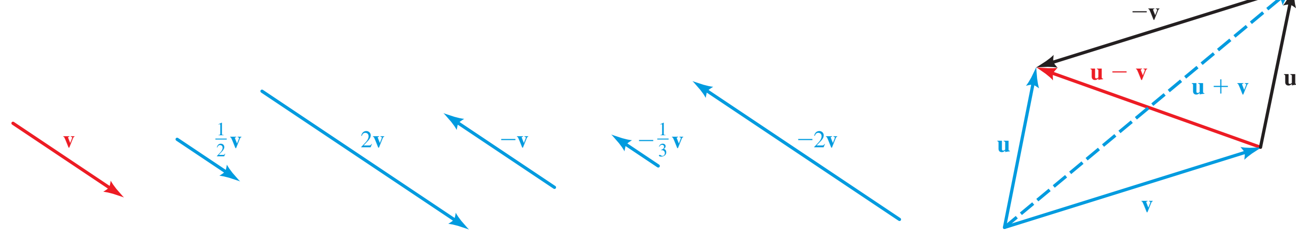


FIGURA 5 Multiplicación de un vector por un escalar

FIGURA 6 Resta de vectores

Vectores en el plano coordenado

Hasta este punto hemos estudiado vectores geométricamente. Al colocar un vector en un plano coordenado podemos describirlo analíticamente (esto es, mediante el uso de componentes). En la figura 7*a*), para pasar del punto inicial del vector **v** al punto terminal, nos movemos a_1 unidades a la derecha y a_2 unidades hacia arriba. Representamos **v** como un par ordenado de números reales.

Observe la distinción entre el *vector* $\langle a_1, a_2\rangle$ y el *punto* (a_1, a_2).

$$\mathbf{v} = \langle a_1, a_2\rangle$$

donde a_1 es el **componente horizontal** de **v** y a_2 es el **componente vertical** de **v**. Recuerde que un vector representa una magnitud y una dirección, no una flecha particular en el plano. En consecuencia, el vector $\langle a_1, a_2\rangle$ tiene muchas representaciones diferentes, dependiendo de su punto inicial (vea la figura 7*b*)).

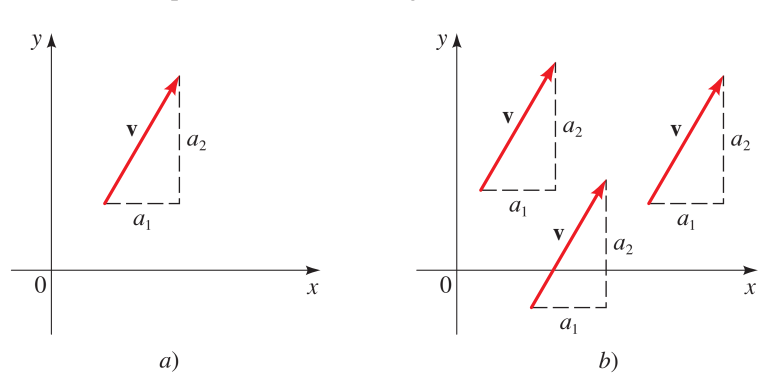


FIGURA 7 *a*) *b*)

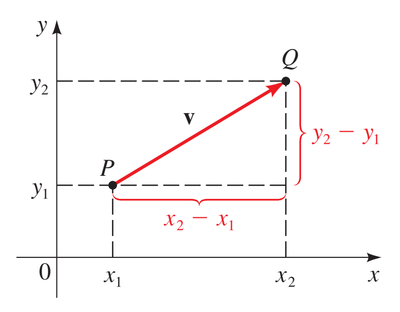


FIGURA 8

Con la figura 8 podemos expresar la relación entre la representación geométrica y la representación analítica de un vector como sigue.

FORMA EN COMPONENTES DE UN VECTOR

Si un vector **v** está representado en el plano con punto inicial $P(x_1, y_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

EJEMPLO 1 ■ Describir vectores en forma de componentes

***a*)** Encuentre la forma de componentes del vector **u** con punto inicial $(-2, 5)$ y punto terminal $(3, 7)$.

***b*)** Si el vector $\mathbf{v} = \langle 3, 7\rangle$ se traza con punto inicial $(2, 4)$, ¿cuál es su punto terminal?

***c*)** Trace representaciones del vector $\mathbf{w} = \langle 2, 3\rangle$ con puntos iniciales en $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(-2, -1)$ y $(1, 4)$.

FIGURA 9

SOLUCIÓN

a) El vector deseado es

$$\mathbf{u} = \langle 3 - (-2), 7 - 5 \rangle = \langle 5, 2 \rangle$$

b) Sea (x, y) el punto terminal de **v**. Entonces

$$\langle x - 2, y - 4 \rangle = \langle 3, 7 \rangle$$

Por tanto $x - 2 = 3$ y $y - 4 = 7$, o $x = 5$ y $y = 11$. El punto terminal es $(5, 11)$.

c) En la figura 9 se muestran representaciones del vector **w**.

Ahora intente realizar los ejercicios 11, 19 y 23 ■

Ahora daremos definiciones analíticas de las diversas operaciones que hemos descrito geométricamente. Empecemos con la igualdad de vectores. Hemos dicho que dos vectores son iguales si tienen igual magnitud y la misma dirección. Para los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2 \rangle$ esto significa que $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$. En otras palabras, dos vectores son **iguales** si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales. Entonces, todas las flechas de la figura 7*b*) representan el mismo vector, al igual que todas las flechas de la figura 9.

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura 10 obtenemos la siguiente fórmula para la magnitud de un vector.

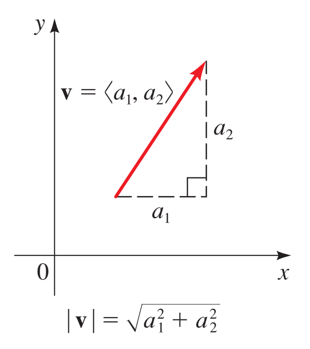


FIGURA 10

MAGNITUD DE UN VECTOR

La **magnitud** o **longitud** de un vector $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

EJEMPLO 2 ■ Magnitudes de vectores

Encuentre la magnitud de cada vector.

a) $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ *b*) $\mathbf{v} = \langle 5, 0 \rangle$ *c*) $\mathbf{w} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

SOLUCIÓN

a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $|\mathbf{w}| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

Las siguientes definiciones de suma, resta y multiplicación escalar de vectores corresponden a las descripciones geométricas dadas antes. La figura 11 muestra cómo es que la definición analítica de suma corresponde a la geométrica.

FIGURA 11

OPERACIONES ALGEBRAICAS SOBRE VECTORES

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{u} = \langle ca_1, ca_2 \rangle \qquad c \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO 3 ■ Operaciones con vectores

Si $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$, encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{v}$ y $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

SOLUCIÓN Por las definiciones de las operaciones vectoriales tenemos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle + \langle -1, 2\rangle = \langle 1, -1\rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle - \langle -1, 2\rangle = \langle 3, -5\rangle$$

$$2\mathbf{u} = 2\langle 2, -3\rangle = \langle 4, -6\rangle$$

$$-3\mathbf{v} = -3\langle -1, 2\rangle = \langle 3, -6\rangle$$

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\langle 2, -3\rangle + 3\langle -1, 2\rangle = \langle 4, -6\rangle + \langle -3, 6\rangle = \langle 1, 0\rangle$$



Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

Las siguientes propiedades para operaciones vectoriales se pueden demostrar fácilmente a partir de las definiciones. El **vector cero** es el vector $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$. Este desempeña la misma función para la suma de vectores que el número 0 para la suma de números reales.

PROPIEDADES DE VECTORES

Suma de vectores	**Multiplicación por un escalar**
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	$(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u}) = d(c\mathbf{u})$
$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
Magnitud de un vector	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
$\lvert c\mathbf{u}\rvert = \lvert c\rvert \lvert \mathbf{u}\rvert$	$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$

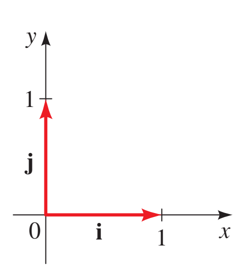


FIGURA 12

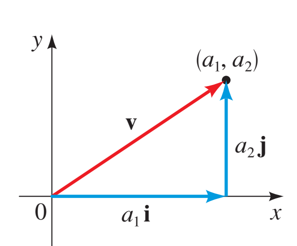


FIGURA 13

Un vector de longitud 1 se llama **vector unitario**. Por ejemplo, en el ejemplo 2*c*) el vector $\mathbf{w} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$ es un vector unitario. Dos vectores unitarios útiles son **i** y **j**, definidos por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

(Vea la figura 12.) Estos vectores son especiales porque cualquier vector se puede expresar en sus términos. (Vea la figura 13.)

VECTORES EN TÉRMINOS DE i Y j

El vector $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2\rangle$ se puede expresar en términos de **i** y **j** por

$$\mathbf{v} = \langle a_1, a_2\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

EJEMPLO 4 ■ Vectores en términos de i y j

a) Escriba el vector $\mathbf{u} = \langle 5, -8\rangle$ en términos de **i** y **j**.

b) Si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, escriba $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ en términos de **i** y **j**.

SOLUCIÓN

a) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + (-8)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

b) Las propiedades de adición y multiplicación escalares de vectores demuestran que podemos manipular los vectores de la misma forma que las expresiones algebraicas. Entonces,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} &= 2(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 5(-\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \\ &= (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{i} + 34\mathbf{j} \end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 27 y 35 ■

Sea $\mathbf{v}$ un vector en el plano con su punto inicial en el origen. La **dirección** de $\mathbf{v}$ es θ, el ángulo positivo más pequeño está en posición estándar formado por el eje x positivo y $\mathbf{v}$ (vea la figura 14). Si conocemos la magnitud y la dirección de un vector, entonces la figura 14 demuestra que podemos encontrar sus componentes horizontal y vertical.

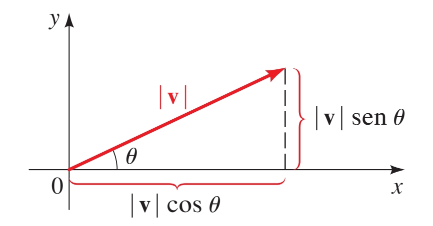


FIGURA 14

COMPONENTES HORIZONTALES Y VERTICALES DE UN VECTOR

Sea $\mathbf{v}$ un vector con magnitud $|\mathbf{v}|$ y dirección θ.
Entonces $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, donde

$$a_1 = |\mathbf{v}| \cos\theta \qquad \text{y} \qquad a_2 = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto, podemos expresar $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cos\theta\mathbf{i} + |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

EJEMPLO 5 ■ Componentes y dirección de un vector

a) Un vector $\mathbf{v}$ tiene longitud 8 y dirección $\pi/3$. Encuentre los componentes horizontales y verticales, y escriba $\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

b) Encuentre la dirección del vector $\mathbf{u} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

SOLUCIÓN

a) Tenemos $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, donde los componentes están dados por

$$a = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4 \qquad \text{y} \qquad b = 8 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$$

Por tanto $\mathbf{v} = \langle 4, 4\sqrt{3} \rangle = 4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$.

b) De la figura 15 vemos que la dirección de θ tiene la propiedad de que

$$\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Entonces el ángulo de referencia para θ es $\pi/6$. Dado que el punto terminal del vector $\mathbf{u}$ está en el segundo cuadrante, se deduce que $\theta = 5\pi/6$.

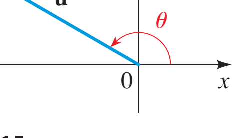


FIGURA 15

Ahora intente realizar los ejercicios 41 y 51 ■

■ Uso de vectores para modelar velocidad y fuerza

En la página 518 de la sección 6.6 se explica el uso de rumbos (por ejemplo, N 30° E) para describir direcciones.

La **velocidad** de un objeto en movimiento se modela mediante un vector cuya dirección es la dirección de movimiento y cuya magnitud es la rapidez. La figura 16 de la página siguiente muestra algunos vectores $\mathbf{u}$ que representan la velocidad del viento que corre en la dirección N 30° E; y un vector $\mathbf{v}$ que representa la velocidad de un avión que vuela en este viento en el punto P. Es obvio por nuestra experiencia que el viento afecta la

rapidez y la dirección de un avión. La figura 17 indica que la verdadera velocidad del avión (respecto al suelo) está dada por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

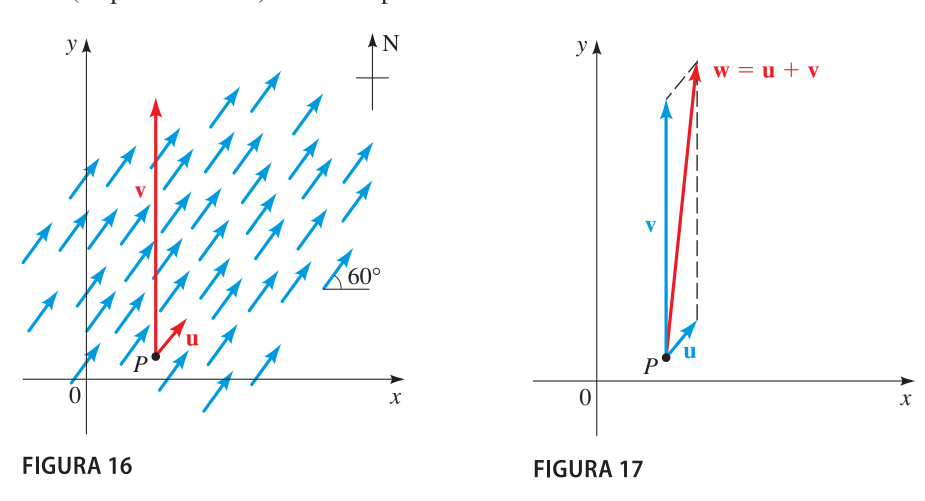


FIGURA 16

FIGURA 17

EJEMPLO 6 ■ Rapidez y dirección verdaderas de un avión

Un avión se dirige al norte a 300 mi/h. Experimenta un viento cruzado en la dirección N 30° E, como se muestra en la figura 16.

a) Exprese la velocidad **v** del avión respecto al aire y la velocidad **u** del viento en forma de componentes.

b) Encuentre la velocidad verdadera del avión como vector.

c) Encuentre la rapidez y la dirección verdaderas del avión.

SOLUCIÓN

a) La velocidad del avión respecto al aire es $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 300\mathbf{j} = 300\mathbf{j}$. Por las fórmulas para los componentes de un vector encontramos que la velocidad del viento es

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (40\cos 60°)\mathbf{i} + (40\operatorname{sen} 60°)\mathbf{j}\\ &= 20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\mathbf{j}\\ &\approx 20\mathbf{i} + 34.64\mathbf{j}\end{aligned}$$

La **velocidad verdadera** es la velocidad respecto al suelo.

b) La velocidad verdadera del avión está dada por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\mathbf{j}) + (300\mathbf{j})\\ &= 20\mathbf{i} + (20\sqrt{3} + 300)\mathbf{j}\\ &\approx 20\mathbf{i} + 334.64\mathbf{j}\end{aligned}$$

c) La rapidez verdadera del avión está dada por la magnitud de **w**:

$$|\mathbf{w}| \approx \sqrt{(20)^2 + (334.64)^2} \approx 335.2 \text{ mi/h}$$

La dirección del avión es la dirección θ del vector **w**. El ángulo θ tiene la propiedad de que $\tan\theta \approx 334.64/20 = 16.732$, de modo que $\theta \approx 86.6°$. Entonces la dirección del avión es N 3.4° E.

Ahora intente realizar el ejercicio 59 ■

EJEMPLO 7 ■ Calcular el rumbo

Una mujer lanza un bote al agua desde la orilla de un río recto y desea desembarcar en el punto directamente en la orilla opuesta. Si la rapidez del bote (respecto al agua) es de 10 mi/h y el río corre hacia el este a razón de 5 mi/h, ¿en qué dirección debe dirigir el bote para llegar al punto deseado de desembarco?

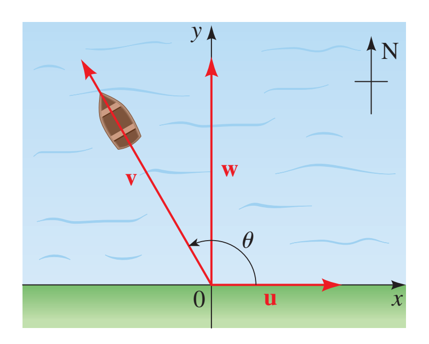


FIGURA 18

SOLUCIÓN Escogemos un sistema de coordenadas con el origen en la posición inicial del bote, como se muestra en la figura 18. Represente con **u** y **v** las velocidades del río y del bote, respectivamente. Es claro que $\mathbf{u} = 5\,\mathbf{i}$ y, como la rapidez del bote es de 10 mi/h, tenemos $|\,\mathbf{v}\,| = 10$, entonces

$$\mathbf{v} = (10 \cos \theta)\mathbf{i} + (10 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$$

donde el ángulo θ es como se muestra en la figura 18. El curso verdadero del bote está dado por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} + (10 \cos \theta)\mathbf{i} + (10 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}\\ &= (5 + 10 \cos \theta)\mathbf{i} + (10 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Dado que la mujer desea desembarcar en un punto directamente al otro lado del río, su dirección debe tener un componente horizontal de 0. En otras palabras debe elegir θ de modo que

$$\begin{aligned}5 + 10 \cos \theta &= 0\\ \cos \theta &= -\tfrac{1}{2}\\ \theta &= 120°\end{aligned}$$

Por tanto, la mujer debe dirigir el bote en la dirección $\theta = 120°$ (o sea N 30° O).

Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

Una **fuerza** también se representa mediante un vector. Intuitivamente, podemos considerar una fuerza como la descripción del empuje o la atracción de un objeto, por ejemplo, el empuje horizontal de un libro sobre una mesa o la atracción hacia abajo ejercida por la gravedad de la Tierra contra una pelota. La fuerza se mide en libras (o en newtons, en el sistema métrico). Por ejemplo, un hombre que pesa 200 libras ejerce una fuerza de 200 libras contra el suelo. Si varias fuerzas actúan sobre un objeto, la **fuerza resultante** experimentada por este es la suma vectorial de dichas fuerzas.

EJEMPLO 8 ■ Fuerza resultante

Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con magnitudes 10 y 20 lb, respectivamente, actúan sobre un objeto en un punto P como se muestra en la figura 19. Encuentre la fuerza resultante que actúa en P.

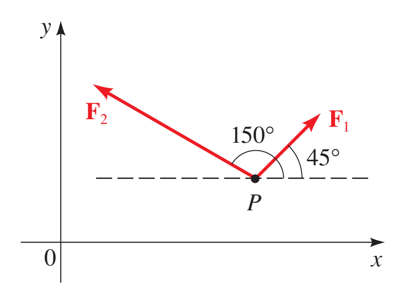


FIGURA 19

SOLUCIÓN Escribimos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en forma de componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= (10 \cos 45°)\mathbf{i} + (10 \operatorname{sen} 45°)\mathbf{j} = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\\ &= 5\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\,\mathbf{j}\\ \mathbf{F}_2 &= (20 \cos 150°)\mathbf{i} + (20 \operatorname{sen} 150°)\mathbf{j} = -20\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + 20\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}\\ &= -10\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 10\mathbf{j}\end{aligned}$$

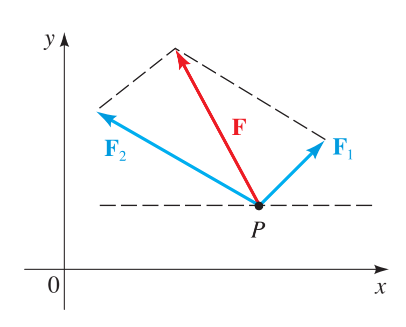


FIGURA 20

Por tanto, la fuerza resultante **F** es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\\ &= (5\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\,\mathbf{j}) + (-10\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 10\mathbf{j})\\ &= (5\sqrt{2} - 10\sqrt{3})\mathbf{i} + (5\sqrt{2} + 10\mathbf{j})\\ &\approx -10\mathbf{i} + 17\mathbf{j}\end{aligned}$$

La fuerza resultante **F** se muestra en la figura 20.

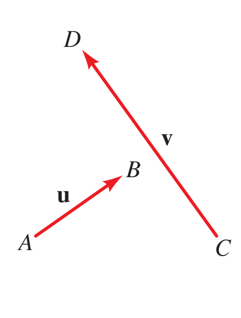
Ahora intente realizar el ejercicio 67 ■

9.1 EJERCICIOS

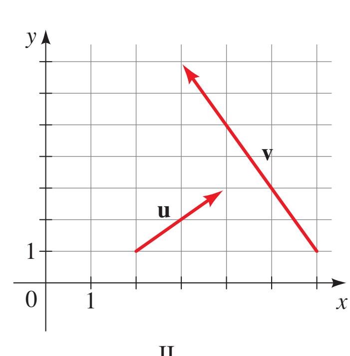
CONCEPTOS

1. ***a)*** Un vector en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. En la figura I siguiente, el vector **u** tiene punto inicial ________ y punto final ________. Trace los vectores 2 **u** y **u** + **v**.

b) Un vector en un plano coordenado se expresa mediante el uso de componentes. En la figura II siguiente, el vector **u** tiene punto inicial (___ , ___) y punto terminal (___ , ___). En forma de componentes escribimos **u** = ⟨ ___ , ___ ⟩, y **v** = ⟨ ___ , ___ ⟩. Entonces 2 **u** = ⟨ ___ , ___ ⟩ y **u** + **v** = ⟨ ___ , ___ ⟩.



I



II

2. ***a)*** La longitud de un vector $\mathbf{w} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es $|\mathbf{w}|$ = ________, de modo que la longitud del vector **u** en la figura II es $|\mathbf{u}|$ = ________.

b) Si conocemos la longitud $|\mathbf{w}|$ y la dirección θ de un vector **w**, entonces podemos expresar el vector en forma de componentes como **w** = ⟨ ________ , ________ ⟩.

HABILIDADES

3–8 ■ Trazar vectores Trace el vector indicado. (Los vectores **u** y **v** se muestran en la figura.)

3. $2\mathbf{u}$

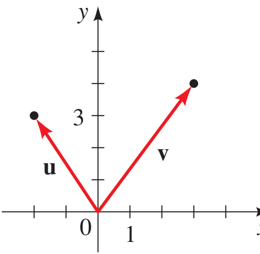
4. $-\mathbf{v}$

5. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

6. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

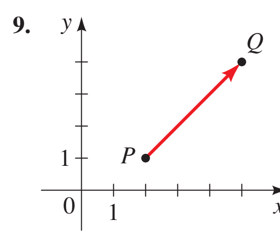
7. $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$

8. $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$

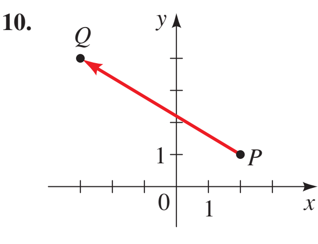


9–18 ■ Forma en componentes de vectores Exprese el vector con punto inicial P y punto terminal Q en forma de componentes.

9.

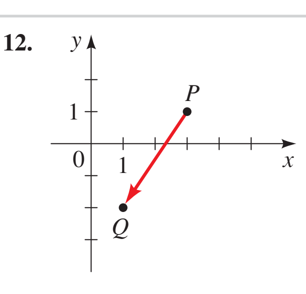


10.



11.

12.



13. $P(3, 2)$, $Q(8, 9)$

14. $P(1, 1)$, $Q(9, 9)$

15. $P(5, 3)$, $Q(1, 0)$

16. $P(-1, 3)$, $Q(-6, -1)$

17. $P(-1, -1)$, $Q(-1, 1)$

18. $P(-8, -6)$, $Q(-1, -1)$

19–22 ■ Trazar vectores Trace el vector dado con punto inicial (4, 3), y encuentre el punto terminal.

19. $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle$

20. $\mathbf{u} = \langle -1, 2 \rangle$

21. $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle$

22. $\mathbf{u} = \langle -8, -1 \rangle$

23–26 ■ Trazar vectores Trace representaciones del vector dado con puntos iniciales en (0, 0), (2, 3) y (−3, 5).

23. $\mathbf{u} = \langle 3, 5 \rangle$

24. $\mathbf{u} = \langle 4, -6 \rangle$

25. $\mathbf{u} = \langle -7, 2 \rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle 0, -9 \rangle$

27–30 ■ Escribir vectores en términos de i y j Escriba el vector dado en términos de **i** y **j**.

27. $\mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle$

28. $\mathbf{u} = \langle -2, 10 \rangle$

29. $\mathbf{u} = \langle 3, 0 \rangle$

30. $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle$

31–36 ■ Operaciones con vectores Encuentre $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$ para los vectores dados **u** y **v**.

31. $\mathbf{u} = \langle 2, 7 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 1 \rangle$

32. $\mathbf{u} = \langle -2, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -8 \rangle$

33. $\mathbf{u} = \langle 0, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 0 \rangle$

34. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{j}$

35. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

36. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

37–40 ■ Magnitudes de vectores Encuentre $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|2\mathbf{u}|$, $|\frac{1}{2}\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$, $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ y $|\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|$.

37. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

38. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

39. $\mathbf{u} = \langle 10, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -2 \rangle$

40. $\mathbf{u} = \langle -6, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -1 \rangle$

41–46 ■ Componentes de un vector Encuentre los componentes horizontales y verticales del vector con magnitud y dirección dadas, y escriba el vector en términos de los vectores **i** y **j**.

41. $|\mathbf{v}| = 40$, $\theta = 30°$

42. $|\mathbf{v}| = 50$, $\theta = 120°$

43. $|\mathbf{v}| = 1$, $\theta = 225°$

44. $|\mathbf{v}| = 800$, $\theta = 125°$

45. $|\mathbf{v}| = 4$, $\theta = 10°$

46. $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}$, $\theta = 300°$

47–52 ■ Magnitud y dirección del vector Encuentre la magnitud y dirección (en grados) del vector.

47. $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$

48. $\mathbf{v} = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

49. $\mathbf{v} = \langle -12, 5 \rangle$

50. $\mathbf{v} = \langle 40, 9 \rangle$

51. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$

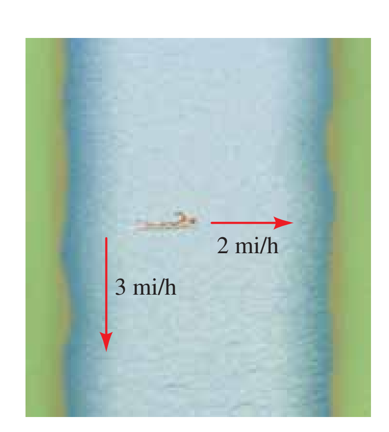
52. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

APLICACIONES

53. Componentes de una fuerza Un hombre empuja una podadora de césped con una fuerza de 30 libras ejercida a un ángulo de 30° respecto al suelo. Encuentre los componentes horizontales y verticales de la fuerza.

54. Componentes de velocidad Un *jet* vuela en una dirección N 20° E con una rapidez de 500 mi/h. Encuentre los componentes norte y este de la velocidad.

55. Velocidad Un río corre al sur a 3 mi/h. Un nadador que trata de cruzar el río se dirige al este nadando a 2 mi/h respecto al agua. Encuentre la velocidad verdadera del nadador como vector.



56. Velocidad Suponga que en el ejercicio 55 la corriente corre a 1.2 mi/h hacia el sur. ¿En qué dirección debe nadar el atleta para alcanzar un punto de llegada al este de su punto de partida?

57. Velocidad La rapidez de un avión es de 300 mi/h respecto al aire. El viento está soplando al norte con una rapidez de 30 mi/h. ¿En qué dirección debe volar el avión para llegar a un punto al oeste de su posición?

58. Velocidad Un salmón migratorio nada en dirección N 45° E, y lo hace a 5 mi/h respecto al agua. Las corrientes prevalecientes del océano fluyen hacia el este a 3 mi/h. Encuentre la velocidad verdadera del pez como vector.

59. Velocidad verdadera de un *jet* Un piloto vuela su avión hacia el este. El *jet* tiene una rapidez de 425 mi/h respecto al aire. El viento está soplando al norte con una rapidez de 40 mi/h.

***a*)** Exprese la velocidad del viento como vector en forma de componentes.

***b*)** Exprese la velocidad del avión respecto al aire como vector en forma de componentes.

***c*)** Encuentre la velocidad verdadera del avión como vector.

***d*)** Encuentre la rapidez y la dirección verdaderas del *jet*.

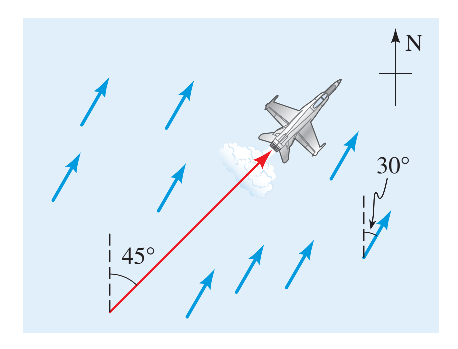
60. Velocidad verdadera de un avión Un avión vuela mientras el aire sopla con una rapidez de 55 mi/h en la dirección N 30° E (vea la figura). El *jet* tiene una rapidez de 765 mi/h respecto al aire, y el piloto lo guía en la dirección N 45° E.

***a*)** Exprese la velocidad del viento como vector en forma de componentes.

***b*)** Exprese le velocidad del *jet* respecto al aire como vector en forma de componentes.

***c*)** Encuentre la velocidad verdadera del *jet* como vector.

***d*)** Encuentre la rapidez y la dirección verdaderas del *jet*.



61. Velocidad verdadera de un *jet* Encuentre la rapidez y la dirección verdaderas del *jet* del ejercicio 60, si el piloto guía su aeronave en la dirección N 30° O.

62. Velocidad verdadera de un *jet* ¿En qué dirección debe guiar su avión el piloto del ejercicio 60 para que el curso verdadero sea al norte?

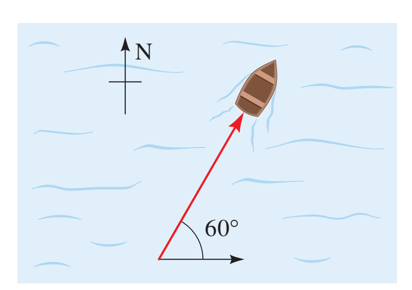
63. Velocidad de un bote Un río recto corre al este a una rapidez de 10 mi/h. Un bote se pone en marcha desde la orilla sur del río y navega en una dirección 60° respecto a la orilla (vea la figura). El bote de motor tiene una rapidez de 20 mi/h respecto al agua.

***a*)** Exprese la velocidad del río como vector en forma de componentes.

***b*)** Exprese la velocidad del bote de motor respecto al agua como vector en forma de componentes.

***c*)** Encuentre la velocidad verdadera del bote.

***d*)** Encuentre la rapidez y la dirección verdaderas del bote.



64. Velocidad de un bote El bote del ejercicio 63 intenta llegar a un punto en la orilla norte del río directamente opuesta al punto de partida. ¿En qué dirección se debe navegar?

65. Velocidad de un bote Un bote navega en la dirección N 72° E. La rapidez del bote respecto al agua es de 24 mi/h.

El agua corre directamente al sur. Se observa que la dirección verdadera del bote es directamente al este.

***a*)** Exprese la velocidad del bote respecto al agua como vector en forma de componentes.

***b*)** Encuentre la rapidez del agua y la rapidez verdadera del bote.

66. Velocidad Una mujer camina hacia el oeste sobre la cubierta de un buque transoceánico a 2 mi/h. El barco se mueve al norte a una rapidez de 25 mi/h. Encuentre la rapidez y la dirección de la mujer respecto a la superficie del agua.

67–72 ■ Equilibrio de fuerzas Se dice que las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ que actúan en el mismo punto P están en equilibrio si la fuerza resultante es cero, es decir, si $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \mathbf{0}$. Encuentre ***a*)** las fuerzas resultantes que actúan en P, y ***b*)** la fuerza adicional requerida (si la hay) para que las fuerzas estén en equilibrio.

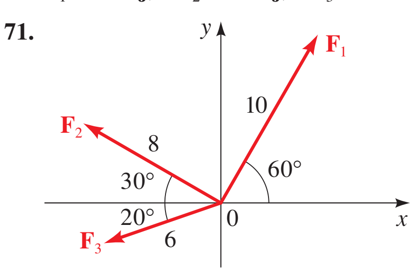
67. $\mathbf{F}_1 = \langle 2, 5 \rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 3, -8 \rangle$

68. $\mathbf{F}_1 = \langle 3, -7 \rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 4, -2 \rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle -7, 9 \rangle$

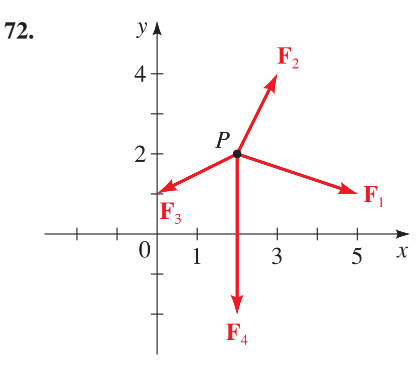
69. $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_3 = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_4 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

70. $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{F}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

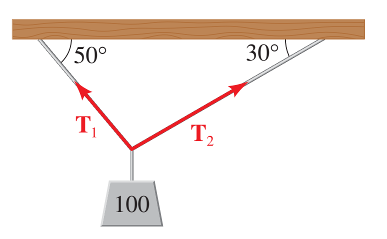
71.



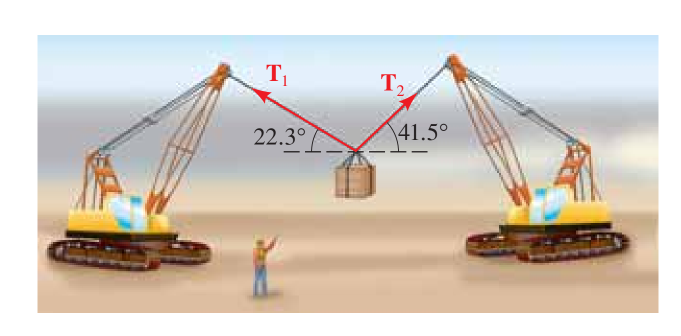
72.



73. Equilibrio de tensiones Un peso de 100 lb pende de una cuerda, como se muestra en la figura siguiente. Encuentre las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en la cuerda.

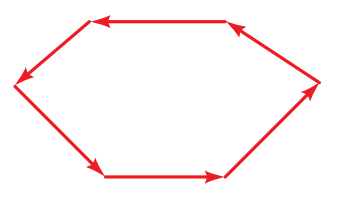


74. Equilibrio de tensiones Las grúas de la figura están levantando un objeto que pesa 18 278 lb. Encuentre las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

75. DISCUSIÓN: Vectores que forman un polígono Supongamos que n vectores pueden colocarse cabeza con cola en el plano, de modo que formen un polígono. (La figura muestra el caso de un hexágono.) Explique por qué la suma de estos vectores es $\mathbf{0}$.



9.2 EL PRODUCTO PUNTO

■ El producto punto de vectores ■ El componente de **u** a lo largo de **v** ■ La proyección de **u** sobre **v** ■ Trabajo

En esta sección definimos una operación de vectores llamada el producto punto. Este concepto es especialmente útil en cálculo y en aplicaciones de vectores en física e ingeniería.

■ El producto punto de vectores

Empezamos por definir el producto punto de dos vectores.

DEFINICIÓN DEL PRODUCTO PUNTO

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2 \rangle$ son vectores, entonces su **producto punto**, denotado $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, se define como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$



Por tanto, para encontrar el producto punto de **u** y **v**, multiplicamos componentes correspondientes y sumamos. El producto punto *no es* un vector; es un número real, o escalar.

EJEMPLO 1 ■ Calcular productos punto

***a*)** Si $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 5 \rangle$ entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(5) = 2$$

***b*)** Si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(5) + (1)(-6) = 4$$

Ahora intente realizar los ejercicios 5*a*) y 11*a*) ■

Las demostraciones de las siguientes propiedades del producto punto se deducen fácilmente de la definición.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO PUNTO

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
4. $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

Demostración Demostraremos sólo la última propiedad. Las demostraciones de las otras se dejan como ejercicios. Sea $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\mathbf{u}|^2$$ ■

Sean **u** y **v** vectores y trácelos con puntos iniciales en el origen. Definimos el **ángulo θ entre u y v** como los más pequeños de los ángulos formados por estas representaciones de **u** y **v** (vea la figura 1). Entonces $0 \le \theta \le \pi$. El siguiente teorema relaciona al ángulo entre dos vectores con su producto punto.

FIGURA 1

EL TEOREMA DEL PRODUCTO PUNTO

Si θ es el ángulo entre dos vectores **u** y **v**, diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \theta$$

Demostración Aplicando la ley de cosenos al triángulo *AOB* en la figura 2 tendremos

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \theta$$

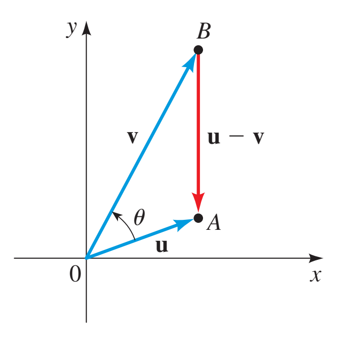


FIGURA 2

Usando las propiedades del producto punto escribimos el lado izquierdo como sigue:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

Igualando los lados derechos de las ecuaciones indicadas tenemos

$$|\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

$$-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

Esto demuestra el teorema. ■

El teorema del producto punto es útil porque nos permite encontrar el ángulo entre dos vectores si conocemos los componentes del vector. El ángulo se obtiene simplemente despejando cos θ de la ecuación del teorema del producto punto. Expresamos este importante resultado explícitamente.

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Si θ es el ángulo entre dos vectores **u** y **v** diferentes de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

EJEMPLO 2 ■ Encontrar el ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, -3\rangle$.

SOLUCIÓN Por la fórmula para el ángulo entre dos vectores tenemos

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(2)(4) + (5)(-3)}{\sqrt{4+25}\sqrt{16+9}} = \frac{-7}{5\sqrt{29}}$$

Entonces el ángulo entre **u** y **v** es

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{5\sqrt{29}}\right) \approx 105.1°$$

Ahora intente realizar los ejercicios 5*b*) y 11*b*) ■

Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero se llaman **perpendiculares**, u **ortogonales**, si el ángulo entre ellos es $\pi/2$. El siguiente teorema muestra que podemos determinar si dos vectores son perpendiculares al encontrar su producto punto.

VECTORES ORTOGONALES

Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Demostración Si **u** y **v** son perpendiculares, entonces el ángulo entre ellos es $\pi/2$, de modo que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

A la inversa, si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, entonces

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 0$$

Dado que **u** y **v** son vectores diferentes de cero, concluimos que $\cos\theta = 0$, de modo que $\theta = \pi/2$. Entonces **u** y **v** son ortogonales. ■

EJEMPLO 3 ■ Comprobar perpendicularidad de vectores

Determine si son perpendiculares los vectores de los pares siguientes.

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 5\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -8\rangle$ ***b)*** $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$

SOLUCIÓN

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (3)(2) + (5)(-8) = -34 \neq 0$, de modo que **u** y **v** no son perpendiculares.

b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2)(-1) + (1)(2) = 0$, de modo que **u** y **v** son perpendiculares.

Ahora intente realizar los ejercicios 15 y 17 ■

El componente de u a lo largo de v

El **componente de u a lo largo de v** (o el **componente de u en la dirección de v** o la **proyección de u sobre v**) se define como

Observe que el componente de **u** a lo largo de **v** es un escalar, no un vector.

$$|\mathbf{u}|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre **u** y **v**. La figura 3 da una interpretación geométrica de este concepto. Intuitivamente, el componente de **u** a lo largo de **v** es la magnitud de la parte de **u** que apunta en la dirección de **v**. Observe que el componente de **u** a lo largo de **v** es negativo si $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

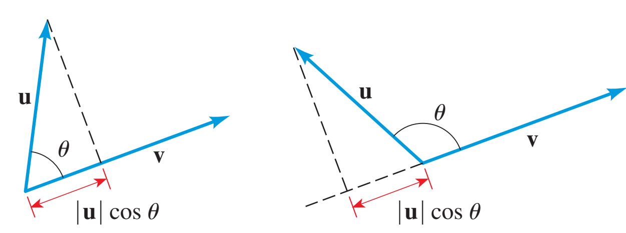


FIGURA 3

Al analizar fuerzas en física e ingeniería, con frecuencia es útil expresar un vector como la suma de dos vectores que se encuentran en direcciones perpendiculares. Por ejemplo, suponga que un auto está estacionado en un carril inclinado, tal como en la figura 4. El peso del auto es un vector **w** que apunta directamente hacia abajo. Podemos escribir

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

donde **u** es paralelo al carril y **v** es perpendicular al mismo. El vector **u** es la fuerza que tiende a hacer rodar el auto hacia abajo, y **v** es la fuerza que experimenta la superficie del carril. Las magnitudes de estas fuerzas son los componentes de **w** a lo largo de **u** y **v**, respectivamente.

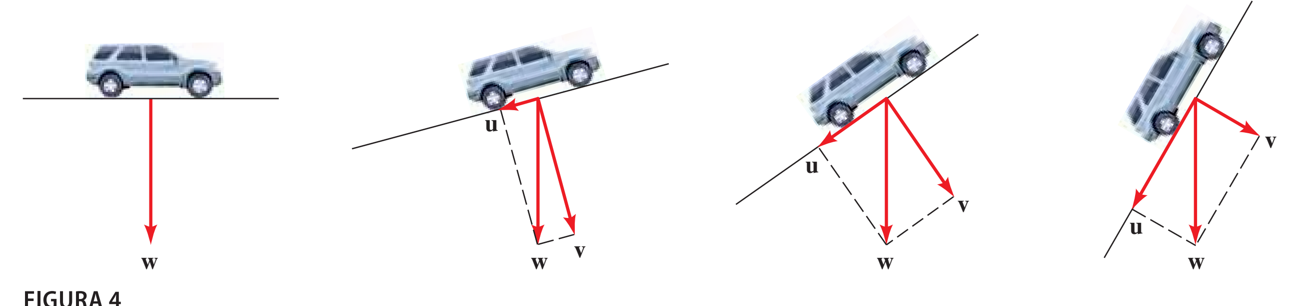


FIGURA 4

EJEMPLO 4 ■ Resolver una fuerza en componentes

Un auto que pesa 3 000 lb se encuentra estacionado en un carril que está inclinado 15° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura 5.

a) Encuentre la magnitud de la fuerza requerida para evitar que el auto ruede hacia abajo por el carril.

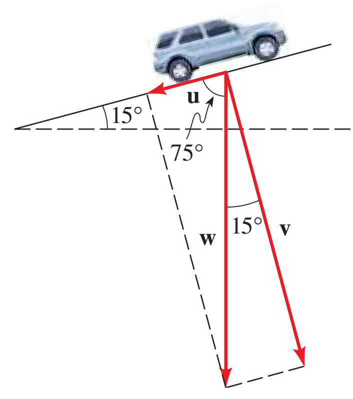


FIGURA 5

b) Encuentre la magnitud de la fuerza experimentada por el carril debida al peso del auto.

SOLUCIÓN El auto ejerce una fuerza **w** de 3 000 lb directamente hacia abajo. Descomponemos **w** en la suma de dos vectores **u** y **v**, uno de ellos paralelo a la superficie del carril y el otro perpendicular al carril, como se muestra en la figura 5.

a) La magnitud del inciso de la fuerza **w** que hace que el auto ruede hacia abajo del carril es

$$|\mathbf{u}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{u} = 3000 \cos 75° \approx 776$$

Entonces, la fuerza necesaria para evitar que el auto ruede hacia abajo por el carril es de unas 776 libras.

b) La magnitud de la fuerza ejercida por el auto sobre el carril es

$$|\mathbf{v}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{v} = 3000 \cos 15° \approx 2898$$

La fuerza experimentada por el carril es alrededor de 2 898 libras.


Ahora intente realizar el ejercicio 49 ■

El componente de **u** a lo largo de **v** se puede calcular usando productos punto:

$$|\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{|\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cos \theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Hemos demostrado lo siguiente.

COMPONENTE DE u A LO LARGO DE v

El componente de **u** a lo largo de **v** (o la proyección de **u** como **v**) es

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

EJEMPLO 5 ■ Encontrar componentes

Sean $\mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 1 \rangle$. Encuentre el componente de **u** a lo largo de **v**.

SOLUCIÓN De la fórmula para el componente de **u** a lo largo de **v** tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1)(-2) + (4)(1)}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

■ La proyección de u sobre v

La figura 6 muestra representaciones de los vectores **u** y **v**. La proyección de **u** sobre **v**, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$, es el vector *paralelo* a **v** cuya *longitud* es el componente de **u** a lo largo **v** como se muestra en la figura 6. Para encontrar una expresión para $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$, primero encontramos un vector unitario en la dirección de **v** y luego lo multiplicamos por el componente de **u** a lo largo de **v**:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = (\text{componente de } \mathbf{u} \text{ a lo largo de } \mathbf{v})(\text{vector unitario en la dirección de } \mathbf{v})$$

$$= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

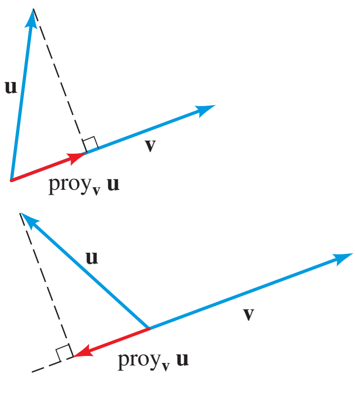


FIGURA 6

Con frecuencia necesitamos **resolver** un vector **u** en la suma de dos vectores, uno de ellos paralelo a **v** y el otro ortogonal a **v**. Esto es, buscamos escribir $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**. En este caso, $\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ (vea el ejercicio 43).

Observe que la proyección de **u** sobre **v** es un vector, no un escalar.

EL VECTOR DE PROYECCIÓN DE u SOBRE v

La **proyección de u sobre v** es el vector $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ dado por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\,\mathbf{v}\,|^2}\right)\mathbf{v}$$

Si el vector **u** se **descompone** en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**, entonces

$$\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$$

EJEMPLO 6 ■ Descomponer un vector en vectores ortogonales

Sean $\mathbf{u} = \langle -2, 9\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$.

***a*)** Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

***b*)** Descomponga **u** en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**.

SOLUCIÓN

***a*)** Por la fórmula para la proyección de un vector sobre otro, tenemos

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\,\mathbf{v}\,|^2}\right)\mathbf{v} \qquad \text{Fórmula para proyección}$$

$$= \frac{\langle -2, 9\rangle\cdot\langle -1, 2\rangle}{(-1)^2 + 2^2}\langle -1, 2\rangle \qquad \text{Definición de } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v}$$

$$= 4\langle -1, 2\rangle = \langle -4, 8\rangle$$

***b*)** Por la fórmula del cuadro anterior tenemos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle -4, 8\rangle \qquad \text{Del inciso } a)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle -2, 9\rangle - \langle -4, 8\rangle = \langle 2, 1\rangle$$

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

■ Trabajo

Uno de los usos del producto punto es calcular un trabajo. En la práctica, el término *trabajo* significa la cantidad total de esfuerzo necesario para ejecutar una tarea. En física, *trabajo* tiene un significado técnico que se ajusta a este significado intuitivo. Si una fuerza constante de magnitud F mueve un objeto toda una distancia d a lo largo de una recta, entonces el **trabajo** realizado es

$$W = Fd \qquad \text{o bien} \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si F se mide en libras y d en pies, entonces la unidad de trabajo es un pie-libra (pies-lb). Por ejemplo, ¿cuánto trabajo se realiza al levantar una pesa de 20 lb a 6 pies del suelo? Puesto que se requiere una fuerza de 20 lb para levantar dicho peso y este se mueve una distancia de 6 pies, la cantidad de trabajo realizado es

$$W = Fd = (20)(6) = 120 \text{ pies-lb}$$

Esta fórmula aplica sólo cuando la fuerza está dirigida a lo largo de la dirección de movimiento. En el caso general, si **F** mueve un objeto de P a Q, como en la figura 7, entonces sólo el componente de la fuerza en la dirección de $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ afecta al objeto. En consecuencia, la magnitud efectiva de la fuerza sobre el objeto es

$$\text{comp}_{\mathbf{D}}\,\mathbf{F} = |\,\mathbf{F}\,|\cos\theta$$

De manera que el trabajo realizado es

$$W = \text{fuerza} \times \text{distancia} = (|\,\mathbf{F}\,|\cos\theta)\,|\,\mathbf{D}\,| = |\,\mathbf{F}\,|\,|\,\mathbf{D}\,|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

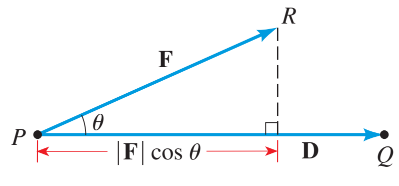


FIGURA 7

Hemos obtenido la siguiente fórmula sencilla para calcular el trabajo.

> **TRABAJO**
>
> El **trabajo** W realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ al moverse a lo largo del vector $\mathbf{D}$ es
>
> $$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

EJEMPLO 7 ■ Cálculo de trabajo

Una fuerza está dada por el vector $\mathbf{F} = \langle 2, 3 \rangle$ y mueve un objeto del punto $(1, 3)$ al punto $(5, 9)$. Encuentre el trabajo realizado.

SOLUCIÓN El vector de desplazamiento es

$$\mathbf{D} = \langle 5 - 1, 9 - 3 \rangle = \langle 4, 6 \rangle$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 4, 6 \rangle = 26$$

Si la unidad de fuerza es libras y la distancia se mide en pies, entonces el trabajo realizado es 26 pies-lb.



EJEMPLO 8 ■ Cálculo de trabajo

Un hombre tira horizontalmente de un vagón ejerciendo una fuerza de 20 lb sobre el manubrio. Si el manubrio forma un ángulo de 60° con la horizontal, encuentre el trabajo realizado para mover 100 pies el vagón.

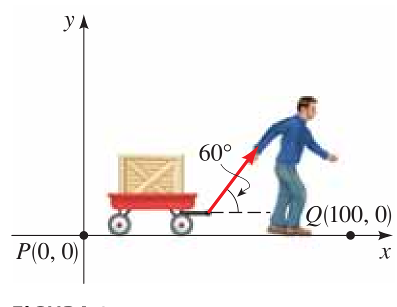


FIGURA 8

SOLUCIÓN Elegimos un sistema de coordenadas con el origen en la posición inicial del vagón (vea la figura 8). Esto es, el vagón se mueve del punto $P(0, 0)$ al punto $Q(100, 0)$. El vector que representa este desplazamiento es

$$\mathbf{D} = 100\,\mathbf{i}$$

La fuerza sobre el manubrio se puede escribir en términos de componentes (vea la sección 9.1) como

$$\mathbf{F} = (20 \cos 60°)\mathbf{i} + (20 \operatorname{sen} 60°)\mathbf{j} = 10\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\,\mathbf{j}$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = (10\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\,\mathbf{j}) \cdot (100\,\mathbf{i}) = 1\,000 \text{ pies-libra}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■



© James L. Amos/SuperStock

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Navegando contra el viento

Los marineros dependen del viento para impulsar sus embarcaciones. Pero ¿qué pasa si el viento sopla en una dirección opuesta a la que se desea viajar? Aunque es imposible navegar directamente contra el viento, sí es posible navegar a un ángulo con el viento para poder avanzar contra este. En este proyecto descubriremos cómo los vectores que modelan la vela, la quilla y el viento se pueden combinar para encontrar la dirección en que se moverá el barco. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

9.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1–2 ■ Sean $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores diferentes de cero en el plano, y sea θ el ángulo entre ellos.

1. El producto punto de **u** y **v** está definido por

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$ ______________________

El producto punto de dos vectores es un __________, no es un vector.

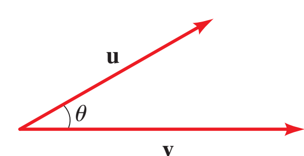
2. El ángulo θ satisface

$$\cos\theta = \frac{\square}{\square}$$

Por tanto, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, los vectores son ____________.

3. ***a***) El componente de **u** a lo largo de **v** es el escalar $|\mathbf{u}|\cos\theta$ y se puede expresar en términos del producto punto como $\text{comp}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} =$ ______________. Trace este componente en la figura siguiente.

b) La proyección de **u** sobre **v** es el vector $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} =$ ______________. Trace esta proyección en la figura siguiente.



4. El trabajo realizado por una fuerza **F** al mover un objeto a lo largo del vector **D** es $W =$ ______________.

HABILIDADES

5–14 ■ **Productos punto y ángulos entre vectores** Encuentre ***a***) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y ***b***) el ángulo entre **u** y **v** al grado más cercano.

5. $\mathbf{u} = \langle 2, 0 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

6. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$

7. $\mathbf{u} = \langle 2, 7 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 1 \rangle$

8. $\mathbf{u} = \langle -6, 6 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -1 \rangle$

9. $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 2 \rangle$

10. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$

11. $\mathbf{u} = -5\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} - \sqrt{3}\,\mathbf{j}$

12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 4\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$

14. $\mathbf{u} = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -2\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$

15–20 ■ **¿Vectores perpendiculares?** Determine si los vectores dados son perpendiculares.

15. $\mathbf{u} = \langle 6, 4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

16. $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 4, 0 \rangle$

17. $\mathbf{u} = \langle -2, 6 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 4, 2 \rangle$

18. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -7\,\mathbf{j}$

19. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -12\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$

20. $\mathbf{u} = 4\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$

21–24 ■ **Productos punto** Encuentre la cantidad indicada, suponiendo que $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$.

21. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

22. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

23. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$

24. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$

25–28 ■ **Componente de u a lo largo de v** Encuentre el componente de **u** a lo largo de **v**.

25. $\mathbf{u} = \langle 4, 6 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, -4 \rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle -3, 5 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle$

27. $\mathbf{u} = 7\,\mathbf{i} - 24\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{j}$

28. $\mathbf{u} = 7\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = 8\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$

29–34 ■ **Proyección del vector u sobre v** ***a***) Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$. ***b***) Descomponga **u** en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**.

29. $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

30. $\mathbf{u} = \langle 7, -4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, 1 \rangle$

31. $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -3 \rangle$

32. $\mathbf{u} = \langle 11, 3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, -2 \rangle$

33. $\mathbf{u} = \langle 2, 9 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, 4 \rangle$

34. $\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$

35–38 ■ **Cálculo de trabajo** Encuentre el trabajo realizado por la fuerza **F** al mover un objeto de P a Q.

35. $\mathbf{F} = 4\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j}; \quad P(0, 0), Q(3, 8)$

36. $\mathbf{F} = 400\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j}; \quad P(-1, 1), Q(200, 1)$

37. $\mathbf{F} = 10\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}; \quad P(2, 3), Q(6, -2)$

38. $\mathbf{F} = -4\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j}; \quad P(0, 10), Q(5, 25)$

HABILIDADES Plus

39–42 ■ **Propiedades de vectores** Sean **u**, **v** y **w** vectores, y sea c un escalar. Demuestre la propiedad dada.

39. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

40. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

41. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

42. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$

43. Proyección Demuestre que los vectores $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ son ortogonales.

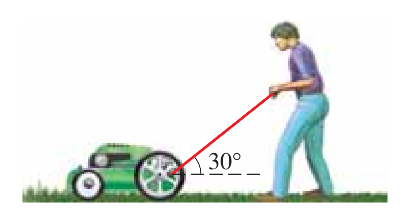
44. Proyección Evalúe $\mathbf{v} \cdot \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

APLICACIONES

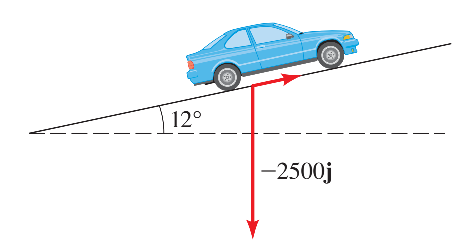
45. Trabajo La fuerza $\mathbf{F} = 4\,\mathbf{i} - 7\,\mathbf{j}$ mueve un objeto 4 pies a lo largo del eje x en la dirección positiva. Encuentre el trabajo realizado si la unidad de fuerza es la libra.

46. Trabajo Una fuerza constante $\mathbf{F} = \langle 2, 8 \rangle$ mueve un objeto a lo largo de la recta del punto $(2, 5)$ al punto $(11, 13)$. Encuentre el trabajo realizado si la distancia se mide en pies y la fuerza se mide en libras.

47. Trabajo Una podadora de césped es empujada una distancia de 200 pies, a lo largo de una trayectoria horizontal, por una fuerza de 50 lb. El manubrio de la podadora se mantiene a un ángulo de 30° de la horizontal (vea la figura). Encuentre el trabajo realizado.



48. Trabajo Un auto recorre 500 pies en un camino que está inclinado 12° con la horizontal, como se muestra en la figura siguiente. El auto pesa 2 500 lb. Entonces, la gravedad actúa directamente sobre el auto hacia abajo con una fuerza constante $\mathbf{F} = -2\,500\,\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado por este para vencer la gravedad.



49. Fuerza Un auto se halla en un carril que está inclinado 10° respecto a la horizontal. Se requiere una fuerza de 490 lb para evitar que el auto ruede hacia abajo por el carril.

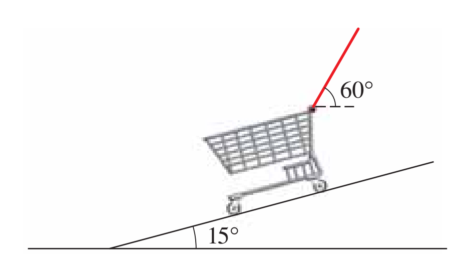
a) Encuentre el peso del auto.

b) Encuentre la fuerza que el auto ejerce contra el carril.

50. Fuerza Un auto está en un carril que está inclinado 25° respecto a la horizontal. Si pesa 2 755 lb encuentre la fuerza necesaria para evitar que ruede hacia abajo por el carril.

51. Fuerza Un paquete que pesa 200 lb es colocado en un plano inclinado. Si una fuerza de 80 lb es apenas suficiente para evitar que el paquete se deslice, encuentre el ángulo de inclinación del plano. (Ignore los efectos de fricción.)

52. Fuerza En una rampa inclinada 15° respecto a la horizontal se coloca un carro de supermercado, con peso de 40 lb. El carro es mantenido en su lugar por una cuerda inclinada a 60° de la horizontal, como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza que la cuerda debe ejercer en el carro para evitar que ruede hacia abajo por la rampa.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

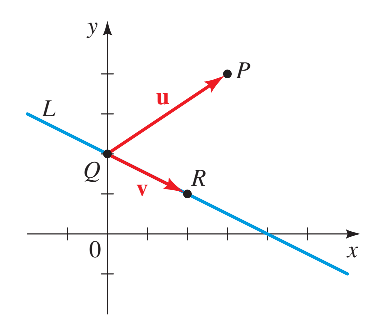
53. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ REDACCIÓN: Distancia de un punto a una recta Sea L la recta $2x + 4y = 8$, y sea P el punto $(3, 4)$.

a) Demuestre que los puntos $Q(0, 2)$ y $R(0, 2)$ están en L.

b) Sea $\mathbf{u} = \overrightarrow{QP}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR}$, como se muestra en la figura. Encuentre $\mathbf{w} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

c) Trace una gráfica que explique por qué $|\mathbf{u} - \mathbf{w}|$ es la distancia de P a L. Encuentre esta distancia.

d) Redacte un breve párrafo que describa los pasos que daría para encontrar la distancia de un punto dado hacia una recta determinada.



9.3 GEOMETRÍA DE COORDENADAS EN TRES DIMENSIONES

■ El sistema de coordenadas rectangulares tridimensionales ■ Fórmula de la distancia en tres dimensiones ■ La ecuación de una esfera

Para localizar un punto en un plano se necesitan dos puntos. Sabemos que cualquier punto en el plano cartesiano se puede representar como un par ordenado (a, b) de números reales, donde a es la coordenada x y b es la coordenada y. En el espacio tridimensional se agrega una tercera dimensión, de modo que cualquier punto en el espacio está representado por una terna ordenada (a, b, c) de números reales.

El sistema de coordenadas rectangulares tridimensionales

Para representar puntos en el espacio, primero escogemos un punto fijo O (el origen) y tres rectas dirigidas que pasan por O que son perpendiculares entre sí, llamados **ejes coordenados** identificados como eje x, eje y, y eje z. Por lo general consideramos los ejes x y y como horizontales y el eje z como vertical, y trazamos la orientación de los ejes tal como en la figura 1.

FIGURA 1 Ejes coordenados

Los tres ejes coordenados determinan los tres **planos coordenados** que se ilustran en la figura 2*a*). El plano xy es el plano que contiene a los ejes x y y; el plano yz es el plano que contiene a los ejes y y z; el plano xz es el plano que contiene a los ejes x y z. Estos tres planos coordenados dividen el espacio en ocho regiones llamadas **octantes**.

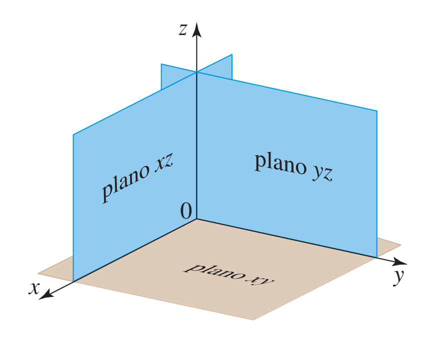


FIGURA 2 *a*) Planos de coordenadas *b*) "Paredes" coordenadas

Debido a que muchas personas tienen dificultad para visualizar diagramas de figuras en tres dimensiones, el lector puede encontrar útil hacer lo siguiente (vea la figura 2*b*)). Observe cualquier esquina inferior de una habitación y considérela como el origen. La pared a la izquierda está en el plano xz, la pared a la derecha está en el plano yz y el piso está en el plano xy. El eje x corre a lo largo de la intersección del piso y la pared izquierda; el eje y corre a lo largo de la intersección del piso y la pared derecha. El eje z corre hacia arriba del piso hacia el techo a lo largo de la intersección de las dos paredes.

Ahora, cualquier punto P en el espacio puede ser localizado por una **terna ordenada** de números reales (a, b, c) como se muestra en la figura 3. El primer número a es la coordenada x de P, el segundo número b es la coordenada y de P y el tercer número c es la coordenada z de P. El conjunto de todas las ternas ordenadas $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ forma el **sistema de coordenadas rectangulares tridimensionales**.

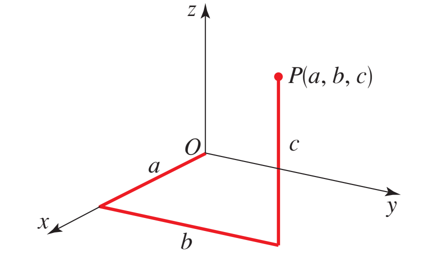


FIGURA 3 Punto $P(a, b, c)$

EJEMPLO 1 ■ Colocar puntos en tres dimensiones

Coloque los puntos $(2, 4, 7)$ y $(-4, 3, -5)$.

SOLUCIÓN Los puntos están trazados en la figura 4.

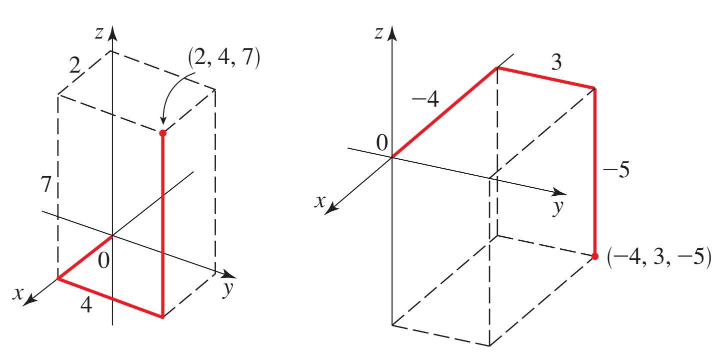


FIGURA 4

✎ Ahora intente realizar el ejercicio 3*a*) ■

En la geometría de dos dimensiones la gráfica de una ecuación con x y y es una *curva* en el plano; en geometría de tres dimensiones una ecuación en x, y y z representa una *superficie* en el espacio.

EJEMPLO 2 ■ Superficies en el espacio tridimensional

Describa y trace las superficies representadas por las siguientes ecuaciones:

a) $z = 3$ ***b***) $y = 5$

SOLUCIÓN

a) La superficie está formada por los puntos $P(x, y, z)$ donde la coordenada z es 3. Este es el plano horizontal que es paralelo al plano xy y se halla a tres unidades arriba del mismo, como se muestra en la figura 5.

b) La superficie está formada por los puntos $P(x, y, z)$ donde la coordenada y es 5. Este es el plano vertical que es paralelo al plano xz y se halla a cinco unidades a la derecha del mismo, como se muestra en la figura 6.

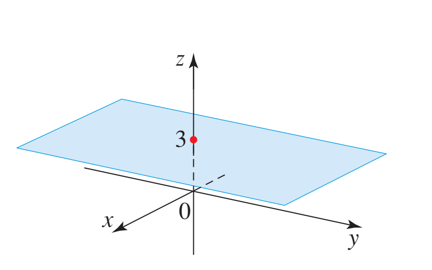


FIGURA 5 El plano $z = 3$

FIGURA 6 El plano $y = 5$



Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

■ Fórmula de la distancia en tres dimensiones

La conocida fórmula de la distancia entre dos puntos en un plano se extiende fácilmente a la siguiente fórmula de tres dimensiones.

> **FÓRMULA DE LA DISTANCIA EN TRES DIMENSIONES**
>
> La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ es
>
> $$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

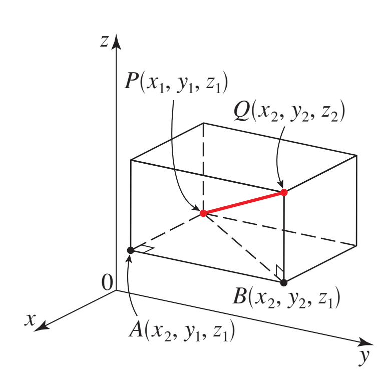


FIGURA 7

Demostración Para demostrar esta fórmula construimos una caja rectangular como en la figura 7, donde $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ son vértices diagonalmente opuestos y las caras de la caja son paralelas a los planos de coordenadas. Si A y B son los vértices de la caja que están indicados en la figura, entonces

$$d(P, A) = |x_2 - x_1| \qquad d(A, B) = |y_2 - y_1| \qquad d(Q, B) = |z_2 - z_1|$$

Los triángulos PAB y PBQ son triángulos rectángulos, de modo que por el teorema de Pitágoras tenemos

$$(d(P, Q))^2 = (d(P, B))^2 + (d(Q, B))^2$$

$$(d(P, B))^2 = (d(P, A))^2 + (d(A, B))^2$$

Al combinar estas ecuaciones obtenemos

$$(d(P, Q))^2 = (d(P, A))^2 + (d(A, B))^2 + (d(Q, B))^2$$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

Por tanto,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ ■

EJEMPLO 3 ■ Uso de la fórmula de distancia

Encuentre la distancia entre los puntos $P(2, -1, 7)$ y $Q(1, -3, 5)$.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula de la distancia:

$$d(P, Q) = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-(-1))^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

Ahora intente realizar el ejercicio 3*b*) ■

■ La ecuación de una esfera

Podemos usar la fórmula de la distancia para encontrar una ecuación para una esfera en un espacio de coordenadas tridimensionales.

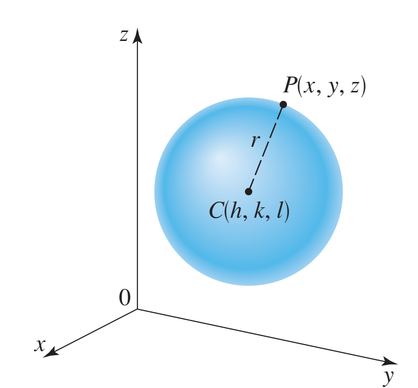


FIGURA 8 Esfera con radio r y centro $C(h, k, l)$

ECUACIÓN DE UNA ESFERA

La ecuación de una esfera con centro $C(h, k, l)$ y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

Demostración Una esfera con radio r es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia desde el centro C es la constante r (vea la figura 8). Por la fórmula de la distancia, tenemos

$$[d(P, C)]^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$$

Dado que la distancia $d(P, C)$ es igual a r, obtenemos la fórmula deseada. ■

EJEMPLO 4 ■ Encontrar la ecuación de una esfera

Encuentre la ecuación de una esfera con radio 5 y centro $C(-2, 1, 3)$.

SOLUCIÓN Usamos la ecuación general de una esfera con $r = 5$, $h = -2$, $k = 1$ y $l = 3$:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$$

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

EJEMPLO 5 ■ Encontrar el centro y el radio de una esfera

Demuestre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ es la ecuación de una esfera y encuentre su centro y su radio.

SOLUCIÓN Completamos los cuadrados en los términos x, y y z para volver a escribir la ecuación dada en la forma de una ecuación de una esfera.

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$	Ecuación dada
$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$	Complete cuadrados
$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 8$	Factorice binomios al cuadrado

Comparando esto con la ecuación normal de una esfera podemos ver que el centro es $(-2, 3, -1)$ y el radio es $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

La intersección de una esfera con un plano se llama **traza** de la esfera en un plano.

EJEMPLO 6 ■ Encontrar la traza de una esfera

Describa la traza de la esfera $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 36$ en ***a***) el plano xy y ***b***) el plano $z = 9$.

SOLUCIÓN

a) En el plano xy la coordenada z es 0. Entonces la traza de la esfera en el plano xy está formada por todos los puntos en la esfera cuya coordenada z es 0. Sustituimos z por 0 en la ecuación de la esfera y obtenemos

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (0 - 5)^2 = 36 \qquad \text{Sustituya } z \text{ por } 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + 25 = 36 \qquad \text{Calcule}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 11 \qquad \text{Reste } 25$$

Entonces la traza de la esfera es la circunferencia

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 11 \qquad z = 0$$

la cual es una circunferencia de radio $\sqrt{11}$ que está en el plano xy con centro en $(2, 4, 0)$ (vea la figura 9*a*)).

b) La traza de la esfera en el plano $z = 9$ está formada por todos los puntos en la esfera cuya coordenada z es 9. Entonces, sustituimos z por 9 en la ecuación de la esfera y obtenemos

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (9 - 5)^2 = 36 \qquad \text{Sustituya } z \text{ por } 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + 16 = 36 \qquad \text{Calcule}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20 \qquad \text{Reste } 16$$

Entonces la traza de la esfera es la circunferencia

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20 \qquad z = 9$$

que es una circunferencia de radio $\sqrt{20}$ que está 9 unidades arriba del plano xy con centro en $(2, 4, 9)$ (vea la figura 9*b*)).

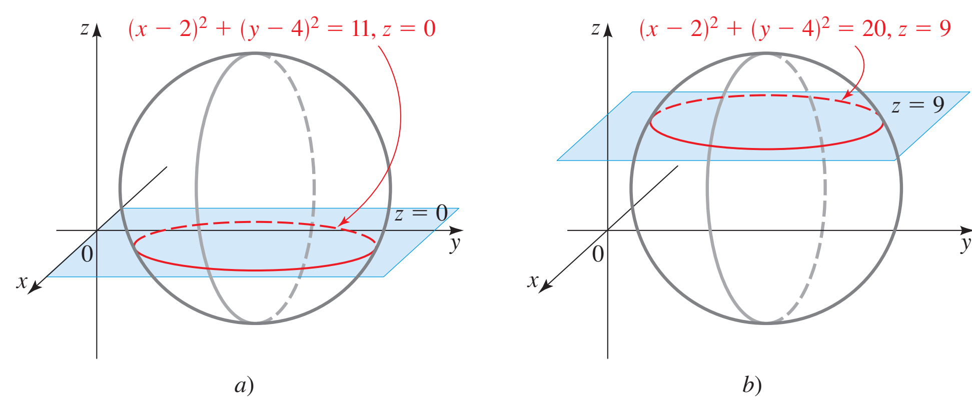


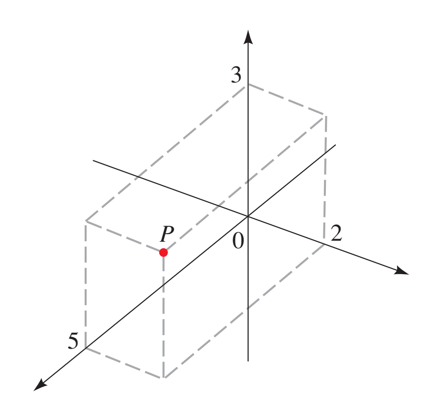
FIGURA 9 La traza de una esfera en los planos $z = 0$ y $z = 9$

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

9.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1–2 ■ Refiérase a la figura.



1. En un sistema de coordenadas tridimensionales los tres ejes mutuamente perpendiculares se llaman eje ___, eje ___ y eje ___. Marque los ejes en la figura. El punto P de la figura tiene coordenadas (, ,). La ecuación del plano que pasa por P y es paralelo al plano xz es ________.

2. La distancia entre el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ está dada por la fórmula $d(P, Q) =$ ________________. La distancia entre el punto P en la figura y el origen es __________. La ecuación de la esfera con centro en P con radio 3 es ________________.

HABILIDADES

3–6 ■ Trazar puntos y encontrar las distancias en tres dimensiones Se dan dos puntos P y Q. ***a***) Coloque P y Q. ***b***) Encuentre la distancia entre P y Q.

3. $P(3, 1, 0)$, $Q(-1, 2, -5)$

4. $P(5, 0, 10)$, $Q(3, -6, 7)$

5. $P(-2, -1, 0)$, $Q(-12, 3, 0)$

6. $P(5, -4, -6)$, $Q(8, -7, 4)$

7–10 ■ Superficies en tres dimensiones Describa y trace la superficie representada por la ecuación dada.

7. $x = 4$ **8.** $y = -2$

9. $z = 8$ **10.** $y = -1$

11–14 ■ Ecuación de una esfera Encuentre la ecuación de una esfera con el radio r y centro C dados.

11. $r = 5$; $C(2, -5, 3)$

12. $r = 3$; $C(-1, 4, -7)$

13. $r = \sqrt{6}$; $C(3, -1, 0)$

14. $r = \sqrt{11}$; $C(-10, 0, 1)$

15–18 ■ Centro y radio de una esfera Demuestre que la ecuación representa una esfera y encuentre su centro y su radio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 8z = 9$

16. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z = 10$

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 12x + 2y$

18. $x^2 + y^2 + z^2 = 14y - 6z$

19–20 ■ Traza de una esfera En estos ejercicios encuentre la traza de la esfera en un plano.

19. Describa la traza de la esfera

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 10)^2 = 100$$

en ***a***) el plano yz y ***b***) el plano $x = 4$.

20. Describa la traza de la esfera

$$x^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 144$$

en ***a***) el plano xz y ***b***) el plano $z = -2$.

APLICACIONES

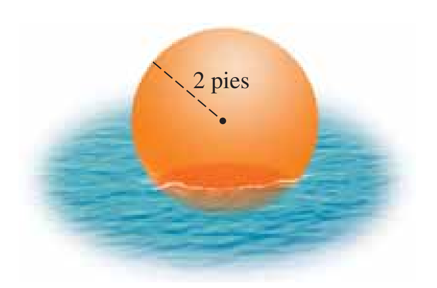
21. Tanque esférico de agua Un tanque de agua tiene la forma de una esfera de 5 pies de radio. El tanque está sostenido de un círculo metálico a 4 pies abajo del centro de la esfera, como se muestra en la figura. Encuentre el radio del círculo metálico.



22. Una boya esférica Una boya esférica de 2 pies de radio flota en las calmadas aguas de un lago. Seis pulgadas de la boya están sumergidas. Ponga un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la esfera.

a) Encuentre la ecuación de la esfera.

b) Encuentre la ecuación de la circunferencia formada en la línea del agua de la boya.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

23. **DISCUSIÓN: Visualización de un conjunto en el espacio** Trate de visualizar el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en un espacio de coordenadas que sean equidistantes de los puntos $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 3, 0)$. Use la fórmula de la distancia para encontrar la ecuación para esta superficie y observe que esta es un plano.

24. **DISCUSIÓN: Visualización de un conjunto en el espacio** En un espacio de coordenadas trate de visualizar el conjunto de todos los puntos (x, y, z) cuya distancia al punto $Q(0, 3, 0)$ es el doble de su distancia al punto $P(0, 0, 0)$. Use la fórmula de la distancia para demostrar que el conjunto es una esfera, y encuentre su centro y su radio.

9.4 VECTORES EN TRES DIMENSIONES

■ Vectores en el espacio ■ Combinación de vectores en el espacio ■ El producto punto para vectores en el espacio ■ Ángulos directores de un vector

Recuerde que se usan vectores para indicar una cantidad que tiene magnitud y dirección. En la sección 9.1 estudiamos vectores en el plano coordenado, donde la dirección está restringida a dos dimensiones. Los vectores en el espacio tienen una dirección que está en el espacio tridimensional. Las propiedades que se cumplen para vectores en el plano también se cumplen para vectores en el espacio.

■ Vectores en el espacio

Recuerde de la sección 9.1 que un vector se puede describir geométricamente por su punto inicial y su punto terminal. Cuando ponemos un vector **v** en el espacio con su punto inicial en el origen, podemos describirlo algebraicamente como una terna ordenada:

$$\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

donde a_1, a_2 y a_3 son los **componentes** de **v** (vea la figura 1). Recuerde también que un vector tiene numerosas representaciones diferentes, dependiendo de su punto inicial. La siguiente definición da la relación entre las representaciones algebraica y geométrica de un vector.

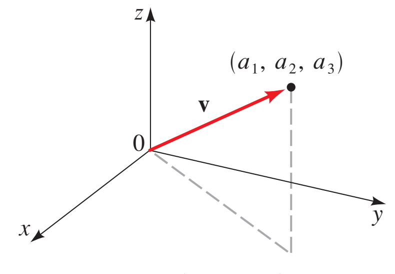


FIGURA 1 $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

FORMA DE COMPONENTES DE UN VECTOR EN EL ESPACIO

Si un vector **v** está representado en el espacio con punto inicial $P(x_1, y_1, z_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

EJEMPLO 1 ■ Describir vectores en forma de componentes

a) Encuentre los componentes del vector **v** con punto inicial $P(1, -4, 5)$ y punto terminal $Q(3, 1, -1)$.

b) Si el vector $\mathbf{w} = \langle -2, 1, 3 \rangle$ tiene punto inicial $(2, 1, -1)$, ¿cuál es su punto terminal?

SOLUCIÓN

a) El vector deseado es

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 1, 1 - (-4), -1 - 5 \rangle = \langle 2, 5, -6 \rangle$$

Vea la figura 2.

b) Sea (x, y, z) el punto terminal de **w**. Entonces

$$\mathbf{w} = \langle x - 2, y - 1, z - (-1) \rangle$$

Dado que $\mathbf{w} = \langle -2, 1, 3 \rangle$ tenemos $x - 2 = -2$, $y - 1 = 1$ y $z + 1 = 3$. Por tanto, $x = 0$, $y = 2$ y $z = 2$, y el punto terminal es $(0, 2, 2)$.

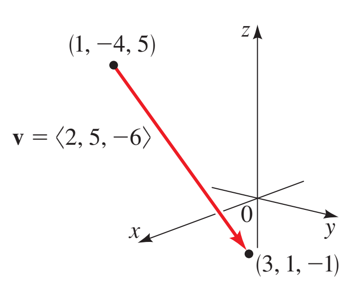


FIGURA 2 $\mathbf{v} = \langle 2, 5, -6 \rangle$

Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 7

La fórmula siguiente es una consecuencia de la fórmula de distancia, porque el vector $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ en posición estándar tiene punto inicial $(0, 0, 0)$ y punto terminal (a_1, a_2, a_3).

MAGNITUD DE UN VECTOR EN TRES DIMENSIONES

La magnitud del vector $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

EJEMPLO 2 ■ Magnitud de vectores en tres dimensiones

Encuentre la magnitud del vector dado.

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 5 \rangle$ ***b)*** $\mathbf{v} = \langle 0, 3, -1 \rangle$ ***c)*** $\mathbf{w} = \langle 0, 0, -1 \rangle$

SOLUCIÓN

a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

c) $|\mathbf{w}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1$

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

■ Combinación de vectores en el espacio

Ahora ofreceremos definiciones de las operaciones algebraicas con vectores en tres dimensiones.

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y c es un escalar, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\mathbf{u} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

FIGURA 3

EJEMPLO 3 ■ Operaciones con vectores en tres dimensiones

Si $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 6, -1, 1 \rangle$ encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $5\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

SOLUCIÓN Usando las definiciones de operaciones algebraicas tenemos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 1 + 6, -2 - 1, 4 + 1 \rangle = \langle 7, -3, 5 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 1 - 6, -2 - (-1), 4 - 1 \rangle = \langle -5, -1, 3 \rangle$$

$$5\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 5\langle 1, -2, 4 \rangle - 3\langle 6, -1, 1 \rangle = \langle 5, -10, 20 \rangle - \langle 18, -3, 3 \rangle = \langle -13, -7, 17 \rangle$$

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

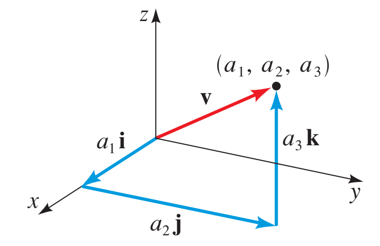


FIGURA 4

Recuerde que un vector unitario es un vector de longitud 1. El vector $\mathbf{w}$ en el ejemplo 2*c*) es un ejemplo de un vector unitario. Algunos otros vectores unitarios en tres dimensiones son

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

tal como se muestra en la figura 3. Cualquier vector en tres dimensiones se puede escribir en términos de estos tres vectores (vea la figura 4).

EXPRESIÓN DE VECTORES EN TÉRMINOS DE i, j Y k

El vector $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ se puede expresar en términos de **i**, **j** y **k** por

$$\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Todas las propiedades de vectores de la página 633 de la sección 9.1 se cumplen también para vectores en tres dimensiones. Usamos estas propiedades en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 ■ Vectores en términos de i, j y k

a) Escriba el vector $\mathbf{u} = \langle 5, -3, 6 \rangle$ en términos de **i**, **j** y **k**.

b) Si $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, exprese el vector $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ en términos de **i**, **j** y **k**.

SOLUCIÓN

a) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + (-3)\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

b) Usamos las propiedades de vectores para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} &= 2(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}) \\ &= 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} \\ &= 16\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k} \end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 19 y 23 ■

■ El producto punto para vectores en el espacio

Definimos el producto punto para vectores en tres dimensiones. Todas las propiedades del producto punto, incluyendo el teorema del producto punto (página 640), se cumplen para los vectores en tres dimensiones.

DEFINICIÓN DEL PRODUCTO PUNTO PARA VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son vectores en tres dimensiones, entonces su **producto punto** está definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

EJEMPLO 5 ■ Cálculo de productos punto para vectores en tres dimensiones

Encuentre el producto punto dado.

a) $\langle -1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 6, 5, -1 \rangle$

b) $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$

SOLUCIÓN

a) $\langle -1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 6, 5, -1 \rangle = (-1)(6) + (2)(5) + (3)(-1) = 1$

b) $$\begin{aligned} (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) &= \langle 2, -3, -1 \rangle \cdot \langle -1, 2, 8 \rangle \\ &= (2)(-1) + (-3)(2) + (-1)(8) = -16 \end{aligned}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 25 y 27 ■

Recuerde que el coseno del ángulo entre dos vectores se puede calcular usando el producto punto (página 641). La misma propiedad se cumple para vectores en tres dimensiones. Para hacer hincapié aquí expresamos de nuevo esta propiedad.

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Sean **u** y **v** vectores en el espacio, y sea θ el ángulo entre ellos. Entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

En particular, **u** y **v** son **perpendiculares** (o **ortogonales**) si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

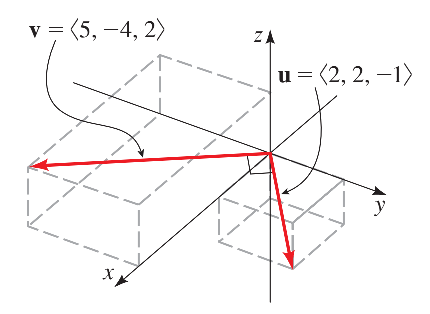


FIGURA 5 Los vectores **u** y **v** son perpendiculares.

EJEMPLO 6 ■ Verificar si dos vectores son perpendiculares

Demuestre que el vector $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Encontramos el producto punto.

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = (2)(5) + (2)(-4) + (-1)(2) = 0$$

Puesto que el producto punto es 0, los vectores son perpendiculares. Vea la figura 5.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

■ Ángulos directores de un vector

Los **ángulos directores** de un vector diferente de cero $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ son los ángulos α, β y γ en el intervalo $[0, \pi]$ que el vector forma con los ejes positivos x, y y z (vea la figura 6). Los cosenos de estos ángulos, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan **cosenos directores** del vector **v**. Mediante el uso de la fórmula para el ángulo entre dos vectores podemos encontrar los cosenos directores de **v**:

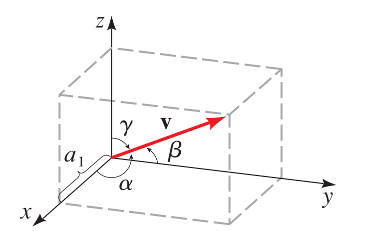


FIGURA 6 Ángulos directores del vector **v**

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{v}||\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{v}||\mathbf{j}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{v}||\mathbf{k}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{v}|}$$

ÁNGULOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es un vector diferente de cero en el espacio, los ángulos α, β, γ satisfacen

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{v}|}$$

En particular, si $|\mathbf{v}| = 1$, entonces los cosenos directores de **v** son simplemente los componentes de **v**.

EJEMPLO 7 ■ Encontrar los ángulos directores de un vector

Encuentre los ángulos directores del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN La magnitud del vector **v** es $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. Del recuadro anterior obtenemos

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Dado que los ángulos directores están en el intervalo $[0, \pi]$ y puesto que $\cos^{-1}$ da ángulos en ese mismo intervalo, obtenemos α, β y γ con sólo tomar el $\cos^{-1}$ de las ecuaciones anteriores.

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{14}} \approx 74° \qquad \beta = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{14}} \approx 58° \qquad \gamma = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{14}} \approx 37°$$

 **Ahora intente realizar el ejercicio 37** ■

Los ángulos directores de un vector determinan de manera única su dirección, pero no su longitud. Si también conocemos la longitud del vector **v**, las expresiones para los cosenos directores de **v** nos permiten expresar el vector como

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\alpha, |\mathbf{v}| \cos\beta, |\mathbf{v}| \cos\gamma \rangle$$

De esto obtenemos

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Dado que $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario obtenemos lo siguiente.

PROPIEDAD DE LOS COSENOS DIRECTORES

Los ángulos directores α, β y γ de un vector **v** diferente de cero en el espacio satisfacen la siguiente ecuación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Esta propiedad indica que, si conocemos dos de los cosenos directores de un vector, podemos encontrar el tercero hasta su signo.

EJEMPLO 8 ■ Encontrar los ángulos directores de un vector

Un ángulo θ es **agudo** si $0 \le \theta < \pi/2$ y es **obtuso** si $\pi/2 < \theta \le \pi$.

Un vector forma un ángulo $\alpha = \pi/3$ con el eje x positivo y un ángulo $\beta = 3\pi/4$ con el eje y positivo. Encuentre el ángulo γ que el vector forma con el eje z positivo, dado que γ es un ángulo obtuso.

SOLUCIÓN Por la propiedad de los ángulos directores tenemos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{3\pi}{4} + \cos^2\gamma = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{4}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

Puesto que requerimos que γ sea un ángulo obtuso concluimos que $\gamma = 2\pi/3$.

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

9.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Un vector en tres dimensiones se puede escribir de dos formas: en forma de coordenadas como $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y en términos de los vectores ________ **i**, **j** y **k** como
$\mathbf{v} =$ ______________. La magnitud del vector **v** es
$|\mathbf{v}| =$ ______________.
Entonces $\langle 4, -2, 4 \rangle = \square\,\mathbf{i} + \square\,\mathbf{j} + \square\,\mathbf{k}$ y
$7\mathbf{j} - 24\mathbf{k} = \langle \square, \square, \square \rangle$.

2. El ángulo θ entre los vectores **u** y **v** satisface
$\cos\theta = \dfrac{\square}{\square}$. Por tanto, si **u** y **v** son perpendiculares,
entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$ ________. Si $\mathbf{u} = \langle 4, 5, 6 \rangle$ y
$\mathbf{v} = \langle 3, 0, -2 \rangle$ entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$ ________, de modo que **u**
y **v** son ______________.

HABILIDADES

3–6 ■ Vectores en forma de componentes Encuentre el vector **v** con punto inicial P y punto terminal Q.

3. $P(1, -1, 0)$, $Q(0, -2, 5)$
4. $P(1, 2, -1)$, $Q(3, -1, 2)$
5. $P(6, -1, 0)$, $Q(0, -3, 0)$
6. $P(1, -1, -1)$, $Q(0, 0, -1)$

7–10 ■ Punto terminal de un vector Si el vector **v** tiene punto inicial P, ¿cuál es su punto terminal?

7. $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$, $P(2, 0, 1)$
8. $\mathbf{v} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, $P(0, 1, -1)$
9. $\mathbf{v} = \langle -2, 0, 2 \rangle$, $P(3, 0, -3)$
10. $\mathbf{v} = \langle 23, -5, 12 \rangle$, $P(-6, 4, 2)$

11–14 ■ Magnitud de un vector Encuentre la magnitud del vector dado.

11. $\langle -2, 1, 2 \rangle$
12. $\langle 5, 0, -12 \rangle$
13. $\langle 3, 5, -4 \rangle$
14. $\langle 1, -6, 2\sqrt{2} \rangle$

15–18 ■ Operaciones con vectores Encuentre los vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $3\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

15. $\mathbf{u} = \langle 2, -7, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 4, -1 \rangle$
16. $\mathbf{u} = \langle 0, 1, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 2, 0 \rangle$
17. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
18. $\mathbf{u} = \langle a, 2b, 3c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4a, b, -2c \rangle$

19–22 ■ Escribir vectores en términos de i, j y k Exprese el vector dado en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

19. $\langle 12, 0, 2 \rangle$
20. $\langle 0, -3, 5 \rangle$
21. $\langle 3, -3, 0 \rangle$
22. $\langle -a, \frac{1}{3}a, 4 \rangle$

23–24 ■ Operaciones con vectores Se dan dos vectores **u** y **v**. Exprese el vector $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ ***a)*** en forma de componentes $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y ***b)*** en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

23. $\mathbf{u} = \langle 0, -2, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 0 \rangle$
24. $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -5 \rangle$

25–28 ■ Productos punto Se dan dos vectores **u** y **v**. Encuentre su producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

25. $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}, -1, 10 \rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle -3, 0, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 4, \frac{1}{2} \rangle$
27. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$
28. $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \frac{5}{6}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{j}$

29–32 ■ ¿Vectores perpendiculares? Determine si los vectores dados son perpendiculares o no.

29. $\langle 4, -2, -4 \rangle$, $\langle 1, -2, 2 \rangle$
30. $4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
31. $\langle 0.3, 1.2, -0.9 \rangle$, $\langle 10, -5, 10 \rangle$
32. $\langle x, -2x, 3x \rangle$, $\langle 5, 7, 3 \rangle$

33–36 ■ Ángulo entre dos vectores Se dan dos vectores **u** y **v**. Encuentre el ángulo entre **u** y **v**, redondeado a décimas de grado.

33. $\mathbf{u} = \langle 2, -2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 2 \rangle$
34. $\mathbf{u} = \langle 4, 0, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 0 \rangle$
35. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
36. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

37–40 ■ Ángulos directores de un vector Encuentre los ángulos directores del vector dado, redondeado al grado más cercano.

37. $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
38. $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
39. $\langle 2, 3, -6 \rangle$
40. $\langle 2, -1, 2 \rangle$

41–44 ■ Ángulos directores de un vector Se dan dos ángulos directores de un vector. Encuentre el tercer ángulo director, dado que es obtuso o agudo como se indica. (En los ejercicios 43 y 44 redondee sus respuestas al grado más cercano.)

41. $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $\gamma = \dfrac{2\pi}{3}$; β es agudo
42. $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$; α es agudo
43. $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$; γ es obtuso
44. $\alpha = 75°$, $\gamma = 15°$

HABILIDADES Plus

45–46 ■ Ángulos directores imposibles Explique por qué es imposible que un vector tenga los ángulos directores dados.

45. $\alpha = 20°$, $\beta = 45°$
46. $\alpha = 150°$, $\gamma = 25°$

47. **Vectores paralelos** Dos vectores diferentes de cero son *paralelos* si apuntan en la misma dirección o en direcciones opuestas. Esto significa que, si dos vectores son paralelos, uno de ellos debe ser un múltiplo escalar del otro. Determine

si los vectores dados **u** y **v** son paralelos. Si lo son, exprese **v** como un múltiplo escalar de **u**.

a) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -6, 4, -8 \rangle$

b) $\mathbf{u} = \langle -9, -6, 12 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 12, 8, -16 \rangle$

c) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

48. Vectores unitarios Un *vector unitario* es un vector de magnitud 1. Al multiplicar un vector por un escalar cambia su magnitud, pero no su dirección.

a) Si un vector **v** tiene magnitud m, ¿qué múltiplo escalar de **v** tiene magnitud 1 (es decir, un vector unitario)?

b) Multiplique cada uno de los siguientes vectores por un escalar apropiado para cambiarlos en vectores unitarios:

$$\langle 1, -2, 2 \rangle \quad \langle -6, 8, -10 \rangle \quad \langle 6, 5, 9 \rangle$$

APLICACIONES

49. Resultante de cuatro fuerzas Un objeto situado en el origen en un sistema de coordenadas tridimensionales es mantenido en equilibrio por cuatro fuerzas. Una tiene magnitud de 7 lb y apunta en la dirección del eje x positivo, de modo que está representada por el vector 7**i**. La segunda tiene magnitud de 24 lb y apunta en la dirección del eje y positivo. La tercera tiene magnitud de 25 lb y apunta en la dirección del eje z *negativo*.

a) Use el hecho de que las cuatro fuerzas están en equilibrio (es decir, su suma es **0**) para encontrar la cuarta fuerza. Exprésela en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

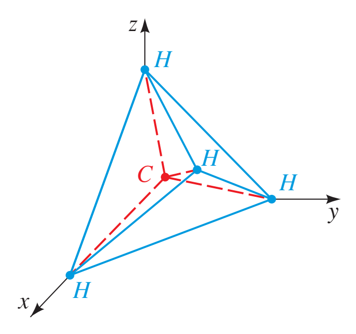
b) ¿Cuál es la magnitud de la cuarta fuerza?

50. Ángulo central de un tetraedro Un *tetraedro* es un sólido con cuatro caras triangulares, cuatro vértices y seis aristas como se muestra en la figura. En un tetraedro *regular* las aristas son todas de la misma longitud. Considere el tetraedro con vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(1, 1, 1)$.

a) Demuestre que el tetraedro es regular.

b) El centro del tetraedro es el punto $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (el "promedio" de los vértices). Encuentre el ángulo entre los vectores que unen el centro con cualesquier dos de los vértices (por ejemplo, $\angle AEB$). Este ángulo se denomina *ángulo central* del tetraedro.

[*Nota:* en una molécula de metano (CH_4) los cuatro átomos de hidrógeno forman los vértices de un tetraedro regular con el átomo de carbono en el centro. En este caso los químicos se refieren al ángulo central como el *ángulo de enlace*. En la figura se muestra el tetraedro del ejercicio con los vértices marcados H para hidrógeno y el centro marcado C para el carbono.]



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

51. DISCUSIÓN ■ DEMOSTRACIÓN: Ecuación vectorial de una esfera Sean $\mathbf{u} = \langle 2, 2, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -2, 2 \rangle$ y $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$.

a) Demuestre que la ecuación vectorial $(\mathbf{r} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}) = 0$ representa una esfera, expandiendo el producto punto y simplificando la ecuación algebraica resultante.

b) Encuentre el centro y radio de la esfera.

c) Interprete geométricamente el resultado del inciso *a*), usando el hecho de que el producto de dos vectores es 0 sólo si los vectores son perpendiculares. [*Sugerencia:* trace un diagrama que muestre los puntos extremos de los vectores **u**, **v** y **r**, tomando nota de que los puntos extremos de **u** y **v** son los puntos extremos de un diámetro y el punto extremo de **r** es un punto arbitrario en la esfera.]

d) Usando sus observaciones del inciso *a*) encuentre una ecuación vectorial para la esfera en la que los puntos $(0, 1, 3)$ y $(2, -1, 4)$ forman los puntos extremos de un diámetro. Simplifique la ecuación vectorial para obtener una ecuación algebraica para la esfera. ¿Cuáles son su centro y su radio?

9.5 EL PRODUCTO CRUZ

■ El producto cruz ■ Propiedades del producto cruz ■ Área de un paralelogramo ■ Volumen de un paralelepípedo

En esta sección definimos una operación con vectores que nos permite encontrar un vector que es perpendicular a dos vectores determinados.

■ El producto cruz

Dados dos vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, con frecuencia necesitamos encontrar un vector **w** perpendicular a **u** y **v**. Si escribimos $\mathbf{w} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, entonces

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$

$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$$

Se puede verificar que una de las soluciones de este sistema de ecuaciones es el vector $\mathbf{w} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$. Este vector se denomina *producto cruz* de **u** y **v** y está definido por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

EL PRODUCTO CRUZ

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son vectores tridimensionales, entonces el **producto cruz** de **u** y **v** es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

El *producto cruz* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de dos vectores **u** y **v**, a diferencia del producto punto, es un vector (no un escalar). Por esta razón también se le conoce como *producto vectorial.* Observe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está definido sólo cuando **u** y **v** son vectores en *tres dimensiones.*

En la sección 10.7 estudiaremos los determinantes y sus propiedades.

Para ayudarnos a recordar la definición del producto cruz usamos la notación de determinantes. Un **determinante de orden dos** está definido por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

Un **determinante de orden tres** se define en términos de determinantes de segundo orden como

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe que cada término del lado derecho de la ecuación anterior contiene un número a_i en el primer renglón del determinante, y a_i se multiplica por el determinante de segundo orden obtenido del lado izquierdo al eliminar el renglón y la columna donde aparece a_i. Observe también el signo menos del segundo término. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 - 4) - 2(6 - (-5)) + (-1)(12 - 0) = -38$$

Podemos escribir la definición del producto cruz usando determinantes como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Aunque el primer renglón del determinante anterior está formado por vectores, lo desarrollamos como si fuera un determinante ordinario de orden 3. La fórmula simbólica dada por el determinante anterior es probablemente la forma más fácil de recordar y calcular productos cruz.

EJEMPLO 1 ■ Encontrar un producto cruz

Si $\mathbf{u} = \langle 0, -1, 3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 0, -1 \rangle$, encuentre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula citada aquí para encontrar el producto cruz de **u** y **v**:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= (1-0)\mathbf{i} - (0-6)\mathbf{j} + (0-(-2))\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el vector deseado es $\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

■ Propiedades del producto cruz

Una de las propiedades más importantes del producto cruz es el siguiente teorema.

TEOREMA DEL PRODUCTO CRUZ

El vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal (perpendicular) a **u** y **v**.

Demostración Para demostrar que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal a **u**, calculamos el producto punto de ambos y demostramos que es 0.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} &= \begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}a_1 - \begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}a_2 + \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}a_3\\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)\\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_1a_2b_3 - a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1\\ &= 0\end{aligned}$$

Un cálculo similar muestra que $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = 0$. Por tanto, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal a **u** y a **v**. ■

EJEMPLO 2 ■ Encontrar un vector ortogonal

Si $\mathbf{u} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$, encuentre un vector unitario que sea ortogonal al plano que contiene los vectores **u** y **v**.

SOLUCIÓN Por el teorema del producto cruz el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal al plano que contiene los vectores **u** y **v**. (Vea la figura 1.) En el ejemplo 1 encontramos $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Para obtener un vector unitario ortogonal, multiplicamos $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ por el escalar $1/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$:

$$\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{41}}$$

Por tanto, el vector buscado es $\dfrac{1}{\sqrt{41}}(\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

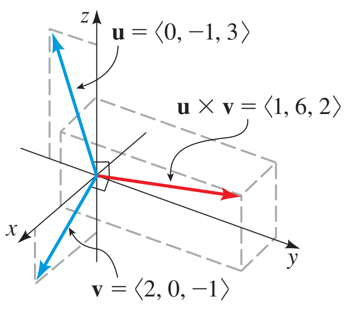


FIGURA 1 El vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es perpendicular a **u** y **v**.

WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) fue un matemático y físico irlandés. Fue criado por su tío (un lingüista) quien observó que Hamilton tenía una sorprendente habilidad para aprender idiomas. Cuando tenía cinco años de edad, podía leer latín, griego y hebreo; a los ocho agregó francés e italiano y, cuando tenía 10, dominaba el árabe y el sánscrito.

Hamilton también era un prodigio para calcular y compitió en concursos de aritmética mental. Ingresó al Trinity College de Dublín, Irlanda, donde estudió ciencias; ahí mismo fue nombrado profesor de astronomía cuando todavía no terminaba su carrera.

Hamilton hizo numerosas aportaciones a las matemáticas y la física, pero es más conocido por inventar los cuaterniones. Hamilton sabía que era posible multiplicar vectores en el plano al considerarlos números complejos. Buscaba una multiplicación similar para puntos en el espacio. Luego de pensar en este problema durante más de 20 años encontró la solución en un destello de ingenio, mientras caminaba cerca del puente de Brougham, en Dublín; vio que una cuarta dimensión era necesaria para hacer que funcionara la multiplicación. Grabó en el puente la fórmula para su cuaternión, donde todavía está. Tiempo después, el matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs extrajo el producto punto y el producto cruz de vectores a partir de las propiedades de multiplicación de cuaterniones. Estos se usan hoy en gráficas por computadora por su capacidad para describir fácilmente rotaciones especiales.

EJEMPLO 3 ■ Encontrar un vector perpendicular a un plano

Encuentre un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$ $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN Por el teorema del producto cruz, el vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y, por tanto, es perpendicular al plano que pasa por P, Q y R. Sabemos que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2-1)\mathbf{i} + (5-4)\mathbf{j} + (-1-6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (1-1)\mathbf{i} + (-1-4)\mathbf{j} + (1-6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Calculamos el producto cruz de estos vectores:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5-35)\mathbf{i} - (15-0)\mathbf{j} + (15-0)\mathbf{k} = -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

En consecuencia, el vector $\langle -40, -15, 15\rangle$ es perpendicular al plano dado. Observe que cualquier múltiplo escalar diferente de cero de este vector, por ejemplo $\langle -8, -3, 3\rangle$, es también perpendicular al plano.

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están representados por segmentos de recta dirigidos con el mismo punto inicial (como en la figura 2), entonces el teorema del producto cruz dice que el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ apunta en una dirección perpendicular al plano que pasa por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Resulta que la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dada por la regla de la *mano derecha:* si los dedos de la mano derecha se doblan en la dirección de una rotación (por un ángulo menor a 180°) de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, entonces su dedo pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (como se muestra en la figura 2). Se puede verificar que el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de la figura 1 satisface la regla de la mano derecha.

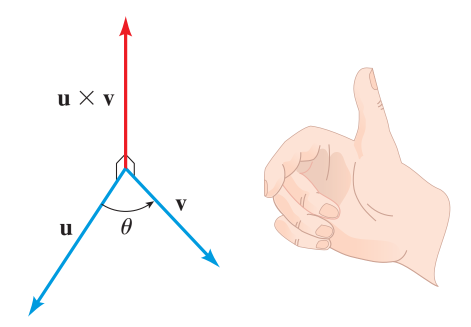


FIGURA 2 Regla de la mano derecha

Ahora que ya sabemos la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, lo que necesitamos es la longitud de $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

LONGITUD DEL PRODUCTO CRUZ

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$), entonces

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta$$

En particular, dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Demostración Aplicamos las definiciones del producto cruz y longitud de un vector. Se puede verificar el álgebra en el primer paso desarrollando los miembros de la derecha del primer y segundo renglón y luego comparando los resultados.

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 && \text{Definiciones}\\ &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 && \text{Verificar álgebra}\\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 && \text{Definiciones}\\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2-|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\cos^2\theta && \text{Propiedad del producto punto}\\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1-\cos^2\theta) && \text{Factorice}\\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\operatorname{sen}^2\theta && \text{Identidad pitagórica}\end{aligned}$$

El resultado se obtiene al tomar raíces cuadradas y observar que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}=\operatorname{sen}\theta$ ya que $\operatorname{sen}\theta\geq 0$ cuando $0\leq\theta\leq\pi$. ■

Hasta ahora hemos determinado por completo el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ geométricamente. El vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, y su orientación está determinada por la regla de la mano derecha. La longitud $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$.

Área de un paralelogramo

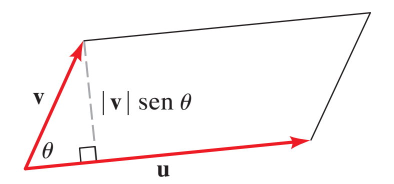


FIGURA 3 Paralelogramo determinado por **u** y **v**.

Podemos usar el producto cruz para encontrar el área de un paralelogramo. Si **u** y **v** están representados por segmentos de recta dirigidos con el mismo punto inicial, entonces ellos determinan un paralelogramo con base $|\mathbf{u}|$, altitud $|\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$ y área

$$A=|\mathbf{u}|(|\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta)=|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$$

(Vea la figura 3.) Entonces tenemos la siguiente forma de interpretar la magnitud de un producto cruz.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

La longitud del producto cruz $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es el área del paralelogramo determinada por **u** y **v**.

EJEMPLO 4 ■ Encontrar el área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo con vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 calculamos que $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\langle -40, -15, 15\rangle$. El área del paralelogramo con lados adyacentes PQ y PR es la longitud de este producto cruz:

$$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(-40)^2+(-15)^2+15^2}=5\sqrt{82}$$

El área A del triángulo PQR es la mitad del área de este paralelogramo, es decir, $\frac{5}{2}\sqrt{82}$.


Ahora intente realizar los ejercicios 21 y 25 ■

Volumen de un paralelepípedo

El producto $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ se llama el **triple producto escalar** de los vectores **u**, **v** y **w**. Es posible verificar que el producto escalar triple se puede escribir como el siguiente determinante:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

El significado geométrico del producto escalar triple se puede ver si se considera el paralelepípedo* determinado por los vectores **u**, **v** y **w** (vea la figura 4). El área de la base del paralelogramo es $A = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$. Si θ es el ángulo entre **u** y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, entonces la altura h del paralelepípedo es $h = |\mathbf{u}||\cos\theta|$. (Debemos usar $|\cos\theta|$ en lugar de $\cos\theta$ en caso de $\theta > \pi/2$.) Por tanto, el volumen del paralelepípedo es

$$V = Ah = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}||\mathbf{u}||\cos\theta| = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

La última igualdad se deduce del teorema del producto punto de la página 640.

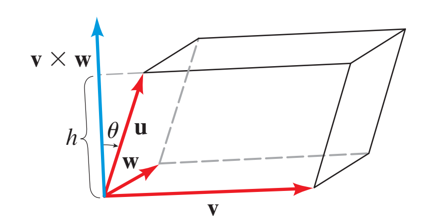


FIGURA 4 Paralelepípedo determinado por **u**, **v** y **w**

Hemos demostrado la siguiente fórmula.

VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **u**, **v** y **w** es la magnitud de su triple producto escalar:

$$V = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

En particular, si el volumen del paralelepípedo es 0, entonces los vectores **u**, **v** y **w** son **coplanares**, es decir, se encuentran en el mismo plano.

EJEMPLO 5 ■ Vectores coplanares

Use el producto escalar triple para demostrar que los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 4, -7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 4\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 0, -9, 18\rangle$ son coplanares.

SOLUCIÓN Calculamos el triple producto escalar:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0$$

Entonces el volumen del paralelepípedo es 0 y, en consecuencia, los vectores **u**, **v** y **w** son coplanares.

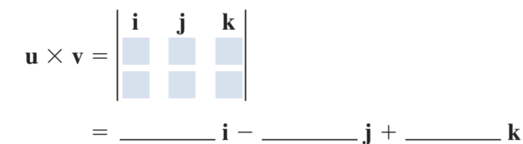
Ahora intente realizar el ejercicio 29

* La palabra *paralelepípedo* se deriva de raíces griegas que, juntas, significan "caras paralelas".

9.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El producto cruz de los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ es el vector



$= ________ \mathbf{i} - ________ \mathbf{j} + ________ \mathbf{k}$

Entonces el producto cruz de $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 3, 0 \rangle$ es $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$ ____________________.

2. El producto cruz de dos vectores **u** y **v** es ____________ a **u** y a **v**. Por tanto, si los dos vectores **u** y **v** están en un plano, el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ____________ al plano.

HABILIDADES

3–8 ■ Productos cruz Para los vectores dados **u** y **v**, encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

3. $\mathbf{u} = \langle 1, 0, -3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, 3, 0 \rangle$

4. $\mathbf{u} = \langle 0, -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1, -2 \rangle$

5. $\mathbf{u} = \langle 6, -2, 8 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -9, 3, -12 \rangle$

6. $\mathbf{u} = \langle -2, 3, 4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle \frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3} \rangle$

7. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$

8. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

9–12 ■ Vectores ortogonales Se dan dos vectores **u** y **v**. ***a)*** Encuentre un vector perpendicular a **u** y a **v**. ***b)*** Encuentre un vector unitario perpendicular a **u** y a **v**.

9. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, -1 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -1, 1, -1 \rangle$

10. $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, -2, -1 \rangle$

11. $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

12. $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

13–16 ■ Magnitud de un producto cruz Se dan las magnitudes de dos vectores **u** y **v** y el ángulo θ entre ellos. Encuentre la magnitud de su producto, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

13. $|\mathbf{u}| = 6, \quad |\mathbf{v}| = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60°$

14. $|\mathbf{u}| = 4, \quad |\mathbf{v}| = 5, \quad \theta = 30°$

15. $|\mathbf{u}| = 10, \quad |\mathbf{v}| = 10, \quad \theta = 90°$

16. $|\mathbf{u}| = 0.12, \quad |\mathbf{v}| = 1.25, \quad \theta = 75°$

17–20 ■ Vectores perpendiculares a un plano Encuentre un vector que sea perpendicular al plano que pasa por los tres puntos dados.

17. $P(0, 1, 0), Q(1, 2, -1), R(-2, 1, 0)$

18. $P(3, 4, 5), Q(1, 2, 3), R(4, 7, 6)$

19. $P(1, 1, -5), Q(2, 2, 0), R(0, 0, 0)$

20. $P(3, 0, 0), Q(0, 2, -5), R(-2, 0, 6)$

21–24 ■ Área de un paralelogramo Encuentre el área del paralelogramo determinado por los vectores dados.

21. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 1 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$

22. $\mathbf{u} = \langle 0, -3, 2 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 5, -6, 0 \rangle$

23. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \frac{3}{2}\mathbf{k}$

24. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

25–28 ■ Área de un triángulo Encuentre el área de $\triangle PQR$.

25. $P(1, 0, 1), Q(0, 1, 0), R(2, 3, 4)$

26. $P(2, 1, 0), Q(0, 0, -1), R(-4, 2, 0)$

27. $P(6, 0, 0), Q(0, -6, 0), R(0, 0, -6)$

28. $P(3, -2, 6), Q(-1, -4, -6), R(3, 4, 6)$

29–34 ■ Volumen de un paralelepípedo Se dan tres vectores **u**, **v** y **w**. ***a)*** Encuentre el triple producto escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. ***b)*** ¿Los vectores son coplanares? Si no es así, encuentre el volumen del paralelepípedo que determinan.

29. $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, 2, 1 \rangle, \quad \mathbf{w} = \langle 0, 8, 10 \rangle$

30. $\mathbf{u} = \langle 3, 0, -4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad \mathbf{w} = \langle 7, 4, 0 \rangle$

31. $\mathbf{u} = \langle 2, 3, -2 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -1, 4, 0 \rangle, \quad \mathbf{w} = \langle 3, -1, 3 \rangle$

32. $\mathbf{u} = \langle 1, -1, 0 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -1, 0, 1 \rangle, \quad \mathbf{w} = \langle 0, -1, 1 \rangle$

33. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

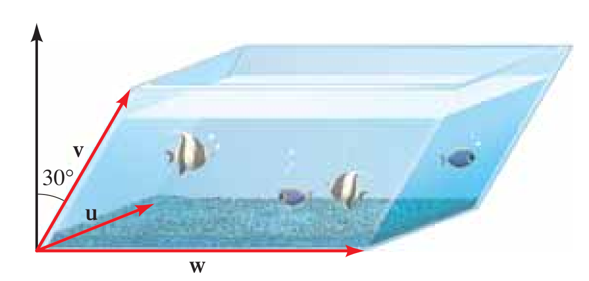
34. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 6\mathbf{i}$

APLICACIONES

35. Volumen de una pecera La pecera de un restaurante elegante tiene forma de paralelepípedo con base rectangular de 300 cm de largo y 120 de ancho. Las caras delantera y trasera son verticales, pero las caras izquierda y derecha están inclinadas 30° de la vertical y miden 120 por 150 cm. (Vea la figura.)

a) Sean **u**, **v** y **w** los tres vectores de la figura. Encuentre $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. [*Sugerencia:* recuerde que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$ y $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta$.]

b) ¿Cuál es la capacidad del tanque en litros? [*Nota:* 1 L = 1 000 cm^3.]



36. Tetraedro de Rubik El cubo de Rubik, un furor de acertijos de la década de 1980 que sigue popular en nuestros días, inspiró muchos rompecabezas parecidos. El que se muestra en la figura se llama tetraedro de Rubik; tiene forma de tetraedro regular con cada arista de $\sqrt{2}$ pulgadas de largo. El volumen de un tetraedro regular es un sexto del volumen del paralelepípedo, determinado por tres aristas cualesquiera que se encuentran en una esquina.

a) Use el triple producto para encontrar el volumen del tetraedro de Rubik. [*Sugerencia:* vea el ejercicio 50 de la sección 9.4, que da las esquinas de un tetraedro que tiene la misma forma y el mismo tamaño que el tetraedro de Rubik.]

b) Construya con plastilina seis tetraedros regulares idénticos. Experimente a ver cómo se pueden unir para crear un paralelepípedo que esté determinado por tres aristas de uno de los tetraedros (confirmando así el enunciado líneas arriba acerca del volumen de un tetraedro regular).



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

37. DISCUSIÓN ■ DEMOSTRACIÓN: Orden de operaciones en el triple producto Dados tres vectores **u**, **v** y **w**, su triple producto escalar se puede realizar en seis órdenes diferentes:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}),\quad \mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v}),\quad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w}),$$
$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}),\quad \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}),\quad \mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$$

a) Calcule cada uno de estos seis triples productos para los vectores:

$$\mathbf{u}=\langle 0,1,1\rangle \qquad \mathbf{v}=\langle 1,0,1\rangle \qquad \mathbf{w}=\langle 1,1,0\rangle$$

b) Con base en sus observaciones del inciso *a*), haga una conjetura acerca de las relaciones entre estos seis triples productos.

c) Demuestre la conjetura que hizo en el inciso *b*).

9.6 ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS

■ Ecuaciones de rectas ■ Ecuaciones de planos

En esta sección encontramos ecuaciones para rectas y planos en un espacio tridimensional de coordenadas. Usamos vectores para ayudarnos a encontrar estas ecuaciones.

■ Ecuaciones de rectas

El **vector de posición** de un punto (a_1, a_2, a_3) es el vector $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$; es decir, es el vector del origen al punto.

Una recta L en el espacio tridimensional está determinada cuando conocemos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre L y la dirección de L. En tres dimensiones la dirección de una recta está descrita por un vector **v** paralelo a L. Si $\mathbf{r}_0$ es el vector de posición de P_0 (esto es, el vector $\overrightarrow{OP_0}$), entonces para todos los números reales t los puntos terminales P de los vectores de posición $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ trazan una recta paralela a **v** y que pasa por P_0 (vea la figura 1). Cada uno de los valores del parámetro t da un punto P sobre L, por lo que la recta L está dada por el vector de posición **r**, donde

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Esta es la **ecuación vectorial de una recta**.

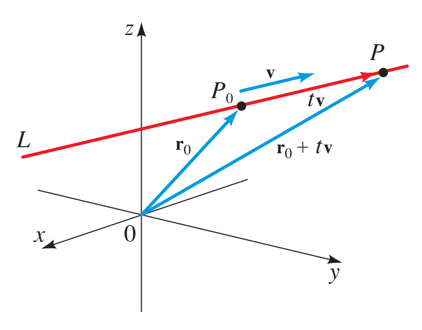


FIGURA 1

Escribamos el vector **v** en forma de componentes $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ y sea que $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$. Entonces la ecuación vectorial de la recta se convierte en

$$\begin{aligned}\langle x, y, z\rangle &= \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle \\ &= \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc\rangle\end{aligned}$$

Dado que dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales, tenemos el siguiente resultado.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS PARA UNA RECTA

Una recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ está descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

donde t es cualquier número real.

EJEMPLO 1 ■ Ecuaciones de una recta

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(5, -2, 3)$ y que es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle 3, -4, 2 \rangle$.

SOLUCIÓN Usamos esta fórmula para encontrar las ecuaciones paramétricas:

$$x = 5 + 3t$$
$$y = -2 - 4t$$
$$z = 3 + 2t$$

donde t es cualquier número real. (Vea la figura 2.)

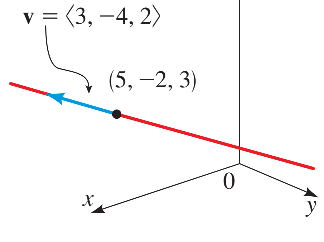


FIGURA 2 Recta que pasa por $(5, -2, 3)$ con dirección $\mathbf{v} = \langle 3, -4, 2 \rangle$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Ecuaciones de una recta

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $(-1, 2, 6)$ y $(2, -3, -7)$.

SOLUCIÓN Primero encontramos un vector determinado por los dos puntos:

$$\mathbf{v} = \langle 2 - (-1), -3 - 2, -7 - 6 \rangle = \langle 3, -5, -13 \rangle$$

Ahora usamos $\mathbf{v}$ y el punto $(-1, 2, 6)$ para encontrar las ecuaciones paramétricas:

$$x = -1 + 3t$$
$$y = 2 - 5t$$
$$z = 6 - 13t$$

donde t es cualquier número real. En la figura 3 se muestra una gráfica de la recta.

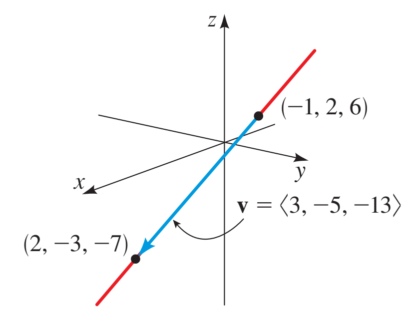


FIGURA 3 Recta que pasa por $(-1, 2, 6)$ y $(2, -3, -7)$

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

En el ejemplo 2 usamos el punto $(-1, 2, 6)$ para obtener las ecuaciones paramétricas de la recta. En su lugar podríamos usar el punto $(2, -3, -7)$. Las ecuaciones paramétricas resultantes se verán de modo diferente pero todavía describen la misma recta (vea el ejercicio 37).

Ecuaciones de planos

Aun cuando una recta en el espacio está determinada por un punto y una dirección, la "dirección" de un plano no puede ser descrita por un vector en el plano. De hecho, vectores diferentes en un plano pueden tener direcciones diferentes. Pero un vector perpendicular a un plano *sí* especifica por completo la dirección del plano. Entonces un plano en el espacio está determinado por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano y un vector $\mathbf{n}$ que es ortogonal al plano. Este vector ortogonal $\mathbf{n}$ se llama **vector normal**. Para

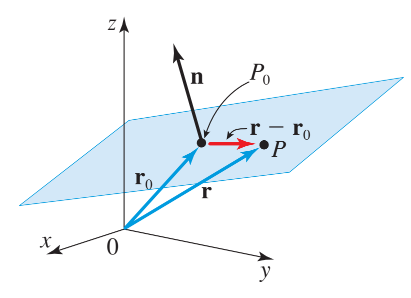


FIGURA 4

determinar si un punto $P(x, y, z)$ está en el plano, comprobamos si el vector $\overrightarrow{P_0P}$ con punto inicial P_0 y punto terminal P es ortogonal al vector normal. Sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de P_0 y P, respectivamente. Entonces el vector $\overrightarrow{P_0P}$ está representado por $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ (vea la figura 4). Por tanto, el plano está descrito por las puntas de los vectores $\mathbf{r}$ que satisfacen

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$$

Esta es la **ecuación vectorial del plano**.

Escribamos el vector normal $\mathbf{n}$ en forma de componentes $\mathbf{n}=\langle a, b, c\rangle$ y sean $\mathbf{r}_0=\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $\mathbf{r}=\langle x, y, z\rangle$. Entonces la ecuación del plano se convierte en

$$\langle a, b, c\rangle\cdot\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle=0$$

Si realizamos el producto punto llegamos a la siguiente ecuación del plano con las variables x, y y z.

ECUACIÓN DE UN PLANO

El plano que contiene el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene el vector normal $\mathbf{n}=\langle a, b, c\rangle$ está descrito por la ecuación

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

EJEMPLO 3 ■ Encontrar una ecuación para un plano

Un plano tiene vector normal $\mathbf{n}=\langle 4, -6, 3\rangle$ y pasa por el punto $P(3, -1, -2)$

a) Encuentre una ecuación del plano.

b) Encuentre los puntos de intersección y trace una gráfica del plano.

SOLUCIÓN

a) Por la fórmula anterior para la ecuación de un plano tenemos

$$4(x-3)-6(y-(-1))+3(z-(-2))=0 \qquad \text{Fórmula}$$
$$4x-12-6y-6+3z+6=0 \qquad \text{Desarrolle}$$
$$4x-6y+3z=12 \qquad \text{Simplifique}$$

Por tanto, la ecuación del plano es $4x-6y+3z=12$.

b) Para encontrar el punto de intersección x hacemos que $y=0$ y $z=0$ en la ecuación del plano y despejamos x. Del mismo modo encontramos los puntos de intersección y y z.

punto de intersección x: haciendo que $y=0$, $z=0$ obtenemos $x=3$.

punto de intersección y: haciendo que $x=0$, $z=0$ obtenemos $y=-2$.

punto de intersección z: haciendo que $x=0$, $y=0$ obtenemos $z=4$.

Entonces la gráfica del plano cruza los ejes de coordenadas en los puntos $(3, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ y $(0, 0, 4)$. Esto hace posible que tracemos la parte del plano que se muestra en la figura 5.

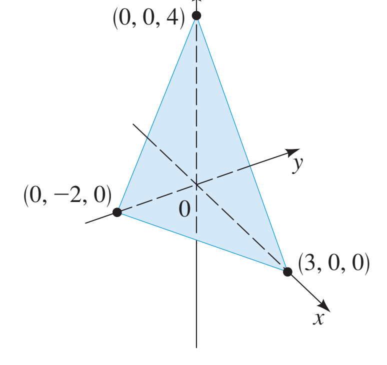


FIGURA 5 El plano $4x-6y+3z=32$

Observe que en la figura 5 hemos girado a los ejes para obtener una mejor vista.

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

EJEMPLO 4 ■ Encontrar una ecuación para el plano

Encuentre una ecuación para el plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

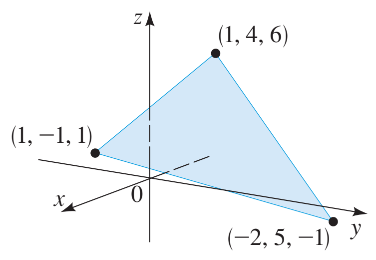


FIGURA 6 Un plano que pasa por tres puntos

SOLUCIÓN El vector $\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y es, por tanto, perpendicular al plano que pasa por P, Q y R. En el ejemplo 3 de la sección 9.5 encontramos $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$. Usando la fórmula para una ecuación de un plano, tenemos

$$-40(x - 1) - 15(y - 4) + 15(z - 6) = 0 \qquad \text{Fórmula}$$
$$-40x + 40 - 15y + 60 + 15z - 90 = 0 \qquad \text{Desarrolle}$$
$$-40x - 15y + 15z = -10 \qquad \text{Simplifique}$$
$$8x + 3y - 3z = 2 \qquad \text{Divida entre } -5$$

Entonces la ecuación del plano es $8x + 3y - 3z = 2$. Una gráfica de este plano se ilustra en la figura 6.

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

En el ejemplo 4 usamos el punto P para obtener la ecuación del plano. El lector puede comprobar que usando Q o R se obtiene la misma ecuación.

9.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una recta en el espacio está descrita algebraicamente usando ecuaciones ________. La recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ está descrita por las ecuaciones $x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________.

2. El plano que contiene el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene el vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ está descrito algebraicamente por la ecuación ________.

HABILIDADES

3–8 ■ Ecuaciones de rectas Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto P y es paralela al vector $\mathbf{v}$.

3. $P(1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = \langle 3, 2, -3 \rangle$
4. $P(0, -5, 3)$, $\mathbf{v} = \langle 2, 0, -4 \rangle$
5. $P(3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 0, -4, 2 \rangle$
6. $P(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, 5 \rangle$
7. $P(1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$
8. $P(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

9–14 ■ Ecuaciones de rectas Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos P y Q.

9. $P(1, -3, 2)$, $Q(2, 1, -1)$
10. $P(2, -1, -2)$, $Q(0, 1, -3)$
11. $P(1, 1, 0)$, $Q(0, 2, 2)$
12. $P(3, 3, 3)$, $Q(7, 0, 0)$
13. $P(3, 7, -5)$, $Q(7, 3, -5)$
14. $P(12, 16, 18)$, $Q(12, -6, 0)$

15–20 ■ Ecuaciones de planos Un plano tiene vector normal $\mathbf{n}$ y pasa por el punto P. ***a***) Encuentre la ecuación para el plano. ***b***) Encuentre los puntos de intersección y trace una gráfica del plano.

15. $\mathbf{n} = \langle 1, 1, -1 \rangle$, $P(0, 2, -3)$
16. $\mathbf{n} = \langle 3, 2, 0 \rangle$, $P(1, 2, 7)$
17. $\mathbf{n} = \langle 3, 0, -\frac{1}{2} \rangle$, $P(2, 4, 8)$
18. $\mathbf{n} = \langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1 \rangle$, $P(6, 0, 3)$
19. $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $P(0, 2, -3)$
20. $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $P(1, 0, -9)$

21–26 ■ Ecuaciones de planos Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos P, Q y R.

21. $P(6, -2, 1)$, $Q(5, -3, -1)$, $R(7, 0, 0)$
22. $P(3, 4, 5)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(4, 7, 6)$
23. $P(3, \frac{1}{3}, -5)$, $Q(4, \frac{2}{3}, -3)$, $R(2, 0, 1)$
24. $P(\frac{3}{2}, 4, -2)$, $Q(-\frac{1}{2}, 2, 0)$, $R(-\frac{1}{2}, 0, 2)$
25. $P(6, 1, 1)$, $Q(3, 2, 0)$, $R(0, 0, 0)$
26. $P(2, 0, 0)$, $Q(0, 2, -2)$, $R(0, 0, 4)$

HABILIDADES Plus

27–30 ■ Ecuaciones de rectas Se da la descripción de una recta. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta.

27. La recta cruza el eje z donde $z = 4$ y cruza el plano xy donde $x = 2$ y $y = 5$.
28. La recta cruza el eje x donde $x = -2$ y cruza el eje z donde $z = 10$.
29. La recta perpendicular al plano xz que contiene el punto $(2, -1, 5)$.
30. La recta paralela al eje y que cruza el plano xz-donde $x = -3$ y $z = 2$.

31–32 ■ Ecuaciones de planos Se da una descripción del plano. Encuentre una ecuación para el plano.

31. El plano que cruza el eje x donde $x = 1$, el eje y donde $y = 3$, y el eje z donde $z = 4$.

32. El plano que es paralelo al plano $x - 2y + 4z = 6$ y contiene al origen.

33–34 ■ Más ecuaciones de planos Se da una descripción del plano. Encuentre una ecuación para el plano.

33. El plano que contiene todos los puntos que equidistan de los puntos $P(-3, 2, 5)$ y $Q(1, -1, 4)$.

34. El plano que contiene la recta $x = 1 - t, y = 2 + t, z = -3t$ y el punto $P(2, 0, -6)$. [*Sugerencia:* un vector de cualquier punto de la recta a P estará en el plano.]

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

35. DESCUBRIMIENTO: Intersección de una recta y un plano Una recta tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 3t \qquad z = 5 - t$$

y un plano tiene ecuación $5x - 2y - 2z = 1$.

a) ¿Para qué valor de t el punto correspondiente en la recta cruza el plano?

b) ¿En qué punto se cruzan la recta y el plano?

36. DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO: Rectas y planos Una recta es paralela al vector **v**, y un plano tiene vector normal **n**.

a) Si la recta es perpendicular al plano, ¿cuál es la relación entre **v** y **n** (paralelos o perpendiculares)?

b) Si la recta es paralela al plano (esto es, la recta y el plano no se intersecan), ¿cuál es la relación entre **v** y **n** (paralelos o perpendiculares)?

c) Se dan ecuaciones paramétricas para dos rectas. ¿Cuál recta es paralela al plano $x - y + 4z = 6$? ¿Cuál recta es perpendicular a este plano?

Recta 1: $x = 2t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 + 8t$

Recta 2: $x = -2t, \quad y = 5 + 2t, \quad z = 3 + t$

37. DISCUSIÓN: Misma recta: ecuaciones paramétricas diferentes Toda recta se puede describir por un número infinito de conjuntos de ecuaciones paramétricas, puesto que *cualquier* punto sobre la recta y *cualquier* vector paralelo a la recta se pueden usar para construir las ecuaciones. Pero, ¿cómo podemos saber si los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas representan la misma recta? Considere los siguientes dos conjuntos de ecuaciones paramétricas:

Recta 1: $x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = -6 + 5t$

Recta 2: $x = -1 + 2t, \quad y = 6 - 6t, \quad z = 4 - 10t$

a) Encuentre dos puntos que se encuentren sobre la recta 1 haciendo que $t = 0$ y $t = 1$ en sus ecuaciones paramétricas. Luego demuestre que estos puntos también se encuentran sobre la recta 2 encontrando dos valores del parámetro que proporcionen estos puntos cuando sean sustituidos en las ecuaciones paramétricas por la recta 2.

b) Demuestre que las siguientes dos rectas no son las mismas, encontrando un punto sobre la recta 3 y luego demostrando que no se encuentra sobre la recta 4.

Recta 3: $x = 4t, \quad y = 3 - 6t, \quad z = -5 + 2t$

Recta 4: $x = 8 - 2t, \quad y = -9 + 3t, \quad z = 6 - t$

CAPÍTULO 9 ■ REPASO

■ PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Vectores en dos dimensiones (p. 631)

Un **vector** es una cantidad con magnitud y dirección. Un vector en el plano de coordenadas se expresa en términos de dos coordenadas o componentes

$$\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle$$

Si un vector **v** tiene su punto inicial en $P(x_1, y_1)$ y su punto terminal en $Q(x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

Sea $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2 \rangle$ y $c \in \mathbb{R}$. Las operaciones sobre vectores se definen como sigue.

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ Adición

$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$ Sustracción

$c\mathbf{u} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$ Multiplicación por un escalar

Los vectores **i** y **j** se definen por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Cualquier vector $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se puede expresar como

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

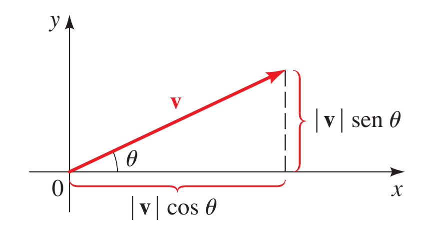
Sea $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle$. La **magnitud** (o **longitud**) de **v** es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La **dirección** de **v** es el más pequeño ángulo positivo θ en posición estándar formado por el eje positivo x y **v** (vea la figura que se muestra a continuación).

Si $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces los componentes de **v** satisfacen

$$a_1 = |\mathbf{v}| \cos\theta \qquad a_2 = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$$



Producto punto de vectores (p. 640)

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces su **producto punto** es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Si θ es el ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

El ángulo θ entre **u** y **v** satisface

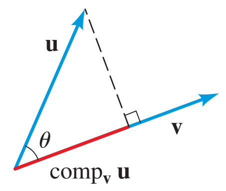
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

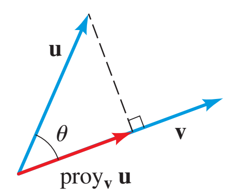
Los vectores **u** y **v** son perpendiculares si y sólo si

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

El **componente de u a lo largo de v** (un escalar) y la **proyección** de **u** sobre **v** (un vector) se da por

$$\text{comp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad \text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \mathbf{v}$$



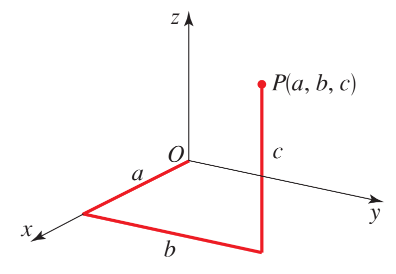


El **trabajo** W hecho por una fuerza **F** moviéndose a lo largo de un vector **D** es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

Geometría de coordenadas tridimensionales (p. 648)

Un sistema de coordenadas en el espacio consiste en un punto fijo O (el **origen**) y tres rectas dirigidas desde O que son perpendiculares entre sí, llamadas los **ejes coordenados**, y se marcan como el eje x, eje y y eje z. Las coordenadas de un punto $P(a, b, c)$ determinan su posición respecto a los ejes coordenados.



La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ está dada por la **fórmula de distancia**:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

La **ecuación de una esfera** con centro $C(h, k, l)$ y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

Vectores en tres dimensiones (p. 653)

Un **vector en el espacio** es un segmento de recta con una dirección. Trazamos un vector como una flecha para indicar la dirección. Un **vector en un sistema de coordenadas en tres dimensiones** se expresa en términos de tres coordenadas o componentes

$$\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Si un vector **v** tiene su punto inicial en $P(x_1, y_1, z_1)$ y su punto terminal en $Q(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

Sea $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $c \in \mathbb{R}$. Las operaciones de suma de vectores, resta de vectores y de multiplicación escalar se definen como sigue:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$
$$c\mathbf{u} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

Los vectores **i**, **j** y **k** se definen por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Cualquier vector $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ se pueden expresar como

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

Sea $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. La **magnitud** (o **longitud**) de **v** es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Los **ángulos de dirección** de un vector distinto de cero $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ son los ángulos α, β y γ en el intervalo $[0, \pi]$ que forma el vector **v** con x, y y z positivos. Están dados por

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{v}|}$$

Los ángulos de dirección satisfacen la ecuación

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

El producto punto de vectores en el espacio (p. 655)

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son vectores en el espacio, entonces su **producto punto** es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Si θ es el ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

El ángulo θ entre **u** y **v** satisface

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Los vectores **u** y **v** son perpendiculares si y sólo si

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

El producto cruz de vectores en el espacio (p. 659)

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son vectores en el espacio, entonces su **producto cruz** es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Podemos calcular el producto cruz usando determinantes.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal (o perpendicular) tanto a **u** como a **v**.

El producto cruz satisface

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta$$

Los vectores **u** y **v** son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

El **área del paralelogramo** determinado por los vectores **u** y **v** es

$$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$$

EL **volumen del paralelepípedo** determinado por los vectores **u**, **v** y **w** es

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

Ecuaciones de rectas y planos (p. 666)

Una **recta** que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ está descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

donde t es cualquier número real.

Un **plano** que contiene el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene el vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ se describe con la ecuación

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a)*** ¿Qué es un vector en el plano? ¿Cómo se representa un vector en el plano coordenado?

b) Encuentre el vector con el punto inicial $(2, 3)$ y el punto terminal $(4, 10)$.

c) Sea $\mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$. ¿Si el punto inicial de **v** se encuentra en $P(1, 1)$, dónde está su punto terminal? Trace diferentes representaciones de **v**.

d) ¿Cómo se define la magnitud de $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2\rangle$? Encuentre la magnitud de $\mathbf{w} = \langle 3, 4\rangle$.

e) ¿Cuáles son los vectores **i** y **j**? Exprese el vector $\mathbf{v} = \langle 5, 9\rangle$ en términos de **i** y **j**.

f) Sea $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2\rangle$ un vector en el plano de coordenadas. ¿Qué se entiende por la dirección θ de **v**? ¿Cuáles son las coordenadas de **v** en términos de su magnitud y dirección? Trace una figura para ilustrar su respuesta.

g) Suponga que **v** tiene magnitud $|\mathbf{v}| = 5$ y dirección $\theta = \pi/6$. Exprese **v** en términos de sus coordenadas.

2. ***a)*** Defina adición y la multiplicación escalar de vectores.

b) Si $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 5, 9\rangle$, encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $4\mathbf{u}$.

3. ***a)*** Defina el producto punto de los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2\rangle$, y escriba la fórmula para el ángulo θ entre **u** y **v**.

b) Si $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 4\rangle$, encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y el ángulo entre **u** y **v**.

4. ***a)*** Describa el sistema de coordenadas tridimensional. ¿Cuáles son los planos de coordenadas?

b) ¿Cuál es la distancia del punto $(3, -2, 5)$ a cada uno de los planos coordenados?

c) Exprese la fórmula de la distancia entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$.

d) Encuentre la distancia entre los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(3, -1, 4)$.

e) Escriba la ecuación de una esfera con centro $C(h, k, l)$ y radio r.

f) Encuentre una ecuación para la esfera de radio 5, centrada en el punto $(1, 2, -3)$.

5. ***a)*** ¿Qué es un vector en el espacio? ¿Cómo representamos un vector en un sistema de coordenadas tridimensional?

b) Encuentre el vector con punto inicial $(2, 3, -1)$ y punto terminal $(4, 10, 5)$.

c) ¿Cómo se define la magnitud de $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$? Encuentre la magnitud de $\mathbf{w} = \langle 3, 4, 1\rangle$.

d) ¿Cuáles son los vectores **i**, **j** y **k**? Exprese el vector $\mathbf{v} = (5, 9, -1)$ en términos de **i**, **j** y **k**.

6. ***a)*** Defina la adición y la multiplicación escalar de vectores.

b) Si $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$ y $\mathbf{v} = \langle 5, 9, 2\rangle$, encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $4\mathbf{u}$.

7. ***a)*** Defina el producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ e indique la fórmula para el ángulo θ entre **u** y **v**.

b) Si $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 4, 5\rangle$, encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

8. ***a)*** Defina el producto cruz de vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$.

b) *¿Verdadero o falso?* El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a **u** y a **v**.

c) Sean **u** y **v** vectores en el espacio. Exprese la fórmula que relaciona la magnitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y el ángulo θ entre **u** y **v**.

d) ¿Cómo podemos usar el producto cruzado para determinar si dos vectores son paralelos?

9. ***a)*** ¿Cuáles son las dos propiedades que determinan una recta en el espacio? Dé las ecuaciones paramétricas para una recta en el espacio.

b) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(-2, 4, 1)$ y que es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle 7, 5, 3\rangle$.

10. ***a)*** ¿Cuáles son las dos propiedades que determinan un plano en el espacio? Exprese la ecuación de un plano.

b) Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(6, -4, 3)$ y con vector normal $\mathbf{n} = \langle 5, -3, 2\rangle$.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

■ EJERCICIOS

Los ejercicios 1-24 tratan de vectores en dos dimensiones.

1–4 ■ Operaciones con vectores Encuentre $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$ y $3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 1\rangle$ **2.** $\mathbf{u} = \langle 5, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 0\rangle$

3. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **4.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

5–6 ■ Forma de componentes de un vector con vectores Se da una descripción. Exprese el vector en forma de componentes.

5. Encuentre el vector con punto inicial $P(0, 3)$ y punto terminal $Q(3, -1)$.

6. Si el vector $5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ está colocado en el plano con su punto inicial en $P(5, 6)$, encuentre su punto terminal.

7–8 ■ Magnitud y dirección de vectores Encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

7. $\mathbf{u} = \langle -2, 2\sqrt{3}\rangle$ **8.** $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

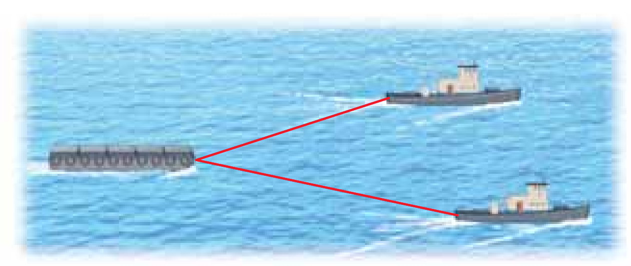
9–10 ■ Forma de componentes de un vector Se da la magnitud $|\mathbf{u}|$ y la dirección θ de un vector $\mathbf{u}$. Exprese $\mathbf{u}$ en forma de componente.

9. $|\mathbf{u}| = 20$, $\theta = 60°$ **10.** $|\mathbf{u}| = 13.5$, $\theta = 125°$

11. Fuerza resultante Dos remolcadores tiran de una barcaza como se muestra en la figura. Uno de ellos tira con una fuerza de 2.0×10^4 lb en la dirección N 50° E y el otro jala con una fuerza de 3.4×10^4 lb en la dirección S 75° E.

a) Encuentre la fuerza resultante en la barcaza como un vector.

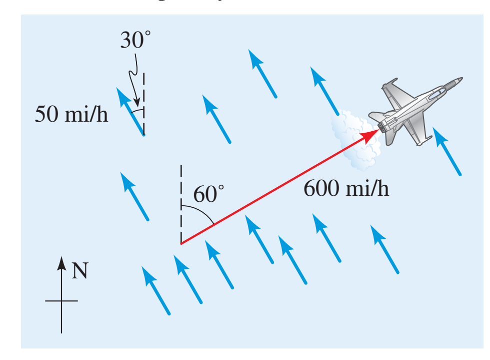
b) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



12. Velocidad verdadera de un avión Un avión se dirige al N 60° E con rapidez de 600 mi/h respecto al aire. Un viento empieza a soplar en la dirección N 30° O a 50 mi/h. (Vea la figura.)

a) Encuentre la velocidad del avión como vector.

b) Encuentre la rapidez y la dirección verdaderas del avión.



13–16 ■ Productos punto Encuentre los vectores $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

13. $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, -8\rangle$

14. $\mathbf{u} = \langle 5, 12\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 10, -4\rangle$

15. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

16. $\mathbf{u} = 10\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

17–20 ■ Vectores ortogonales ¿Son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ ortogonales? Si no, encuentre el ángulo entre ellos.

17. $\mathbf{u} = \langle -4, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$

18. $\mathbf{u} = \langle 5, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 6\rangle$

19. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

20. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

21–24 ■ Proyecciones escalares y vectoriales Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ***a***) Encuentre el componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$. ***b***) Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. ***c***) Descomponga $\mathbf{u}$ en los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es perpendicular a $\mathbf{v}$.

21. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 6, -1\rangle$

22. $\mathbf{u} = \langle -8, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 20, 20\rangle$

23. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$

24. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 10\mathbf{j}$

Los ejercicios 25-54 refieren a geometría de coordenadas tridimensionales.

25–26 ■ Distancia entre puntos Coloque los puntos dados y encuentre la distancia entre ellos.

25. $P(1, 0, 2)$, $Q(3, -2, 3)$ **26.** $P(0, 2, 4)$, $Q(1, 3, 0)$

27–28 ■ Encontrar la ecuación de una esfera Encuentre la ecuación de la esfera con el radio r y centro C dados.

27. $r = 6$, $C(0, 0, 0)$ **28.** $r = 2$, $C(1, -2, 4)$

29–30 ■ Ecuaciones de esferas Demuestre que la ecuación representa una esfera y encuentre su centro y su radio.

29. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 2$

30. $x^2 + y^2 + z^2 = 4y + 4z$

31–32 ■ Operaciones con vectores Encuentre $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ y $\frac{3}{4}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

31. $\mathbf{u} = \langle 4, -2, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3, -1\rangle$

32. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

33–36 ■ Ángulo entre vectores Se dan dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ***a***) Encuentre el producto punto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. ***b***) ¿$\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares? Si no lo son encuentre el ángulo entre ellos.

33. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 1, -2\rangle$

34. $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -\frac{1}{2}, -1\rangle$

35. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

36. $\mathbf{u} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

37–40 ■ Producto cruz y vectores ortogonales Se dan dos vectores **u** y **v**. ***a)*** Encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. ***b)*** Encuentre un vector unitario **u** que sea perpendicular a **u** y a **v**.

37. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 5, 0, -2 \rangle$

38. $\mathbf{u} = \langle 2, 3, 0 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 0, 4, -1 \rangle$

39. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

40. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo con vértices $P(2, 1, 1)$, $Q(0, 0, 3)$ y $R(-2, 4, 0)$.

42. Área de un paralelogramo Encuentre el área del paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{u} = \langle 4, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 2 \rangle$.

43. Volumen de un paralelepípedo Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

44. Volumen de un paralelepípedo Un paralelepípedo tiene un vértice en el origen; las tres aristas que tienen el origen como un punto extremo se prolongan a los puntos $P(0, 2, 2)$, $Q(3, 1, -1)$ y $R(1, 4, 1)$. Encuentre el volumen del paralelepípedo.

45–46 ■ Ecuaciones de rectas Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por P y es paralela a **v**.

45. $P(2, 0, -6), \quad \mathbf{v} = \langle 3, 1, 0 \rangle$

46. $P(5, 2, 8), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

47–48 ■ Ecuaciones de rectas Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos P y Q.

47. $P(6, -2, -3), \quad Q(4, 1, -2)$

48. $P(1, 0, 0), \quad Q(3, -4, 2)$

49–50 ■ Ecuaciones de planos Encuentre una ecuación para el plano con vector normal **n** y que pasa por el punto P.

49. $\mathbf{n} = \langle 2, 3, -5 \rangle, \quad P(2, 1, 1)$

50. $\mathbf{n} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad P(-2, 5, 2)$

51–52 ■ Ecuaciones de planos Encuentre una ecuación del plano que pase por los puntos P, Q y R.

51. $P(1, 1, 1), \quad Q(3, -4, 2), \quad R(6, -1, 0)$

52. $P(4, 0, 0), \quad Q(0, -3, 0), \quad R(0, 0, -5)$

53. Ecuación de una recta Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que cruza el eje x donde $x = 2$ y el eje z donde $z = -4$.

54. Ecuación de un plano Encuentre la ecuación del plano que contenga la recta $x = 2 + 2t$, $y = 4t$, $z = -6$ y el punto $P(5, 3, 0)$.

EXAMEN

1. Sea $\mathbf{u}$ el vector con punto inicial $P(3, -1)$ y punto terminal $Q(-3, 9)$.

a) Trace la gráfica de $\mathbf{u}$ en el plano de coordenadas.

b) Exprese $\mathbf{u}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

c) Encuentre la magnitud de $\mathbf{u}$.

2. Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$, y que $\mathbf{v} = \langle -6, 2 \rangle$.

a) Encuentre $\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

b) Encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

c) Encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

d) ¿Son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ perpendiculares?

3. Sea $\mathbf{u} = \langle -4\sqrt{3}, 4 \rangle$.

a) Trace la gráfica de $\mathbf{u}$ en el plano de coordenadas, con punto inicial $(0, 0)$.

b) Encuentre la magnitud y la dirección de $\mathbf{u}$.

4. Las aguas de un río corren al este a 8 mi/h. Un hombre navega por el río en su bote en la dirección N 30° E. La rapidez del bote respecto al agua es 12 mi/h.

a) Exprese la velocidad verdadera del bote como vector.

b) Encuentre la rapidez y la dirección verdaderas del bote.

5. Sean $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

a) Encuentre el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

b) Encuentre el componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$.

c) Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

6. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ al mover un objeto del punto $(2, 2)$ al punto $(7, -13)$.

7. Sea $P(4, 3, -1)$ y $Q(6, -1, 3)$ dos puntos en el espacio tridimensional.

a) Encuentre la distancia entre P y Q.

b) Encuentre una ecuación para la esfera cuyo centro es P y para la que el segmento $\overrightarrow{PQ}$ es un radio de la esfera.

c) El vector $\mathbf{u}$ tiene punto inicial P y punto terminal Q. Exprese $\mathbf{u}$ tanto en forma de componentes mediante los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

8. Calcule la cantidad dada si

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{w} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ *b*) $|\mathbf{u}|$

c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *d*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

e) $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$ *f*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

g) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (redondeado al grado más cercano)

9. Encuentre dos vectores unitarios que sean perpendiculares a $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

10. *a*) Encuentre un vector perpendicular al plano que contenga los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(2, 0, -1)$ y $R(1, 4, 3)$.

b) Encuentre una ecuación para el plano que contenga P, Q y R.

c) Encuentre el área del triángulo PQR.

11. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que contenga los puntos $P(2, -4, 7)$ y $Q(0, -3, 5)$.

EN EL SITIO WEB SE PUEDE ENCONTRAR UN EXAMEN DE REPASO ACUMULATIVO DE LOS CAPÍTULOS 8 Y 9.
Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

ENFOQUE SOBRE MODELADO Campos vectoriales

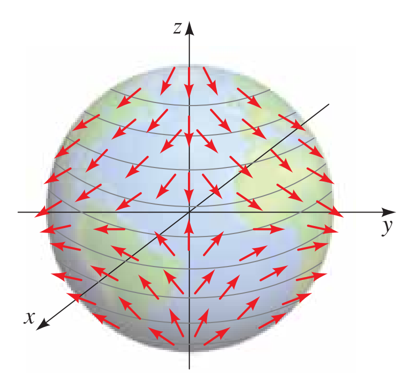


FIGURA 1 El viento se representa con un campo vectorial

Para modelar la fuerza gravitacional cerca de la Tierra o la circulación del viento en la superficie de nuestro planeta, usaremos vectores. Por ejemplo, en cada punto sobre la superficie terrestre el aire se mueve con ciertas rapidez y dirección. Por medio de vectores representamos las corrientes de aire. Si trazamos muchos de estos vectores obtenemos una “imagen” o gráfica del movimiento del aire. (Vea la figura 1.)

Campos vectoriales en el plano

Un **campo vectorial** en el plano de coordenadas es una función que asigna un vector a cada punto en el plano (o a cada punto en algún subconjunto del plano). Por ejemplo,

$$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

es un campo vectorial que asigna el vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ al punto (x, y). Trazaremos este campo vectorial en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 ■ Trazar la gráfica de un campo vectorial en el plano

Trace la gráfica del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. ¿Qué indica la gráfica?

SOLUCIÓN La tabla da el campo vectorial en varios puntos. En la figura 2 trazamos los vectores en la tabla junto con varios otros vectores en el campo vectorial.

(x, y)	$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
$(1, 3)$	$\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$(3, 3)$	$3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$(-4, 6)$	$-4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
$(-6, -1)$	$-6\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(6, -6)$	$6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

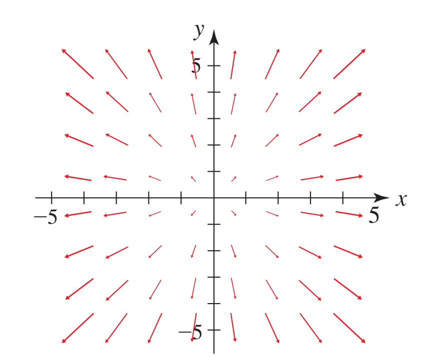


FIGURA 2

Vemos de la gráfica que los vectores en el campo apuntan alejándose del origen, y cuanto más lejos del origen mayor es la magnitud del vector. ■

EJEMPLO 2 ■ Trazar la gráfica de un campo vectorial en el plano

La rueda de un alfarero tiene un radio de 5 pulgadas. La velocidad de cada punto en la rueda está dada por el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. ¿Qué indica la gráfica?

SOLUCIÓN La tabla da el campo vectorial en varios puntos. En la figura 3 trazamos los vectores en la tabla.

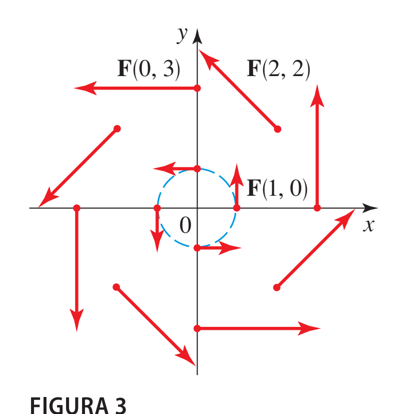


FIGURA 3

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Vemos de la gráfica que la rueda se mueve en el sentido contrario a las manecillas del reloj y que los puntos en el borde de la rueda tienen mayor velocidad que los del centro de la rueda. ■

FIGURA 4

Trazar la gráfica de campos vectoriales requiere trazar la gráfica de innumerables vectores. Algunas calculadoras graficadoras y algunos programas de computadora tienen capacidad para graficar campos vectoriales. También se pueden encontrar muchos sitios de internet que tienen *applets* para trazar la gráfica de campos vectoriales. El campo vectorial del ejemplo 2 está trazado con un programa de computadora en la figura 4. Observe el modo en que la computadora pone en escala las longitudes de los vectores, de modo que no son demasiado largos, pero son proporcionales a sus longitudes verdaderas.

Campos vectoriales en el espacio

Un **campo vectorial** en espacio tridimensional es una función que asigna un vector a cada punto en el espacio (o a cada punto en algún subconjunto de espacio). Por ejemplo,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

es un campo vectorial que asigna el vector $2x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ al punto (x, y, z). En general, es difícil trazar manualmente un campo vectorial en el espacio porque debemos trazar numerosos vectores con la perspectiva apropiada. El campo vectorial del siguiente ejemplo es particularmente sencillo, de modo que lo trazaremos a mano.

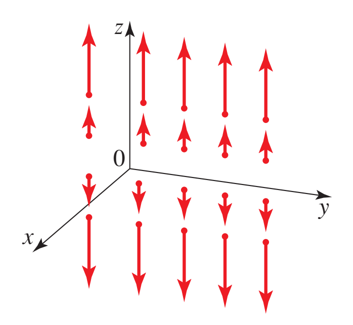


FIGURA 5

EJEMPLO 3 ■ Trazar la gráfica de un campo vectorial en el espacio

Trace la gráfica del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$. ¿Qué indica la gráfica?

SOLUCIÓN En la figura 5 se muestra una gráfica. Observe que todos los vectores son verticales y apuntan hacia arriba por encima del plano xy, y hacia abajo por debajo de ese plano. La magnitud de cada vector aumenta con la distancia desde el plano xy. ■

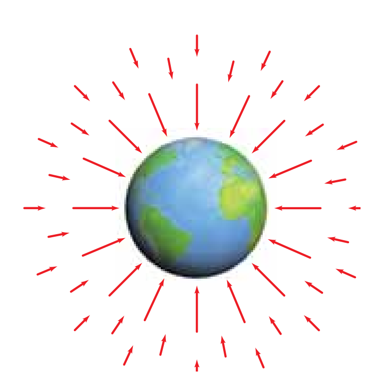
La atracción gravitacional de nuestro planeta en el espacio circundante está modelada matemáticamente por un campo vectorial. De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ está dirigida fuera del centro de la Tierra y es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de nuestro planeta. La magnitud de la fuerza es

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

donde M es la masa de la Tierra, m es la masa de un objeto en la proximidad de la superficie terrestre, r es la distancia del objeto al centro de la Tierra y G es la constante gravitacional universal.

Para modelar la fuerza gravitacional pongamos un sistema de coordenadas tridimensionales con el origen en el centro de la Tierra. La fuerza gravitacional en el punto (x, y, z) está dirigida hacia el origen. Un vector unitario que apunta hacia el origen es

$$\mathbf{u} = -\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$


FIGURE 6 El campo gravitacional

Para obtener el campo vectorial gravitacional multiplicamos este vector unitario por la magnitud apropiada, es decir, GMm/r^2. Dado que la distancia r del punto (x, y, z) al origen es $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se tiene que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Por tanto, podemos expresar el campo vectorial gravitacional como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Algunos de los vectores del campo gravitacional $\mathbf{F}$ se muestran en la figura 6.

PROBLEMAS

1–6 ■ Trace el campo vectorial **F** con un diagrama como en la figura 3.

1. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7–10 ■ Trace el campo vectorial **F** con un diagrama como en la figura 5.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{k}$

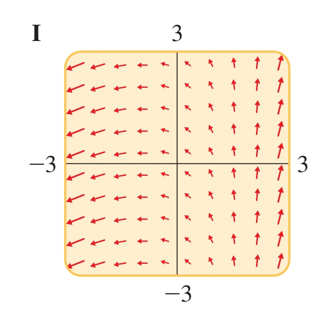
11–14 ■ Relacione el campo vectorial **F** con las gráficas marcadas I-IV.

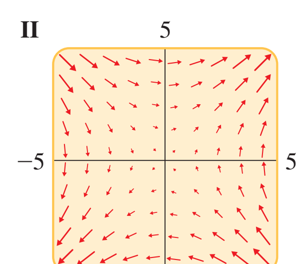
11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$

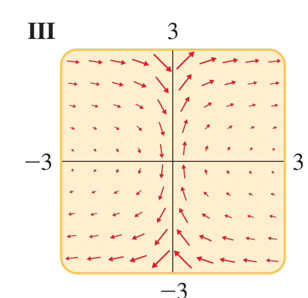
12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, \text{sen } y \rangle$

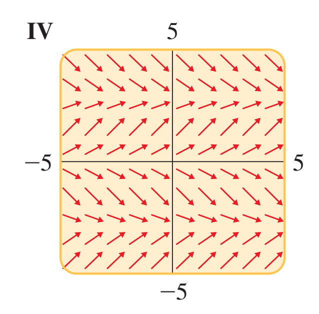
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x - 2, x + 1 \rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$









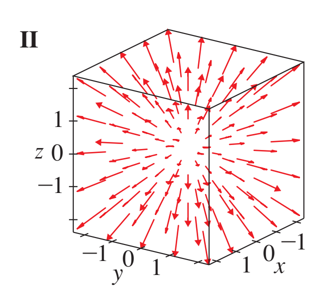
15–18 ■ Relacione el campo vectorial **F** con las gráficas marcadas I-IV.

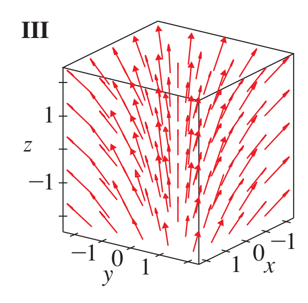
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

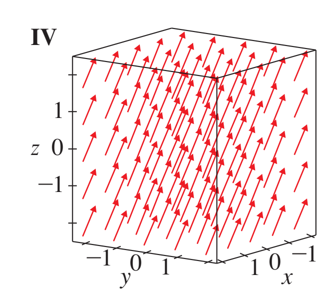
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

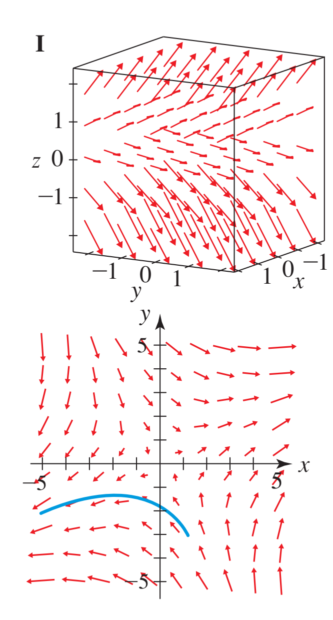
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$









19. Líneas de flujo en una corriente La corriente en una bahía turbulenta está descrita por el campo vectorial de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

Se muestra una gráfica del campo vectorial **F**. Si en esta bahía se coloca un pequeño bote de juguete, de la gráfica del campo vectorial podemos decir la trayectoria que seguirá el bote. Estas trayectorias reciben el nombre de **líneas de flujo** del campo vectorial. En la figura se muestra en azul una línea de flujo que inicia en $(1, -3)$. Trace las líneas de flujo iniciando en el punto dado.

a) $(1, 4)$ ***b)*** $(-2, 1)$ ***c)*** $(-1, -2)$


© Dainis Derics/Shutterstock.com

10 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

En los capítulos anteriores modelamos situaciones reales mediante ecuaciones, pero un gran número de estas situaciones contienen demasiadas incógnitas para ser modeladas por una sola ecuación. Por ejemplo, el clima depende de la relación entre numerosas incógnitas, incluyendo temperatura, rapidez del viento, presión del aire y humedad. En consecuencia, para modelar el clima (y pronosticar una tormenta de nieve como la de la fotografía), los científicos utilizan innumerables ecuaciones, cada una con muchas incógnitas. Estos conjuntos de ecuaciones, llamados sistemas de ecuaciones, *trabajan juntos* para describir el clima. Las líneas aéreas utilizan sistemas de ecuaciones con cientos de incógnitas para establecer horarios de vuelo consistentes; así también las empresas de telecomunicaciones los utilizan para enlazar con eficiencia las llamadas telefónicas. En este capítulo aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones que están formados por diversas ecuaciones con varias incógnitas.

10.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

■ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones ■ Método de sustitución ■ Método por eliminación ■ Método gráfico ■ Número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas ■ Modelado con sistemas lineales

■ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

La gráfica de una ecuación lineal es una recta (vea la sección 1.10).

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es aquel en el cual cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que cumple *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa encontrar todas las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$ ✓	$3 + 4(1) = 7$ ✓

La solución también se puede escribir como el par ordenado $(3, 1)$.

Observe que las gráficas de las ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea la figura 1). Dado que la solución $(3, 1)$ satisface cada una de las ecuaciones, el punto $(3, 1)$ se encuentra en cada recta. Por tanto, este es el punto de intersección de las dos rectas.

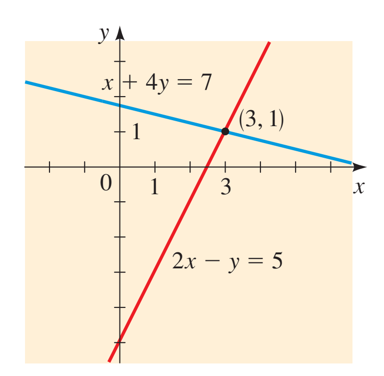


FIGURA 1

■ Método de sustitución

Para resolver un sistema usando el **método de sustitución** empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. **Despejar una incógnita.** Escoja una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra incógnita.
2. **Sustituir.** Para obtener una ecuación con una incógnita sustituya en la otra ecuación la expresión que encontró en el paso 1 y luego despeje dicha incógnita.
3. **Sustituir hacia atrás.** Para despejar la incógnita restante sustituya en la expresión encontrada en el paso 1 la expresión que encontró en el paso 2.

EJEMPLO 1 ■ Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN **Despejar una incógnita.** Despejamos y en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despeje } y \text{ en la ecuación 1}$$

Sustituir. Ahora sustituimos y en la segunda ecuación y despejamos x.

$$3x + 4(1 - 2x) = 14 \qquad \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la ecuación 2}$$
$$3x + 4 - 8x = 14 \qquad \text{Desarrolle}$$
$$-5x + 4 = 14 \qquad \text{Simplifique}$$
$$-5x = 10 \qquad \text{Reste 4}$$
$$x = -2 \qquad \text{Despeje } x$$

Sustituir hacia atrás. A continuación, sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución hacia atrás}$$

Entonces $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -2$, $y = 5$:

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \checkmark$$

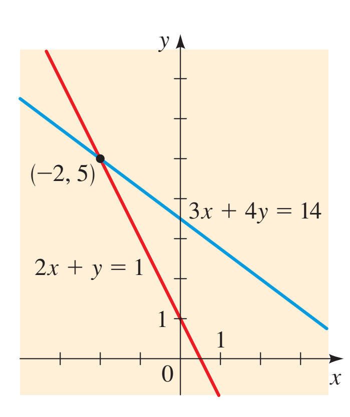


FIGURA 2

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

Método por eliminación

Para resolver un sistema con el **método de eliminación** tratamos de combinar las ecuaciones mediante sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.

MÉTODO POR ELIMINACIÓN

1. **Ajustar los coeficientes.** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
2. **Sumar las ecuaciones.** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y luego despeje la incógnita restante.
3. **Sustituir hacia atrás.** En una de las ecuaciones originales sustituya el valor encontrado en el paso 2 y despeje la incógnita restante.

EJEMPLO 2 ■ Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{Sistema}$$

$$4x \qquad = 16 \quad \text{Sume}$$

$$x = 4 \quad \text{Despeje } x$$

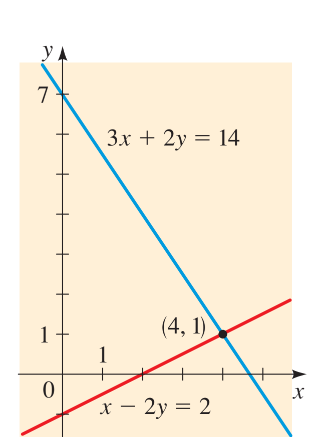


FIGURA 3

Ahora, sustituimos hacia atrás $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y. Elijamos la segunda ecuación porque parece más sencilla.

$$x - 2y = 2 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$4 - 2y = 2 \quad \text{Sustituya hacia atrás } x = 4 \text{ en la ecuación 2}$$

$$-2y = -2 \quad \text{Reste 4}$$

$$y = 1 \quad \text{Despeje } y$$

La solución es (4, 1). La figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto (4, 1).

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

■ Método gráfico

En el **método gráfico** usamos una calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

MÉTODO GRÁFICO

1. **Trazar la gráfica de cada ecuación.** Exprese cada ecuación de una forma apropiada para la calculadora graficadora al despejar y como función de x. Trace la gráfica de las ecuaciones en la misma pantalla.
2. **Encontrar los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

Vea el apéndice C,* *Gráficas con una calculadora graficadora*, para guiarse en el uso de una calculadora graficadora. Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para obtener instrucciones específicas del trazado de gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

EJEMPLO 3 ■ Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1.35x - 2.13y = -2.36 \\ 2.16x + 0.32y = 1.06 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejando y en términos de x obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0.63x + 1.11 \\ y = -6.75x + 3.31 \end{cases}$$

donde hemos redondeado los coeficientes a dos decimales. La figura 4 muestra que las dos rectas se cruzan; en un acercamiento vemos que la solución es aproximadamente (0.30, 1.30).

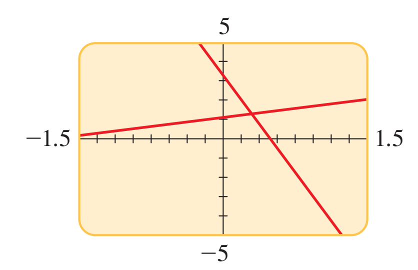


FIGURA 4

Ahora intente realizar los ejercicios 13 y 51 ■

Número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas

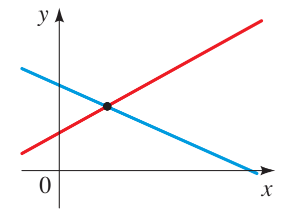
La gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que, para resolver gráficamente el sistema, debemos encontrar el punto o los puntos de intersección de las rectas. Dos rectas pueden cruzarse en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se muestra en la figura 5. Por tanto, hay tres posibles resultados para resolver el sistema.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

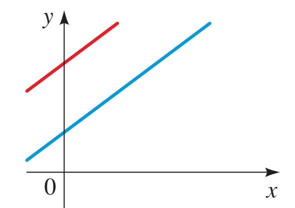
Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera (vea la figura 5).

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones.

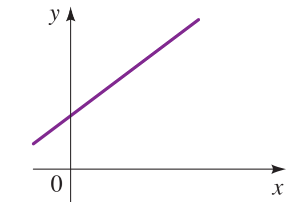
Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema con infinitas soluciones se llama **dependiente**.



a) Las rectas se cruzan en un solo punto. El sistema tiene una solución.



b) Las rectas son paralelas y no se cruzan. El sistema no tiene solución.



c) Las rectas coinciden; las ecuaciones son para la misma recta. El sistema tiene infinitas soluciones.

FIGURA 5

EJEMPLO 4 ■ Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y trace la gráfica de las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

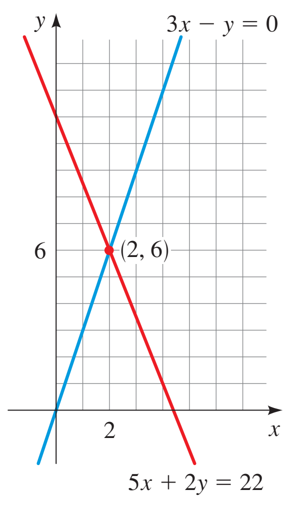


FIGURA 6

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 2,\ y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \quad ✓$$

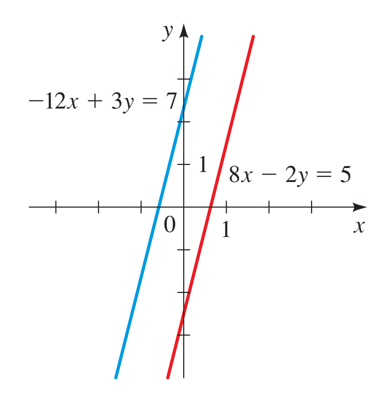


FIGURA 7

SOLUCIÓN Eliminamos y de las ecuaciones y despejamos x.

$$\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} \qquad 2 \times \text{Ecuación 1}$$

$$11x = 22 \qquad \text{Sume}$$

$$x = 2 \qquad \text{Despeje } x$$

Ahora sustituimos de nuevo en la primera ecuación y despejamos y:

$$6(2) - 2y = 0 \qquad \text{Sustituimos hacia atrás } x = 2$$

$$-2y = -12 \qquad \text{Restamos 12}$$

$$y = 6 \qquad \text{Despejamos } y$$

La solución del sistema es el par ordenado (2, 6), es decir,

$$x = 2 \qquad y = 6$$

La gráfica de la figura 6 muestra que las rectas del sistema se cruzan en el punto (2, 6).

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

EJEMPLO 5 ■ Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ -12x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

SOLUCIÓN Esta vez tratamos de encontrar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la incógnita y. La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{cases} 24x - 6y = 15 \\ -24x + 6y = 14 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 3 \times \text{Ecuación 1} \\ 2 \times \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

$$0 = 29 \qquad \text{Sume}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina *tanto a x como a y* en este caso, y terminamos con $0 = 29$, lo cual obviamente es falso. No importa qué valores asignemos a x y a y, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

EJEMPLO 6 ■ Un sistema lineal con infinitas soluciones

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 4x - 8y = 16 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

SOLUCIÓN Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 \\ 12x - 24y = 48 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 4 \times \text{Ecuación 1} \\ 3 \times \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta

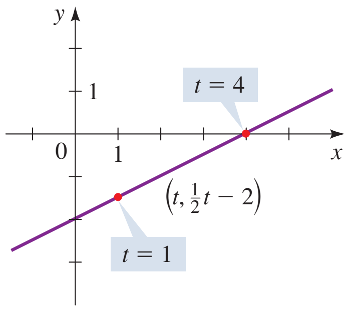


FIGURA 8

recta dan una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Por tanto, si con t representamos cualquier número real podemos escribir la solución como

$$x = t$$

$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene infinitas soluciones (vea la figura 8).

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

En el ejemplo 3 para obtener soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, obtenemos la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Si $t = 4$ obtenemos la solución $(4, 0)$. Para todo valor de t obtenemos una solución diferente (vea la figura 8).

■ Modelado con sistemas lineales

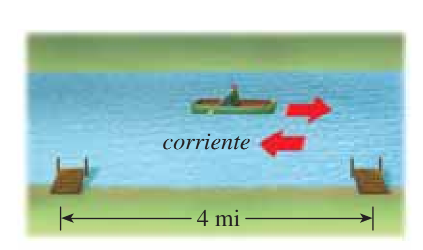
Con frecuencia, cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en ciencias o en otras áreas obtenemos sistemas como el que acabamos de considerar. Cuando modelamos con sistemas de ecuaciones usamos la siguiente guía, que es semejante a la de la sección 1.7.

GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

1. **Identificar las incógnitas.** Identifique las cantidades que el problema pide encontrar. Estas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las incógnitas (llámelas x y y o mediante otras letras).
2. **Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas.** Lea otra vez el problema y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las incógnitas que haya definido en el paso 1.
3. **Establecer un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos importantes del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. **Resolver el sistema e interpretar los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Los siguientes dos ejemplos muestran cómo modelar con sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 7 ■ Un problema de distancia, rapidez y tiempo



Una mujer rema un bote aguas arriba desde un punto en un río a otro punto a 4 millas de distancia, en $1\frac{1}{2}$ horas. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma sólo 45 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que rema respecto al agua, y con qué velocidad se mueve la corriente?

SOLUCIÓN **Identificar las incógnitas.** Nos piden encontrar la velocidad con la que rema la mujer y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

$$x = \text{velocidad de remo (mi/h)}$$

$$y = \text{velocidad de la corriente (mi/h)}$$

Las matemáticas en el mundo moderno


© Rachel Epstein/PhotoEdit

Predicción del clima

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que pronosticar el clima del día siguiente. Investigan modelos del clima a largo plazo, el agotamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. No obstante, el pronóstico diario del clima es todavía una parte importante de la meteorología; su valor es medido por las innumerables vidas humanas salvadas cada año gracias a un pronóstico preciso de huracanes, tempestades de nieve y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo XX unos matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de incógnitas atmosféricas. Aun cuando este modelo funcionaba en principio, era imposible pronosticar modelos futuros con él debido a la dificultad para medir con precisión todas las incógnitas y resolver todas las ecuaciones. Hoy en día nuevos modelos matemáticos, combinados con simulaciones computarizadas de alta velocidad y mejores datos, han mejorado en gran medida el pronóstico del clima y con ello se han evitado numerosos desastres económicos y pérdidas de vida. Los matemáticos de la National Oceanographic and Atmospheric Administration (NOAA) continuamente están investigando mejores métodos para pronosticar el clima.

Expresar cantidades desconocidas en términos de la incógnita. La velocidad de la mujer cuando rema aguas arriba es su velocidad para remar menos la velocidad de la corriente; su velocidad aguas abajo es su velocidad para remar más la velocidad de la corriente. Ahora convertimos esta información al lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Velocidad de remo	x
Velocidad de la corriente	y
Velocidad aguas arriba	$x - y$
Velocidad aguas abajo	$x + y$

Establecer un sistema de ecuaciones. La distancia aguas arriba y aguas abajo es de 4 millas, de modo que usando el hecho de que velocidad × tiempo = distancia para los dos tramos del viaje, tenemos

velocidad aguas arriba × tiempo aguas arriba = distancia recorrida

velocidad aguas abajo × tiempo aguas abajo = distancia recorrida

En notación algebraica esto se convierte en las ecuaciones siguientes.

$$(x - y)\tfrac{3}{2} = 4 \qquad \text{Ecuación 1}$$
$$(x + y)\tfrac{3}{4} = 4 \qquad \text{Ecuación 2}$$

(Los tiempos se han convertido a horas porque estamos expresando la rapidez en millas por *hora*.)

Resolver el sistema. Multiplicamos las ecuaciones por 2 y por 4, respectivamente, para despejar los denominadores.

$$\begin{cases} 3x - 3y = 8 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 3x + 3y = 16 & 4 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$
$$6x = 24 \qquad \text{Sume}$$
$$x = 4 \qquad \text{Despeje } x$$

Sustituyendo hacia atrás este valor de x en la primera ecuación (también funciona la segunda) y despejando y, tendremos

$$3(4) - 3y = 8 \qquad \text{Sustituya hacia atrás } x = 4$$
$$-3y = 8 - 12 \qquad \text{Reste 12}$$
$$y = \tfrac{4}{3} \qquad \text{Despeje } y$$

La mujer rema a 4 mi/h y la corriente se mueve a $1\frac{1}{3}$ mi/h.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La velocidad contra la corriente es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{1\frac{1}{2}\text{ h}} = 2\tfrac{2}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo − flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} - \tfrac{4}{3} \text{ mi/h} = 2\tfrac{2}{3} \text{ mi/h}$$

La velocidad río abajo es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{\frac{3}{4}\text{ h}} = 5\tfrac{1}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo + flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} + \tfrac{4}{3} \text{ mi/h} = 5\tfrac{1}{3} \text{ mi/h} \quad ✓$$

Ahora intente realizar el ejercicio 65

EJEMPLO 8 ■ Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol al agregarle una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante tiene un contenido alcohólico de 16% y llena 1 000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) de vino y de la solución de alcohol usa el vinatero?

SOLUCIÓN **Identificar las incógnitas.** Dado que nos piden las cantidades de vino y alcohol hacemos

$$x = \text{cantidad de vino utilizado (L)}$$
$$y = \text{cantidad de solución de alcohol utilizada (L)}$$

Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de la incógnita. Ante el hecho de que el vino contiene 10% de alcohol y la solución contiene 70% de alcohol obtenemos lo siguiente.

En palabras	En álgebra
Cantidad de vino utilizada (L)	x
Cantidad de solución de alcohol utilizada (L)	y
Cantidad de alcohol en vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

Establecer un sistema de ecuaciones. El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero mezcla, entonces

$$x + y = 1\,000$$

También la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol aportado por el vino y por la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1\,000$$
$$0.10x + 0.70y = 160 \qquad \text{Simplifique}$$
$$x + 7y = 1\,600 \qquad \text{Multiplique por 10 para quitar decimales}$$

En consecuencia, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1\,000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1\,600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Resolver el sistema. Al restar la primera ecuación de la segunda se elimina la incógnita x y obtenemos

$$6y = 600 \qquad \text{Reste la ecuación 1 de la ecuación 2}$$
$$y = 100 \qquad \text{Despeje } y$$

Ahora sustituimos hacia atrás $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$x + 100 = 1\,000 \qquad \text{Sustituimos hacia atrás } y = 100$$
$$x = 900 \qquad \text{Despejamos } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol.

Ahora intente realizar el ejercicio 67 ■

10.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas _______ y _______. Para determinar si $(5, -1)$ es una solución de este sistema verificamos $x = 5$ y $y = -1$ satisfacen cada _______ del sistema. ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de este sistema?

$$(5, -1), \quad (-1, 3), \quad (2, 1)$$

2. Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por el método de _____________, el método de _____________ o el método _____________.

3. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, _________ solución o _________ _________ soluciones.

4. El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

La gráfica de la primera ecuación es la misma que la gráfica de la segunda ecuación, de manera que el sistema tiene _________ _________ soluciones. Expresamos estas soluciones escribiendo

$$x = t$$
$$y = \text{_______}$$

donde t es cualquier número real. Algunas de las soluciones de este sistema son (1, ___), (−3, ___) y (5, ___).

HABILIDADES

5–8 ■ Método de sustitución Use el método de sustitución para encontrar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

5. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

9–12 ■ Método de eliminación Use el método de eliminación para encontrar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

9. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$

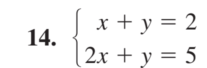
10. $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - 2y = -13 \\ -6x + 5y = 28 \end{cases}$

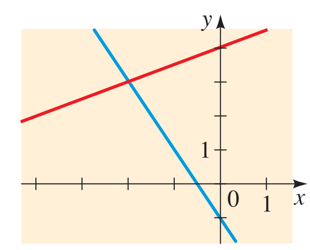
12. $\begin{cases} 2x - 5y = -18 \\ 3x + 4y = 19 \end{cases}$

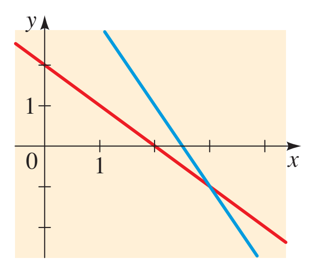
13–14 ■ Método gráfico Se dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el punto o los puntos de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

13. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$



14. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$





15–20 ■ Números de soluciones determinados gráficamente Trace la gráfica de cada uno de los sistemas lineales siguientes, ya sea manualmente o con calculadora graficadora. Use la gráfica para determinar si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene infinitas soluciones. Si hay exactamente una solución use la gráfica para encontrarla.

15. $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - \phantom{\frac{1}{2}}y = 10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

21–50 ■ Resolver un sistema de ecuaciones Resuelva el sistema o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene infinitas soluciones expréselas en la forma del par ordenado dado en el ejemplo 6.

21. $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$

31. $\begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y = -1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = 3 \end{cases}$

32. $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 5 \\ -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = 1 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$

44. $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$

45. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$

46. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

47. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$

49. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$

50. $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$



51–54 ■ Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de ambas rectas en el mismo rectángulo de vista. (Observe que debe despejar *y* en términos de *x* antes de trazar la gráfica si usa una calculadora graficadora.) Resuelva el sistema ya sea con acercamiento y usando `TRACE` o usando la función `Intersect`. Redondee sus respuestas a dos decimales.

51. $\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$

53. $\begin{cases} 2371x - 6552y = 13\,591 \\ 9815x + 992y = 618\,555 \end{cases}$

54. $\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$

HABILIDADES Plus

55–58 ■ Resolver un sistema general de ecuaciones Encuentre *x* y *y* en términos de *a* y *b*.

55. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$

56. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$

57. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$

58. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

APLICACIONES

59. Problema de números Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.

60. Problema de números La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.

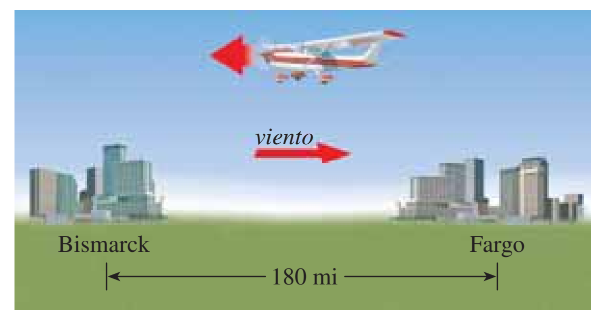
61. Valor de monedas Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 y de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es $2.75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

62. Precio de entrada El precio de entrada a un parque de diversiones es 1.50 dólares para niños y 4.00 dólares para adultos. En cierto día 2 200 personas entraron al parque y los precios de entrada recolectados sumaron 5 050 dólares. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron?

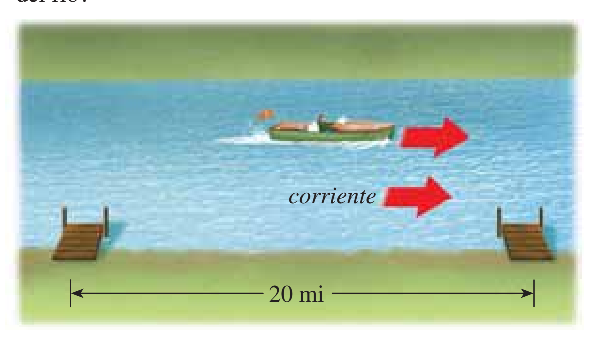
63. Gasolinera Una gasolinera vende gasolina regular en 2.20 dólares el galón y gasolina Premium en 3.00 dólares el galón. Al final del día se vendieron 280 galones de gasolina y los recibos totalizaron 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo se vendieron?

64. Puesto de frutas Un puesto de frutas vende dos variedades de fresas: estándar y de lujo. Una caja de fresas estándar se vende en 7 dólares y una de lujo se vende en 10 dólares. En un día el puesto vende 135 cajas de fresas con un total de 1 100 dólares. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

65. Velocidad de un avión Un hombre vuela en un pequeño avión de Fargo a Bismarck, Dakota del Norte, una distancia de 180 millas. Debido a que hizo el vuelo con un viento de frente, el viaje le toma 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía está soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje le toma sólo 1 hora 12 minutos. ¿Cuál es la velocidad del piloto con viento en calma, y con qué velocidad sopla el viento?



66. Velocidad de un bote Un bote navega en un río aguas abajo entre dos puntos, a 20 millas de distancia, en una hora. El viaje de regreso contra la corriente toma $2\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuál es la velocidad del bote, y con qué velocidad se mueven las aguas del río?



67. Nutrición Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis en la cual intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22 000 unidades de retinol. Usa dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 de retinol por gramo; el alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento le debe dar al grupo de ratas diariamente?

68. Mezclas de café En una cafetería un cliente compra una mezcla de dos clases de café: Kenia, que cuesta 3.50 dólares la libra, y Sri Lanka, que cuesta 5.60 dólares la libra. Él compra 3 libras de la mezcla, que le cuestan 11.55 dólares. ¿Cuántas libras de cada clase entraron en la mezcla?

69. Problema de mezclas Un químico tiene dos grandes contenedores de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. La mezcla de 300 ml de la primera solución y 600 ml de la segunda le da una mezcla que es 15% ácida, mientras que si mezcla 100 ml de la primera y 500 ml de la segunda le da una mezcla a $12\frac{1}{2}\%$ ácida. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

70. Problema de mezclas Una bióloga tiene dos soluciones de salmuera, una contiene 5% de sal y otra contiene 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe mezclar para obtener 1 litro de una solución que contenga 14% de sal?

71. Inversiones Una mujer invierte un total de 20 000 dólares en dos cuentas, una paga 5% y la otra paga 8% de interés simple al año. El interés anual que ella percibe es 1 180 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

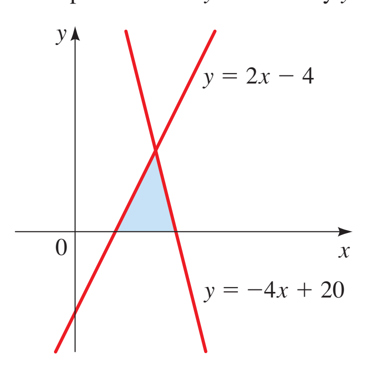
72. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una paga 6% y la otra paga 10% de interés simple al año. Debido a que es de menos riesgo, en la cuenta que rinde menos pone el doble. Su interés anual es 3 520 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

73. Distancia, velocidad y tiempo Juan y María salen de su casa al mismo tiempo y se dirigen en auto en direcciones opuestas. Juan maneja a 60 mi/h y viaja 35 millas más que María quien maneja a 40 mi/h. El viaje de María toma 15 minutos más que el de Juan. ¿Durante cuánto tiempo manejan?

74. Ejercicio aeróbico Una mujer que se mantiene en forma hace ejercicio en bicicleta y corre todos los días. El lunes ocupa $\frac{1}{2}$ hora en cada una de esas actividades, para cubrir un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes corre durante 12 minutos y anda en bicicleta 45, para cubrir un total de 16 millas. Encuentre la velocidad a la que corre y a la que anda en bicicleta suponiendo que estas no cambian entre un día y otro.

75. Problema de números La suma de los dos dígitos de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Encuentre dicho número.

76. Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo que se encuentra en el primer cuadrante (con la base sobre el eje x y que está acotado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

77. DISCUSIÓN: La recta de mínimos cuadrados La recta de *mínimos cuadrados* o recta de *regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Estudiamos esta recta en el *Enfoque sobre modelado* que sigue al capítulo 1 (vea la página 139). Mediante el cálculo se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los n puntos de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es la recta $y = ax + b$, donde los coeficientes a y b satisfacen el siguiente par de ecuaciones lineales. (La notación $\sum_{k=1}^{n} x_k$ representa la suma de todas las x. Vea en la sección 12.1 una descripción completa de la notación (Σ).)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Use estas ecuaciones para encontrar la recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de datos.

$$(1, 3), \quad (2, 5), \quad (3, 6), \quad (5, 6), \quad (7, 9)$$

Trace los puntos y su recta para confirmar que esta se ajusta bien a dichos puntos. Si su calculadora calcula regresión lineal, vea si le da la misma recta que las fórmulas.

10.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS INCÓGNITAS

■ Solución de un sistema lineal ■ El número de soluciones de un sistema lineal ■ Modelado usando un sistema lineal

Una **ecuación lineal con *n* variables** es una ecuación que se puede poner en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y c son números reales, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas. Si sólo tenemos tres o cuatro incógnitas, en general usamos x, y, z y w en lugar de x_1, x_2, x_3 y x_4. Estas ecuaciones se llaman *lineales* porque si tenemos sólo dos variables, la ecuación es $a_1x + a_2y = c$, que es la ecuación de una recta. Ahora veamos algunos ejemplos de ecuaciones con tres variables que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	**Ecuaciones no lineales**	
$6x_1 - 3x_2 + \sqrt{5}x_3 = 10$	$x^2 + 3y - \sqrt{z} = 5$	No lineal porque contiene el cuadrado y la raíz cuadrada de una variable
$x + y + z = 2w - \frac{1}{2}$	$x_1x_2 + 6x_3 = -6$	No lineal porque contiene un producto de variables

En esta sección estudiamos sistemas de ecuaciones lineales con tres o más incógnitas.

Solución de un sistema lineal

Los siguientes son dos ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. El segundo sistema está en **forma triangular**; esto es, la incógnita x no aparece en la segunda ecuación y las incógnitas x y y no aparecen en la tercera ecuación.

Un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

Un sistema en forma triangular

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Es fácil resolver un sistema que está en forma triangular si se usa la sustitución hacia atrás. Entonces nuestro objetivo en esta sección es empezar con un sistema de ecuaciones lineales y cambiarlo a un sistema en forma triangular que tiene las mismas soluciones que el sistema original. Empezaremos por mostrar cómo se usa la sustitución para resolver un sistema que ya está en forma triangular.

EJEMPLO 1 ■ Resolver un sistema triangular mediante la sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema usando la sustitución hacia atrás:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ y + 2z = 5 & \text{Ecuación 2} \\ z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN De la última ecuación sabemos que $z = 3$. Realizamos la sustitución hacia atrás de esta ecuación en la segunda ecuación y despejamos y.

$$y + 2(3) = 5 \qquad \text{Al sustituir hacia atrás } z = 3 \text{ en la ecuación 2}$$
$$y = -1 \qquad \text{Despejamos } y$$

Luego sustituimos hacia atrás $y = -1$ y $z = 3$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$x - 2(-1) - (3) = 1 \qquad \text{Al sustituir hacia atrás } y = -1 \text{ y } z = 3 \text{ en la ecuación 1}$$
$$x = 2 \qquad \text{Despejamos } x$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$. También podemos escribir la solución como la terna ordenada $(2, -1, 3)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

Para cambiar un sistema de ecuaciones lineales a un **sistema equivalente** (esto es, un sistema con las mismas soluciones que el sistema original), usamos el método por eliminación. Esto significa que podemos usar las siguientes operaciones.

OPERACIONES QUE DAN UN SISTEMA EQUIVALENTE

1. Sumar un múltiplo diferente de cero de una ecuación a otra.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Intercambiar las posiciones de dos ecuaciones.

Para resolver un sistema lineal usamos estas operaciones con el fin de cambiar el sistema a un sistema triangular equivalente. Entonces usamos sustitución como en el ejemplo 1. Este proceso se denomina **eliminación de Gauss**.

EJEMPLO 2 ■ Resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Resuelva el sistema mediante eliminación de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Necesitamos cambiar lo anterior a un sistema triangular, de modo que empezamos por eliminar el término x de la segunda ecuación.

$$\begin{array}{rl} x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ \hline 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} + (-1) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2} \end{array}$$

Esto nos da un nuevo sistema equivalente que es un paso más cercano a la forma triangular.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora eliminamos el término x de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y - 5z = 3 & \\ -3x + 6y - 9z = -3 & \\ \hline 8y - 14z = 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y - 4z = 12 \\ 8y - 14z = 0 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

Luego eliminamos el término y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{rl} 8y - 14z = 0 & \\ -8y + 8z = -24 & \\ \hline -6z = -24 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y - 4z = 12 \\ -6z = -24 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

El sistema está ahora en forma triangular, pero será más fácil de trabajar si dividimos la segunda y la tercera ecuaciones entre los factores comunes de cada término.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 3 & \frac{1}{4} \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 2} \\ z = 4 & -\frac{1}{6} \times \text{ecuación 3} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora usamos la sustitución hacia atrás para resolver el sistema. De la tercera ecuación obtenemos $z = 4$. Sustituimos esto en la segunda ecuación y despejamos y.

$$\begin{array}{rl} y - (4) = 3 & \text{Sustituimos hacia atrás } z = 4 \text{ en la ecuación 2} \\ y = 7 & \text{Despejamos } y \end{array}$$

Ahora sustituimos hacia atrás $y = 7$ y $z = 4$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$\begin{array}{rl} x - 2(7) + 3(4) = 1 & \text{Al sustituir hacia atrás } y = 7 \text{ y } z = 4 \text{ en la ecuación 1} \\ x = 3 & \text{Despejamos } x \end{array}$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 7$, $z = 4$, que podemos escribir como la terna ordenada (3, 7, 4).

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3, y = 7, z = 4$:

$$\begin{aligned} (3) - 2(7) + 3(4) &= 1 \\ (3) + 2(7) - (4) &= 13 \\ 3(3) + 2(7) - 5(4) &= 3 \quad ✓ \end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

El número de soluciones de un sistema lineal

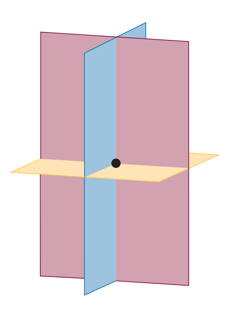
La gráfica de una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en el espacio tridimensional (vea la sección 9.6). Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas representa tres planos en el espacio. Las soluciones del sistema son los puntos donde se intersecan los tres planos. Tres planos pueden intersecarse en un punto o en una recta, o no cruzarse o los tres planos pueden coincidir. La figura 1 muestra algunas de las posibilidades. Verificando estas posibilidades vemos que hay tres posibles resultados cuando se resuelve uno de estos sistemas.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL

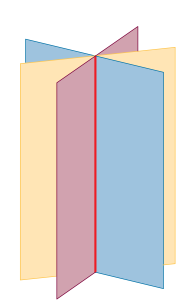
Para un sistema de ecuaciones lineales, exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones.

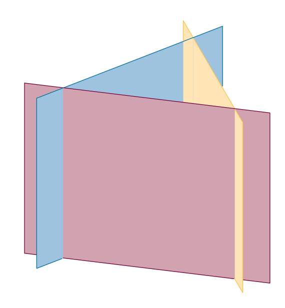
Se dice que un sistema que no tiene soluciones es **inconsistente** y un sistema con infinitas soluciones es **dependiente**. Como se ve en el siguiente ejemplo, un sistema lineal no tiene solución si terminamos con una *ecuación falsa* después de aplicar al sistema la eliminación de Gauss.



a) Los tres planos se intersecan en un solo punto. El sistema tiene una solución.



b) Los tres planos se intersecan en más de un punto. El sistema tiene infinitas soluciones.



c) Los tres planos no tienen punto en común. El sistema no tiene solución.

FIGURA 1

EJEMPLO 3 ■ Un sistema que no tiene solución

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = 6 \\ 3x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$$

Ecuación 1
Ecuación 2
Ecuación 3

SOLUCIÓN Para poner esto en forma triangular empezamos por eliminar los términos x de la segunda ecuación y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

Ecuación 2 + (-2) × ecuación 1 = nueva ecuación 2

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ -2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Ecuación 3 + (-3) × ecuación 1 = nueva ecuación 3

Ahora eliminamos el término y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ \quad -2y + 3z = 4 \\ \qquad\quad 0 = -2 \end{cases} \qquad \text{Ecuación 3} + (-1) \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 3}$$

El sistema está ahora en forma triangular, pero la tercera ecuación dice que $0 = -2$, lo cual es falso. No importa qué valores asignemos a x, y y z, la tercera ecuación nunca será verdadera. Esto significa que el sistema *no tiene solución*.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

EJEMPLO 4 ■ Un sistema con infinitas soluciones

Resuelva el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + y + 4z = 2 & \text{Ecuación 2} \\ 2x + 4y - 2z = 8 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Para poner esto en forma triangular, empezamos por eliminar los términos x de las ecuaciones segunda y tercera.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ \quad 3y - 6z = 6 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \end{cases} \qquad \text{Ecuación 2} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2}$$

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ \quad 3y - 6z = 6 \\ \quad 6y - 12z = 12 \end{cases} \qquad \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3}$$

Ahora eliminamos el término y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ \quad 3y - 6z = 6 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 3}$$

La nueva tercera ecuación es verdadera pero no nos da información nueva, de modo que podemos eliminarla del sistema. Sólo nos quedan dos ecuaciones. Podemos usarlas para despejar x y y en términos de z, pero z puede tomar cualquier valor, de manera que hay infinitas soluciones.



© Vitalii Nesterchuk/Shutterstock.com

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Mejor ajuste contra ajuste exacto

La ley de la gravedad es precisa. Pero cuando obtenemos datos acerca de la distancia a la cual un objeto cae en un momento dado, nuestras medidas no son exactas. Sin embargo, podemos, encontrar la recta (o parábola) que *mejor* se ajuste a nuestros datos. No todos los puntos de datos se encuentran en la recta (o parábola). Pero si nos dan sólo dos puntos podemos encontrar una recta que ajuste *exactamente* una recta que pase por dos puntos. Del mismo modo podemos encontrar una parábola a través de tres puntos. En este proyecto se comparan datos exactos con modelos de la vida real. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Para encontrar la solución completa del sistema empezamos por despejar y en términos de z, usando la nueva segunda ecuación.

$$3y - 6z = 6 \quad \text{Ecuación 2}$$
$$y - 2z = 2 \quad \text{Multiplique por } \tfrac{1}{3}$$
$$y = 2z + 2 \quad \text{Despeje } y$$

Luego despejamos x en términos de z, usando la primera ecuación.

$$x - (2z + 2) + 5z = -2 \quad \text{Sustituya } y = 2z + 2 \text{ en la ecuación 1}$$
$$x + 3z - 2 = -2 \quad \text{Simplifique}$$
$$x = -3z \quad \text{Despeje } x$$

Para describir la solución completa, dejemos que z sea cualquier número real. La solución es

$$x = -3t$$
$$y = 2t + 2$$
$$z = t$$

También podemos escribir esto como la terna ordenada $(-3t, 2t + 2, t)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

En la solución del ejemplo 4 la variable t se denomina **parámetro**. Para obtener una solución específica damos un valor específico al parámetro t. Por ejemplo, si hacemos que $t = 2$, obtenemos

$$x = -3(2) = -6$$
$$y = 2(2) + 2 = 6$$
$$z = 2$$

Por tanto $(-6, 6, 2)$ es una solución del sistema. Ahora veamos algunas otras soluciones del sistema obtenidas al sustituir otros valores para el parámetro t.

Parámetro t	Solución $(-3t, 2t + 2, t)$
-1	$(3, 0, -1)$
0	$(0, 2, 0)$
3	$(-9, 8, 3)$
10	$(-30, 22, 10)$

Usted debe comprobar que estos puntos satisfagan las ecuaciones originales. Hay infinitas opciones para el parámetro t, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Modelado usando un sistema lineal

Los sistemas lineales se utilizan para modelar situaciones que implican varias cantidades incógnitas. En el siguiente ejemplo consideramos una aplicación de sistemas lineales a las finanzas.

EJEMPLO 5 ■ Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Jason recibe una herencia de 50 000 dólares. Su asesor financiero le sugiere invertir esto en tres fondos de mutualidad: un fondo de mercado de dinero, un fondo de acciones preferenciales y un fondo de acciones de alta tecnología. El asesor estima que el fondo de mercado de dinero rendirá 5% al año siguiente, el fondo de acciones preferenciales dará 9% y el fondo de alta tecnología rendirá 16%. Jason desea tener un rendimiento total de 4 000 dólares el primer año. Para evitar riesgo excesivo decide invertir el triple

en el fondo de mercado de dinero en lugar de en el fondo de acciones de alta tecnología? ¿Cuánto debe invertir en cada fondo?

SOLUCIÓN

Sea x = cantidad invertida en el fondo de mercado de dinero
y = cantidad invertida en el fondo de acciones preferenciales
z = cantidad invertida en el fondo de acciones de alta tecnología

Convertimos en ecuación cada uno de los datos dados en el problema.

$$x + y + z + 5z = 50\,000$$ La cantidad total invertida es 50 000 dólares

$$0.05x + 0.09y + 0.16z = 4\,000$$ El rendimiento total sobre la inversión es 4 000 dólares

$$x = 3z$$ La cantidad en el mercado de dinero es 3 × cantidad en acciones de alta tecnología

Al multiplicar la segunda ecuación por 100 y al volver a escribir la tercera ecuación obtenemos el siguiente sistema, mismo que resolvemos usando la eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ 5x + 9y + 16z = 400\,000 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$ 100 × ecuación 2; Reste $3z$

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ 4y + 11z = 150\,000 \\ -y - 4z = -50\,000 \end{cases}$$ Ecuación 2 + (−5) × ecuación 1 = nueva ecuación 2; Ecuación 3 + (−1) × ecuación 1 = nueva ecuación 3

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ -5z = -50\,000 \\ -y - 4z = -50\,000 \end{cases}$$ Ecuación 2 + 4 × ecuación 3 = nueva ecuación 2

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ z = 10\,000 \\ y + 4z = 50\,000 \end{cases}$$ $(-\frac{1}{5})$ × ecuación 2; (−1) × ecuación 3

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ y + 4z = 50\,000 \\ z = 10\,000 \end{cases}$$ Intercambie las ecuaciones 2 y 3

Ahora que el sistema está en forma triangular usamos la sustitución hacia atrás para encontrar que $x = 30\,000$, $y = 10\,000$ y $z = 10\,000$. Esto significa que Jason debe invertir

30 000 dólares en el fondo de mercado de dinero
10 000 dólares en el fondo de acciones preferenciales
10 000 dólares en el fondo de acciones de alta tecnología

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

10.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1–2 ■ Estos ejercicios se refieren al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

1. Si sumamos dos veces la primera ecuación a la segunda ecuación, esta última se convierte en ______ = ____.

2. Para eliminar x de la tercera ecuación sumamos ______ veces la primera ecuación a la tercera ecuación. La tercera ecuación se convierte en ______ = ____.

HABILIDADES

3–6 ■ ¿El sistema de ecuaciones es lineal? Indique si la ecuación o sistema de ecuaciones es lineal.

3. $6x - \sqrt{3}y + \frac{1}{2}z = 0$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

5. $\begin{cases} xy - 3y + z = 5 \\ x - y^2 + 5z = 0 \\ 2x + yz = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + 5y = 2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$

7–12 ■ Sistema triangular Use sustitución hacia atrás para resolver el sistema triangular.

7. $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ y - z = 3 \\ z = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ y + 4z = 10 \\ z = 3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y + 3z = 9 \\ 2z = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2y - z = 2 \\ 3z = 12 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - y + 6z = 5 \\ y + 4z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x + 3z = 10 \\ 2y - z = -6 \\ \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$

13–16 ■ Eliminar una incógnita Ejecute una operación en el sistema dado que elimine la incógnita indicada. Escriba el nuevo sistema equivalente.

13. $\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases}$

Elimine el término x de la segunda ecuación.

14. $\begin{cases} -5x + 2y - 3z = 3 \\ 10x - 3y + z = -20 \\ -x + 3y + z = 8 \end{cases}$

Elimine el término x de la segunda ecuación.

15. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 2x + 3y + z = 13 \\ 6x - 5y - z = 7 \end{cases}$

Elimine el término x de la tercera ecuación.

16. $\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ y + z = -1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$

Elimine el término y de la tercera ecuación.

17–38 ■ Resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas Encuentre la solución completa del sistema lineal o demuestre que este es inconsistente.

17. $\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2y + z = -1 \\ -x + y - 2z = 5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 2z = -2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ y - 3z = -16 \\ x - 3y + 2z = 14 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -10 \\ 3y + z = 7 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ 2x - y - 6z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 5z = 8 \\ 2x - y - 2z = -7 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2y + 4z = -1 \\ -2x + y + 2z = -1 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y - z = -1 \\ 6x + 2y + z = 2 \\ -x - y + 3z = -2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x + 6y - 3z = 4 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -x + 2y + 5z = 4 \\ x - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 11z = 2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + 6z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x + z + 2w = 6 \\ y - 2z = -3 \\ x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + 3z - 2w = 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 2 \end{cases}$

APLICACIONES

39. Planeación financiera Mark tiene 100 000 dólares para invertir. Su asesor financiero le aconseja diversificar sus inversiones en tres tipos de bonos: a corto plazo, a plazo intermedio y a largo plazo. Los bonos a corto plazo pagan 4% anualmente, los bonos a plazo intermedio pagan 5% y los bonos a largo plazo pagan 6%. Mark desea realizar un ingreso anual total de 5.1%, con iguales cantidades invertidas en bonos a plazos corto y mediano. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de bono?

40. Planeación financiera Cyndee quiere invertir 50 000 dólares. Su asesor financiero le aconseja invertir en tres tipos de cuentas: una que paga 3%, otra que paga $5\frac{1}{2}$% y otra que paga 9% de interés simple al año. Cyndee quiere invertir el doble de dinero en la cuenta con menos rendimiento, ya que es menos riesgosa que la cuenta de más alto rendimiento. ¿Cuánto debe invertir en cada cuenta para lograr un rendimiento anual total de 2 540 dólares?

41. Agricultura Un agricultor tiene 1 200 acres de tierras en las que produce maíz, trigo y frijol de soya. Producir maíz le cuesta 45 dólares por acre, producir trigo cuesta 60 dólares y producir frijol de soya 50 dólares. Debido a la demanda del mercado, el agricultor producirá el doble de acres de trigo que de maíz. Ha asignado 63 750 dólares para costear la producción de sus cosechas. ¿Cuántos acres de cada cultivo debe plantar?

42. Gasolinera Una gasolinera vende tres tipos de gasolina: regular en 3.00 dólares el galón, performance plus en $3.20 el galón y premium en $3.30 el galón. En un día particular se vendieron 6 500 galones de gasolina para un total de 20 050 dólares. Se vendieron tres veces más galones de gasolina regular que de premium. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron ese día?

43. Nutrición Una bióloga está realizando un experimento sobre los efectos de varias combinaciones de vitaminas; desea darle a cada uno de sus conejos de laboratorio una dieta que contiene exactamente 9 mg de niacina, 14 mg de tiamina y 32 mg de riboflavina. Cuenta con tres tipos diferentes de pastillas cuyo contenido de vitaminas (por onza) se da en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada tipo de alimento debe administrarse diariamente a cada conejo para satisfacer los requisitos del experimento?

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Niacina (mg/oz)	2	3	1
Tiamina (mg/oz)	3	1	3
Riboflavina (mg/oz)	8	5	7

44. Programa de dieta Nicole inició una nueva dieta que requiere el consumo de 460 calorías en cada comida, 6 gramos de fibra y 11 gramos de grasas. La tabla siguiente muestra el contenido de fibra, grasas y calorías de una porción de cada uno de tres alimentos en el desayuno. ¿Cuántas porciones de cada alimento debe consumir Nicole para seguir su dieta?

Alimento	Fibra (g)	Grasa (g)	Calorías
Tostada	2	1	100
Queso Cottage	0	5	120
Fruta	2	0	60

45. Mezclas de jugos La Compañía de Jugos ofrece tres clases de bebidas de frutas: Mango Medianoche, Torrente Tropical y Poder de Piña. Cada una contiene las cantidades de jugo que se ven en la tabla siguiente.

Bebida de frutas	Jugo de mango (oz)	Jugo de piña (oz)	Jugo de naranja (oz)
Mango Medianoche	8	3	3
Torrente Tropical	6	5	3
Poder de Piña	2	8	4

En un día particular la Compañía de Jugos utilizó 820 oz (onzas) de jugo de mango, 690 de jugo de piña y 450 de jugo de naranja. ¿Cuántas bebidas de cada clase se vendieron ese día?

46. Manufactura de aparatos electrodomésticos Kitchen Korner produce refrigeradores, lavadoras de trastos y estufas en tres fábricas diferentes. La tabla siguiente da el número de cada producto producido en cada fábrica por día. Kitchen Korner ha recibido un pedido por 110 refrigeradores, 150 lavadoras de trastos y 114 estufas. ¿Cuántos días debe programarse cada una de las plantas para satisfacer dicho pedido?

Aparato	Fábrica A	Fábrica B	Fábrica C
Refrigeradores	8	10	14
Lavadoras de loza	16	12	10
Estufas	10	18	6

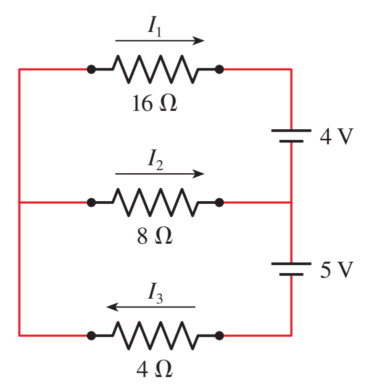
47. Portafolio de acciones Un inversionista posee tres acciones: A, B y C. Los precios de las acciones al cierre de tres días sucesivos de operaciones de compraventa se dan en la tabla siguiente.

	Acción A	Acción B	Acción C
Lunes	$10	$25	$29
Martes	$12	$20	$32
Miércoles	$16	$15	$32

A pesar de la volatilidad en los precios de las acciones, el valor total de las acciones del inversionista permaneció sin cambio en 74 000 dólares al final de cada uno de estos tres días. ¿Cuántas porciones de cada acción posee ahora el inversionista?

48. Electricidad Mediante el uso de las leyes de Kirchhoff se puede demostrar que las corrientes I_1, I_2 e I_3 que pasan por las tres ramas del circuito de la figura satisfacen el sistema lineal dado. Resuelva el sistema para encontrar I_1, I_2 e I_3.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}$$



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

49. DEMOSTRACIÓN: ¿Puede un sistema lineal tener exactamente dos soluciones?

a) Suponga que (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Demuestre que $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}, \dfrac{y_0 + y_1}{2}, \dfrac{z_0 + z_1}{2}\right)$ es también una solución.

b) Use el resultado del inciso *a*) para demostrar que si el sistema tiene dos soluciones diferentes entonces tiene infinitas soluciones.

10.3 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

■ Matrices ■ La matriz aumentada de un sistema lineal ■ Operaciones elementales de renglones ■ Eliminación de Gauss ■ Eliminación de Gauss-Jordan ■ Sistemas inconsistentes y dependientes ■ Modelado con sistemas lineales

Una *matriz* es simplemente un conjunto rectangular de números. Las matrices se usan para organizar la información en categorías que corresponden a los renglones y las columnas de la matriz. Por ejemplo, un científico podría organizar la información sobre una población de ballenas en peligro como sigue:

	Inmaduras	Jóvenes	Adultas
Machos	12	52	18
Hembras	15	42	11

Esta es una forma compacta de decir que hay 12 machos inmaduros, 15 hembras inmaduras, 18 machos adultos, etcétera.

En esta sección representaremos un sistema lineal mediante una matriz, llamada *matriz aumentada* del sistema.

Sistema lineal **Matriz aumentada**

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Ecuación 1
Ecuación 2
x y

La matriz aumentada contiene la misma información que el sistema, pero en una forma más sencilla. Las operaciones que aprendimos para solucionar sistemas de ecuaciones se pueden realizar ahora en la matriz aumentada.

■ Matrices

Empezamos por definir los diversos elementos que conforman una matriz.

DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una **matriz** $m \times n$ es un arreglo rectangular con m **renglones** y n **columnas**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m renglones

n columnas

Decimos que la matriz tiene **dimensión** $m \times n$. Los números a_{ij} son las **entradas** de la matriz. El subíndice de la entrada a_{ij} indica que la matriz está en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Presentamos algunos ejemplos de matrices.

Matriz	Dimensión	
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	2×3	2 renglones por 3 columnas
$\begin{bmatrix} 6 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1×4	1 renglón por 4 columna

La matriz aumentada de un sistema lineal

Podemos escribir un sistema de ecuaciones lineales como una matriz que se conoce como la **matriz aumentada** del sistema, al escribir sólo los coeficientes y las constantes que aparecen en las ecuaciones. Un ejemplo es el siguiente.

Sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \\ -x + 4z = 11 \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

Observe que una incógnita faltante en una ecuación corresponde a una entrada 0 en la matriz aumentada.

EJEMPLO 1 ■ Encontrar la matriz aumentada de un sistema lineal

Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x + 3z = 1 \\ 7y + z = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero escribimos el sistema lineal con las incógnitas alineadas en columnas.

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x + 3z = 1 \\ 7y + 4z = 5 \end{cases}$$

La matriz aumentada es la matriz cuyas entradas son los coeficientes y las constantes en este sistema.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

Operaciones elementales de renglones

Las operaciones que utilizamos en la sección 10.2 para resolver sistemas lineales corresponden a operaciones en los renglones de la matriz aumentada del sistema. Por ejemplo, sumarle un múltiplo de una ecuación a otro a sumarle un múltiplo de un renglón a otro.

OPERACIONES ELEMENTALES DE RENGLONES

1. Sumarle un múltiplo de un renglón a otro.
2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
3. Intercambiar dos renglones.

Observe que realizar cualquiera de estas operaciones en la matriz aumentada de un sistema no cambia su solución. Usamos la siguiente notación para describir las operaciones elementales de renglones:

Símbolo	**Descripción**
$R_i + kR_j \to R_i$	Cambie el i-ésimo renglón al sumarle a éste k veces el renglón j, y luego regrese el resultado al renglón i.
kR_i	Multiplique el i-ésimo renglón por k.
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambie los renglones i-ésimo y j-ésimo.

En el siguiente ejemplo comparamos las dos formas de escribir sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 2 ■ Uso de operaciones elementales de renglones para resolver un sistema lineal

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Nuestro objetivo es eliminar el término x de la segunda ecuación y los términos x y y de la tercera ecuación. Por comparación escribimos el sistema de ecuaciones y su matriz aumentada.

Sistema | **Matriz aumentada**

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Sume $(-1) \times$ ecuación 1 a ecuación 2.
Sume $(-3) \times$ ecuación 1 a ecuación 3.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases} \qquad \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplique ecuación 3 por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sume $(-3) \times$ ecuación 3 a ecuación 2 (para eliminar y de la ecuación 2).

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{R_2 - 3R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Intercambie las ecuaciones 2 y 3.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 2z = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora usamos la sustitución hacia atrás para encontrar que $x = 2$, $y = 7$ y $z = 3$. La solución es $(2, 7, 3)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

■ Eliminación de Gauss

En general, para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante su matriz aumentada, utilizamos operaciones elementales de renglones para llegar a una matriz de cierta forma. Esta forma se describe en el recuadro siguiente.

FORMA ESCALONADA POR RENGLONES Y FORMA ESCALONADA POR RENGLONES REDUCIDA DE UNA MATRIZ

Una matriz está en **forma escalonada por renglones** si satisface las siguientes condiciones.

1. El primer número diferente de cero de cada renglón (leyendo de izquierda a derecha) es 1. Este se llama **entrada inicial**.
2. La entrada inicial de cada renglón está a la derecha de la entrada inicial del renglón situado inmediatamente arriba de esta.
3. Todos los renglones formados enteramente de ceros están en la parte inferior.

Una matriz está en **forma escalonada por renglones reducida** si está en la forma escalonada por renglones y si también satisface la siguiente condición.

4. Todo número arriba y abajo de cada entrada inicial es un 0.

En las siguientes matrices la primera no está en forma escalonada por renglones. La segunda *está* en forma escalonada por renglones y la tercera está en forma escalonada por renglones reducida. Los elementos en rojo son los elementos iniciales.

No está en forma escalonada por renglones

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales *no* están corridos a la derecha en renglones sucesivos

Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales están corridos a la derecha en renglones sucesivos

Forma escalonada por renglones reducida

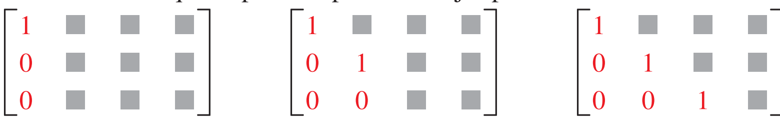
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales tienen números 0 arriba y abajo de ellos

Ahora veamos una forma sistemática de poner una matriz en forma escalonada por renglones usando operaciones elementales de renglones:

- Empiece por obtener 1 en la esquina superior izquierda. Luego obtenga ceros abajo del 1 al sumar múltiplos apropiados del primer renglón a los renglones debajo de este.
- Obtenga un 1 inicial en el siguiente renglón y luego obtenga ceros debajo de ese 1.
- En cada etapa asegúrese de que toda entrada inicial está a la derecha de la entrada inicial en el renglón arriba de esta; reacomode los renglones si es necesario.
- Continúe este proceso hasta llegar a una matriz en forma escalonada por renglones.

Esta es la forma en la que el proceso puede trabajar para una matriz 3×4:



Una vez que una matriz aumentada está en forma escalonada por renglones, podemos resolver el sistema lineal correspondiente usando la sustitución hacia atrás. Esta técnica se llama **eliminación gaussiana**, en honor a su inventor, el matemático alemán C. F. Gauss (vea página 290).

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA USANDO LA ELIMINACIÓN GAUSSIANA

1. **Matriz aumentada.** Escriba la matriz aumentada del sistema.
2. **Forma escalonada por renglones.** Use operaciones elementales de renglón para cambiar la matriz aumentada a forma escalonada por renglones.
3. **Sustitución hacia atrás.** Escribimos el nuevo sistema de ecuaciones que corresponde a la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada y resolvemos por medio de la sustitución hacia atrás.

EJEMPLO 3 ■ Solución de un sistema usando forma escalonada por renglones

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales mediante la eliminación gaussiana:

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero escribimos la matriz aumentada del sistema y luego usamos operaciones elementales de renglones para ponerla en forma escalonada por renglones.

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix}$$ Necesita un 1 aquí

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix}$$ Necesita ceros aquí

$$\xrightarrow[R_3 + 2R_1 \to R_3]{R_2 - 3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$ Necesita un 1 aquí

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$ Necesita un 0 aquí

$$\xrightarrow{R_3 - 5R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}$$ Necesita un 1 aquí

Forma escalonada por renglones:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada por renglones y el correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 4z = -7 \\ z = -2 \end{cases}$$

Sustitución hacia atrás: Usamos la sustitución hacia atrás para resolver el sistema.

$y + 4(-2) = -7$ Sustituimos hacia atrás $z = -2$ en la ecuación 2

$y = 1$ Despejamos y

$x + 2(1) - (-2) = 1$ Sustituimos hacia atrás $y = 1$ y $z = -2$ en la ecuación 1

$x = -3$ Despejamos x

Entonces la solución del sistema es $(-3, 1, -2)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

```
ref([A])
  [[1  2  -1  1  ]
   [0  1  2   -3]
   [0  0  1   -2]]
```

FIGURA 1

Las calculadoras graficadoras tienen una instrucción "row-echelon form" (forma escalonada por renglones) que pone una matriz en forma escalonada por renglones. (En la TI-83/84 esta instrucción es `ref`.) Para la matriz aumentada del ejemplo 3 la instrucción `ref` da la salida que se muestra en la figura 1. Observe que la forma escalonada por renglones que se obtiene con la calculadora difiere de la que obtuvimos en el ejem-

Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para instrucciones específicas del trazado de gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

plo 3. Esto es porque la calculadora emplea operaciones de renglones diferentes de las que nosotros usamos. El lector debe verificar que la forma escalonada por renglones de su calculadora conduce a la misma solución que la nuestra.

Eliminación de Gauss-Jordan

Si ponemos la matriz aumentada de un sistema lineal en forma escalonada por renglones *reducida* entonces no necesitamos la sustitución hacia atrás para resolver el sistema. Para poner una matriz en forma escalonada por renglones *reducida* usamos los pasos siguientes.

- Use operaciones elementales de renglón para poner la matriz en forma escalonada por renglones.
- Obtenga ceros arriba de cada entrada inicial al sumar múltiplos del renglón que contenga esa entrada a los renglones arriba de él. Empiece con la última entrada inicial y trabaje hacia arriba.

Veamos ahora cómo funciona el proceso para una matriz 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

El uso de la forma escalonada por renglones reducida para resolver un sistema se llama **eliminación de Gauss-Jordan**. En el ejemplo siguiente se muestra el proceso.

EJEMPLO 4 ■ Solución de un sistema usando la forma escalonada por renglones reducida

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales, usando eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 usamos la eliminación de Gauss en la matriz aumentada de este sistema para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada por renglones. Continuamos usando operaciones elementales de renglón en la última matriz del ejemplo 3 para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada por renglones reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Necesita ceros aquí

Necesita un 0 aquí

$$\xrightarrow[R_1 + R_3 \rightarrow R_1]{R_2 - 4R_3 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada por renglones reducida, y el correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Dado que el sistema está en la forma escalonada por renglones reducida, no se requiere sustitución hacia atrás para obtener la solución.

Por lo que, de inmediato llegamos a la solución $(-3, 1, -2)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

```
rref([A])
   [[1 0 0 -3]
    [0 1 0 1 ]
    [0 0 1 -2]]
```

FIGURA 2

Las calculadoras graficadoras también tienen una instrucción que pone una matriz en la forma escalonada por renglones reducida. (En la TI-83/84 esta instrucción es `rref`.) Para la matriz aumentada del ejemplo 4, la instrucción `rref` da la salida que se ve en la figura 2. La calculadora da la misma forma escalonada por renglones reducida como la que obtuvimos en el ejemplo 4. Esto es porque toda matriz tiene una *única* forma escalonada por renglones reducida.

Sistemas inconsistentes y dependientes

Los sistemas de ecuaciones lineales que consideramos en los ejemplos 1-4 tenían exactamente una solución, pero como sabemos de la sección 10.2 un sistema lineal puede tener una solución, ninguna solución o infinitas soluciones. Por fortuna, la forma escalonada por renglones de un sistema nos permite determinar cuál de estos casos aplica, como se describe en el cuadro siguiente.

Primero necesitamos alguna terminología. Una **incógnita inicial** en un sistema lineal es aquella que corresponde a una entrada inicial en la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada del sistema.

SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL EN FORMA ESCALONADA POR RENGLONES

Suponga que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido transformada por eliminación de Gauss a la forma escalonada por renglones. Entonces, exactamente una de las siguientes conclusiones es verdadera.

1. **No hay solución.** Si la forma escalonada por renglones contiene un renglón que representa la ecuación $0 = c$, donde c es un número diferente de cero, entonces el sistema no tiene solución. Un sistema que no tiene solución se denomina **inconsistente**.
2. **Una solución.** Si cada una de las incógnitas en la forma escalonada por renglones es una incógnita inicial, entonces el sistema tiene exactamente una solución que encontramos usando la sustitución hacia atrás o la eliminación de Gauss-Jordan.
3. **Infinitas soluciones.** Si las incógnitas en la forma escalonada por renglones no son todas incógnitas iniciales, y si el sistema no es inconsistente, entonces tiene infinitas soluciones. En este caso el sistema se conoce como **dependiente**. Resolvemos el sistema al poner la matriz en forma escalonada por renglones reducida y al expresar las incógnitas iniciales en términos de las incógnitas no iniciales. Las incógnitas no iniciales pueden tomar cualesquier números reales como sus valores.

Las matrices que se presentan a continuación, todas en forma escalonada de renglones, ilustran los tres casos que hemos descrito.

No hay solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La última ecuación dice $0 = 1$

Una solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Cada incógnita es una incógnita inicial

Infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z no es incógnita inicial

EJEMPLO 5 ■ Un sistema sin solución

Resuelva el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 12 \\ 2x - 5y + 5z = 14 \\ x - 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Transformamos el sistema en la forma escalonada por renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz está en forma escalonada por renglones, de modo que podemos detener el proceso de eliminación de Gauss. Ahora, si convertimos el último renglón en forma de ecuación, obtenemos $0x + 0y + 0z = 1$, o $0 = 1$, lo cual es falso. No importa qué valores escojamos para x, y y z, la última ecuación nunca será un enunciado verdadero. Esto significa que el sistema *no tiene solución.*

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

```
ref([A])
[[1  -2.5  2.5  7   ]
 [0  1     1    -10]
 [0  0     0    1  ]]
```

FIGURA 3

La figura 3 muestra la forma escalonada por renglones producida por una calculadora TI-83/84 para la matriz aumentada del ejemplo 5. Usted debe comprobar que esta da la misma solución.

EJEMPLO 6 ■ Un sistema con infinitas soluciones

Encuentre la solución completa del sistema:

$$\begin{cases} -3x - 5y + 36z = 10 \\ -x \qquad\quad + 7z = 5 \\ x + y - 10z = -4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones reducida. (Con la instrucción `rref` en una calculadora TI-83 se obtiene el mismo resultado como se muestra en la figura 4.)

Forma escalonada por renglones reducida en la calculadora TI-83:

```
rref([A])
   [[1  0  -7  -5]
    [0  1  -3   1]
    [0  0   0   0]]
```

FIGURA 4

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El tercer renglón corresponde a la ecuación $0 = 0$. Esta ecuación es siempre verdadera, no importa cuáles valores se usen para x, y o z. Dado que la ecuación no agrega información nueva acerca de las incógnitas podemos eliminarla del sistema. En consecuencia, la última matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \qquad - 7z = -5 & \text{Ecuación 1} \\ \qquad y - 3z = 1 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Incógnitas iniciales

Ahora despejamos las incógnitas iniciales x y y en términos de la incógnita no inicial z.

$$x = 7z - 5 \qquad \text{Despeje } x \text{ en la ecuación 1}$$

$$y = 3z + 1 \qquad \text{Despeje } y \text{ en la ecuación 2}$$

Para obtener la solución completa, que z sea cualquier número real t y expresamos x, y y z en términos de t.

$$x = 7t - 5$$
$$y = 3t + 1$$
$$z = t$$

También podemos escribir la solución como la terna ordenada $(7t - 5, 3t + 1, t)$, donde t es cualquier número real.

 **Ahora intente realizar el ejercicio 41** ■

En el ejemplo 6, para obtener soluciones específicas, damos un valor específico a t. Por ejemplo, si $t = 1$, entonces

$$x = 7(1) - 5 = 2$$
$$y = 3(1) + 1 = 4$$
$$z = 1$$

Ahora veamos algunas otras soluciones del sistema obtenidas sustituyendo otros valores para el parámetro t.

Parámetro t	**Solución $(7t - 5, 3t + 1, t)$**
-1	$(-12, -2, -1)$
0	$(-5, 1, 0)$
2	$(9, 7, 2)$
5	$(30, 16, 5)$

EJEMPLO 7 ■ Un sistema con infinitas soluciones

Encuentre la solución completa del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 4w = 10 \\ x + 3y - 3z - 4w = 15 \\ 2x + 2y - 6z - 8w = 10 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones reducida.

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & -4 & 15 \\ 2 & 2 & -6 & -8 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto está en la forma escalonada por renglones reducida. Puesto que el último renglón representa la ecuación $0 = 0$, podemos eliminarlo. En consecuencia, la última matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \quad\;\; - 3z - 4w = 0 \\ \quad\; y \qquad\qquad\;\; = 5 \end{cases}$$

incógnitas iniciales

Para obtener la solución completa despejamos las incógnitas iniciales x y y en términos de las incógnitas no iniciales z y w, y hacemos que z y w sean cualesquiera números reales. Entonces la solución completa es

$$x = 3s + 4t$$
$$y = 5$$
$$z = s$$
$$w = t$$

donde s y t son cualesquiera números reales.

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■



Observe que s y t *no tienen* que ser *el mismo* número real en la solución para el ejemplo 7. Podemos elegir valores arbitrarios para cada una si deseamos construir una solución específica para el sistema. Por ejemplo, si hacemos que $s = 1$ y $t = 2$, entonces obtenemos la solución (11, 5, 1, 2). Es necesario verificar que esto satisface realmente las tres ecuaciones originales del ejemplo 7.

Los ejemplos 6 y 7 ilustran este hecho general: si un sistema en forma escalonada por renglones tiene n ecuaciones diferentes de cero en m incógnitas $(m > n)$, entonces la solución completa tendrá $m - n$ incógnitas no iniciales. Es decir, en el ejemplo 6 obtenemos *dos* ecuaciones diferentes de cero con las *tres* incógnitas x, y y z, lo que da $3 - 2 = 1$ incógnita no inicial.

■ Modelado con sistemas lineales

Las ecuaciones lineales, que a veces contienen cientos o hasta miles de incógnitas, se presentan con frecuencia en las aplicaciones de álgebra para ciencias y otros campos. Por ahora, consideremos un ejemplo que tiene sólo tres incógnitas.

EJEMPLO 8 ■ Análisis nutricional usando un sistema de ecuaciones lineales

Un nutriólogo está realizando un experimento con estudiantes voluntarios. Él desea alimentar diariamente a uno de sus sujetos con una combinación de tres alimentos comerciales de dieta: MiniCal, LiquiFast y SlimQuick. Para el experimento es importante que cada día el sujeto consuma exactamente 500 mg de potasio, 75 g de proteína y 1 150 unidades de vitamina D. Las cantidades de estos nutrientes en una onza de cada alimento se presentan en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada alimento debe consumir el sujeto diariamente para satisfacer exactamente las necesidades de nutrientes?

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potasio (mg)	50	75	10
Proteína (g)	5	10	3
Vitamina D (unidades)	90	100	50

SOLUCIÓN Represente con x, y y z el respectivo número de onzas de MiniCal, LiquiFast y Slim-Quick que el sujeto debe consumir cada día. Esto significa que obtendrá $50x$ mg de potasio del MiniCal, $75y$ mg del LiquiFast y $10z$ mg del SlimQuick, para un total de $50x + 75y + 10z$ mg de potasio en total. Dado que las necesidades de potasio son de 500 mg obtenemos primeramente la ecuación que se muestra. Un razonamiento similar para las necesidades de proteína y vitamina D nos lleva al sistema

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potasio} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Proteína} \\ 90x + 100y + 50z = 1\,150 & \text{Vitamina D} \end{cases}$$

```
rref([A])
  [[1 0 0 5 ]
   [0 1 0 2 ]
   [0 0 1 10]]
```

FIGURA 5

Dividiendo la primera ecuación entre 5 y la tercera entre 10 se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema mediante la eliminación de Gauss, o podemos usar una calculadora graficadora para encontrar la forma escalonada por renglones reducida de la matriz aumentada del sistema. Usando la instrucción `rref` en la TI-83/84, obtenemos el resultado de la figura 5. De la forma escalonada por renglones reducida vemos que $x = 5$, $y = 2$, $z = 10$. Al sujeto deben administrársele 5 oz de MiniCal, 2 oz de LiquiFast y 10 oz de SlimQuick todos los días.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 5$, $y = 2$, $z = 10$:

$$\begin{cases} 10(5) + 15(2) + 2(10) = 100 \\ 5(5) + 10(2) + 3(10) = 75 \\ 9(5) + 10(2) + 5(10) = 115 \end{cases} \checkmark$$

Ahora intente realizar el ejercicio 69 ■

Una aplicación más práctica podría implicar docenas de alimentos y nutrientes en lugar de sólo tres. Estos problemas llevan a sistemas con grandes números de incógnitas y ecuaciones. Las calculadoras graficadoras y computadoras son esenciales para resolver sistemas tan grandes.

10.3 EJERCICIOS

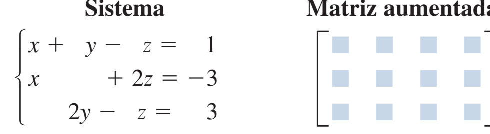
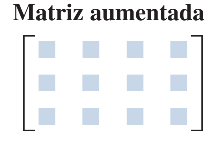
CONCEPTOS

1. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones, entonces el sistema se denomina ________. Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, entonces el sistema se denomina ________.

2. Escriba la matriz aumentada del siguiente sistema de ecuaciones.

Sistema **Matriz aumentada**

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

3. La siguiente matriz es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas x, y y z. (Se da en forma escalonada por renglones reducida.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Las incógnitas iniciales son ________.

b) ¿El sistema es inconsistente o dependiente? ________

c) La solución del sistema es:

$x =$ _____ , $y =$ _____ , $z =$ _____

4. La matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales está dada en forma escalonada por renglones reducida. Encuentre la solución del sistema.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$x =$ _____ $x =$ _____ $x =$ _____

$y =$ _____ $y =$ _____ $y =$ _____

$z =$ _____ $z =$ _____ $z =$ _____

HABILIDADES

5–10 ■ Dimensiones de una matriz Exprese la dimensión de la matriz.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 12 \\ 35 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11–12 ■ Matriz aumentada Escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones lineales.

11. $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x - y = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} -x + z = -1 \\ 3y - 2z = 7 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$

13–20 ■ Forma de una matriz Se da una matriz. ***a)*** Determine si la matriz está en forma escalonada por renglones. ***b)*** Determine si la matriz está en forma escalonada por renglones reducida. ***c)*** Escriba el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

21–24 ■ Operaciones elementales con renglones Realice la operación elemental con renglones indicada.

21. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Sume 3 veces el renglón 1 al renglón 2.

22. $\begin{bmatrix} -5 & 2 & -3 & 3 \\ 10 & -3 & 1 & -20 \\ -1 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Sume 2 veces el renglón 1 al renglón 2.

23. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 6 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

Sume -3 veces el renglón 1 al renglón 3.

24. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Sume -2 veces el renglón 2 al renglón 3.

25–28 ■ Sustitución hacia atrás Se da una matriz en forma escalonada de renglones. ***a)*** Escriba el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada. ***b)*** Use la sustitución hacia atrás para resolver el sistema.

25. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

29–38 ■ Sistemas lineales con una solución El sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única. Encuentre la solución usando eliminación de Gauss o eliminación de Gauss-Jordan.

29. $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x + y + 6z = 3 \\ x + y + 3z = 3 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 17 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 2y + z = 4 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - z = 10 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 22 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 13 \\ -x + 2y - 5z = 6 \\ 5x - y - z = 49 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 10x + 10y - 20z = 60 \\ 15x + 20y + 30z = -25 \\ -5x + 30y - 10z = 45 \end{cases}$

39–48 ■ Sistemas lineales dependientes o inconsistentes Determine si el sistema de ecuaciones lineales es inconsistente o dependiente. Si es dependiente, encuentre la solución completa.

39. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} x + 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ -y + 8z = 8 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x - 3y - 9z = -5 \\ x + 3z = 2 \\ -3x + y - 4z = -3 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ -2x + 6y - 11z = 1 \\ 3x - 16y + 20z = -26 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 4x - 8y + 32z = 24 \\ 2x - 3y + 11z = 4 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} -2x + 6y - 2z = -12 \\ x - 3y + 2z = 10 \\ -x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x + 4y - 2z = -3 \\ 2x - y + 5z = 12 \\ 8x + 5y + 11z = 30 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} 3r + 2s - 3t = 10 \\ r - s - t = -5 \\ r + 4s - t = 20 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 12 \\ -x - \frac{1}{2}y + z = -6 \\ 3x + \frac{3}{2}y - 3z = 18 \end{cases}$ **48.** $\begin{cases} y - 5z = 7 \\ 3x + 2y = 12 \\ 3x + 10z = 80 \end{cases}$

49–64 ■ Resolver un sistema lineal Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

49. $\begin{cases} 4x - 3y + z = -8 \\ -2x + y - 3z = -4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$ **50.** $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 14 \\ 4x - y - 2z = -17 \\ -x - y + z = 3 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ -x - 7z = 10 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} -4x - y + 36z = 24 \\ x - 2y + 9z = 3 \\ -2x + y + 6z = 6 \end{cases}$

53. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -5 \\ -2x - 4y - 6z = 10 \\ 3x + 7y - 2z = -13 \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -4x + 3y + z = 4 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$

55. $\begin{cases} x - y + 6z = 8 \\ x + z = 5 \\ x + 3y - 14z = -4 \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} 3x - y + 2z = -1 \\ 4x - 2y + z = -7 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$

57. $\begin{cases} -x + 2y + z - 3w = 3 \\ 3x - 4y + z + w = 9 \\ -x - y + z + w = 0 \\ 2x + y + 4z - 2w = 3 \end{cases}$

58. $\begin{cases} x + y - z - w = 6 \\ 2x + z - 3w = 8 \\ x - y + 4w = -10 \\ 3x + 5y - z - w = 20 \end{cases}$

59. $\begin{cases} x + y + 2z - w = -2 \\ 3y + z + 2w = 2 \\ x + y + 3w = 2 \\ -3x + z + 2w = 5 \end{cases}$

60. $\begin{cases} x - 3y + 2z + w = -2 \\ x - 2y - 2w = -10 \\ z + 5w = 15 \\ 3x + 2z + w = -3 \end{cases}$

61. $\begin{cases} x - y + w = 0 \\ 3x - z + 2w = 0 \\ x - 4y + z + 2w = 0 \end{cases}$

62. $\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 5 \\ -x + y + 4z - w = 3 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

63. $\begin{cases} x + z + w = 4 \\ y - z = -4 \\ x - 2y + 3z + w = 12 \\ 2x - 2z + 5w = -1 \end{cases}$

64. $\begin{cases} y - z + 2w = 0 \\ 3x + 2y + w = 0 \\ 2x + 4w = 12 \\ -2x - 2z + 5w = 6 \end{cases}$



65–68 ■ Resolver un sistema lineal usando una calculadora graficadora Resuelva el sistema de ecuaciones lineales usando la instrucción `rref` de una calculadora graficadora. Exprese su respuesta redondeada a dos decimales.

65. $\begin{cases} 0.75x - 3.75y + 2.95z = 4.0875 \\ 0.95x - 8.75y = 3.375 \\ 1.25x - 0.15y + 2.75z = 3.6625 \end{cases}$

66. $\begin{cases} 1.31x + 2.72y - 3.71z = -13.9534 \\ -0.21x + 3.73z = 13.4322 \\ 2.34y - 4.56z = -21.3984 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 42x - 31y - 42w = -0.4 \\ -6x - 9w = 4.5 \\ 35x - 67z + 32w = 348.8 \\ 31y + 48z - 52w = -76.6 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 49x - 27y + 52z = -145.0 \\ 27y + 43w = -118.7 \\ -31y + 42z = -72.1 \\ 73x - 54y = -132.7 \end{cases}$

APLICACIONES

69. Nutrición Un médico recomienda que un paciente consuma diariamente 50 mg de niacina, de riboflavina y de tiamina para aliviar una deficiencia vitamínica. En su maletín de medicinas en casa el paciente encuentra tres marcas de píldoras de vitamina. Las cantidades de las vitaminas relevantes por píldora se dan en la tabla siguiente. ¿Cuántas píldoras de cada tipo debe tomar a diario para obtener 50 mg de cada vitamina?

	VitaMax	Vitron	VitaPlus
Niacina (mg)	5	10	15
Riboflavina (mg)	15	20	0
Tiamina (mg)	10	10	10

70. Mezclas Una química tiene tres soluciones ácidas de varias concentraciones. La primera es 10% ácida; la segunda, 20% y, la tercera, 40%. ¿Cuántos mililitros de cada una debe usar para hacer 100 ml de una solución al 18%, si tiene que usar cuatro veces más de la solución al 10% que de la solución al 40 por ciento?

71. Distancia, velocidad y tiempo Amanda, Bryce y Corey participan en una competencia en la que deben correr, nadar y andar en bicicleta sobre una ruta marcada. Sus magnitudes de velocidad promedio se dan en la tabla. Corey termina primero con un tiempo total de 1 h 45 min. Amanda llega en segundo lugar con un tiempo de 2 h 30 min. Bryce termina al último con un tiempo de 3 h. Encuentre la distancia (en millas) para cada parte de la carrera.

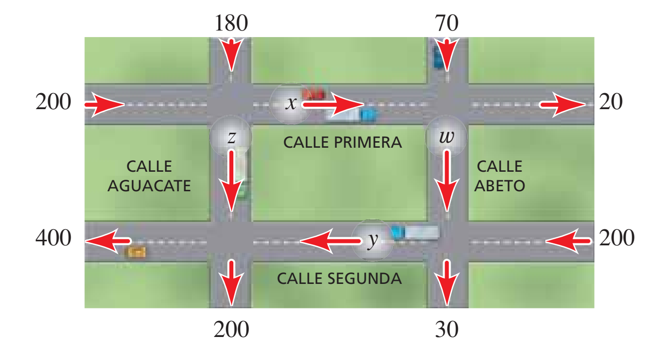
	Promedio de velocidad (mi/h)		
	Correr	**Nadar**	**Bicicleta**
Amanda	10	4	20
Bryce	$7\frac{1}{2}$	6	15
Corey	15	3	40

72. Uso de salón de clase Una pequeña escuela tiene 100 estudiantes que ocupan tres salones: A, B y C. Después del primer periodo del día de clase, la mitad de los estudiantes del salón A pasa al salón B, un quinto de los estudiantes del salón B pasa al salón C y un tercio de los estudiantes del salón C pasa al salón A. No obstante, el número total de estudiantes en cada salón es igual para ambos periodos. ¿Cuántos estudiantes ocupan cada salón?

73. Fabricación de muebles Una fábrica de muebles construye mesas, sillas y armarios de madera. Cada pieza de mueble requiere tres procesos: corte de madera, ensamble y acabado. Cada proceso requiere el número de horas dado en la tabla siguiente. Los trabajadores de la fábrica pueden trabajar 300 horas de corte, 400 horas de ensamble y 590 horas de acabado por cada semana de trabajo. ¿Cuántas mesas, sillas y armarios deben ser producidos para que se usen todas las horas de trabajo disponibles? ¿O es esto imposible?

	Mesa	Silla	Armario
Corte (h)	$\frac{1}{2}$	1	1
Ensamble (h)	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1
Acabado (h)	1	$1\frac{1}{2}$	2

74. Flujo de tránsito En la figura siguiente se muestra una sección de la red de calles de una ciudad. Las flechas indican calles con circulación en un sentido, los números indican cuántos autos entran o salen de dicha sección de la ciudad por la calle indicada en cierto periodo de una hora. Las incógnitas x, y, z y w representan el número de autos que se mueven a lo largo de ciertas partes de las calles Primera, Segunda, Aguacate y Abeto durante este periodo. Encuentre x, y, z y w, suponiendo que ninguno de los autos se detiene ni se estaciona en ninguna de las calles que se muestran.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN



75. DISCUSIÓN: Polinomios determinados por un conjunto de puntos Todos sabemos que dos puntos determinan de manera única una recta $y = ax + b$ en el plano de coordenadas. Del mismo modo, tres puntos determinan de manera única un polinomio cuadrático (segundo grado)

$$y = ax^2 + bx + c$$

cuatro puntos determinan de manera única un polinomio cúbico (tercer grado)

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y así sucesivamente. (Algunas excepciones a esta regla son si los tres puntos en realidad se encuentran sobre una recta, o si los cuatro puntos están en una cuadrática o recta, etcétera.) Para el siguiente conjunto de cinco puntos encuentre la recta que contenga los primeros dos puntos, la cuadrática que contenga los primeros tres puntos, la cúbica que contenga los primeros cuatro puntos y el polinomio de cuarto grado que contenga los cinco puntos.

$$(0, 0), \quad (1, 12), \quad (2, 40), \quad (3, 6), \quad (-1, -14)$$

Trace la gráfica de los puntos y funciones en el mismo rectángulo de vista usando una calculadora graficadora.

10.4 EL ÁLGEBRA DE MATRICES

■ Igualdad de matrices ■ Suma, resta y multiplicación por escalares de matrices ■ Multiplicación de matrices ■ Propiedades de multiplicación de matrices ■ Aplicaciones de multiplicación de matrices ■ Gráficas por computadora

Hasta este punto hemos empleado matrices simplemente por comodidad para resolver sistemas lineales. Las matrices tienen otros muchos usos en matemáticas y ciencias y, para la mayor parte de estas aplicaciones, es esencial el conocimiento de álgebra de matrices. Al igual que los números las matrices se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. En esta sección aprenderemos a realizar estas operaciones algebraicas con matrices.

■ Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen las mismas entradas en las mismas posiciones.

Matrices iguales

$$\begin{bmatrix} \sqrt{4} & 2^2 & e^0 \\ 0.5 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices no iguales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

IGUALDAD DE MATRICES

Las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son **iguales** si y sólo si tienen la misma dimensión $m \times n$, y si sus entradas correspondientes son iguales, es decir,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 1 ■ Matrices iguales

Encuentre a, b, c y d, si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Dado que las dos matrices son iguales, las entradas correspondientes deben ser iguales. Entonces debemos tener $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$ y $d = 2$.

Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 7 ■

Cortesía de UC Berkeley Office of Media Relations

JULIA ROBINSON (1919-1985) nació en San Luis, Misuri, y creció en Point Loma, California. Debido a una enfermedad perdió dos años de escuela, pero después, con ayuda de un tutor, completó los grados quinto, sexto, séptimo y octavo, todos en un solo año. Posteriormente, en la Universidad de San Diego, la lectura de biografías de matemáticos en la obra *Men of Mathematics* de E. T. Bell, despertó en ella lo que fue su pasión de toda la vida por las matemáticas. Dijo: "No puedo exagerar la importancia de esos libros… en la vida intelectual de un estudiante". Robinson es famosa por su trabajo sobre el décimo problema de Hilbert (página 735), que pide un procedimiento general para determinar si una ecuación tiene soluciones enteras. Sus ideas llevaron a una respuesta completa del problema. Curiosamente, la respuesta contenía ciertas propiedades de los números de Fibonacci (página 846), descubiertas por el matemático ruso Yuri Matihasevic entonces de 22 años. Como resultado de su brillante trabajo sobre el décimo problema de Hilbert, a Robinson le dieron un profesorado en la Universidad de California, Berkeley, y fue la primera mujer matemática elegida para ingresar a la Academia Nacional de Ciencias. También fungió como directora de la American Mathematical Society.

Suma, resta y multiplicación por escalares de matrices

Dos matrices se pueden sumar o restar si tienen la misma dimensión. (De otro modo, su suma o diferencia no están definidas.) Sumamos o restamos las matrices al sumar o restar sus entradas correspondientes. Para multiplicar una matriz por un número, multiplicamos toda la entrada de la matriz por dicho número. Esto recibe el nombre de *producto por un escalar*.

SUMA, DIFERENCIA Y PRODUCTO POR ESCALAR DE MATRICES

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de la misma dimensión $m \times n$, y sea c cualquier número real.

1. La **suma** $A + B$ es la matriz $m \times n$ obtenida de sumar las entradas correspondientes de A y B.
$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$
2. La **diferencia** $A - B$ es la matriz $m \times n$ obtenida al restar entradas correspondientes de A y B.
$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$
3. El **producto por escalar** cA es la matriz $m \times n$ obtenida al multiplicar por c cada entrada de A.
$$cA = [ca_{ij}]$$

EJEMPLO 2 ■ Realizar operaciones algebraicas con matrices

Sean
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Realice cada una de las operaciones indicadas o explique por qué no se pueden realizar.

a) $A + B$ ***b)*** $C - D$ ***c)*** $C + A$ ***d)*** $5A$

SOLUCIÓN

a) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \\ 9 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $C - D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

c) $C + A$ no está definida porque no podemos sumar matrices de diferentes dimensiones.

d) $5A = 5\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 25 \\ 35 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Ahora intente realizar los ejercicios 23 y 25 ■

Las propiedades del cuadro siguiente se deducen de las definiciones de suma de matrices y de multiplicación escalar, así como de las propiedades correspondientes de números reales.

PROPIEDADES DE SUMA Y MULTIPLICACIÓN ESCALAR DE MATRICES

Sean A, B y C matrices de $m \times n$ y sean c y d escalares.

$A + B = B + A$	Propiedad conmutativa de suma de matrices
$(A + B) + C = A + (B + C)$	Propiedad asociativa de suma de matrices
$c(dA) = cdA$	Propiedad asociativa de multiplicación por escalar
$(c + d)A = cA + dA$ $c(A + B) = cA + cB$	Propiedades distributivas de multiplicación por escalar

EJEMPLO 3 ■ Solución de una ecuación matricial

De la ecuación matricial

$$2X - A = B$$

despeje la matriz desconocida X, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Usamos las propiedades de matrices para despejar X.

$2X - A = B$ Ecuación dada

$2X = A + B$ Sume a cada lado la matriz A

$X = \frac{1}{2}(B + A)$ Multiplique cada lado por el escalar $\frac{1}{2}$

Por tanto, $X = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right)$ Sustituya las matrices A y B

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ Sume las matrices

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ Multiplique por el escalar $\frac{1}{2}$

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

■ Multiplicación de matrices

La multiplicación de dos matrices es más difícil de describir que otras operaciones de matrices. En ejemplos posteriores veremos por qué multiplicar matrices comprende un procedimiento más bien complejo, que describimos a continuación.

Primero, el producto AB (o $A \cdot B$) de dos matrices A y B está definido sólo cuando el número de columnas en A es igual al número de renglones en B. Esto significa que si escribimos sus dimensiones una al lado de la otra, los dos números internos deben ser iguales:

Matrices	A	B
Dimensiones	$m \times n$	$n \times k$

Columnas en A Renglones en B

Si consideramos el renglón de A y la columna de B como vectores, entonces su producto interno es igual que su producto punto (vea las secciones 9.2 y 9.4).

Si las dimensiones de A y B coinciden de este modo, entonces el producto AB es una matriz de dimensión $m \times k$. Antes de describir el procedimiento para obtener los elementos de AB, definimos el *producto interno* de un renglón de A y una columna de B.

Si $[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ es un renglón de A, y si $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es una columna de B, entonces su **producto interno** es el número $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Por ejemplo, al tomar el producto interno de $[2 \quad -1 \quad 0 \quad 4]$ y $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se obtiene

$$2 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 8$$

Ahora definimos el **producto** AB de dos matrices.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

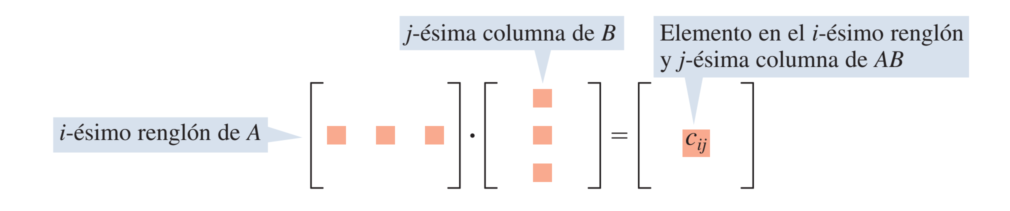
Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz $n \times k$ entonces su producto es la matriz $m \times k$

$$C = [c_{ij}]$$

donde c_{ij} es el producto interno del i-ésimo renglón de A y la j-ésima columna de B. Escribimos el producto como

$$C = AB$$

Esta definición del producto de matrices dice que cada elemento en la matriz AB se obtiene de un *renglón* de A y de una *columna* de B como sigue: el elemento c_{ij} de i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz AB se obtienen multiplicando los elementos del i-ésimo renglón de A con los correspondientes elementos de la j-ésima columna de B y sumando los resultados.



EJEMPLO 4 ■ Multiplicación de matrices

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcule, si es posible, los productos AB y BA.

Los números internos son iguales, de modo que el producto está definido

$2 \times 2 \quad 2 \times 3$

Los números externos dan las dimensiones de producto: 2×3

SOLUCIÓN Dado que A tiene dimensión 2×2 y B tiene dimensión 2×3, el producto AB está definido y tiene dimensión 2×3. Por tanto, podemos escribir

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

donde los signos de interrogación deben ser llenados usando la regla que define el producto de dos matrices. Si definimos $C = AB = [c_{ij}]$, entonces la entrada c_{11} es el producto interno del primer renglón de A y la primera columna de B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad 1\cdot(-1) + 3\cdot 0 = -1$$

Del mismo modo, calculamos los elementos restantes del producto como sigue.

Elemento	Producto interno de:	Valor	Matriz producto
c_{12}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$1\cdot 5 + 3\cdot 4 = 17$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & \\ & & \end{bmatrix}$
c_{13}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$1\cdot 2 + 3\cdot 7 = 23$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ & & \end{bmatrix}$
c_{21}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 = 1$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & & \end{bmatrix}$
c_{22}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1)\cdot 5 + 0\cdot 4 = -5$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & \end{bmatrix}$
c_{23}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1)\cdot 2 + 0\cdot 7 = -2$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

Por tanto, tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

El producto BA no está definido, sin embargo, porque las dimensiones de B y A son

$$2 \times 3 \qquad \text{y} \qquad 2 \times 2$$

No son iguales, por lo cual el producto no está definido

$2 \times 3 \quad 2 \times 2$

Los dos números internos no son iguales, de modo que el número de renglones y columnas no se iguala cuando tratamos de calcular el producto.

Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

Las calculadoras graficadoras y computadoras son capaces de realizar álgebra matricial. Por ejemplo, si ingresamos las matrices del ejemplo 4 en las incógnitas matriciales [A] y [B] en una calculadora TI-83, entonces la calculadora encuentra su producto tal como se muestra en la figura 1.

```
[A]*[B]
    [[-1 17 23]
     [1  -5 -2]]
```

FIGURA 1

Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para instrucciones específicas del trazado de gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

Propiedades de multiplicación de matrices

Aun cuando no es conmutativa la multiplicación de matrices obedece las propiedades asociativa y distributiva.

PROPIEDADES DE MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Sean A, B y C matrices para las cuales están definidos los siguientes productos

$A(BC) = (AB)C$ — Propiedad asociativa

$A(B + C) = AB + AC$
$(B + C)A = BA + CA$ — Propiedad distributiva



El siguiente ejemplo muestra que aun cuando están definidas AB y BA no son necesariamente iguales. Este resultado demuestra que la multiplicación de matrices *no es* conmutativa.

EJEMPLO 5 ■ La multiplicación de matrices no es conmutativa

Sean $$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule los productos AB y BA.

SOLUCIÓN Dado que las matrices A y B tienen dimensiones 2×2, los productos AB y BA están definidos y cada producto es también una matriz 2×2.

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 + 7\cdot 9 & 5\cdot 2 + 7\cdot(-1) \\ (-3)\cdot 1 + 0\cdot 9 & (-3)\cdot 2 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 68 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot(-3) & 1\cdot 7 + 2\cdot 0 \\ 9\cdot 5 + (-1)\cdot(-3) & 9\cdot 7 + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 48 & 63 \end{bmatrix}$$

Esto demuestra que, en general, $AB \neq BA$. De hecho, en este ejemplo AB y BA ni siquiera tienen una entrada en común.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

■ Aplicaciones de multiplicación de matrices

Ahora consideramos algunos ejemplos aplicados que dan una pista de por qué los matemáticos prefieren definir el producto matricial de esta forma aparentemente extraña. El ejemplo 6 muestra cómo nuestra definición de producto matricial nos permite expresar un sistema de ecuaciones lineales como una sola ecuación matricial.

EJEMPLO 6 ■ Escribir un sistema lineal como ecuación matricial

Demuestre que la siguiente ecuación matricial es equivalente al sistema de ecuaciones del ejemplo 2 de la sección 10.3.

En la página 728 se describen con más detalle ecuaciones matriciales como esta.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Si realizamos multiplicación matricial en el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos

$$\begin{bmatrix} x - y + 3z \\ x + 2y - 2z \\ 3x - y + 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Debido a que dos matrices son iguales sólo si sus entradas correspondientes son iguales, igualamos las entradas para obtener

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Este es exactamente el sistema de ecuaciones del ejemplo 2 de la sección 10.3.

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■



Cortesía de Archives, California Institute of Technology

OLGA TAUSSKY-TODD (1906-1995) contribuyó en el perfeccionamiento de las aplicaciones de la teoría de matrices. Descrita como "enamorada de todo lo que pueden hacer las matrices", aplicó con todo éxito matrices a la aerodinámica, campo que se emplea en el diseño de aviones y cohetes. Taussky-Todd también fue famosa por su trabajo en teoría de los números, que se refiere a números primos y divisibilidad. Aun cuando la teoría de los números ha sido considerada la rama menos aplicable de las matemáticas, actualmente se usa de manera importante en toda la industria de computadoras.

Taussky-Todd estudió matemáticas en un tiempo en que raras veces las jóvenes aspiraban a ser matemáticas. Ella decía: "Cuando entré a la universidad no tenía idea de lo que significaba estudiar matemáticas". Una de las matemáticas más respetadas de su tiempo, fue durante muchos años profesora de matemáticas en el Caltech de Pasadena.

EJEMPLO 7 ■ Representar datos demográficos mediante matrices

En cierta ciudad las proporciones de electores de cada grupo de edades registrados como demócratas, republicanos o independientes están dadas por la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \textbf{Demócrata} \\ \textbf{Republicano} \\ \textbf{Independiente} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{Edad} \\ \begin{array}{ccc} \textbf{18–30} & \textbf{31–50} & \textbf{Más de 50} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.50 \\ 0.50 & 0.35 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 & 0.25 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

La siguiente matriz da la distribución, por edad y sexo, de la población de electores de dicha ciudad.

$$\textbf{Edad} \; \begin{array}{r} \\ \textbf{18–30} \\ \textbf{31–50} \\ \textbf{Más de 50} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Hombre} & \textbf{Mujer} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5\,000 & 6\,000 \\ 10\,000 & 12\,000 \\ 12\,000 & 15\,000 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

Para este problema supongamos (de modo poco realista) que, dentro de cada grupo de edades la preferencia política no está relacionada con el género. Es decir, el porcentaje de hombres demócratas del grupo de 18-30, por ejemplo, es igual que el porcentaje de mujeres demócratas de este grupo.

a) Calcule el producto AB.

b) ¿Cuántos hombres están registrados como demócratas en esta ciudad?

c) ¿Cuántas mujeres están registradas como republicanas?

SOLUCIÓN

a) $AB = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.50 \\ 0.50 & 0.35 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\,000 & 6\,000 \\ 10\,000 & 12\,000 \\ 12\,000 & 15\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13\,500 & 16\,500 \\ 9\,000 & 10\,950 \\ 4\,500 & 5\,500 \end{bmatrix}$

b) Cuando tomamos el producto interno de un renglón en A con una columna en B, estamos sumando el número de personas de cada grupo de edades que pertenece a la categoría en cuestión. Por ejemplo, el elemento c_{21} de AB (9 000) se obtiene tomando el producto interno del renglón Republicanos en A con la columna Hombres en B. Este número es, por tanto, el número total de hombres republicanos en esta ciudad. Podemos marcar los renglones y las columnas de AB como sigue.

$$\begin{array}{r} \\ \textbf{Demócrata} \\ \textbf{Republicano} \\ \textbf{Independiente} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Hombres} & \textbf{Mujeres} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 13\,500 & 16\,500 \\ 9\,000 & 10\,950 \\ 4\,500 & 5\,500 \end{bmatrix} \end{array} = AB$$

Entonces, 13 500 hombres están registrados como demócratas en esta ciudad.

c) Hay 10 950 mujeres registradas como republicanas.



Ahora intente realizar el ejercicio 53 ■

En el ejemplo 7 los elementos de cada columna de A ascienden a 1. (¿Se da cuenta de por qué lo anterior debe ser cierto, dado lo que describe la matriz?) Una matriz con esta propiedad se denomina **estocástica**. Las matrices estocásticas se usan extensamente en estadística donde aparecen con frecuencia en situaciones como la que hemos descrito aquí.

Gráficas por computadora

Un uso importante de matrices es en la representación digital de imágenes. Una cámara digital o un escáner convierten una imagen en una matriz al dividir la imagen en un conjunto rectangular de elementos llamados pixeles. A cada pixel se le asigna un valor que representa el color, brillo o alguna otra función en ese lugar. Por ejemplo, en una imagen a escala gris de nivel 256 a cada pixel se le asigna un valor entre 0 y 255, donde 0 representa blanco, 255 representa negro y los números intermedios representan graduaciones crecientes de gris. Las graduaciones de una escala mucho más sencilla de gris de nivel 8 se ven en la figura 2. Usamos esta escala de nivel 8 para ilustrar el proceso.

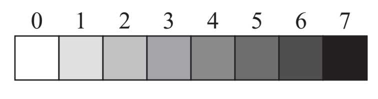
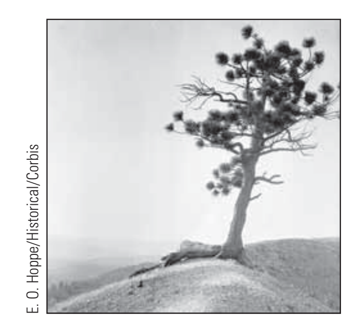


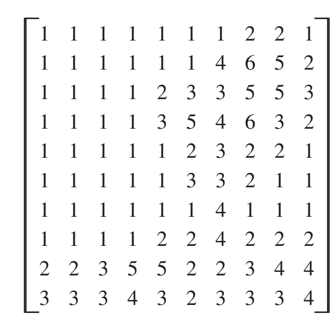
FIGURA 2

Para digitalizar la imagen en blanco y negro de la figura 3*a*) ponemos una cuadrícula sobre la imagen como se muestra en la figura 3*b*). Cada celda de la cuadrícula se compara con la escala gris y luego se le asigna un valor entre 0 y 7, dependiendo de qué cuadro gris de la escala se compara más cercanamente con la "oscuridad" de la celda. (Si la celda no es uniformemente gris se le asigna un valor promedio.) Los valores se guardan en la matriz que se muestra en la figura 3*c*). La imagen digital correspondiente a esta matriz se muestra en la figura 3*d*). Obviamente, la cuadrícula que hemos empleado hasta este punto es demasiado burda para dar una buena resolución de imagen. En la práctica, las cámaras digitales de alta resolución que existen hoy en día usan matrices con dimensiones de hasta 2048 × 2048.



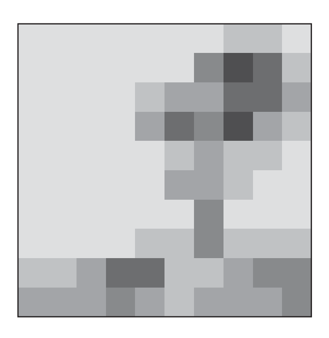
a) Imagen original

b) Cuadrícula 10 × 10



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Representación matricial



d) Imagen digital



FIGURA 3

Una vez que la imagen se guarda en una matriz se puede manipular con el uso de operaciones matriciales. Por ejemplo, para oscurecer la imagen sumamos una constante a cada entrada de la matriz; para aclarar la imagen restamos una constante. Para aumentar el contraste oscurecemos las áreas más oscuras y aclaramos las áreas más claras, de modo que podríamos sumar 1 a cada entrada que sea 4, 5 o 6, y restamos 1 de cada



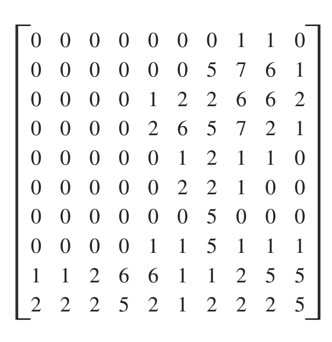
PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

¿Sobrevivirá la especie?

Para estudiar cómo sobrevive una especie los científicos observan las etapas del ciclo de vida de las especies, por ejemplo, joven, maduro, adulto. La proporción de la población en cada etapa y la proporción que sobrevive a la etapa siguiente en cada estación están modeladas por matrices. En este proyecto investigamos cómo se utiliza la multiplicación matricial para predecir las proporciones de población para la próxima estación, y después para la siguiente estación y así sucesivamente y, en última instancia, predecir las perspectivas a largo plazo de la supervivencia de la especie. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

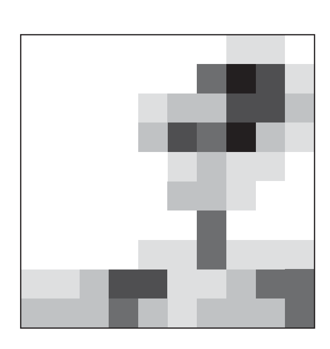
entrada que sea 1, 2 o 3. (Observe que no podemos oscurecer una entrada de 7 o aclarar un 0.) La aplicación de este proceso a la matriz de la figura 3*c*) produce una nueva matriz en la figura 4*a*). Esto genera la imagen de alto contraste de la figura 4*b*).



$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&5&7&6&1\\ 0&0&0&0&1&2&2&6&6&2\\ 0&0&0&0&2&6&5&7&2&1\\ 0&0&0&0&0&1&2&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&2&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&5&1&1&1\\ 1&1&2&6&6&1&1&2&5&5\\ 2&2&2&5&2&1&2&2&2&5 \end{bmatrix}$$



a) Matriz modificada para aumentar contraste



b) Imagen de alto contraste

FIGURA 4

En los Proyectos de descubrimiento *Computer Graphics I* y *II** [Gráficas con computadora I y II] en el sitio web de este libro, **www.stewartmath.com*** se estudian otras formas de representar y manejar imágenes usando matrices.

* Este material se encuentra disponible en inglés.

10.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Podemos sumar (o restar) dos matrices sólo si tienen las mismas

________________.

2. ***a***) Podemos multiplicar dos matrices sólo si el número de _________ de la primera matriz es igual que el número de _________ de la segunda matriz.

b) Si A es una matriz 3×3 y B es una matriz 4×3, ¿cuáles de las siguientes multiplicaciones de matrices son posibles?

i) AB *ii*) BA *iii*) AA *iv*) BB

3. ¿Cuáles de las siguientes operaciones podemos realizar para una matriz A de cualquier dimensión?

i) $A + A$ *ii*) $2A$ *iii*) $A \cdot A$

4. Llene los elementos faltantes de la matriz producto.

$$\begin{bmatrix} 3&1&2\\ -1&2&0\\ 1&3&-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1&3&-2\\ 3&-2&-1\\ 2&1&-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4&\blacksquare&-7\\ 7&-7&\blacksquare\\ \blacksquare&-5&-5 \end{bmatrix}$$

HABILIDADES

5–6 ■ Igualdad de matrices Determine si las matrices A y B son iguales.



5. $A = \begin{bmatrix} 1&-2&0\\ \frac{1}{2}&6&0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1&-2\\ \frac{1}{2}&6 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}&\ln 1\\ 2&3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0.25&0\\ \sqrt{4}&\frac{6}{2} \end{bmatrix}$

7–8 ■ Igualdad de matrices Encuentre los valores a y b que hacen que las matrices A y B sean iguales.

7. $A = \begin{bmatrix} 3&4\\ -1&a \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b&4\\ -1&-5 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 3&5&7\\ -4&a&2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3&5&b\\ -4&-5&2 \end{bmatrix}$

9–16 ■ Operaciones de matrices Realice la operación matricial y si es imposible explique por qué.

9. $\begin{bmatrix} 2&6\\ -5&3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1&-3\\ 6&2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 0&1&1\\ 1&1&0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2&1&-1\\ 1&3&-2 \end{bmatrix}$

11. $3\begin{bmatrix} 1&2\\ 4&-1\\ 1&0 \end{bmatrix}$

12. $2\begin{bmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1&1\\ 2&1\\ 3&1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2&6\\ 1&3\\ 2&4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&-2\\ 3&6\\ -2&0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2&1&2\\ 6&3&4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&-2\\ 3&6\\ -2&0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1&2\\ -1&4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&-2&3\\ 2&2&-1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2&-3\\ 0&1\\ 1&2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5\\ 1 \end{bmatrix}$

17–22 ■ Ecuaciones matriciales De la ecuación matricial despeje la matriz incógnita X, o explique por qué no hay solución.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 20 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

17. $2X + A = B$ **18.** $3X - B = C$

19. $2(B - X) = D$ **20.** $5(X - C) = D$

21. $\frac{1}{5}(X + D) = C$ **22.** $2A = B - 3X$

23–36 ■ Operaciones matriciales Las matrices A, B, C, D, E, F, G y H están definidas como sigue.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Realice la operación algebraica indicada o explique por qué no se puede realizar.

23. ***a)*** $B + C$ ***b)*** $B + F$

24. ***a)*** $C - B$ ***b)*** $2C - 6B$

25. ***a)*** $5A$ ***b)*** $C - 5A$

26. ***a)*** $3B + 2C$ ***b)*** $2H + D$

27. ***a)*** AD ***b)*** DA

28. ***a)*** DH ***b)*** HD

29. ***a)*** AH ***b)*** HA

30. ***a)*** BC ***b)*** BF

31. ***a)*** GF ***b)*** GE

32. ***a)*** B^2 ***b)*** F^2

33. ***a)*** A^2 ***b)*** A^3

34. ***a)*** $(DA)B$ ***b)*** $D(AB)$

35. ***a)*** ABE ***b)*** AHE

36. ***a)*** $DB + DC$ ***b)*** $BF + FE$

37–42 ■ Operaciones matriciales Las matrices A, B y C se definen como sigue.

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 1.1 & 2.4 \\ 0.9 & -0.1 & 0.4 \\ -0.7 & 0.3 & -0.5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ 0 & -0.5 \\ 0.5 & -2.1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 1.1 & 2.1 & -2.1 \end{bmatrix}$$

Use una calculadora graficadora para realizar la operación algebraica indicada o explique por qué no se puede realizar.

37. AB **38.** BA **39.** BC

40. CB **41.** $B + C$ **42.** A^2

43–46 ■ Igualdad de matrices Despeje x y y.

43. $\begin{bmatrix} x & 2y \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2x & -6y \end{bmatrix}$

44. $3\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

45. $2\begin{bmatrix} x & y \\ x + y & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

46. $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$

47–50 ■ Sistemas lineales de las ecuaciones matriciales Escriba el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial (vea el ejemplo 6).

47. $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 6x - y + z = 12 \\ 2x \quad\;\; + z = 7 \\ \quad\; y - 2z = 4 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 \qquad = 5 \\ \qquad 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4x - 2y - z = 2 \\ x + y + 5z = 2 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$

HABILIDADES Plus

51. Productos de matrices Las matrices A, B y C se definen como sigue.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -9 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Determine cuáles de los siguientes productos están definidos y calcúlelos.

ABC ACB BAC
BCA CAB CBA

52. Desarrollo de binomios matriciales

a) Demuestre que si A y B son matrices de 2×2 entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

b) Si A y B son matrices de 2×2 ¿es necesariamente cierto que

$$(A + B)^2 \stackrel{?}{=} A^2 + 2AB + B^2?$$

APLICACIONES

53. Educación e ingreso Un grupo de mujeres hace una encuesta para determinar la educación y el ingreso de sus integrantes. La matriz A resume las proporciones de los miembros en diferentes categorías de años de educación después de la secundaria y el ingreso. La matriz B muestra el número total de integrantes en cada categoría de ingresos.

a) Calcule la matriz producto AB.

b) Interprete las entradas de la matriz AB.

Nivel de ingreso

	Menor de \$50 000	De \$50 000 a 100 000	\$100 000 o más	
Ninguno	0.75	0.10	0	
1 a 4	0.25	0.70	0.70	= A
Más de 4	0	0.20	0.30	

	Total	
Menor de \$50 000	4	
\$50 000 a 100 000	20	= B
\$100 000 o más	10	

54. Calificación de examen Una numerosa clase de física hace una encuesta acerca de la cantidad de horas que los estudiantes duermen antes de un examen y las calificaciones del mismo. La matriz A resume la proporción de estudiantes en diferentes categorías de calificación de examen y horas de sueño. La matriz B muestra el número total de estudiantes en tres categorías de calificación del examen.

a) Calcule la matriz producto AB.

b) Interprete las entradas de la matriz AB.

Calificación de examen

	Debajo de 60	60 a 80	Arriba de 80	
Menos de 4	0.75	0.20	0.05	
4 a 7	0.60	0.30	0.10	= A
Más de 7	0.40	0.30	0.30	

	Total	
Debajo de 60	80	
60 a 80	170	= B
Arriba de 80	40	

55. Ingresos por alimentos congelados Algunos de los alimentos congelados que vende Alimentos Especiales de Joe's son pizza con pesto, ravioles de espinacas, macarrones con queso. La distribución comercial de estos productos se tabula en la matriz A. El precio de venta (en dólares) para cada elemento se tabula en la matriz B.

a) Calcule la matriz producto AB.

b) ¿Cuál es el total de los ingresos del lunes?

c) ¿Cuál es el total de los ingresos de los tres días?

Alimentos especiales

	Pizza	Ravioles	Macarrones con queso	
Lunes	50	20	15	
Martes	40	75	20	= A
Miércoles	35	60	100	

	Precio (\$)	
Pizza	3.50	
Ravioles	5.75	= B
Macarrones con queso	4.25	

56. Ventas de comida rápida Una pequeña cadena de restaurantes de comida rápida, con sucursales en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim vende sólo hamburguesas, *hot dogs* y malteadas. En cierto día, las ventas se distribuyeron de acuerdo con la siguiente matriz.

Número de piezas vendidas

	Santa Mónica	Long Beach	Anaheim	
Hamburguesas	4000	1000	3500	
Hot dogs	400	300	200	= A
Malteadas	700	500	9000	

El precio de cada pieza está dado en la matriz siguiente.

Hamburguesa	*Hot dog*	Malteada	
[\$0.90	\$0.80	\$1.10]	= B

a) Calcule el producto BA.

b) Interprete las entradas de la matriz producto BA.

57. Utilidades de fabricación de autos Un fabricante de autos especiales tiene plantas en Auburn, Biloxi y Chattanooga. Se producen tres modelos, con producción diaria dada en la siguiente matriz.

Autos producidos cada día

	Modelo K	Modelo R	Modelo W	
Auburn	12	10	0	
Biloxi	4	4	20	= A
Chattanooga	8	9	12	

Debido a aumentos de salarios, las utilidades en febrero son más bajas que las de enero. La utilidad por auto está tabulada por modelo en la siguiente matriz.

	Enero	Febrero	
Modelo K	\$1000	\$500	
Modelo R	\$2000	\$1200	= B
Modelo W	\$1500	\$1000	

a) Calcule AB.

b) Suponiendo que se han vendido todos los autos producidos, ¿cuál fue la utilidad diaria en enero en la planta Biloxi?

c) ¿Cuál fue la utilidad diaria total (de las tres plantas) en febrero?

58. Productos de tomate enlatados Jaeger Foods produce salsa de tomate y pasta de tomate, enlatadas en envases pequeños, medianos, grandes y gigantes. La matriz A da el tamaño (en onzas) de cada recipiente.

	Pequeños	Medianos	Grandes	Gigantes	
Onzas	[6	10	14	28]	= A

La matriz B tabula la producción de un día de salsa de tomate y de pasta de tomate.

	Latas de salsa	Latas de pasta	
Pequeñas	2000	2500	
Medianas	3000	1500	= B
Grandes	2500	1000	
Gigantes	1000	500	

a) Calcule el producto de AB.

b) Interprete las entradas de la matriz producto AB.

59. Ventas de productos agrícolas Los tres hijos de un agricultor, Amy, Beth y Chad, trabajan durante los meses de verano en tres puestos de venta situados a la orilla de la carretera. En un fin de semana todos venden sandías, calabazas amarillas y tomates. Las matrices A y B tabulan el número de libras de cada producto vendido por cada hermano en sábado y domingo.

Sábado

	Sandías	Calabazas	Tomates
Amy	120	50	60
Beth	40	25	30
Chad	60	30	20

$$\begin{bmatrix} 120 & 50 & 60 \\ 40 & 25 & 30 \\ 60 & 30 & 20 \end{bmatrix} = A$$

Domingo

	Sandías	Calabazas	Tomates
Amy	100	60	30
Beth	35	20	20
Chad	60	25	30

$$\begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \\ 35 & 20 & 20 \\ 60 & 25 & 30 \end{bmatrix} = B$$

La matriz C da el precio por libra (en dólares) por cada tipo de producto que vendan.

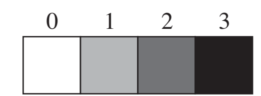
	Precio por libra
Sandías	0.10
Calabazas	0.50
Tomates	1.00

$$\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{bmatrix} = C$$

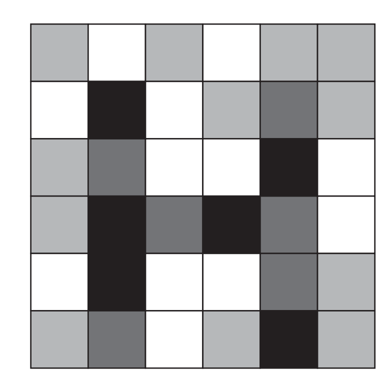
Realice cada una de las siguientes operaciones e interprete las entradas en cada resultado.

a) AC ***b)*** BC ***c)*** $A + B$ ***d)*** $(A + B)C$

60. Imágenes digitales A continuación se muestra una escala en gris de cuatro niveles.



a) Use la escala de gris para encontrar una matriz 6×6 que digitalmente representa la imagen de la figura.



b) Encuentre una matriz que represente una versión más oscura de la imagen de la figura.

c) El **negativo** de una imagen se obtiene invirtiendo claros y oscuros como en el negativo de una fotografía. Encuentre la matriz que representa el negativo de la imagen de la figura. ¿Cómo cambia usted las entradas de la matriz para crear el negativo?

d) Aumente el contraste de la imagen cambiando cada 1 a 0 y cada 2 a 3 en la matriz que encontró en el inciso *a*). Trace la imagen representada por la matriz resultante. ¿Aclara esto la imagen?

e) Trace la imagen representada por la matriz I. ¿Puede usted reconocer cuál es esta? Si no puede, trate de aumentar el contraste.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

61. DISCUSIÓN: ¿Cuándo están definidos ambos productos? ¿Qué debe ser cierto acerca de las dimensiones de las matrices A y B si ambos productos, AB y BA están definidos?

62. DESCUBRIMIENTO: Potencias de una matriz Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que detecte un patrón. Escriba una fórmula general para A^n.

63. DESCUBRIMIENTO: Potencias de una matriz Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que detecte un patrón. Escriba una fórmula general para A^n.

64. DISCUSIÓN: Raíces cuadradas de matrices Una **raíz cuadrada** de una matriz B es una matriz A con la propiedad de que $A^2 = B$. (Esta es la misma definición que para una raíz cuadrada de un número.) Encuentre tantas raíces cuadradas como pueda de cada matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

[*Sugerencia:* Si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, escriba las ecuaciones que a, b, c y d tendrán que satisfacer si A es la raíz cuadrada de la matriz dada.]

10.5 INVERSAS DE MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

■ La inversa de una matriz ■ Encontrar la inversa de una matriz 2 × 2 ■ Encontrar la inversa de una matriz $n \times n$ ■ Ecuaciones matriciales ■ Modelado con ecuaciones matriciales

En la sección 10.4 vimos que cuando las dimensiones son apropiadas se puede sumar, restar y multiplicar matrices. En esta sección investigamos la división de matrices. Con esta operación podemos resolver ecuaciones que contienen matrices.

■ La inversa de una matriz

Primero definimos las *matrices identidad*, que desempeñan la misma función para multiplicación matricial que el número 1 para multiplicación ordinaria de números; es decir, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todos los números a. Una **matriz cuadrada** es aquella que tiene el mismo número de renglones que de columnas. La **diagonal principal** de una matriz cuadrada está formada por las entradas cuyos números de renglón y columna son los mismos. Estas entradas se extienden diagonalmente por la matriz, de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha.

MATRIZ IDENTIDAD

La **matriz identidad** I_n es la matriz $n \times n$ para la cual cada entrada de la diagonal principal es un 1 y para la cual todos los otros elementos son 0.

Entonces, las matrices identidad de 2×2, 3×3 y 4×4 son

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices identidad se comportan como el número 1 en el sentido de que

$$A \cdot I_n = A \qquad \text{e} \qquad I_n \cdot B = B$$

siempre que estos productos estén definidos.

EJEMPLO 1 ■ Matrices identidad

Los siguientes productos matriciales muestran la forma en que multiplicar una matriz por una matriz identidad de dimensión apropiada deja sin cambio a la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 1*a*), *b*) ■

Si A y B son matrices de $n \times n$ matrices, y si $AB = BA = I_n$, entonces decimos que B es la *inversa* de A, y escribimos $B = A^{-1}$. El concepto de la inversa de una matriz es análogo al del recíproco de un número real.

INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Si existe una matriz A^{-1} con la propiedad de que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

entonces decimos que A^{-1} es la **inversa** de A.

EJEMPLO 2 ■ Verificar que una matriz es una inversa

Verifique que B es la inversa de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Realizamos las multiplicaciones de matrices para demostrar que $AB = I$ y $BA = I$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1(-5) & 2(-1) + 1 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + 3(-5) & 5(-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-1)5 & 3 \cdot 1 + (-1)3 \\ (-5)2 + 2 \cdot 5 & (-5)1 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

■ Encontrar la inversa de una matriz 2 × 2

La regla siguiente da una forma sencilla de encontrar la inversa de una matriz 2×2 cuando existe. Para matrices más grandes hay un procedimiento más general de encontrar inversas que consideramos más adelante en esta sección.

INVERSA DE UNA MATRIZ 2 × 2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, entonces A no tiene inversa.


© Bygone Collection/Alamy

ARTHUR CAYLEY (1821-1895) fue un matemático inglés que contribuyó en el perfeccionamiento de la teoría de matrices. Fue el primero en usar un solo símbolo tal como *A* para representar una matriz, introduciendo así la idea de que una matriz es una sola entidad en lugar de una colección de números. Cayley ejerció la abogacía hasta los 42 años de edad, pero su interés principal desde adolescente fueron las matemáticas y, en su tiempo libre, publicó casi 200 artículos sobre el tema. En 1863 aceptó un cargo de profesor de matemáticas en Cambridge, donde enseñó hasta su muerte. La obra de Cayley sobre matrices fue de interés puramente teórico en su tiempo, pero en el siglo XX muchos de sus resultados encontraron aplicación en física, ciencias sociales, finanzas y otros campos. Uno de los usos más comunes de las matrices hoy en día es en la computación, donde las matrices se utilizan en el almacenamiento de datos, la corrección de errores, la manipulación de imágenes y muchos otros propósitos. Estas aplicaciones han hecho que el álgebra de matrices sea más útil que nunca.

EJEMPLO 3 ■ Encontrar la inversa de una matriz 2 × 2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Encuentre A^{-1} y verifique que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

SOLUCIÓN Usando la regla para la inversa de una matriz 2 × 2 obtenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para verificar que esta matriz es realmente la inversa de A calculamos AA^{-1} y $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{3}{2} + 5(-1) & 4(-\frac{5}{2}) + 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot \frac{3}{2} + 3(-1) & 2(-\frac{5}{2}) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot 4 + (-\frac{5}{2})2 & \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{5}{2})3 \\ (-1)4 + 2 \cdot 2 & (-1)5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 7 ■

La cantidad $ad - bc$ que aparece en la regla para calcular la inversa de una matriz 2 × 2 se denomina **determinante** de la matriz. Si el determinante es 0, entonces la matriz no tiene inversa (porque no podemos dividir entre 0).

■ Encontrar la inversa de una matriz *n* × *n*

Para matrices de 3 × 3 y mayores la técnica siguiente da la forma más eficiente de calcular sus inversas. Si A es una matriz $n \times n$ primero construimos la matriz $n \times 2n$ que tiene las entradas de A a la izquierda y las de la matriz identidad I_n a la derecha:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Usamos entonces operaciones elementales de renglón en esta nueva matriz grande para cambiar el lado izquierdo a la matriz identidad. (Esto significa que estamos cambiando la matriz grande a forma escalonada por renglones reducida.) El lado derecho se transforma automáticamente en A^{-1}. (Omitimos la demostración de este hecho.)

EJEMPLO 4 ■ Encontrar la inversa de una matriz 3 × 3

Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre A^{-1}.

b) Verifique que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

SOLUCIÓN

a) Empezamos con la matriz 3 × 6 cuya mitad izquierda es A y cuya mitad derecha es la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Transformamos entonces la mitad izquierda de esta nueva matriz en la matriz identidad realizando la siguiente secuencia de operaciones elementales de renglón en *toda* la nueva matriz.

$$\xrightarrow[\mathrm{R}_3 + 3\mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_3]{\mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\mathrm{R}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{R}_1 + 2\mathrm{R}_2 \to \mathrm{R}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_3 \to \mathrm{R}_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Hemos transformado la mitad izquierda de esta matriz en una matriz identidad. (Esto significa que hemos puesto toda la matriz en forma escalonada por renglones reducida.) Observe que para hacer esto en una forma tan sistemática como sea posible, primero cambiamos a ceros las entradas debajo de la diagonal principal, como lo haríamos si estuviéramos usando eliminación de Gauss. Luego cambiamos a un 1 cada una de las entradas de la diagonal principal al multiplicar por las constantes apropiadas. Por último, completamos el proceso cambiando a ceros las entradas restantes del lado izquierdo.

La mitad derecha es ahora A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b) Calculamos AA^{-1} y $A^{-1}A$ y verificamos que ambos productos dan la matriz identidad I_3.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 9 y 19 ■

Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para instrucciones específicas del trazado de gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

Las calculadoras graficadoras también tienen capacidad para calcular inversas de matrices. En las TI-83 y TI-84, las matrices se guardan en memoria usando nombres como [A], [B], [C], . . . Para encontrar la inversa de [A], tecleamos

[A] $\boxed{X^{-1}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

Para la matriz del ejemplo 4 esto resulta en la salida que se muestra en la figura 1 (donde hemos empleado la instrucción ▶Frac para presentar la salida en forma de fracción en lugar de decimal).

El siguiente ejemplo muestra que no toda matriz cuadrada tiene una inversa.

```
[A]⁻¹▶Frac
   [[-3 2 0    ]
    [-4 1 -2/3]
    [1  0 1/3 ]]
```

FIGURA 1

EJEMPLO 5 ■ Una matriz que no tiene inversa

Encuentre la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Procedemos como sigue.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 - 2R_2 \to R_1]{R_3 + R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 1 \end{array}\right]$$

En este punto nos gustaría cambiar el 0 de la posición $(3, 3)$ a un 1 sin cambiar los ceros de las posiciones $(3, 1)$ y $(3, 2)$. Pero no hay forma de lograr esto porque no importa qué múltiplo de los renglones 1 o 2 sumemos al renglón 3, no podremos cambiar el tercer cero del renglón 3 sin cambiar también el cero primero o segundo. Entonces no podemos cambiar la mitad izquierda a la matriz identidad, de modo que la matriz original no tiene inversa.





Si encontramos un renglón de ceros a la izquierda cuando tratamos de encontrar una inversa, como en el ejemplo 5, entonces la matriz original no tiene inversa. Si tratamos de calcular la inversa de la matriz del ejemplo 5 en una calculadora TI-83 obtenemos el mensaje de error que se muestra en la figura 2. (Una matriz que no tiene inversa se llama *singular*.)

```
ERR:SINGULAR MAT
1:Quit
2:Goto
```

FIGURA 2

Ecuaciones matriciales

En el ejemplo 6 de la sección 10.4 vimos que un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse como una sola ecuación matricial. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 7 \\ 2x - 3y - 6z = 5 \\ -3x + 6y + 15z = 0 \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces esta ecuación matricial se puede escribir como

$$AX = B$$

La matriz A recibe el nombre de **matriz de coeficientes**.

Resolvemos esta ecuación matricial multiplicando cada lado por la inversa de A (siempre que exista esta inversa).

Resolver la ecuación matricial $AX = B$ es muy semejante a resolver la ecuación simple de números reales

$$3x = 12$$

que hacemos al multiplicar cada lado por el recíproco (inversa) de 3.

$$\tfrac{1}{3}(3x) = \tfrac{1}{3}(12)$$

$$x = 4$$

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad \text{Multiplique a la izquierda por } A^{-1}$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad \text{Propiedad asociativa}$$

$$I_3X = A^{-1}B \qquad \text{Propiedad de inversas}$$

$$X = A^{-1}B \qquad \text{Propiedad de matriz identidad}$$

En el ejemplo 4 demostramos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Entonces, de $X = A^{-1}B$ tenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -23 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$X \quad = \quad A^{-1} \quad B$

Entonces, $x = -11$, $y = -23$, $z = 7$ es la solución del sistema original.

Hemos demostrado que la ecuación matricial $AX = B$ se puede resolver con el siguiente método.

RESOLVER UNA ECUACIÓN MATRICIAL

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ con inversa A^{-1} y si X es una incógnita matriz y B una matriz conocida, las dos con n renglones, entonces la solución de la ecuación matricial

$$AX = B$$

está dada por

$$X = A^{-1}B$$

EJEMPLO 6 ■ Resolver un sistema usando la inversa de una matriz

Se da un sistema de ecuaciones.

***a*)** Escribimos el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial.

***b*)** Resolvemos el sistema por medio de la ecuación matricial.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ 3x - 6y = 36 \end{cases}$$

Las matemáticas en el mundo moderno



Ecología matemática

En la década de 1970 las ballenas jorobadas fueron el centro de una controversia. Los ambientalistas creían que la caza de ballenas las exponía a una inminente extinción; los balleneros vieron que su medio de vida estaba amenazado ante cualquier intento de parar la cacería de ballenas. ¿Están las ballenas realmente amenazadas hasta la extinción debido a la cacería? ¿Qué nivel de cacería de ballenas es seguro para garantizar su supervivencia? Estas preguntas motivaron a los matemáticos a estudiar más de cerca los patrones de población de las ballenas y otras especies.

Hacia principios de la década de 1920, Lotka y Volterra fundaron el campo de la biología matemática al crear modelos de depredador-presa. Sus modelos, que hacían uso de una rama de las matemáticas llamada ecuaciones diferenciales, toman en cuenta los porcentajes a los cuales el depredador devora su presa y los porcentajes de crecimiento de cada población. Observe que a medida que el depredador devora su presa, la población de esta disminuye; esto significa menos alimento para los depredadores, de modo que la población de éstos empieza a disminuir; con menos depredadores, la población de la presa empieza a aumentar, y así sucesivamente. Normalmente, se forma un estado de equilibrio y las dos poblaciones se alternan entre un mínimo y un máximo. Observe que, si los depredadores devoran la presa con demasiada rapidez se quedarán sin alimento y aseguran así su propia extinción.

Desde los tiempos de Lotka y Volterra se han desarrollado modelos matemáticos más elaborados de poblaciones de animales. Para numerosas especies la población está dividida en varias etapas: inmadura, juvenil, adulta, etcétera. La proporción de cada etapa que sobrevive o se reproduce en un tiempo determinado se introduce en una matriz (llamada matriz de transición); se usa entonces una multiplicación de matrices para predecir la población en periodos sucesivos. (Vea el Proyecto de descubrimiento *Discovery Project: Will the Species Survive?* [¿Sobrevivirán las especies?] en el sitio web de este libro: **www.stewartmath.com**.*

Como se puede observar, el poder de las matemáticas para modelar y predecir es una herramienta de valor incalculable en el actual debate sobre el medio ambiente.

* Este material se encuentra disponible en inglés.

SOLUCIÓN

a) Escribimos el sistema como una ecuación matricial de la forma $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$A \quad X \quad = \quad B$

b) Usando la regla para encontrar la inversa de una matriz 2×2 obtenemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(-6) - (-5)3}\begin{bmatrix} -6 & -(-5) \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando cada lado de la ecuación matricial por su matriz inversa obtenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$X \quad = \quad A^{-1} \quad B$

Por tanto $x = 30$ y $y = 9$.

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

■ Modelado con ecuaciones matriciales

Suponga que necesitamos resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes. Entonces, convertir los sistemas a ecuaciones matriciales da un método eficiente para obtener las soluciones porque necesitamos encontrar la inversa de la matriz de coeficientes sólo una vez. Este procedimiento es particularmente útil si usamos una calculadora graficadora para ejecutar las operaciones de matrices, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 ■ Modelado de necesidades nutrimentales usando ecuaciones matriciales

El propietario de una tienda de mascotas alimenta a sus hámsters y jerbos con diferentes mezclas de tres tipos de alimento para roedores: KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow. Él desea darles a sus animales la cantidad correcta de cada marca para satisfacer exactamente sus necesidades diarias de proteína, grasa y carbohidratos. Suponga que los hámsters requieren 340 mg de proteína, 280 de grasa y 440 de carbohidratos y que los jerbos necesitan 480 mg de proteína, 360 de grasa y 680 de carbohidratos al día. La cantidad de cada nutriente (en mg) en un gramo de cada marca está dada en la siguiente tabla. ¿Cuántos gramos de cada alimento diario se les deben dar a los hámsters y a los jerbos para satisfacer sus necesidades nutrimentales?

	KayDee Food	Pet Pellets	Rodent Chow
Proteína (mg)	10	0	20
Grasa (mg)	10	20	10
Carbohidratos (mg)	5	10	30

SOLUCIÓN Sean x_1, x_2 y x_3 las respectivas cantidades (en gramos) de KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow que los hámsters deben comer; y sean y_1, y_2 y y_3 las

correspondientes cantidades para los jerbos. Entonces buscamos resolver las ecuaciones matriciales

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para hámsters}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para jerbos}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos escribir estas ecuaciones matriciales como

$$AX = B \qquad \text{Ecuación para hámsters}$$

$$AY = C \qquad \text{Ecuación para jerbos}$$

Queremos despejar X y Y, de modo que multiplicamos por A^{-1}, ambos lados de cada ecuación, la inversa de la matriz de coeficientes. Podríamos encontrar A^{-1} manualmente, pero es mejor usar una calculadora graficadora como se muestra en la figura 3.

```
[A]⁻¹*[B]
             [[10]
              [3 ]
              [12]]
```

a)

```
[A]⁻¹*[C]
             [[8 ]
              [4 ]
              [20]]
```

b)

FIGURA 3

Por tanto

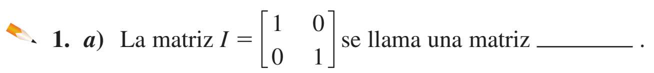
$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad Y = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, cada hámster debe alimentarse con 10 g de KayDee Food, 3 de Pet Pellets y 12 de Rodent Chow; y cada jerbo debe alimentarse con 8 g de KayDee Food, 4 de Pet Pellets y 20 de Rodent Chow diariamente.

Ahora intente realizar el ejercicio 61 ■

10.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

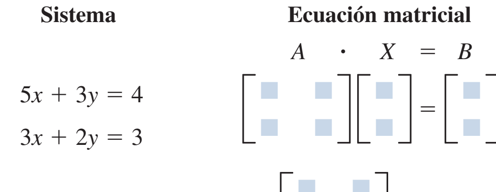


1. ***a***) La matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se llama una matriz ________ .

b) Si A es una matriz 2×2, entonces $A \times I =$ ________ e $I \times A =$ ________.

c) Si A y B son matrices 2×2 con $AB = I$, entonces B es la ________ de A.

2. ***a***) Escriba el siguiente sistema como ecuación matricial $AX = B$.



Sistema	**Ecuación matricial**
	$A \cdot X = B$
$5x + 3y = 4$ $3x + 2y = 3$	$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$

b) La inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$.

c) La solución de la ecuación matricial es $X = A^{-1}B$.

$$\underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

d) La solución del sistema es $x =$ ________,

$y =$________.

HABILIDADES

3–6 ■ Verificar la inversa de una matriz Calcule los productos AB y BA para verificar que B es la inversa de A.

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

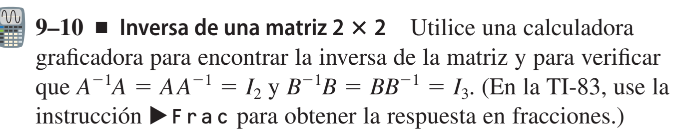
5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -8 \\ -12 & 14 & 11 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7–8 ■ Inversa de una matriz 2 × 2 Encuentre la inversa de la matriz y verifique que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ y $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$.

7. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$



9–10 ■ Inversa de una matriz 2 × 2 Utilice una calculadora graficadora para encontrar la inversa de la matriz y para verificar que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ y $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$. (En la TI-83, use la instrucción ▶Frac para obtener la respuesta en fracciones.)

9. $A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.3 \\ -1.2 & 0.2 \end{bmatrix}$

10. $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

11–26 ■ Encontrar la inversa de una matriz Encuentre la inversa de la matriz si existe.

11. $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0.4 & -1.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

27–34 ■ Encontrar la inversa de una matriz Utilice una calculadora graficadora para encontrar la inversa de la matriz si es que existe. (En la TI-83, use la instrucción ▶Frac para obtener la respuesta en fracciones.)

27. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

35–38 ■ Productos que implican matrices e inversas Las matrices A y B se definen como sigue.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilice una calculadora graficadora para realizar la operación indicada, o explique por qué no se puede realizar. Exprese la respuesta usando fracciones (En la TI-83, use la instrucción TI-83 ▶Frac para obtener la respuesta en fracciones.)

35. $A^{-1}B$ **36.** AB^{-1} **37.** BAB^{-1} **38.** $B^{-1}AB$

39–46 ■ Resolver un sistema lineal como una ecuación matricial Resuelva el sistema de ecuaciones convirtiendo a una ecuación matricial y usando la inversa de la matriz de coeficientes, como en el ejemplo 6. Use las inversas de los ejercicios 11-14, 19, 20, 23 y 25.

39. $\begin{cases} -3x - 5y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ -5x - 13y = 20 \end{cases}$

42. $\begin{cases} -7x + 4y = 0 \\ 8x - 5y = 100 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 5x + 7y + 4z = 1 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 6x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$

45. $\begin{cases} \quad -2y + 2z = 12 \\ 3x + y + 3z = -2 \\ x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x + 2y \quad + 3w = 0 \\ y + z + w = 1 \\ y + \quad w = 2 \\ x + 2y \quad + 2w = 3 \end{cases}$



47–52 ■ Resolver un sistema lineal Resuelva el sistema de ecuaciones convirtiéndolo en una ecuación matricial. Use una calculadora para realizar las operaciones matriciales, como en el ejemplo 7.

47. $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + \quad 5z = 11 \\ 2x + 3y \quad = 12 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ 5x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 12x + \frac{1}{2}y - 7z = 21 \\ 11x - 2y + 3z = 43 \\ 13x + y - 4z = 29 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 4 \\ x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z = 7 \\ x + y - z = -6 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x + y \quad - 3w = 0 \\ x \quad - 2z \quad = 8 \\ 2y - z + w = 5 \\ 2x + 3y \quad - 2w = 13 \end{cases}$

52. $\begin{cases} x + y + z + w = 15 \\ x - y + z - w = 5 \\ x + 2y + 3z + 4w = 26 \\ x - 2y + 3z - 4w = 2 \end{cases}$

HABILIDADES Plus

53–54 ■ Resolver una ecuación matricial Resuelva la ecuación matricial multiplicando cada lado por la matriz inversa apropiada.

53. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

55–56 ■ Inversas de matrices especiales Encuentre la inversa de la matriz.

55. $\begin{bmatrix} a & -a \\ a & a \end{bmatrix}$ $(a \neq 0)$

56. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ $(abcd \neq 0)$

57–60 ■ ¿Cuándo las matrices tienen inversas? Encuentre la inversa de la matriz. ¿Para qué valores de x, si los hay, la matriz no tiene inversa?

57. $=\begin{bmatrix} 2 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$

58. $\begin{bmatrix} e^x & -e^{2x} \\ e^{2x} & e^{3x} \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 1 & e^x & 0 \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

60. $\begin{bmatrix} x & 1 \\ -x & \dfrac{1}{x-1} \end{bmatrix}$

APLICACIONES

61. Nutrición Un nutricionista está estudiando los efectos de los siguientes nutrientes: ácido fólico, colina e inositol. Tiene a su disposición tres tipos de alimento y cada tipo contiene las siguientes cantidades de dichos nutrientes por onza.

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Ácido fólico (mg)	3	1	3
Colina (mg)	4	2	4
Inositol (mg)	3	2	4

a) Encuentre la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

y úsela para resolver las partes restantes de este problema.

b) ¿Cuántas onzas de cada alimento debe administrar el nutricionista a sus ratas de laboratorio si desea que su dieta diaria contenga 10 mg de ácido fólico, 14 de colina y 13 de inositol?

c) ¿Cuánto de cada alimento es necesario para suministrar 9 mg de ácido fólico, 12 de colina y 10 de inositol?

d) ¿Será que alguna combinación de estos alimentos da 2 mg de ácido fólico, 4 de colina y 11 de inositol?

62. Nutrición Consulte el ejercicio 61. Suponga que el alimento tipo C ha sido incorrectamente etiquetado, y que en realidad contiene 4 mg de ácido fólico, 6 de colina y 5 de inositol por onza. ¿Será aún posible usar inversión de matrices para resolver los incisos *b*), *c*) y *d*) del ejercicio 61? ¿Por qué sí o por qué no?



63. Comisiones de ventas Una vendedora que trabaja en un quiosco ofrece tres modelos diferentes de teléfonos celulares: estándar con capacidad de 16 GB, de lujo con capacidad 32 GB y de superlujo con 64 GB de capacidad. Por cada teléfono que vende, cobra una comisión basada en el modelo de teléfono celular. En una semana vende 9 modelos estándar, 11 de lujo y 8 de súper lujo y tiene una comisión de $740. La siguiente semana vende 13 estándar, 15 de lujo y 16 de superlujo con una comisión de $1 204. La tercera semana vende 8 estándar, 7 de lujo y 14 de superlujo, ganando $828 en comisión.

a) Sea que x, y y z representan la comisión que gana la vendedora en los modelos estándar, de lujo y de superlujo, respectivamente. Traduzca la información dada en un sistema de ecuaciones en x, y y z.

b) Exprese el sistema de ecuaciones que encontró en el inciso *a*) como una ecuación de la matriz de la forma $AX = B$.

c) Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes A y utilícela para resolver la ecuación matricial de inciso *b*). ¿Cuánta gana la vendedora por comisión en cada modelo de teléfono celular?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

64. DISCUSIÓN: No hay propiedad de producto cero para matrices Hemos utilizado la propiedad del producto cero para resolver ecuaciones algebraicas. Las matrices *no tienen* esta propiedad. Con O represente la **matriz cero 2 × 2**

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre las matrices 2 × 2 matrices $A \neq O$ y $B \neq O$ tales que $AB = O$. ¿Puede encontrar una matriz $A \neq O$ tal que $A^2 = O$?

10.6 DETERMINANTES Y REGLA DE CRAMER

■ Determinante de una matriz 2 × 2 ■ Determinante de una matriz *n* × *n* ■ Transformaciones de renglón y columna ■ Regla de Cramer ■ Áreas de triángulos usando determinantes

Si una matriz es **cuadrada** (es decir, si tiene el mismo número de renglones que de columnas), entonces podemos asignarle un número llamado *determinante*. Se pueden usar determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como veremos más adelante en esta sección. También son útiles para determinar si una matriz tiene una inversa.

■ Determinante de una matriz 2 × 2

Denotamos el determinante de una matriz cuadrada A por el símbolo $\det(A)$ o $|A|$. Primero definimos $\det(A)$ para los casos más sencillos. Si $A = [a]$ es una matriz 1×1, entonces $\det(A) = a$. El recuadro siguiente da la definición de un determinante 2×2.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ 2 × 2

El **determinante** de la matriz 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Usaremos ambas notaciones, $\det(A)$ y $|A|$, para el determinante de A. Aun cuando el símbolo $|A|$ se ve como el símbolo de valor absoluto, será claro por el contexto qué significado se persigue.

EJEMPLO 1 ■ Determinante de una matriz 2 × 2

Evalúe $|A|$ para $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - (-3)2 = 18 - (-6) = 24$$

Para evaluar un determinante 2×2 tomamos el producto de la diagonal de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha, y restamos el producto de arriba a la derecha hacia abajo a la izquierda, como lo indican las flechas.

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

■ Determinante de una matriz *n* × *n*

Para definir el concepto de determinante para una matriz $n \times n$ arbitraria, necesitamos la siguiente terminología.

MENORES Y COFACTORES

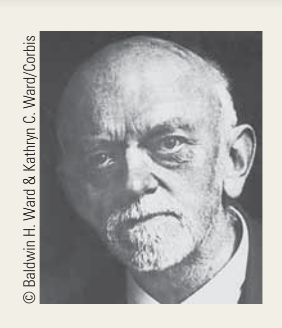
Sea A una matriz $n \times n$.

1. El **menor** M_{ij} de la entrada a_{ij} es el determinante de la matriz obtenida al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.
2. El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Por ejemplo, si A es la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$



DAVID HILBERT (1862-1943) nació en Königsberg, Alemania, y fue profesor en la Universidad de Göttingen. Es considerado por muchos como el más grande matemático del siglo XX. En el Congreso Internacional de Matemáticas, efectuado en París en 1900, Hilbert estableció la dirección de las matemáticas al plantear 23 problemas que consideró de importancia esencial. Señaló que "hay problemas cuyas soluciones esperamos del futuro". Casi todos los problemas han sido ya resueltos (vea Julia Robinson, página 713, y Alan Turing, página 118), y sus soluciones han llevado a nuevos e importantes campos de investigación matemática. No obstante, al entrar en el nuevo milenio, algunos de los problemas de Hilbert siguen sin ser resueltos. En su obra, Hilbert hizo hincapié en la estructura, la lógica y los fundamentos de las matemáticas. Parte de su genio está en su capacidad para ver el enunciado más general posible de un problema. Por ejemplo, Euler demostró que todo número entero es la suma de cuatro cuadrados; Hilbert demostró un enunciado similar para todas las potencias de enteros positivos.

entonces el menor M_{12} es el determinante de la matriz obtenido al eliminar el primer renglón y la segunda columna de A. Entonces

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0(6) - 4(-2) = 8$$

Por tanto, el cofactor $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -8$. Del mismo modo,

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 0 = 4$$

En consecuencia $A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 4$.

Observe que el cofactor de a_{ij} es simplemente el menor de a_{ij} multiplicado ya sea por 1 o por -1, dependiendo de si $i + j$ es par o impar. Así, en una matriz 3×3 obtenemos el cofactor de cualquier elemento al poner como prefijo en su menor el signo obtenido siguiendo el siguiente patrón.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ahora estamos listos para definir el determinante de cualquier matriz cuadrada.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si A es una matriz $n \times n$ entonces el **determinante** de A se obtiene multiplicando cada elemento del primer renglón por su cofactor y luego sumando los resultados. En símbolos,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

EJEMPLO 2 ■ Determinante de una matriz 3 × 3

Evalúe el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2\cdot 6 - 4\cdot 5) - 3[0\cdot 6 - 4(-2)] - [0\cdot 5 - 2(-2)]$$

$$= -16 - 24 - 4$$

$$= -44$$

Ahora intente realizar los ejercicios 21 y 29 ■

En nuestra definición del determinante utilizamos únicamente los cofactores de elementos del primer renglón. Esto se llama **desarrollar el determinante por el primer renglón**. De hecho, *podemos desarrollar el determinante por cualquier renglón o columna en la misma forma y obtener el mismo resultado en cada caso* ((aun cuando no demostraremos esto). El siguiente ejemplo ilustra este principio.

EJEMPLO 3 ■ Desarrollar un determinante alrededor de un renglón o columna

Sea A la matriz del ejemplo 2. Evalúe el determinante de A al desarrollar

a) por el segundo renglón

b) por la tercera columna

Verifique que cada desarrollo dé el mismo valor.

SOLUCIÓN

a) Desarrollando por el segundo renglón se obtiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2[2 \cdot 6 - (-1)(-2)] - 4[2 \cdot 5 - 3(-2)]$$

$$= 0 + 20 - 64 = -44$$

Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para instrucciones específicas del trazado de gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

b) Desarrollando por la tercera columna da

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -[0 \cdot 5 - 2(-2)] - 4[2 \cdot 5 - 3(-2)] + 6(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0)$$

$$= -4 - 64 + 24 = -44$$

A continuación, se presenta la salida cuando se usa la TI-83 para calcular el determinante del ejemplo 3:

```
[A]
        [[2   3  -1]
         [0   2  4 ]
         [-2  5  6 ]]
det([A])
                  -44
```

FIGURA 1

En ambos casos obtenemos el mismo valor para el determinante que cuando desarrollamos por el primer renglón del ejemplo 2.

Podemos usar también una calculadora graficadora para calcular determinantes como se muestra en la figura 1.

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

El siguiente criterio nos permite determinar si una matriz cuadrada tiene una inversa sin calcular realmente la inversa. Este es uno de los usos más importantes del determinante en álgebra de matrices, y es la razón del nombre de *determinante*.

CRITERIO DE INVERTIBILIDAD

Si A es una matriz cuadrada, entonces A tiene una inversa si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

No probaremos este hecho, pero de la fórmula para la inversa de una matriz 2×2 (página 725) se puede ver por qué es verdadera en el caso 2×2.


© Pictorial Parade/Hulton Archive/Getty Images

EMMY NOETHER (1882-1935) fue una de las principales matemáticas de principios del siglo XX. Sus trabajos de investigación en álgebra abstracta constituyeron gran parte de los fundamentos para este campo, y su trabajo sobre teoría de invariantes fue esencial en el desarrollo de la teoría general de la relatividad de Einstein. Aun cuando en ese tiempo a las mujeres no se les permitía estudiar en universidades alemanas, ella asistió a cursos como oyente y continuó de manera no oficial hasta recibir un doctorado en Erlangen, *summa cum laude*, a pesar de la oposición del senado académico que declaró que las mujeres estudiantes "derribarían todo el orden académico". Posteriormente, enseñó matemáticas en Göttingen, Moscú y Frankfurt. En 1933 salió de Alemania para escapar de la persecución nazi, al aceptar un puesto en el Colegio Bryn Mawr en los suburbios de Filadelfia. Ahí y en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey, dio lecciones hasta su prematura muerte en 1935.

EJEMPLO 4 ■ Uso del determinante para demostrar que una matriz no es invertible

Demuestre que la matriz A no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Empezamos por calcular el determinante de A. Dado que todos los elementos del segundo renglón, excepto uno, son cero desarrollamos el determinante por el segundo renglón. Si hacemos esto vemos de la siguiente ecuación que sólo tendrá que calcularse el cofactor A_{24}.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} - 0 \cdot A_{23} + 3 \cdot A_{24} = 3A_{24}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Desarróllelo por la columna 3}$$

$$= 3(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-2)(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0$$

Puesto que el determinante de A es cero, A no puede tener una inversa por el criterio de invertibilidad.

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

Transformaciones de renglón y columna

El ejemplo anterior muestra que, si desarrollamos un determinante alrededor de un renglón o columna que contenga muchos ceros, nuestro trabajo se reduce considerablemente ya que no tenemos que evaluar los cofactores de los elementos que son cero. Es frecuente que el siguiente principio simplifique el proceso de encontrar un determinante al introducir ceros en la matriz sin cambiar el valor del determinante.

TRANSFORMACIONES DE RENGLÓN Y COLUMNA DE UN DETERMINANTE

Si A es una matriz cuadrada y si la matriz B se obtiene de A al sumar un múltiplo de un renglón a otro o un múltiplo de una columna a otra, entonces $\det(A) = \det(B)$.

EJEMPLO 5 ■ Uso de transformaciones de renglón y columna para calcular un determinante

Encuentre el determinante de la matriz A. ¿Tiene inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 & 11 \\ 24 & 6 & 1 & -12 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Si sumamos -3 veces el renglón 1 al renglón 3 cambiamos todos los elementos del renglón 3 a ceros, excepto uno.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz tiene el mismo determinante que A, y si desarrollamos su determinante por el tercer renglón obtenemos

$$\det(A) = 4\begin{vmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 11 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora, sumando 2 veces la columna 3 a la columna 1 en este determinante se obtiene

$$\det(A) = 4\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 25 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{Desarróllelo por la columna 1}$$

$$= 4(-25)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-25)[2(-1) - (-4)2] = -600$$

Como el determinante de A no es cero, A no tiene una inversa.

Ahora intente realizar el ejercicio 35 ■

Regla de Cramer

Las soluciones de ecuaciones lineales a veces se pueden expresar usando determinantes. Para ilustrar lo anterior del siguiente par de ecuaciones lineales despejemos la incógnita x.

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

Para eliminar la incógnita y, multiplicamos la primera ecuación por d y la segunda por b y restamos.

$$\begin{aligned} adx + bdy &= rd \\ \underline{bcx + bdy} &= \underline{bs} \\ adx - bcx &= rd - bs \end{aligned}$$





PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Gráfica con computadora I

El álgebra matricial es la herramienta básica que se usa en las gráficas por computadora. Las propiedades de cada pixel de una imagen se almacenan en una matriz grande en la memoria de la computadora. En este proyecto descubriremos cómo la multiplicación de matrices se puede utilizar para "mover" un punto en el plano a una ubicación prescrita. La combinación de estos movimientos para cada pixel de una imagen nos permite estirar, comprimir, trasladar y, por otra parte, transformar una imagen en una pantalla de computadora mediante el uso de álgebra matricial. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

*Este material se encuentra disponible en inglés.

Factorizando el lado izquierdo obtenemos $(ad - bc)x = rd - bs$. Suponiendo que $ad - bc \neq 0$, podemos despejar x:

$$x = \frac{rd - bs}{ad - bc}$$

Del mismo modo, podemos encontrar

$$y = \frac{as - cr}{ad - bc}$$

El numerador y denominador de las fracciones para x y y son determinantes de matrices 2×2. Por tanto, podemos expresar la solución del sistema usando determinantes como sigue.

REGLA DE CRAMER PARA SISTEMAS CON DOS INCÓGNITAS

El sistema lineal

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

tiene la solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

siempre que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Usando la notación

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D_x = \begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix} \qquad D_y = \begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes

Sustituya la primera columna de D por r y s

Sustituya la segunda columna de D por r y s

podemos escribir la solución del sistema como

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} \quad \text{y} \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}$$

EJEMPLO 6 ■ Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema con dos incógnitas

Use la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 2x + 6y = -1 \\ x + 8y = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Para este sistema tenemos

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 10$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)8 - 6 \cdot 2 = -20$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)1 = 5$$

La solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

La regla de Cramer se puede extender para aplicar a cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas en las que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero. Como vimos en la sección anterior cualquiera de estos sistemas se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Del mismo modo que con nuestra deducción de la regla de Cramer en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, hacemos que D sea la matriz de coeficientes de este sistema D_{x_i} sea la matriz obtenida al sustituir la i-ésima columna de D por los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que se encuentran a la derecha del signo igual. La solución del sistema está dada entonces por la siguiente regla.

REGLA DE CRAMER

Si un sistema de n ecuaciones lineales con las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es equivalente a la ecuación matricial $DX = B$, y si $|D| \neq 0$, entonces sus soluciones son

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|} \qquad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|} \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

donde D_{x_i} es la matriz obtenida al sustituir la i-ésima columna de D por la matriz $n \times 1$ de B.

EJEMPLO 7 ■ Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema con tres incógnitas

Use la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x + 6z = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero evaluamos los determinantes que aparecen en la regla de Cramer. Observe que D es la matriz de coeficientes y que D_x, D_y y D_z se obtienen sustituyendo las columnas primera, segunda y tercera de D por los términos constantes.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -38 \qquad |D_x| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -78$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -22 \qquad |D_z| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

Ahora usamos la regla de Cramer para obtener la solución:

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-78}{-38} = \frac{39}{19} \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-22}{-38} = \frac{11}{19}$$

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{13}{-38} = -\frac{13}{38}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

La solución del sistema del ejemplo 7 usando la eliminación de Gauss implica matrices cuyos elementos son fracciones con denominadores más bien grandes. Entonces, en casos como los ejemplos 6 y 7, la regla de Cramer nos da una forma eficiente de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero en sistemas con más de tres ecuaciones evaluar los diversos determinantes que aparezcan es, en general, un trabajo largo y tedioso (a menos que se use una calculadora graficadora). Además, la regla no aplica si $|D| = 0$ o si D no es una matriz cuadrada. Por tanto, la regla de Cramer es una alternativa útil para la eliminación de Gauss, pero sólo en algunas situaciones.

■ Áreas de triángulos usando determinantes

Los determinantes son una forma sencilla de calcular el área de un triángulo del plano de coordenadas.

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Si un triángulo en el plano coordenado tiene vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3), entonces su área es

$$\mathcal{A} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

donde el signo se elige para hacer que el área sea positiva.

En el ejercicio 74 le pedimos que demuestre esta fórmula.

EJEMPLO 8 ■ Área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo que se muestra en la figura 2.

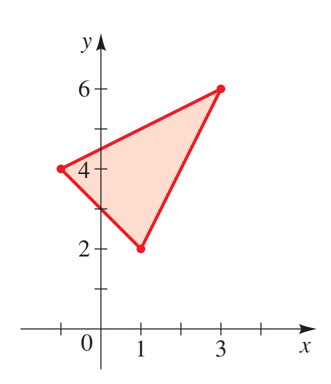


FIGURA 2

SOLUCIÓN Los vértices son $(1, 2)$, $(3, 6)$ y $(-1, 4)$. Usando la fórmula del recuadro anterior, obtenemos

Podemos calcular el determinante manualmente o usando una calculadora graficadora.

```
[A]
          [[-1  4  1]
           [3   6  1]
           [1   2  1]]
det([A])
                  -12
```

$$\mathcal{A} = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm\tfrac{1}{2}(-12)$$

Para hacer que el área sea positiva elegimos el signo negativo en la fórmula. Entonces, el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = -\tfrac{1}{2}(-12) = 6$$

Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

10.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. *¿Verdadero o falso?* $\det(A)$ está definido sólo por una matriz cuadrada A.
2. *¿Verdadero o falso?* $\det(A)$ es un número, no una matriz.
3. *¿Verdadero o falso?* Si $\det(A) = 0$, entonces A no es invertible.
4. Llene los espacios en blanco con los números apropiados para calcular el determinante. Donde diga "±", elija el signo apropiado (+ o −).

   a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = \square\square - \square\square = $ ________

   b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \pm\square(\square\square - \square\square) \pm \square(\square\square - \square\square)$

   $\pm\square(\square\square - \square\square) = $ ________

HABILIDADES

5–14 ■ Calcular determinantes Encuentre el determinante de la matriz, si existe.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ -0.4 & -0.8 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2.2 & -1.4 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$

15–20 ■ Menores y cofactores Evalúe el menor y el cofactor usando la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

15. M_{11}, A_{11}
16. M_{33}, A_{33}
17. M_{12}, A_{12}
18. M_{13}, A_{13}
19. M_{23}, A_{23}
20. M_{32}, A_{32}

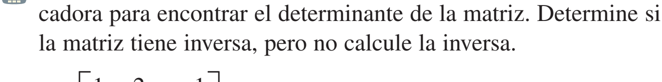
21–28 ■ Calcular determinantes Encuentre el determinante de la matriz. Determine si la matriz tiene una inversa, pero no calcule la inversa.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 30 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$



29–34 ■ Calcular determinantes Utilice una calculadora graficadora para encontrar el determinante de la matriz. Determine si la matriz tiene inversa, pero no calcule la inversa.

29. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 10 & -20 & 31 \\ 10 & -11 & 45 \\ -20 & 40 & -50 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 & 7 \\ 2 & 18 & 18 & 13 \\ -3 & -30 & -4 & -24 \\ 1 & 10 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ -3 & -9 & 11 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 31 \\ 5 & 15 & -10 & 39 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 10 \\ -8 & -6 & 24 & -1 \\ 20 & 15 & 3 & 27 \\ 12 & 9 & -6 & -1 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 10 \\ -2 & -2 & 26 & 3 \\ 6 & 9 & -16 & 45 \\ -8 & -12 & 20 & -36 \end{bmatrix}$

35–38 ■ Determinantes usando operaciones de renglón y columna Evalúe el determinante usando operaciones de renglón o columna siempre que sea posible para simplificar su trabajo.

35. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ **36.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & -12 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **38.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 10 & 8 \\ 6 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

39. Calcular un determinante de diferentes formas Considere la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Evalúe det(B) desarrollando por el segundo renglón.

b) Evalúe det(B) desarrollando por la tercera columna.

c) ¿Concuerdan sus resultados en los incisos *a*) y *b*)?

40. Determinante de una matriz especial Encuentre el determinante de una matriz 10×10 que tiene 2 en cada entrada de la diagonal principal y ceros en otras partes.

41–56 ■ Regla de Cramer Use la regla de Cramer para resolver el sistema.

41. $\begin{cases} 2x - y = -9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} 6x + 12y = 33 \\ 4x + 7y = 20 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

45. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 0.4 \\ 1.2x + 1.6y = 3.2 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} 10x - 17y = 21 \\ 20x - 31y = 39 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + z = 11 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ **48.** $\begin{cases} 5x - 3y + z = 6 \\ 4y - 6z = 22 \\ 7x + 10y = -13 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ **50.** $\begin{cases} -2a + c = 2 \\ a + 2b - c = 9 \\ 3a + 5b + 2c = 22 \end{cases}$

51. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{10} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{2}z = \frac{11}{10} \\ x - \frac{4}{5}y + z = \frac{9}{5} \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 3z = 19 \\ 4y + 7z = 17 \end{cases}$

53. $\begin{cases} 3y + 5z = 4 \\ 2x - z = 10 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x + y - z = 8 \\ 3x + 5z = 0 \end{cases}$

55. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + w = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + w = 3 \\ w - x = 4 \end{cases}$

57–60 ■ Área de un triángulo Trace el triángulo con los vértices dados y utilice un determinante para encontrar su área.

57. (0, 0), (6, 2), (3, 8) **58.** (1, 0), (3, 5), (−2, 2)

59. (−1, 3), (2, 9), (5, −6) **60.** (−2, 5), (7, 2), (3, −4)

HABILIDADES Plus

61–62 ■ Determinantes de matrices especiales Evalúe los determinantes.

61. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$ **62.** $\begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

63–66 ■ Ecuaciones con determinantes Despeje x.

63. $\begin{vmatrix} x & 12 & 13 \\ 0 & x-1 & 23 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ **64.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

65. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **66.** $\begin{vmatrix} a & b & x-a \\ x & x+b & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

67. Uso de determinantes Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

68. Número de soluciones de un sistema lineal Considere el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -3x - 6y + 5z = 8 \\ 2x + 6y + 9z = 7 \end{cases}$$

a) Verifique que $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ es una solución del sistema.

b) Encuentre el determinante de la matriz de coeficientes.

c) Sin resolver el sistema determine si hay algunas otras soluciones.

d) ¿Puede usarse la regla de Cramer para resolver este sistema? ¿Por qué sí o por qué no?

69. Puntos colineales y determinantes

a) Si tres puntos se encuentran sobre una recta, ¿cuál es el área del "triángulo" que determinan? Use la respuesta a esta pregunta junto con la fórmula de determinantes para el área de un triángulo para explicar por qué los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3) son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Use un determinante para comprobar si cada conjunto de puntos es colineal. Grafíquelos para verificar su respuesta.

i) $(-6, 4)$, $(2, 10)$, $(6, 13)$

ii) $(-5, 10)$, $(2, 6)$, $(15, -2)$

70. Forma determinante para la ecuación de una recta

a) Use el resultado del ejercicio 69*a*) para demostrar que la ecuación de la recta que contiene los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Use el resultado del inciso *a*) para encontrar una ecuación para la recta que contiene los puntos $(20, 50)$ y $(-10, 25)$.

APLICACIONES

71. Compra de fruta Un puesto de frutas al lado de la carretera vende manzanas a 0.75 dólares la libra, duraznos a $0.90 la libra y peras a $0.60 la libra. Muriel compra 18 libras de fruta a un costo total de 13.80 dólares. Sus duraznos y peras juntos costaron $1.80 más que sus manzanas.

a) Establezca un sistema lineal para encontrar cuántas libras de manzanas, duraznos y peras compró Muriel.

b) Resuelva el sistema usando la regla de Cramer.

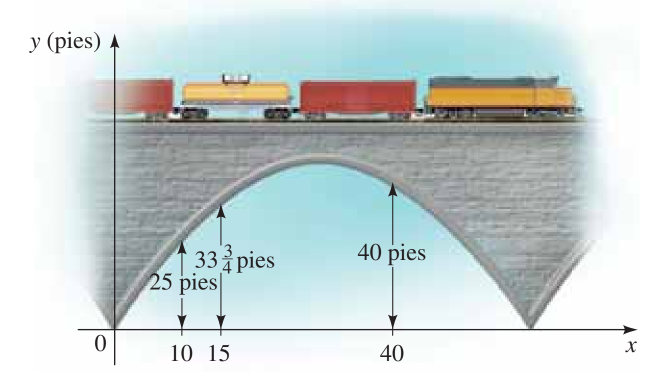
72. El arco de un puente La abertura de un puente de ferrocarril sobre una vía tiene forma de parábola. Un topógrafo mide las alturas de los tres puntos sobre el puente, como se muestra en la figura. Él desea encontrar una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

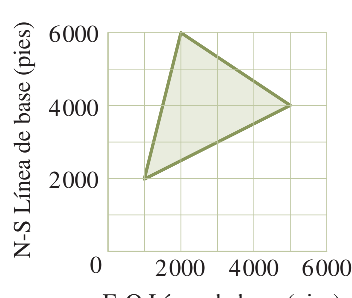
para modelar la forma del arco.

a) Use los puntos medidos para establecer un sistema de ecuaciones lineales y encuentre los coeficientes desconocidos a, b y c.

b) Resuelva el sistema usando la regla de Cramer.



73. Un terreno triangular Un club deportivo está comprando un terreno para construir un área de conservación. La última parte que necesitan comprar es el área triangular que se ve en la figura. Use la fórmula de determinantes para el área de un triángulo para encontrar el área del terreno.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

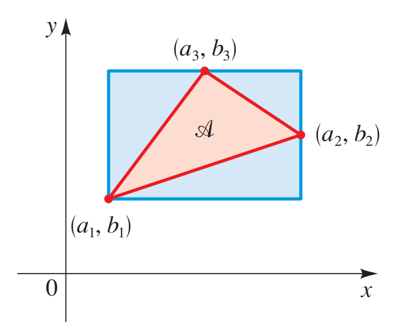
74. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Fórmula de determinantes para el área de un triángulo La figura siguiente muestra un triángulo en el plano con vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3).

a) Encuentre las coordenadas de los vértices del rectángulo circundante y encuentre su área.

b) Encuentre el área del triángulo rojo al restar las áreas de los tres triángulos azules del área del rectángulo.

c) Use la respuesta al inciso *b*) para demostrar que el área del triángulo rojo está dada por

$$\mathscr{A} = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$



75. DISCUSIÓN: Matrices con determinante cero Use la definición de determinante y operaciones elementales de renglón y columna para explicar por qué las matrices de los tipos siguientes tienen determinante 0.

a) Una matriz con un renglón o columna formada enteramente de ceros

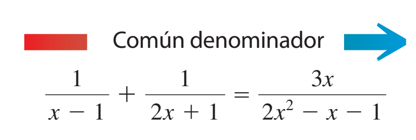
b) Una matriz con dos renglones iguales o dos columnas iguales

c) Una matriz en la que un renglón es un múltiplo de otro renglón, o una columna es un múltiplo de otra columna

76. DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN: Resolver sistemas lineales Supongamos que usted tiene que resolver un sistema lineal con cinco ecuaciones y cinco incógnitas, sin ayudarse de calculadora o computadora. ¿Cuál método preferiría: la regla de Cramer o la eliminación de Gauss? Redacte un breve párrafo que explique las razones de su respuesta.

10.7 FRACCIONES PARCIALES

■ Factores lineales distintos ■ Factores lineales repetidos ■ Factores cuadráticos irreducibles ■ Factores cuadráticos irreducibles repetidos



Para escribir una suma o diferencia de expresiones fraccionarias como una sola fracción buscamos un común denominador. Por ejemplo,

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+2)} = \frac{3x}{2x^2 - x - 1}$$

Pero para algunas aplicaciones de álgebra para cálculo debemos invertir este proceso, es decir, debemos expresar una fracción como $3x/(2x^2 - x - 1)$ como la suma de las fracciones más sencillas $1/(x - 1)$ y $1/(2x + 1)$. Estas fracciones más simples reciben el nombre de *fracciones parciales*; en esta sección aprendemos cómo encontrarlas.

Sea r la fracción racional

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de P es menor que el de Q. Por el teorema de factores lineales y cuadráticos de la sección 3.5, todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar completamente en factores cuadráticos lineales e irreducibles, es decir, factores de la forma $ax + b$ y $ax^2 + b + c$ donde a, b y c son números reales. Por ejemplo,

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Después de haber factorizado completamente el denominador Q de r, podemos expresar $r(x)$ como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{y} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Esta suma se llama **descomposición de fracciones parciales** de r. Examinemos los detalles de cuatro posibles casos.

Factores lineales distintos

Primero consideramos el caso en el que el denominador se factoriza en factores lineales distintos.

CASO 1: EL DENOMINADOR ES UN PRODUCTO DE FACTORES LINEALES DISTINTOS

Suponga que podemos factorizar $Q(x)$ como

$$Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$$

sin ningún factor repetido. En este caso la descomposición en fracción parcial de $P(x)/Q(x)$ toma la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se determinan como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 ■ Factores lineales distintos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2}$

SOLUCIÓN El denominador se factoriza como sigue.

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2 &= x^2(x+2)-(x+2) = (x^2-1)(x+2) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

Esto nos da la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

Multiplicando cada lado por el común denominador, $(x-1)(x+1)(x+2)$, obtenemos

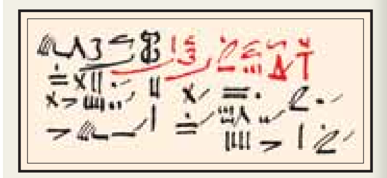
$$\begin{aligned} 5x+7 &= A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1) \\ &= A(x^2+3x+2)+B(x^2+x-2)+C(x^2-1) && \text{Desarrolle} \\ &= (A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C) && \text{Combine términos semejantes} \end{aligned}$$

Si dos polinomios son iguales, entonces sus coeficientes son iguales. Así, dado que $5x+7$ no tiene término en x^2, tenemos $A+B+C=0$. Del mismo modo, comparando los coeficientes de x, vemos que $3A+B=5$, y al comparar términos constantes obtenemos $2A-2B-C=7$. Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales para A, B y C.

$$\begin{cases} A+B+C=0 & \text{Ecuación 1: coeficientes de } x^2 \\ 3A+B=5 & \text{Ecuación 2: coeficientes de } x \\ 2A-2B-C=7 & \text{Ecuación 3: coeficientes constantes} \end{cases}$$

EL PAPIRO DE RHIND es el documento matemático más antiguo. Es un rollo egipcio escrito en 1650 a.C. por el escriba Ahmes, que explica que es una copia exacta de un rollo escrito 200 años antes. Ahmes dice que su papiro contiene "un estudio completo de todas las cosas, idea de todo lo que existe, conocimiento de todos los oscuros secretos". En realidad, el documento contiene reglas aritméticas que incluyen multiplicación y división de fracciones y varios ejercicios con soluciones. El ejercicio que aquí mostramos dice: "Un montón y su séptimo hacen diecinueve; ¿qué tan grande es el montón?". Para resolver problemas de este tipo los egipcios usaban fracciones parciales porque su sistema numérico requería que todas las fracciones se escribieran como sumas de recíprocos de números enteros. Por ejemplo, $\frac{7}{12}$ se escribiría como $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

El papiro da una fórmula correcta para el volumen de una pirámide truncada, que los antiguos egipcios usaban cuando construyeron las pirámides de Giza. También da la fórmula $A = (\frac{8}{9}d)^2$ para el área de un círculo con diámetro d. ¿Qué tan cercana es esta del área real?



Usamos eliminación de Gauss para resolver este sistema.

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ \quad -2B - 3C = 5 \\ \quad -4B - 3C = 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \text{Ecuación 2} + (-3) \times \text{ecuación 1} \\ \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 1} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ \quad -2B - 3C = 5 \\ \qquad\quad 3C = -3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 2} \end{matrix}$$

De la tercera ecuación obtenemos $C = -1$. Sustituyendo a la inversa encontramos que $B = -1$ y $A = 2$. Entonces, la descomposición en fracción parcial es

$$\frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{-1}{x + 2}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 13 ■

El mismo método funciona en los casos restantes. Establecemos descomposición en fracciones parciales con las constantes desconocidas $A, B, C, \ldots$ Entonces multiplicamos cada lado de la ecuación resultante por el común denominador, simplificamos el lado derecho de la ecuación e igualamos coeficientes. Esto da un conjunto de ecuaciones lineales que siempre tendrán una solución única (siempre que la descomposición en fracciones parciales se haya establecido correctamente).

Factores lineales repetidos

Ahora consideramos el caso en el que el denominador se factoriza en factores lineales, algunos de los cuales son repetidos.

CASO 2: EL DENOMINADOR ES UN PRODUCTO DE FACTORES LINEALES, ALGUNOS DE LOS CUALES SON REPETIDOS

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene el factor lineal $ax + b$, repetido k veces; esto es, $(ax + b)^k$ es un factor de $Q(x)$. Entonces, correspondiendo a cada factor, la descomposición en fracciones parciales para $P(x)/Q(x)$ contiene

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

EJEMPLO 2 ■ Factores lineales repetidos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^2 + 1}{x(x - 1)^3}$.

SOLUCIÓN Puesto que el factor $x - 1$ se repite tres veces en el denominador, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{(x - 1)^3}$$

Multiplicando cada lado por el común denominador, $x(x - 1)^3$, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= A(x - 1)^3 + Bx(x - 1)^2 + Cx(x - 1) + Dx \\ &= A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + C(x^2 - x) + Dx && \text{Desarrolle} \\ &= (A + B)x^3 + (-3A - 2B + C)x^2 + (3A + B - C + D)x - A && \text{Combine términos semejantes} \end{aligned}$$

Igualando coeficientes obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} A + B = 0 & \text{Coeficientes de } x^3 \\ -3A - 2B + C = 1 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ 3A + B - C + D = 0 & \text{Coeficientes de } x \\ -A = 1 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

Si reacomodamos estas ecuaciones al poner la última en la primera posición, fácilmente podemos ver (usando sustitución) que lay solución del sistema es $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 2$, de modo que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^2 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 5 y 29 ■

Factores cuadráticos irreducibles

Ahora consideraremos el caso en el que el denominador tiene factores cuadráticos irreducibles distintos.

CASO 3: EL DENOMINADOR TIENE FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES, NINGUNO DE LOS CUALES SE REPITE

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene al factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ (que no se puede factorizar más). Entonces, en correspondencia con esto, la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

EJEMPLO 3 ■ Factores cuadráticos distintos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$.

SOLUCIÓN Puesto que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ que no se puede factorizar más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$ obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando coeficientes nos da las ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 2 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ C = -1 & \text{Coeficientes de } x \\ 4A = 4 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

entonces $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 7 y 37 ■

Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Ahora consideramos el caso en el que el denominador tiene factores cuadráticos irreducibles, algunos de los cuales se repiten.

CASO 4: EL DENOMINADOR TIENE UN FACTOR CUADRÁTICO IRREDUCIBLE REPETIDO

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene al factor $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $ax^2 + bx + c$ no se pueden factorizar más. Entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

EJEMPLO 4 ■ Factores cuadráticos repetidos

Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 + 2} + \frac{Hx + I}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Jx + K}{(x^2 + 2)^3}.$$

Ahora intente realizar los ejercicios 11 y 41 ■

Para encontrar los valores de $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ y K en el ejemplo 4 tendríamos que resolver un sistema de 11 ecuaciones lineales. Aun cuando es posible, esto ciertamente requiere una gran cantidad de trabajo.

Las técnicas que hemos descrito en esta sección aplican sólo a funciones racionales $P(x)/Q(x)$ en las que el grado de P es menor que el grado de Q. Si este no es el caso, primero debemos usar división larga para dividir Q en P.

EJEMPLO 5 ■ Uso de división larga para preparar para fracciones parciales

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

SOLUCIÓN Dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, usamos división larga para obtener

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^3 + 2x^2 - x - 2 \overline{)\, 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7} \\ \underline{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x } \\ 5x + 7 \end{array}$$

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 2x + \frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

El término restante ahora satisface el requisito de que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. En este punto proseguimos como en el ejemplo 1 para obtener la descomposición

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 2x + \frac{2}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{-1}{x + 2}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

10.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1–2 ■ Para cada función racional r, elija de *i*) - *iv*) la forma apropiada para su descomposición en fracciones parciales.

1. $r(x) = \dfrac{4}{x(x-2)^2}$

i) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2}$ *ii*) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x-2)^2}$

iii) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2}$ *iv*) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2}\dfrac{Cx+D}{(x-2)^2}$

2. $r(x) = \dfrac{2x+8}{(x-1)(x^2+4)}$

i) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x^2+4}$

ii) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

iii) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x^2+4}$

iv) $\dfrac{Ax+B}{x-1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

HABILIDADES

3–12 ■ **Forma de la descomposición de fracciones parciales** Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función (como en el ejemplo 4). No determine los valores numéricos de los coeficientes.

3. $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$ **4.** $\dfrac{x}{x^2+3x-4}$

5. $\dfrac{x^2-3x+5}{(x-2)^2(x+4)}$ **6.** $\dfrac{1}{x^4-x^3}$

7. $\dfrac{x^2}{(x-3)(x^2+4)}$ **8.** $\dfrac{1}{x^4-1}$

9. $\dfrac{x^3-4x^2+2}{(x^2+1)(x^2+2)}$ **10.** $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2(x^2+4)^2}$

11. $\dfrac{x^3+x+1}{x(2x-5)^3(x^2+2x+5)^2}$ **12.** $\dfrac{1}{(x^3-1)(x^2-1)}$

13–44 ■ **Descomposición de fracciones parciales** Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

13. $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$ **14.** $\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$

15. $\dfrac{5}{(x-1)(x+4)}$ **16.** $\dfrac{x+6}{x(x+3)}$

17. $\dfrac{12}{x^2-9}$ **18.** $\dfrac{x-12}{x^2-4x}$

19. $\dfrac{4}{x^2-4}$ **20.** $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

21. $\dfrac{x+14}{x^2-2x-8}$ **22.** $\dfrac{8x-3}{2x^2-x}$

23. $\dfrac{x}{8x^2-10x+3}$ **24.** $\dfrac{7x-3}{x^3+2x^2-3x}$

25. $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$ **26.** $\dfrac{-3x^2-3x+27}{(x+2)(2x^2+3x-9)}$

27. $\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2}$ **28.** $\dfrac{3x^2+5x-13}{(3x+2)(x^2-4x+4)}$

29. $\dfrac{2x}{4x^2+12+9}$ **30.** $\dfrac{x-4}{(2x-5)^2}$

31. $\dfrac{4x^2-x-2}{x^4+2x^3}$ **32.** $\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}$

33. $\dfrac{-10x^2+27x-14}{(x-1)^3(x+2)}$ **34.** $\dfrac{-2x^2+5x-1}{x^4-2x^3+2x-1}$

35. $\dfrac{3x^3+22x^2+53x+41}{(x+2)^2(x+3)^2}$ **36.** $\dfrac{3x^2+12x-20}{x^4-8x^2+16}$

37. $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$ **38.** $\dfrac{3x^2-2x+8}{x^3-x^2+2x-2}$

39. $\dfrac{2x^3+7x+5}{(x^2+x+2)(x^2+1)}$ **40.** $\dfrac{x^2+x+1}{2x^4+3x^2+1}$

41. $\dfrac{x^4+x^3+x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}$ **42.** $\dfrac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}$

43. $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

44. $\dfrac{x^5-3x^4+3x^3-4x^2+4x+12}{(x-2)^2(x^2+2)}$

HABILIDADES Plus

45. **Fracciones parciales** Determine A y B en términos de a y b.

$$\frac{ax+b}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

46. **Fracciones parciales** Determine A, B, C y D en términos de a y b.

$$\frac{ax^3+bx^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

47. DISCUSIÓN: **Reconocimiento de descomposiciones en fracciones parciales** Para cada expresión determine si ya es una descomposición en fracciones parciales o si puede descomponerse más.

a) $\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x+1}$ *b*) $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$ *d*) $\dfrac{x+2}{(x^2+1)^2}$

48. DISCUSIÓN: Ensamble y desensamble de fracciones parciales La siguiente expresión es una descomposición en fracciones parciales.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

Use un común denominador para combinar los términos en una fracción. Luego use las técnicas de esta sección para encontrar su descomposición en fracciones parciales. ¿Obtuvo usted de nuevo la expresión original?

10.8 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

■ Métodos de sustitución y eliminación ■ Método gráfico

En esta sección resolvemos sistemas de ecuaciones en los cuales no todas las ecuaciones son lineales. Los métodos que aprendimos en la sección 10.1 también se pueden usar para resolver sistemas no lineales.

■ Métodos de sustitución y eliminación

Para resolver un sistema de ecuaciones no lineales podemos usar el método de sustitución o eliminación como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 ■ Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

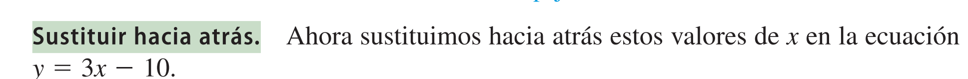
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & \text{Ecuación 1} \\ 3x - y = 10 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN **Despejar una incógnita.** Empezamos por despejar y de la segunda ecuación.

$$y = 3x - 10 \qquad \text{Despejamos } y \text{ de la ecuación 2}$$

Sustituir. Luego sustituimos y en la primera ecuación y despejamos x.

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 && \text{Sustituya } y = 3x - 10 \text{ en la ecuación 1} \\ x^2 + (9x^2 - 60x + 100) &= 100 && \text{Desarrolle} \\ 10x^2 - 60x &= 0 && \text{Simplifique} \\ 10x(x - 6) &= 0 && \text{Factorice} \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x &= 6 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$



Sustituir hacia atrás. Ahora sustituimos hacia atrás estos valores de x en la ecuación $y = 3x - 10$.

$$\begin{aligned} &\text{Para} \quad x = 0: \quad y = 3(0) - 10 = -10 && \text{Sustitución hacia atrás} \\ &\text{Para} \quad x = 6: \quad y = 3(6) - 10 = 8 && \text{Sustitución hacia atrás} \end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia y la gráfica de la segunda ecuación es una recta; la figura 1 muestra que las gráficas se cruzan en los dos puntos $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

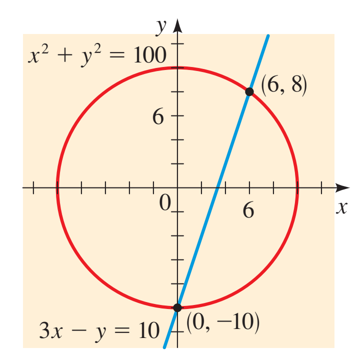


FIGURA 1

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 0, y = -10$:

$$\begin{cases} (0)^2 + (-10)^2 = 100 \\ 3(0) - (-10) = 10 \end{cases} \checkmark$$

$x = 6, y = 8$:

$$\begin{cases} (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100 \\ 3(6) - (8) = 18 - 8 = 10 \end{cases} \checkmark$$

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

EJEMPLO 2 ■ Método de eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 26 & \text{Ecuación 1} \\ 5x^2 + 7y = 3 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

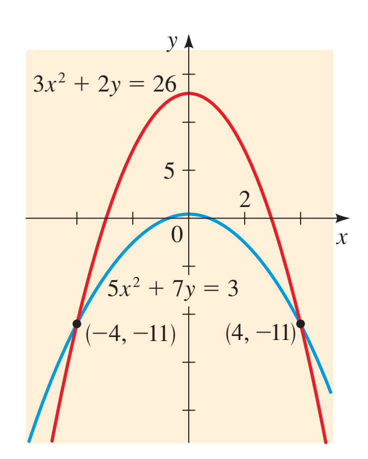


FIGURA 2

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(-4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(-4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

$x = 4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

SOLUCIÓN Elegimos eliminar el término en x, de modo que multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por -3. Luego sumamos las dos ecuaciones y despejamos y.

$$\begin{cases} 15x^2 + 10y = 130 \\ -15x^2 - 21y = -9 \end{cases}$$ 5 × ecuación 1; (-3) × ecuación 2

$$-11y = 121$$ Sumamos

$$y = -11$$ Despejamos y

Ahora sustituimos $y = -11$ en una de las ecuaciones originales, por ejemplo $3x^2 + 2y = 26$ y despejamos x.

$$3x^2 + 2(-11) = 26$$ Sustituimos hacia atrás $y = -11$ en la ecuación 1

$$3x^2 = 48$$ Sumamos 22

$$x^2 = 16$$ Dividimos entre 3

$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = 4$$ Despejamos x

Entonces tenemos dos soluciones: $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

Las gráficas de ambas ecuaciones son parábolas (vea la sección 3.1). La figura 2 muestra que las gráficas se cruzan en los dos puntos $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

Método gráfico

El método gráfico es particularmente útil para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 3 ■ Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN **Trazar la gráfica de cada ecuación.** Para trazar la gráfica de cada ecuación despejamos y en términos de x.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Encontrar puntos de intersección. La figura 3 muestra que las gráficas de estas ecuaciones se cruzan en dos puntos. Si hacemos un acercamiento, vemos que las soluciones son

$$(-1, -1) \quad \text{y} \quad (3, 7)$$

Para una guía del uso de una calculadora graficadora vea el apéndice C,* *Gráficas con una calculadora graficadora*. Para instrucciones específicas del trazado de gráficas vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.

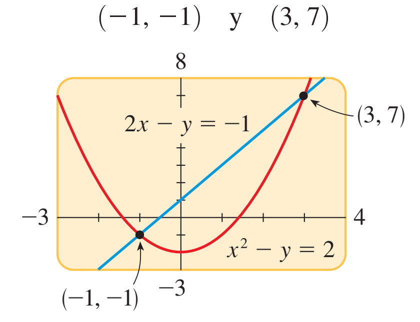


FIGURA 3

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -1, y = -1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 - (-1) = 2 \\ 2(-1) - (-1) = -1 \end{cases} \checkmark$$

$x = 3, y = 7$:

$$\begin{cases} 3^2 - 7 = 2 \\ 2(3) - 7 = -1 \end{cases} \checkmark$$

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

EJEMPLO 4 ■ Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones

Encuentre todas las soluciones del sistema, redondeadas a un decimal.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 & \text{Ecuación 1} \\ y = 2x^2 - 5x & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda es una parábola. Para trazar la gráfica de la circunferencia en una calculadora graficadora primero debemos despejar y en términos de x.

$$x^2 + y^2 = 12$$

$$y^2 = 12 - x^2 \qquad \text{Despeje } y^2 \text{ en el lado izquierdo}$$

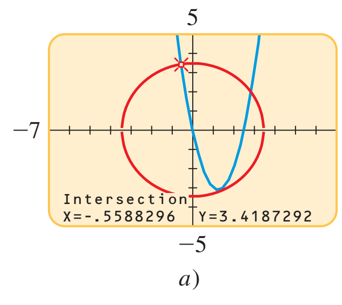
$$y = \pm\sqrt{12 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para trazar la gráfica de la circunferencia debemos trazar la gráfica de ambas funciones.

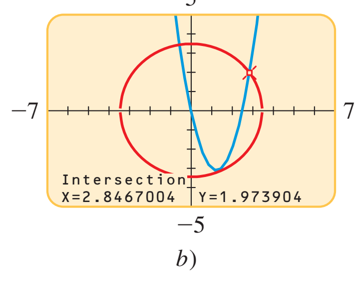
$$y = \sqrt{12 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{12 - x^2}$$

En la figura 4 la gráfica de la circunferencia se muestra en rojo, y la parábola se ve en azul. Las gráficas se cruzan en los cuadrantes primero y segundo. Con un acercamiento, o usando la instrucción `Intersect` vemos que los puntos de intersección son $(-0.559, 3.419)$ y $(2.847, 1.974)$. También parece haber un punto de intersección en el cuarto cuadrante, pero cuando hacemos acercamiento vemos que las curvas se acercan entre sí pero no se cruzan (vea la figura 5). Entonces el sistema tiene dos soluciones; redondeadas al décimo más cercano, son

$$(-0.6, 3.4) \quad \text{y} \quad (2.8, 2.0)$$



a)



b)

FIGURA 4 $x^2 + y^2 = 12,\ y = 2x^2 - 5x$

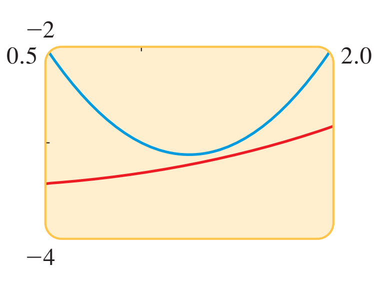


FIGURA 5 Acercamiento

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

Las matemáticas en el mundo moderno



Cortesía de la NASA

Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

En un día frío y con niebla de 1707 una flota naval inglesa navegaba rápidamente hacia su puerto de base. Los navegantes de la flota no lo sabían, pero estaban a sólo unas pocas yardas de las rocosas costas de Inglaterra; en el consiguiente desastre la flota quedó totalmente destruida, tragedia que pudo haberse evitado si sus navegantes hubieran conocido sus posiciones. En aquellos días la latitud se determinaba por la posición de la Estrella Polar (y esto podía hacerse sólo de noche y con buen clima) y la longitud era determinada por la posición del Sol respecto a donde debía estar Inglaterra *a la misma hora*. En consecuencia, la navegación requería un método preciso para conocer la hora en sus barcos. (La invención de relojes accionados por un resorte produjo la solución final.)

Desde entonces, se han perfeccionado varios métodos diferentes para determinar la posición y todos se apoyan fuertemente en las matemáticas (vea LORAN, página 804). El método más reciente, llamado Sistema de Posicionamiento Global (GPS), utiliza la triangulación. En este sistema 24 satélites están estratégicamente ubicados sobre la superficie terrestre. Un aparato portátil de GPS mide la distancia desde un satélite, usando el tiempo de transmisión de señales de radio emitidas desde el satélite. El conocimiento de las distancias a tres satélites diferentes nos indica que estamos en el punto de intersección de tres esferas diferentes. Esto determina de manera única nuestra posición (vea el ejercicio 51, página 755).

10.8 EJERCICIOS

CONCEPTOS

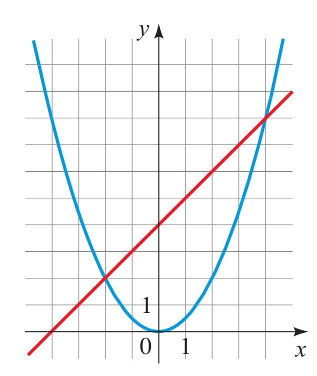
1–2 ■ El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

está graficado a la derecha.

1. Use la gráfica para encontrar las soluciones del sistema.

2. Verifique que las soluciones que encontró en el ejercicio 1 satisfacen el sistema.



HABILIDADES

3–8 ■ **Método de sustitución** Utilice el método de sustitución para encontrar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

3. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y = 9 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x + 5y^2 = 75 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ 2x^2 + 3y = 17 \end{cases}$

9–14 ■ **Método de eliminación** Utilice el método de eliminación para encontrar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

9. $\begin{cases} x^2 - 2y = 1 \\ x^2 + 5y = 29 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x^2 + 4y = 17 \\ 2x^2 + 5y = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x^2 + 4y = 13 \\ x^2 - y^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$

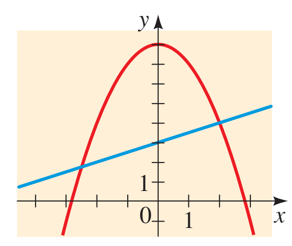
13. $\begin{cases} x - y^2 + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

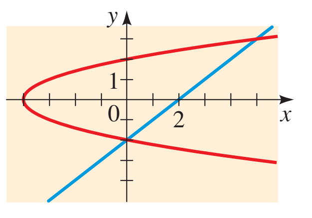
14. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 = x + 3 \end{cases}$

15–18 ■ **Determinar los puntos de intersección gráficamente** Se dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el punto o los puntos de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

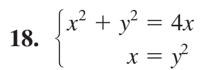
15. $\begin{cases} x^2 + y = 8 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

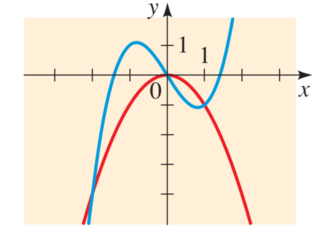
16. $\begin{cases} x - y^2 = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

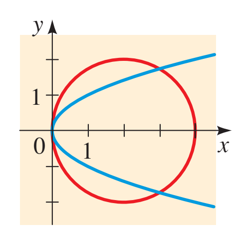




17. $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x^3 - 2x - y = 0 \end{cases}$

18.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ x = y^2 \end{cases}$





19–32 ■ **Resolver sistemas no lineales** Encuentre todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

19. $\begin{cases} y + x^2 = 4x \\ y + 4x = 16 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y^2 - x^2 = 2x + 4 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 12 \end{cases}$

24. $\begin{cases} xy = 24 \\ 2x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 y = 16 \\ x^2 + 4y + 16 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 0 \\ y^2 - 4x^2 = 12 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ 2x^2 - 3y = 15 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x^2 - 8y^3 = 19 \\ 4x^2 + 16y^3 = 34 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^4 + y^3 = 17 \\ 3x^4 + 5y^3 = 53 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ -\dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{y} = 1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{6}{y^4} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{y^4} = 0 \end{cases}$



33–40 ■ Método gráfico Use el método gráfico para encontrar todas las soluciones del sistema de ecuaciones, redondeadas a dos decimales.

33. $\begin{cases} y = x^2 + 8x \\ y = 2x + 16 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - 2x + y^2 = 13 \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{18} = 1 \\ y = -x^2 + 6x - 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = x^2 - 2x - 8 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32 \\ x^2 + 2x + y = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = e^x + e^{-x} \\ y = 5 - x^2 \end{cases}$

HABILIDADES Plus

41–44 ■ Algunos sistemas más complicados Siga las sugerencias y resuelva los sistemas.

41. $\begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ 2 \log x - \log y = 0 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Sume las ecuaciones.]

42. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 4^x + 4^y = 68 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Observe que $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$.]

43. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 387 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Factorice el lado izquierdo de la segunda ecuación.]

44. $\begin{cases} x^2 + xy = 1 \\ xy + y^2 = 3 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Sume las ecuaciones y factorice los resultados.]

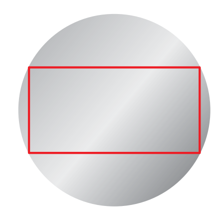
APLICACIONES

45. Dimensiones de un rectángulo Un rectángulo tiene un área de 180 cm^2 y un perímetro de 54 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?

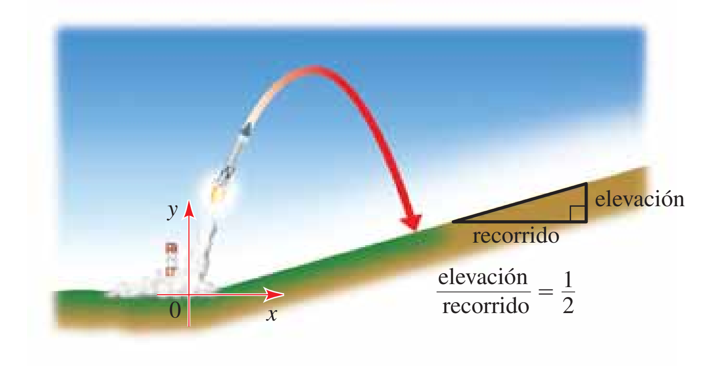
46. Catetos de un triángulo rectángulo Un triángulo rectángulo tiene un área de 84 pies^2 y una hipotenusa de 25 pies de largo. ¿Cuáles son las longitudes de sus otros dos lados?

47. Dimensiones de un rectángulo El perímetro de un rectángulo es 70 y su diagonal es 25. Encuentre la longitud y el ancho.

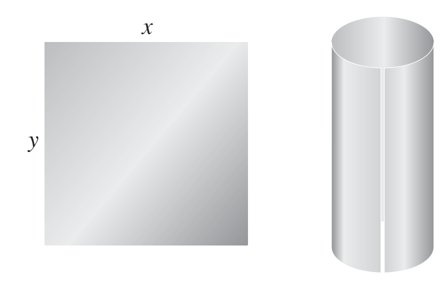
48. Dimensiones de un rectángulo Una hoja metálica circular tiene un diámetro de 20 pulgadas. Los lados han de cortarse para formar un rectángulo de 160 pulg^2 de área (vea figura). ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo?



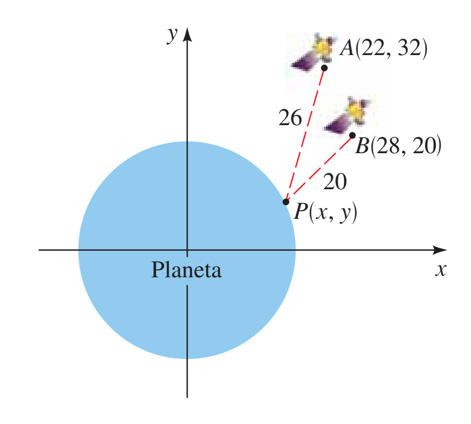
49. Vuelo de un cohete Una colina está inclinada de tal modo que su "pendiente" es $\frac{1}{2}$, como se muestra en la figura siguiente. Introducimos un sistema de coordenadas con el origen en la base de la colina y con las escalas en los ejes medidas en metros. Un cohete es lanzado desde la base de la colina de forma tal que su trayectoria es la parábola $y = -x^2 + 401x$. ¿En qué punto cae el cohete en la colina? ¿A qué distancia está este punto de la colina (al centímetro más cercano)?



50. Construcción de la chimenea de una estufa Una hoja metálica rectangular con área de 1 200 pulg^2 ha de doblarse en una sección cilíndrica de la chimenea de una estufa, con volumen de 600 pulg^3. ¿Cuáles son las longitudes de los lados de la hoja metálica?



51. Sistema de Posicionamiento Global (GPS) El Sistema de Posicionamiento Global determina la ubicación de un objeto a partir de sus distancias a satélites en órbita alrededor de nuestro planeta. En la situación bidimensional simplificada que se muestra en la figura siguiente determine las coordenadas de P por el hecho de que P está a 26 unidades del satélite A y 20 unidades del satélite B.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

52. DISCUSIÓN ■ DEMOSTRACIÓN: Intersección de una parábola y una recta En una hoja de papel para gráficas, o mediante una calculadora electrónica, trace la parábola $y = x^2$. Luego trace las gráficas de la ecuación lineal $y = x + k$ en el mismo plano de coordenadas para varios valores de k. Trate de elegir valores de k para que la recta y la parábola se crucen en dos puntos para algunos de los valores de k y no para otros. ¿Para qué valor de k hay exactamente un punto de intersección? Use los resultados de su experimento para hacer una conjetura acerca de los valores de k para los que el sistema siguiente tiene dos soluciones, una solución y ninguna solución. Demuestre su conjetura.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + k \end{cases}$$

10.9 SISTEMAS DE DESIGUALDADES

■ Gráfica de una desigualdad ■ Sistemas de desigualdades ■ Sistemas de desigualdades lineales ■ Aplicación: regiones factibles

En esta sección estudiaremos sistemas de desigualdades con dos incógnitas desde un punto de vista gráfico.

■ Gráfica de una desigualdad

Empezamos por considerar la gráfica de una sola desigualdad. Ya sabemos que la gráfica de $y = x^2$, por ejemplo, es la *parábola* de la figura 1. Si sustituimos el signo igual por el símbolo $\geq$, obtenemos la *desigualdad*

$$y \geq x^2$$

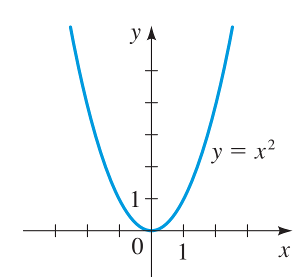
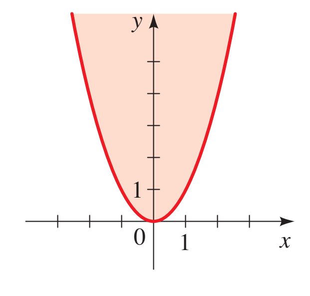


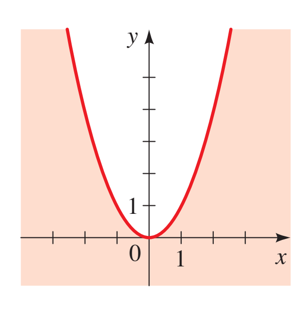
FIGURA 1

Su gráfica está formada no sólo por la parábola de la figura 1, sino también por todo punto cuya coordenada y es *más grande* que x^2. Indicamos la solución en la figura 2*a*) sombreando los puntos *arriba* de la parábola.

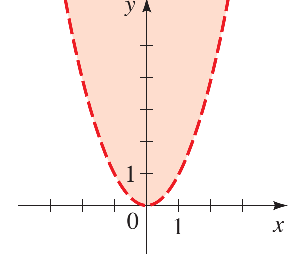
Del mismo modo, la gráfica de $y \leq x^2$ en la figura 2*b*) está formada por todos los puntos en y *debajo* de la parábola. No obstante, las gráficas de $y > x^2$ y $y < x^2$ no incluyen los puntos en la parábola en sí, como está indicado por las curvas de líneas interrumpidas de las figuras 2*c*) y 2*d*).



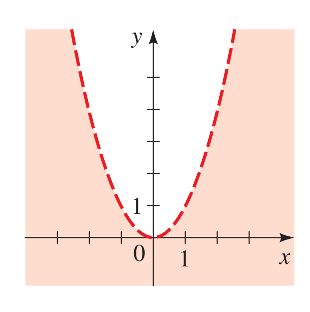
a) $y \geq x^2$



b) $y \leq x^2$



c) $y > x^2$



d) $y < x^2$

FIGURA 2

La gráfica de una desigualdad, en general, consta de una región del plano cuyo límite es la gráfica de la ecuación obtenida al sustituir el signo de desigualdad ($\geq$, $\leq$, $>$ o $<$) por un signo igual. Para determinar qué lado de la gráfica da el conjunto solución de la desigualdad necesitamos sólo verificar **puntos de prueba**.

GRÁFICA DE DESIGUALDADES

Para trazar la gráfica de una desigualdad ejecutamos los siguientes pasos.

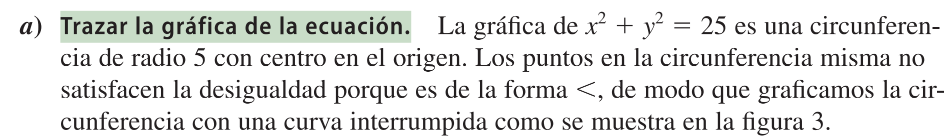
1. **Trazar la gráfica de la ecuación.** Trace la gráfica de la ecuación correspondiente a la desigualdad. Use una curva interrumpida para $>$ o $<$ y una curva continua para $\leq$ o $\geq$.
2. **Trazar la gráfica de la desigualdad.** La gráfica de la desigualdad consiste en todos los puntos de un lado de la curva que se trazaron en el paso 1. Utilizamos los **puntos de prueba** en ambos lados de la curva para determinar si los puntos de ese lado satisfacen la desigualdad. Si el punto satisface la desigualdad, todos los puntos de ese lado de la curva satisfacen la desigualdad. En ese caso, **sombree ese lado de la curva** para indicar que es parte de la gráfica. Si el punto de prueba no satisface la desigualdad, la región no es parte de la gráfica.

EJEMPLO 1 ■ Gráficas de desigualdades

Trace la gráfica de cada una de las desigualdades siguientes.

a) $x^2 + y^2 < 25$ ***b)*** $x + 2y \geq 5$

SOLUCIÓN Seguimos las instrucciones de la guía anterior.



a) **Trazar la gráfica de la ecuación.** La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Los puntos en la circunferencia misma no satisfacen la desigualdad porque es de la forma $<$, de modo que graficamos la circunferencia con una curva interrumpida como se muestra en la figura 3.

Trazar la gráfica de la desigualdad. Para determinar si el interior o el exterior de la circunferencia satisfacen la desigualdad, usamos los puntos de prueba (0, 0) en el interior y (6, 0) en el exterior. Para hacer esto sustituimos las coordenadas de cada punto en la desigualdad y comprobamos si el resultado satisface la desigualdad.

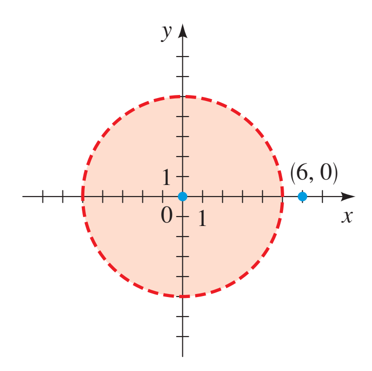


FIGURA 3 Gráfica de $x^2 + y^2 < 25$

Observe que *cualquier* punto dentro o fuera de la circunferencia puede servir como punto de prueba. Hemos escogido estos puntos para mayor sencillez.

Punto de prueba	Desigualdad $x^2 + y^2 < 25$	Conclusión
(0, 0)	$0^2 + 0^2 \overset{?}{<} 25$ ✓	Parte de gráfica
(6, 0)	$6^2 + 0^2 \overset{?}{<} 25$ ✗	No es parte de la gráfica

Nuestra prueba muestra que los puntos *dentro* de la circunferencia satisfacen la desigualdad. En la figura 3 se muestra una gráfica de la desigualdad.

b) **Trazar la gráfica de la ecuación.** Primero trazamos la gráfica de $x + 2y = 5$. La gráfica es la recta que se muestra en la figura 4.

Trazar la gráfica de la desigualdad. Usamos los puntos de prueba (0, 0) y (5, 5) en lados opuestos de la recta.

Punto de prueba	Desigualdad $x + 2y \geq 5$	Conclusión
(0, 0)	$0 + 2(0) \overset{?}{\geq} 5$ ✗	No es parte de la gráfica
(5, 5)	$5 + 2(5) \overset{?}{\geq} 5$ ✓	Parte de la gráfica

Podemos escribir la desigualdad del ejemplo 1 como

$$y \geq -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

De esta forma de la desigualdad vemos que la solución consiste en los puntos cuyas coordenadas y están *sobre* o *arriba* de la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Entonces la gráfica de la desigualdad es la región que está *arriba* de la recta.

Nuestra prueba demuestra que los puntos *arriba* de la recta satisfacen la desigualdad. En la figura 4 se muestra una gráfica de la desigualdad.

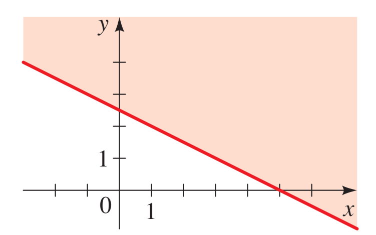


FIGURA 4 Gráfica de $x + 2y \geq 5$

Ahora intente realizar los ejercicios 15 y 21 ■

Sistemas de desigualdades

Ahora consideramos *sistemas* de desigualdades. El **conjunto solución de un sistema de desigualdades** de dos incógnitas es el conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas que satisface cada desigualdad del sistema. La **gráfica de un sistema de desigualdades** es el conjunto solución.

Para encontrar la solución de un sistema de desigualdades, primero trazamos la gráfica de cada desigualdad del sistema. La solución del sistema consiste en aquellos puntos en el plano de coordenadas que pertenecen a la solución de cada desigualdad del sistema. En otras palabras, la solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada desigualdad del sistema. Por tanto, para resolver un sistema de desigualdades utilice la siguiente guía.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DESIGUALDADES

Para ver la solución de un sistema de desigualdades realizamos los siguientes pasos.

1. **Trazar la gráfica de cada desigualdad.** Trace la gráfica de cada desigualdad del sistema en la misma gráfica.
2. **Trazar la gráfica de la solución del sistema.** Sombree la región donde se intersecan las gráficas de todas las desigualdades. Todos los puntos de esta región satisfacen cada desigualdad, por tanto, pertenecen a la solución del sistema.
3. **Encontrar los vértices.** Marque los vértices de la región sombreada en el paso 2.

EJEMPLO 2 ■ Un sistema de dos desigualdades

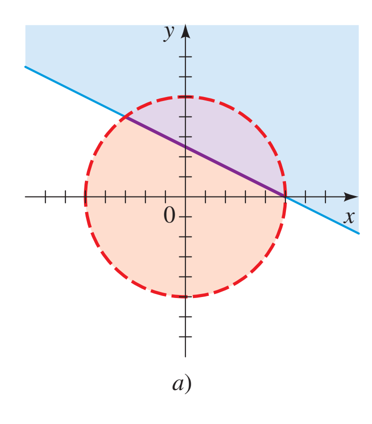
Trace la gráfica de la solución del sistema de desigualdades y marque sus vértices.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$$

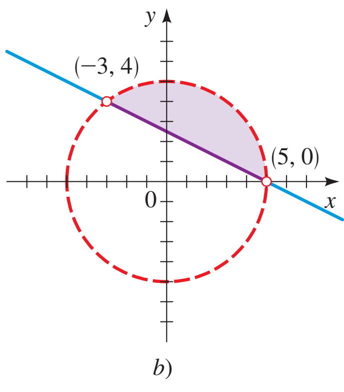
SOLUCIÓN Estas son las dos desigualdades del ejemplo 1. En este ejemplo deseamos trazar la gráfica sólo de aquellos puntos que simultáneamente satisfacen ambas desigualdades.

Trazar la gráfica de cada desigualdad. En la figura 5*a*) trazamos la gráfica de las desigualdades en los mismos ejes (en colores diferentes).

Trazar la gráfica de la solución del sistema. La solución es la intersección de las dos gráficas. Esta es la región donde se traslapan las dos regiones, que es la región morada en la gráfica de la figura 5*b*).



a)



b)

FIGURA 5 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$

Encontrar los vértices. Los puntos $(-3, 4)$ y $(5, 0)$ de la figura 5*b*) son los **vértices** del conjunto solución. Se obtienen al resolver el sistema de *ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \ \ + 2y = 5 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por sustitución. Despejando x en la segunda ecuación se obtiene $x = 5 - 2y$, y sustituyendo esto en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} (5 - 2y)^2 + y^2 &= 25 && \text{Sustituya } x = 5 - 2y \\ (25 - 20y + 4y^2) + y^2 &= 25 && \text{Desarrolle} \\ -20y + 5y^2 &= 0 && \text{Simplifique} \\ -5y(4 - y) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Así, $y = 0$ o $y = 4$. Cuando $y = 0$, tenemos $x = 5 - 2(0) = 5$, y cuando $y = 4$, tenemos $x = 5 - 2(4) = -3$. Por tanto, los puntos de intersección de estas curvas son $(5, 0)$ y $(-3, 4)$.

Observe que en este caso los vértices no son parte del conjunto solución porque no satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < 25$ (por lo cual están graficados como círculos abiertos en la figura). Simplemente muestran en dónde están las "esquinas" del conjunto solución.

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

Sistemas de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si se puede poner en una de las formas siguientes:

$$ax + by \geq c \qquad ax + by \leq c \qquad ax + by > c \qquad ax + by < c$$

En el siguiente ejemplo trazamos la gráfica del conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales.

EJEMPLO 3 ■ Un sistema de cuatro desigualdades lineales

Trace la gráfica del conjunto solución del sistema y marque sus vértices.

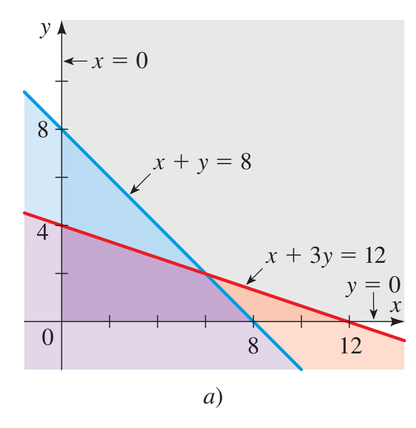
$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + \ \ y \leq 8 \\ \qquad x \geq 0 \\ \qquad y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN **Trace la gráfica de cada desigualdad.** En la figura 6 primero trazamos la gráfica de las rectas dadas por las ecuaciones que corresponden a cada desigualdad. Para determinar las gráficas de las desigualdades lineales necesitamos comprobar sólo un punto de prueba. Por simplicidad usemos el punto $(0, 0)$.

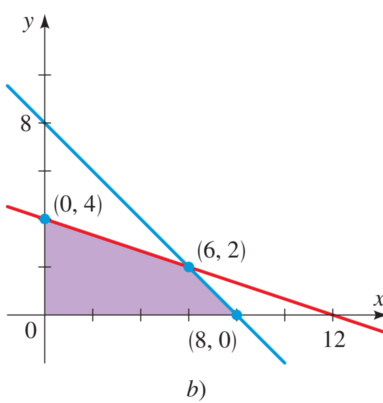
Desigualdad	Punto de prueba (0, 0)	Conclusión
$x + 3y \leq 12$	$0 + 3(0) \overset{?}{\leq} 12$ ✓	Satisface desigualdad
$x + y \leq 8$	$0 + 0 \overset{?}{\leq} 8$ ✓	Satisface desigualdad

Dado que $(0, 0)$ está debajo de la recta $x + 3y = 12$, nuestra prueba muestra que la región en la recta, o debajo de esta, debe satisfacer la desigualdad. Del mismo modo, dado que $(0, 0)$ está debajo de la recta $x + y = 8$, nuestra prueba muestra que la región en la recta, o debajo de esta, debe satisfacer la desigualdad. Las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ dicen que x y y son no negativos. Estas regiones están trazadas en la figura 6*a*).

Trazar la gráfica de la solución del sistema. La solución del sistema de desigualdades es la intersección de las gráficas. Esta la región de color morado trazada en la figura 6*b*).



a)



b)

FIGURA 6

Encontrar los vértices. Las coordenadas de cada vértice se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones de las rectas que se intersecan en ese vértice. Del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

obtenemos el vértice (6, 2). El origen (0, 0) claramente también es un vértice. Los otros dos vértices están en los puntos de intersección x y y de las rectas correspondientes: (8, 0) y (0, 4). En este caso todos los vértices *son* parte del conjunto solución.

Ahora intente realizar el ejercicio 51 ■

EJEMPLO 4 ■ Un sistema de desigualdades lineales

Trace la gráfica del conjunto solución del sistema y marque los vértices.

a) $\begin{cases} 10x + 20y \geq 60 \\ 30x + 20y \geq 100 \\ 10x + 40y \geq 80 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 10x + 20y \leq 60 \\ 30x + 20y \geq 100 \\ 10x + 40y \geq 80 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

a) **Trazar cada desigualdad.** Debemos trazar la gráfica de las rectas que corresponden a estas desigualdades y luego sombrear las regiones apropiadas. La gráfica de $10x + 20y \geq 60$ es la región arriba de la recta $y = 3 - \frac{1}{2}x$. La gráfica de $30x + 20y \geq 100$ es la región arriba de la recta $y = 5 - \frac{3}{2}x$, y la gráfica de $10x + 40y \geq 80$ es la región arriba de la recta $y = 2 - \frac{1}{4}x$.

Trazar la gráfica de solución del sistema. Las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ indican que la región está en el primer cuadrante. Con esta información, en la figura 7 trazamos las gráficas de las desigualdades del sistema.

Encontrar los vértices. Determine los vértices de la región encontrando los puntos de intersección de las rectas apropiadas. Verifique que los vértices de la región son los indicados en la figura 7.

b) La gráfica de la primera desigualdad $10x + 20y \leq 60$ es la región que se encuentra debajo de la recta $y = 3 - \frac{1}{2}x$, y las demás desigualdades son las mismas que las del inciso *a*), así como la solución del sistema es la región (de color morado) que se muestra en la figura 8.

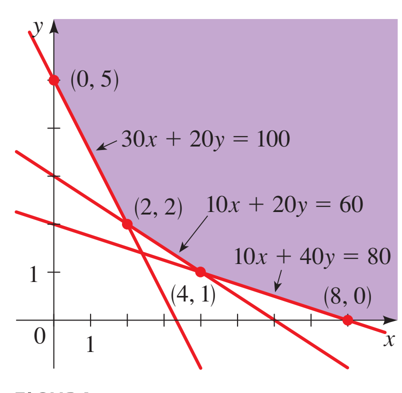


FIGURA 7

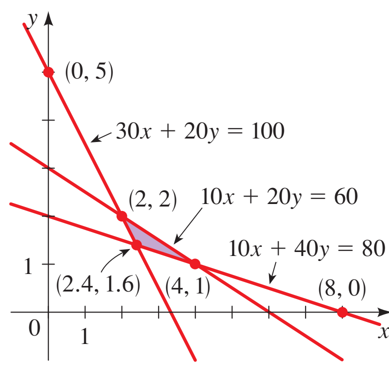


FIGURA 8

Ahora intente realizar los ejercicios 59 y 63 ■

EJEMPLO 5 ■ Un sistema de desigualdades lineales



Trace la gráfica del conjunto solución del sistema de desigualdades y marque los vértices.

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ -x + 2y \leq 4 \\ 3x - 2y \leq 8 \end{cases}$$

SOLUCIÓN **Trazar la gráfica de cada desigualdad.** Debemos trazar la gráfica de las rectas que corresponden a estas desigualdades y luego sombrear las regiones apropiadas, como en el ejemplo 2. Utilizaremos una calculadora graficadora, por lo que primero debemos despejar y en el lado izquierdo de cada desigualdad.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x + 4 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq \frac{3}{2}x - 4 \end{cases}$$

Usando la función de sombreado de la calculadora obtenemos la gráfica de la figura 9*a*). Observe que la calculadora sombrea cada región con un patrón diferente.

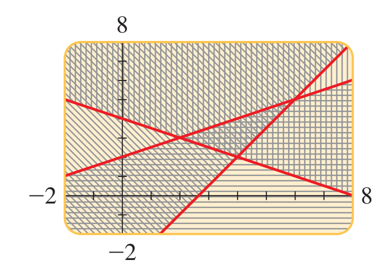
Trazar la gráfica de la solución del sistema. El conjunto solución es la región triangular sombreada con los tres patrones. La gráfica del conjunto solución se muestra en la figura 9*b*).

Encontrar los vértices. Utilizamos la instrucción `TRACE` o `Intersect` para encontrar los vértices de la región. Los vértices están marcados en la figura 9*b*).

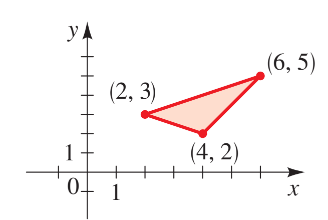
Vea el apéndice D,* *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para instrucciones específicas del trazado de gráficas. Visite **www.stewartmath.com**.**

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a **www.cengage.com** y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés.



a) Salida de la calculadora graficadora

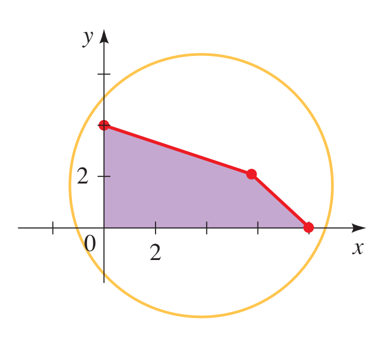


b) Gráfica del conjunto solución

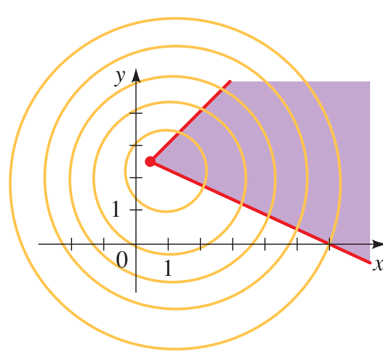
FIGURA 9

Ahora intente realizar el ejercicio 65 ■

Cuando una región del plano se puede encerrar en un círculo (suficientemente grande), se dice que está **acotada**. Una región que no está acotada se denomina **no acotada**. Por ejemplo, las regiones graficadas en las figuras 3, 5*b*), 6*b*), 8 y 9 son acotadas, ya que se pueden encerrar con un círculo como se muestra en la figura 10*a*). Pero las regiones trazadas en las figuras 2, 4 y 7 son no acotadas, ya que no se pueden encerrar en un círculo como se muestra en la figura 10*b*).



a) Una región acotada se puede encerrar en un círculo



b) Una región no acotada no se puede encerrar en un círculo

FIGURA 10

Aplicación: regiones factibles

Numerosos problemas aplicados tienen **restricciones** en las incógnitas. Por ejemplo, el gerente de una fábrica tiene sólo cierto número de trabajadores que pueden ser asignados para ejecutar trabajos en el piso de la fábrica. Un agricultor que determina qué cosechas cultivar tiene sólo cierta cantidad de tierras que puede sembrar. Estas restricciones o limitaciones se pueden expresar fácilmente como sistemas de desigualdades. Cuando trabajamos con desigualdades aplicadas por lo general nos referimos al conjunto solución de un sistema como una **región factible**, porque los puntos del conjunto solución representan valores factibles (o posibles) para las cantidades que están bajo estudio.

EJEMPLO 6 ■ Restricción de salidas de contaminantes

Una fábrica produce dos plaguicidas agrícolas, A y B. Por cada barril de A, la fábrica emite 0.25 kg de monóxido de carbono (CO) y 0.60 kg de dióxido de azufre (SO_2); y por cada barril de B, emite 0.50 kg de CO y 0.20 de SO_2. Las leyes contra la contaminación restringen la salida de CO de la fábrica a un máximo de 75 kg y de SO_2 a un máximo de 90 kg por día.

a) Encuentre un sistema de desigualdades que describa el número de barriles de cada plaguicida que la fábrica puede producir y todavía satisfacer las leyes contra la contaminación. Trace la gráfica de la región factible.

b) ¿Será legal que la fábrica produzca 100 barriles de A y 80 barriles de B por día?

c) ¿Será legal que la fábrica produzca 60 barriles de A y 160 barriles de B por día?

SOLUCIÓN

a) Expresamos las restricciones como un sistema de desigualdades y luego trazamos la gráfica de la solución del sistema.

Expresar las desigualdades. Primero identificamos y asignamos nombre a las incógnitas, luego expresamos cada enunciado del problema en términos de las incógnitas. La incógnita x representa el número de barriles de A producidos por día, y sea y el número de barriles de B producidos por día. Podemos organizar la información en el problema como sigue.

En palabras	En álgebra
Barriles de A producidos	x
Barriles de B producidos	y
Total de CO producido	$0.25x + 0.50y$
Total de SO_2 producido	$0.60x + 0.20y$

De la información en el problema y el hecho de que x y y no puede ser negativo obtenemos las siguientes desigualdades.

$$\begin{cases} 0.25x + 0.50y \le 75 & \text{A lo más se pueden producir 75 kg de CO} \\ 0.60x + 0.20y \le 90 & \text{A lo más se pueden producir 90 kg de } SO_2 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera desigualdad por 4 y la segunda por 5 se simplifica el sistema al siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y \le 300 \\ 3x + y \le 450 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

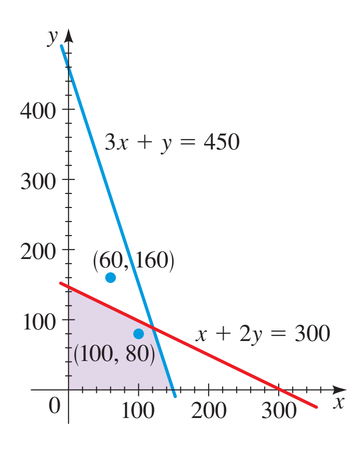


FIGURA 11

Trazar la gráfica del conjunto solución. Primero trazamos la gráfica de las ecuaciones

$$x + 2y = 300$$
$$3x + y = 450$$

Las gráficas son las dos rectas que se muestran en la figura 11. Usando el punto de prueba (0, 0) vemos que el conjunto solución de cada una de estas desigualdades es la región debajo de la recta correspondiente. Por tanto, la solución al sistema es la intersección de estos conjuntos como se muestra en la figura 11.

b) Dado que el punto (100, 80) se encuentra dentro de la región factible, este plan de producción es válido (vea la figura 11).

c) Puesto que el punto (60, 160) se encuentra fuera de la región factible este plan de producción no es válido. No cumple la restricción de CO, aunque sí cumple la restricción del SO_2 (vea la figura 11).

Ahora intente realizar el ejercicio 69

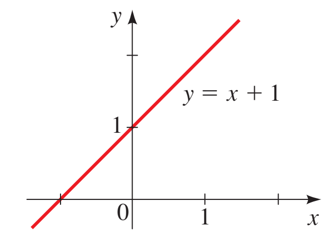
10.9 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si el punto (2, 3) es una solución de una desigualdad en x y y, entonces la desigualdad se cumple cuando reemplazamos x por ________ y y por ________. ¿El punto (2, 3) es una solución de la desigualdad $4x - 2y \geq 1$?

2. Para trazar la gráfica de una desigualdad, primero se traza la gráfica de la ________ correspondiente. Entonces para trazar la gráfica de la desigualdad $y \leq x + 1$, primero se traza la gráfica de la ecuación ________. Para decidir de qué lado de la gráfica de la ecuación está la gráfica de la desigualdad utilizamos puntos ________. Complete la tabla y trace una gráfica de la desigualdad sombreando la región apropiada.

Punto de prueba	Desigualdad $y \leq x + 1$	Conclusión
(0, 0)		
(0, 2)		

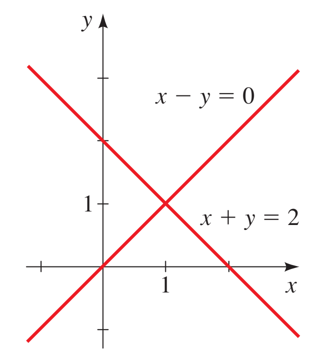


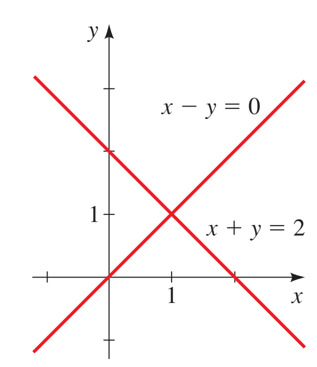
3. Si el punto (2, 3) es una solución de un *sistema* de desigualdades en x y y, entonces *cada* desigualdad se satisface cuando sustituimos x por ________ y y por ________. ¿Será el punto (2, 3) una solución del siguiente sistema?

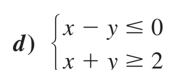
$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 17 \\ 6x + 5y \leq 29 \end{cases}$$

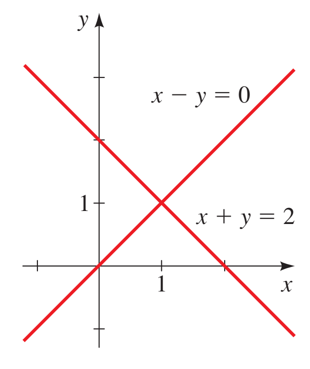
4. Sombree la solución de cada sistema de desigualdades en la gráfica dada.

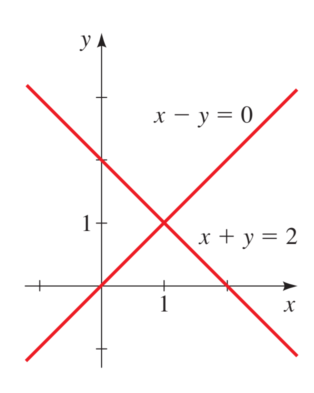
a) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$





c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ ***d)***  $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$





HABILIDADES

5–6 ■ Soluciones de desigualdades Se dan una desigualdad y varios puntos. Para cada punto determine si es una solución de la desigualdad.

5. $x - 5y > 3$; $(-1, -2), (1, -2), (1, 2), (8, 1)$

6. $3x + 2y \le 2$; $(-2, 1), (1, 3), (1, -3), (0, 1)$

7–8 ■ Soluciones de sistemas de desigualdades Se dan un sistema de desigualdades y varios puntos. Determine qué puntos son soluciones del sistema.

7. $\begin{cases} 3x - 2y \le 5 \\ 2x + \ \ y \ge 3 \end{cases}$; $(0, 0), (1, 2), (1, 1), (3, 1)$

8. $\begin{cases} x + 2y \ge \ \ 4 \\ 4x + 3y \ge 11 \end{cases}$; $(0, 0), (1, 3), (3, 0), (1, 2)$

9–22 ■ Trazar la gráfica de desigualdades Trace la gráfica de la desigualdad.

9. $y < -2x$ **10.** $y \ge 3x$

11. $y \ge 2$ **12.** $x \le -1$

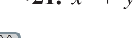
13. $x < 2$ **14.** $y > 1$

15. $y > x - 3$ **16.** $y \le 1 - x$

17. $2x - y \ge -4$ **18.** $3x - y - 9 < 0$

19. $-x^2 + y \ge 5$ **20.** $y > x^2 + 1$

21. $x^2 + y^2 > 9$ **22.** $x^2 + (y - 2)^2 \le 4$





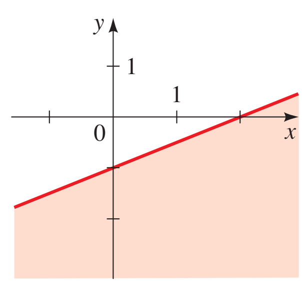
23–26 ■ Trazar la gráfica de desigualdades Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la desigualdad lineal.

23. $3x - 2y \ge 18$ **24.** $4x + 3y \le 9$

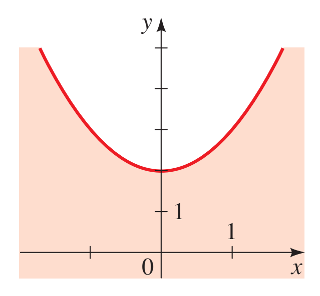
25. $5x + 2y > 8$ **26.** $5x - 3y \ge 15$

27–30 ■ Determinar desigualdades a partir de una gráfica Se dan una ecuación y su gráfica. Determine una desigualdad cuya solución es la región sombreada.

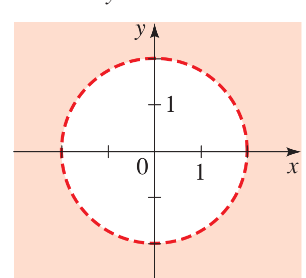
27. $y = \frac{1}{2}x - 1$



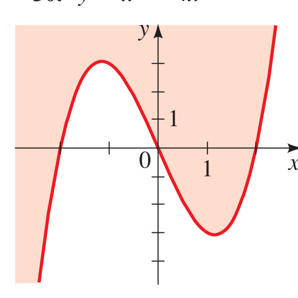
28. $y = x^2 + 2$



29. $x^2 + y^2 = 4$



30. $y = x^3 - 4x$



31–58 ■ Sistemas de desigualdades Trace la gráfica del conjunto solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices y determine si el conjunto solución está acotado.

31. $\begin{cases} x + y \le 4 \\ y \ge x \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} 2x + 3y > 12 \\ 3x - \ \ y < 21 \end{cases}$

33. $\begin{cases} y < \frac{1}{4}x + 2 \\ y \ge 2y - 5 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x - y > 0 \\ 4 + y \le 2x \end{cases}$

35. $\begin{cases} y \le -2x + 8 \\ y \le -\frac{1}{2}x + 5 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} 4x + 3y \le 18 \\ 2x + \ \ y \le 8 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + 5y \le 15 \\ 3x + 2y \le 9 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} x > 2 \\ y < 12 \\ 2x - 4y > 8 \end{cases}$

39. $\begin{cases} y \le 9 - x^2 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} y \ge x^2 \\ y \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} y < 9 - x^2 \\ y \ge x + 3 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} y \ge x^2 \\ x + y \ge 6 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x - y > 0 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 10 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^2 + y \le 0 \\ 2x^2 + y \le 12 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} 2x^2 + y > 4 \\ x^2 - y \le 8 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ 2x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$ **48.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x^2 - 2y > 1 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x + 2y \le 14 \\ 3x - \ \ y \ge 0 \\ x - \ \ y \ge 2 \end{cases}$ **50.** $\begin{cases} y < x + 6 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x - 2y \le 2 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 5 \\ x + y \le 7 \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 4 \\ 2x + y \le 8 \end{cases}$

53. $\begin{cases} y > x + 1 \\ x + 2y \le 12 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} x - y > 12 \\ y < \frac{1}{2}x - 6 \\ 3x + y < 6 \end{cases}$

55. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8 \\ x \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} x^2 - y \ge 0 \\ x + y < 6 \\ x - y < 6 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y > 0 \\ x \le 0 \end{cases}$ **58.** $\begin{cases} y \ge x^3 \\ y \le 2x + 4 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

59–64 ■ Sistemas de desigualdades Trace la gráfica del sistema de desigualdades. Marque los vértices y determine si la región está acotada o no.

59. $\begin{cases} x + 2y \le 14 \\ 3x - \ \ y \ge 0 \\ x - \ \ y \le 2 \end{cases}$ **60.** $\begin{cases} x + 2y \le 14 \\ 3x - \ \ y \ge 0 \\ x - \ \ y \ge 2 \end{cases}$

61. $\begin{cases} x + y \le 12 \\ y \le \frac{1}{2}x - 6 \\ y \le 2x + 6 \end{cases}$

62. $\begin{cases} y \ge x + 1 \\ x + 2y \le 12 \\ x + 1 \ge 0 \end{cases}$

63. $\begin{cases} 30x + 10y \ge 50 \\ 10x + 20y \ge 50 \\ 10x + 60y \ge 90 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x + y \ge 6 \\ 4x + 7y \le 39 \\ x + 5y \ge 13 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$



65–68 ■ Trazar gráficas de sistemas de desigualdades Utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices, redondeadas a un decimal.

65. $\begin{cases} y \ge x - 3 \\ y \ge -2x + 6 \\ y \le 8 \end{cases}$

66. $\begin{cases} x + y \ge 12 \\ 2x + y \le 24 \\ x - y \ge -6 \end{cases}$

67. $\begin{cases} y \le 6x - x^2 \\ x + y \ge 4 \end{cases}$

68. $\begin{cases} y \ge x^3 \\ 2x + y \ge 0 \\ y \le 2x + 6 \end{cases}$

APLICACIONES

69. Plantación de cultivos Un granjero tiene 500 acres de tierra cultivable en la que quiere plantar papas y maíz. El agricultor tiene 40 000 dólares disponibles para la siembra y 30 000 para los fertilizantes. Plantar 1 acre de patatas cuesta 90 dólares, y la plantación de 1 acre de maíz cuesta $50. Los fertilizantes cuestan 30 dólares para 1 acre de papas y $80 para 1 acre de maíz.

a) Encuentre un sistema de desigualdades que describa el número de acres de cada cultivo que el agricultor puede plantar con los recursos disponibles. Represente gráficamente la región factible.

b) ¿Puede el agricultor plantar 300 acres de papas y 180 acres de maíz?

c) ¿Puede el agricultor plantar 150 acres de papas y 325 acres de maíz?

70. Plantación de cultivos Un granjero tiene 300 acres de tierra cultivable en el cual se desea plantar coliflor y col. El agricultor tiene 17 500 dólares disponibles para la siembra y $12 000 para fertilizante. La plantación de 1 acre de coliflor cuesta 70 dólares, y la siembra de 1 acre de col cuesta $35. Los fertilizantes cuestan 25 dólares para 1 acre de coliflor y $55 para 1 acre de col.

a) Encuentre un sistema de desigualdades que describa el número de acres de cada cultivo que el agricultor puede plantar con los recursos disponibles. Trace la gráfica de la región factible.

b) ¿Puede el agricultor plantar 155 acres de coliflor y 115 de col?

c) ¿Puede el agricultor plantar 115 acres de coliflor y 175 de col?

71. Publicar libros Una compañía editorial publica un total de no más de 100 libros al año. Al menos 20 de estos no son de ficción, pero la compañía siempre publica al menos tantos libros de ficción como de no ficción. Encuentre un sistema de desigualdades que describa los posibles números de libros de ficción y de no ficción que la compañía puede producir cada año consistente con estas políticas. Trace la gráfica del conjunto solución.

72. Manufactura de muebles Un hombre y su hija fabrican mesas y sillas sin acabados. Cada mesa requiere 3 horas de corte y 1 hora de ensamble. Cada silla requiere 2 horas de corte y 2 de ensamble. Entre los dos pueden dedicar hasta 12 horas de trabajo de corte y 8 horas de ensamble al día. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibles combinaciones de mesas y sillas que puedan fabricar diariamente. Trace la gráfica del conjunto solución.

73. Mezcla de café Un comerciante vende dos mezclas diferentes de café. La mezcla estándar usa 4 oz de granos de arábiga y 12 oz de granos de robusta por paquete; la mezcla "De lujo" usa 10 oz de arábiga y 6 oz de robusta por paquete. El comerciante tiene disponibles 80 lb de granos arábiga y 90 lb de robusta. Encuentre un sistema de desigualdades que describa el posible número de paquetes estándar y "De lujo" que el comerciante pueda hacer. Trace la gráfica del conjunto solución.

74. Nutrición Un fabricante de alimento para gatos usa productos derivados de pescado y de carne de res. El de pescado contiene 12 g de proteína y 3 g de grasa por onza; el de carne de res contiene 6 g de proteína y 9 g de grasa por onza. Cada lata de alimento para gatos debe contener al menos 60 g de proteína y 45 g de grasa. Encuentre un sistema de desigualdades que describa el posible número de onzas de pescado y de res que puedan usarse en cada lata para satisfacer estos requerimientos mínimos. Trace la gráfica del conjunto solución.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

75. DISCUSIÓN: Sombreado de regiones no deseadas Para trazar la gráfica de la solución de un sistema de desigualdades hemos sombreado la solución de cada desigualdad en un color diferente; la solución del sistema es la región donde todas las partes sombreadas se traslapan. Veamos ahora un método diferente: para cada desigualdad sombree la región que *no* satisface la desigualdad. Explique por qué la parte del plano que deje sin sombrear es la solución del sistema. Resuelva el siguiente sistema por ambos métodos. ¿Cuál prefiere usted? ¿Por qué?

$$\begin{cases} x + 2y > 4 \\ -x + y < 1 \\ x + 3y < 9 \\ x < 3 \end{cases}$$

CAPÍTULO 10 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Sistemas de ecuaciones (p. 680)

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones que tienen las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Los sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas (x y y) y de tres incógnitas (x, y y z) tienen las siguientes formas:

Sistema lineal de 2 incógnitas	**Sistema lineal de 3 incógnitas**
$a_{11}x + a_{12}y = b_1$	$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$
$a_{21}x + a_{22}y = b_2$	$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$
	$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$

Una **solución** de un sistema de ecuaciones es una asignación de valores para las incógnitas que hace que se cumpla *cada* ecuación del sistema. **Resolver** un sistema significa encontrar todas las soluciones del sistema.

Método de sustitución (p. 680)

Para resolver por sustitución un par de ecuaciones de dos incógnitas:

1. **Despejar una incógnita** en términos de la otra incógnita en una ecuación.
2. **Sustituir** en la otra ecuación para obtener una ecuación de una incógnita y despejar esta incógnita.
3. **Sustituir hacia atrás** los valores de la incógnita que ha encontrado en cualquier ecuación original y despejar la incógnita que falta.

Método de eliminación (p. 681)

Para resolver por eliminación un par de ecuaciones en dos incógnitas:

1. **Ajustar los coeficientes** multiplicando las ecuaciones por las constantes apropiadas para que los términos que tienen una de las incógnitas sean de signo contrario en las ecuaciones.
2. **Sumar las ecuaciones** para eliminar una incógnita; esto da una ecuación en la otra incógnita. Despejar esta incógnita.
3. **Sustituir hacia atrás** los valores de la incógnita que ha encontrado en cualquier ecuación original y despejar la incógnita que falta.

Método gráfico (p. 682)

Para resolver gráficamente un par de ecuaciones en dos incógnitas, primero ponga cada ecuación en forma de función, $y = f(x)$.

1. **Trazar la gráfica de las ecuaciones** en una pantalla común.
2. **Encontrar los puntos de intersección** de las gráficas. Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

Eliminación de Gauss (p. 691)

Cuando utilizamos la **eliminación de Gauss** para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizamos las siguientes operaciones para cambiar el sistema a un sistema **equivalente** más simple:

1. Sumar un múltiplo distinto de cero de una ecuación a otra.
2. Multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero.
3. Intercambiar la posición de las dos ecuaciones del sistema.

Número de soluciones de un sistema lineal (p. 693)

Puede tener un sistema de ecuaciones lineales:

1. Una solución única para cada incógnita.
2. No hay solución, en cuyo caso el sistema es **inconsistente**.
3. Infinitas soluciones en cuyo caso el sistema es **dependiente**.

Cómo determinar el número de soluciones de un sistema lineal (p. 693)

Cuando utilizamos la **eliminación gaussiana** para resolver un sistema de ecuaciones lineales podemos decir que el sistema tiene:

1. **Ninguna solución** (es *inconsistente*) si llegamos a una ecuación falsa de la forma $0 = c$, donde c es distinto de cero.
2. **Infinitas soluciones** (es *dependiente*) si el sistema es consistente, pero terminamos con menos ecuaciones que incógnitas (después de quitar las ecuaciones redundantes de la forma $0 = 0$).

Matrices (p. 699)

Una **matriz** A de **dimensión** $m \times n$ es un arreglo rectangular de números con m **renglones** y n **columnas**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada de un sistema (p. 700)

La **matriz aumentada** de un sistema de ecuaciones lineales es la matriz de coeficientes y los términos constantes. Por ejemplo, para el sistema de dos incógnitas

$$a_{11}x + a_{12}x = b_1$$

$$a_{21}x + \mathrm{a}_{22}x = b_2$$

la matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$$

Operaciones de renglón elementales (p. 700)

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando la matriz aumentada del sistema se pueden utilizar las siguientes operaciones para transformar los renglones de la matriz:

1. Sumar un múltiplo distinto de cero de un renglón a otro.
2. Multiplicar un renglón por una constante distinta de cero.
3. Intercambiar dos renglones.

Forma escalonada de renglones de una matriz (p. 702)

Una matriz está en la **forma escalonada de renglones** si sus entradas satisfacen las siguientes condiciones:

1. La primera entrada distinta de cero en cada renglón (la **entrada inicial**) es el número 1.

2. La entrada inicial de cada renglón está a la derecha de la entrada inicial del renglón de arriba.
3. Todos los renglones constan completamente de ceros en la parte inferior de la matriz.

Si la matriz también satisface la siguiente condición, está en la forma **escalonada reducida de renglones**:

4. Si una columna contiene una entrada inicial, entonces todas las otras entradas en esa columna son 0.

Número de soluciones de un sistema lineal (p. 705)

Si la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales se ha reducido a la forma escalonada de renglones usando operaciones elementales de renglones, entonces el sistema tiene:

1. **Ninguna solución** si la forma escalonada de renglones contiene un renglón que representa la ecuación $0 = 1$. En este caso el sistema es **inconsistente**.
2. **Una solución** si cada incógnita en forma escalonada de renglones es una incógnita inicial.
3. **Infinitas soluciones** si el sistema es consistente, pero no toda incógnita es una incógnita inicial. En este caso el sistema es **dependiente**.

Operaciones de matrices (p. 713)

Si A y B son matrices $m \times n$ y c es un escalar (número real), entonces:

1. La **suma** $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene sumando las entradas correspondientes de A y B.
2. La **resta** $A - B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene restando las entradas correspondientes de A y B.
3. El **producto escalar** cA es la matriz $m \times n$ que se obtiene multiplicando cada entrada de A por c.

Multiplicación de matrices (p. 715)

Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times k$ (por lo que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B), entonces el **producto matricial** AB es la matriz $m \times k$ cuya entrada ij es el producto interno del i-ésimo renglón de A y por la j-ésima columna de B.

Propiedades de las operaciones de matrices (pp. 714, 716)

Si A, B y C son matrices de dimensiones compatibles, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Conmutativa de la suma:**

$$A + B = B + A$$

2. **Asociativa:**

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(AB)C = A(BC)$$

3. **Distributiva:**

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

(Observe que la *multiplicación* de matrices *no* es conmutativa.)

Matriz identidad (p. 724)

La **matriz identidad** es la matriz $n \times n$ cuyas entradas iniciales de la diagonal son 1 y sus otras entradas son 0:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Si A es una matriz $m \times n$, entonces

$$AI_n = A \qquad \text{e} \qquad I_m A = A$$

Inversa de una matriz (p. 725)

Si A es una matriz $n \times n$, la inversa de A es la matriz $n \times n$ A^{-1} con las siguientes propiedades:

$$A^{-1}A = I_n \qquad \text{y} \qquad AA^{-1} = I_n$$

Para encontrar la inversa de una matriz utilizamos un procedimiento que implica operaciones elementales de renglones (se explican en la página 726). (Considere que *algunas* matrices cuadradas no tienen inversa.)

Inversa de una matriz 2 × 2 (p. 725)

Para matrices 2×2 la siguiente regla especial proporciona un camino corto para encontrar la inversa:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Escribir un sistema lineal como una ecuación de matriz (p. 728)

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir como una sola ecuación matricial

$$AX = B$$

donde A es la matriz de coeficientes $n \times n$, X es la matriz de incógnitas $n \times 1$ y B es la matriz de constantes $n \times 1$. Por ejemplo, el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$a_{11}x + a_{12}x = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}x = b_2$$

se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Resolver ecuaciones de matrices (p. 729)

Si A es una matriz invertible $n \times n$, X es una matriz de incógnitas $n \times 1$ y B es una matriz de constantes $n \times 1$, entonces la ecuación matricial

$$AX = B$$

tiene la solución única

$$X = A^{-1}B$$

Determinante de una matriz 2 × 2 (p. 734)

El **determinante** de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es el *número*

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

Menores y cofactores (p. 734)

Si $A = | a_{ij} |$ es una matriz $n \times n$, entonces el **menor** M_{ij} de la entrada a_{ij} es el determinante de la matriz que se obtiene eliminando el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.

El **cofactor** A_{ij} de la entrada a_{ij} es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

(Así, el menor y el cofactor de cada entrada son los mismos o son negativos uno del otro.)

Determinante de una matriz $n \times n$ (p. 735)

Para encontrar el **determinante** de la matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

elegimos un renglón o columna para **desarrollar**, calculamos el número que se obtiene multiplicando cada elemento de ese renglón o columna por su cofactor y luego sumamos los productos resultantes. Por ejemplo, si decidimos desarrollar el primer renglón, obtenemos

$$\det(A) = | A | = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Criterio de invertibilidad (p. 736)

Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de 0.

Transformaciones de renglón y de columna (p. 737)

Si sumamos un múltiplo distinto de cero de un renglón a otro renglón en una matriz cuadrada o un múltiplo distinto de cero de una columna a otra columna, el determinante de la matriz no cambia.

Regla de Cramer (pp. 738-740)

Si un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas x_1, $x_2, \ldots x_n$ es equivalente a la ecuación de matriz $DX = B$ y si $| D | \neq 0$, entonces las soluciones del sistema son

$$x_1 = \frac{| D_{x_1} |}{| D |} \qquad x_2 = \frac{| D_{x_2} |}{| D |} \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{| D_{x_n} |}{| D |}$$

donde D_{x_i} es la matriz que se obtiene usando D sustituyendo su i-ésima columna por la matriz de constantes B.

Área de un triángulo usando determinantes (p. 741)

Si un triángulo en el plano de coordenadas tiene los vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3), entonces el área del triángulo está dada por

$$\mathcal{A} = \pm\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

donde el signo se elige para hacer el área positiva.

Fracciones parciales (pp. 745-749)

La *descomposición en fracciones parciales* de una función racional

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

(cuando el grado de P es menor que el grado de Q) es una suma de expresiones fraccionarias más simples que es igual a $r(x)$ cuando tiene un denominador común. El denominador de cada fracción más simple es un factor de $Q(x)$ lineal o cuadrático, o una potencia de ese factor lineal o cuadrático. Por tanto, para encontrar los términos de la descomposición de fracciones parciales, podemos primero factorizar $Q(x)$ en factores cuadráticos lineales e irreducibles. Entonces los términos tienen las siguientes formas, dependiendo de los factores de $Q(x)$.

1. Para cada **factor lineal distinto** $ax + b$ hay un término de la forma

$$\frac{A}{ax + b}$$

2. Para cada **factor lineal repetido** $(ax + b)^m$ hay términos de la forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax + b)^m}$$

3. Para cada **factor cuadrático distinto** $ax^2 + bx + c$ hay un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

4. Para cada **factor cuadrático repetido** $(ax^2 + bx + c)^m$ hay términos de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Trazar gráficas de desigualdades (pp. 756-757)

Para trazar la gráfica de una desigualdad:

1. Trace la gráfica de la ecuación que corresponde a la desigualdad. Esta "curva frontera" divide el plano de coordenadas en regiones separadas.
2. Utilice **puntos de prueba** para determinar qué regiones satisfacen la desigualdad.
3. Sombree las regiones que satisfacen la desigualdad y utilice una línea sólida para la curva frontera si satisface la desigualdad ($\leq$ o $\geq$), y una línea discontinua si no es así ($<$ o $>$).

Trazar la gráfica de sistemas de desigualdades (p. 758)

Para trazar la gráfica de la solución de un sistema de desigualdades (o **región factible** determinada por las desigualdades) de la gráfica):

1. Trace la gráfica de todas las desigualdades en el mismo plano de coordenadas.
2. La solución es la intersección de las soluciones de las desigualdades, por tanto, se sombrea la región que satisface todas las desigualdades.
3. Determine las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas frontera con el conjunto solución del sistema. Estos puntos son los **vértices** de la solución.

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a***) ¿Cuáles son los tres métodos que utilizamos para resolver un sistema de ecuaciones?

b) Resuelva el sistema por el método de eliminación y por el método gráfico.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

2. Para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) ¿Cuántas soluciones son posibles?

b) ¿Qué se entiende por un sistema inconsistente, y qué por un sistema dependiente?

3. ¿Qué operaciones se pueden realizar en un sistema lineal para llegar a un sistema equivalente?

4. ***a***) Explique cómo funciona la eliminación gaussiana.

b) Utilice la eliminación gaussiana para poner el siguiente sistema en forma triangular y luego resolver el sistema.

Sistema	**Forma triangular**
$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases}$	

5. ¿Qué significa decir que A es una matriz de dimensión $m \times n$?

6. ¿Cuál es la forma escalonada de renglones de una matriz? ¿Qué es una entrada inicial?

7. ***a***) ¿Qué es la matriz aumentada de un sistema? ¿Cuáles son las incógnitas iniciales?

b) ¿Cuáles son las operaciones elementales de renglón en una matriz aumentada?

c) ¿Cómo se resuelve un sistema usando la matriz aumentada?

d) Escriba la matriz aumentada del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

e) Resuelva el sistema del inciso *d*).

8. Suponga que ha utilizado la eliminación gaussiana para escalonar la matriz aumentada de un sistema lineal en la forma escalonada de renglones. ¿Cómo puede decir que el sistema tiene exactamente una solución, que no tiene solución o que tiene un conjunto infinito de soluciones?

9. ¿Cuál es la forma escalonada reducida de renglones de una matriz?

10. ***a***) ¿Cómo difieren la eliminación gaussiana y la eliminación de Gauss-Jordan?

b) Use la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema lineal del inciso 7*d*).

11. Si A y B son matrices de la misma dimensión y k es un número real, ¿cómo encontrar $A + B$ y kA?

12. ***a***) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de A y B para que el producto de AB esté definido?

b) ¿Si A tiene dimensión 2×3 y B tiene dimensión 3×2, estará definido el producto AB? Si es así, ¿cuál es la dimensión de AB?

c) Encuentre la matriz producto.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

13. ***a***) ¿Qué es una matriz identidad I_n? Si A es una matriz $n \times n$, ¿cuáles son los productos de AI_n e I_nA?

b) Si A es una matriz $n \times n$, ¿cuál es su matriz inversa?

c) Complete la fórmula para la inversa de la matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

d) Encuentre la inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

14. ***a***) Exprese el sistema en 1*b*) como una ecuación matricial $AX = B$.

b) Si un sistema lineal se expresa como la ecuación matricial $AX = B$, ¿cómo se resuelve el sistema? Resuelva el sistema del inciso *a*).

15. ***a***) ¿Es cierto que el determinante det A de una matriz A se define solamente si A es una matriz cuadrada?

b) Encuentre el determinante de la matriz A en el inciso 13*d*).

c) Use la regla de Cramer para resolver el sistema 1*b*).

16. ***a***) ¿Cómo se expresa una función racional r como una descomposición de fracciones parciales?

b) Dé la forma de la descomposición de fracciones parciales.

i) $\dfrac{2x}{(x-5)(x-2)^2}$ *ii*) $\dfrac{2x}{(x-5)(x^2+1)}$

17. ***a***) ¿Cómo se traza la gráfica de una desigualdad en dos incógnitas?

b) Trace la gráfica del conjunto solución de la desigualdad $x + y \geq 3$.

c) Trace la gráfica del conjunto solución del sistema de desigualdades: $x + y \geq 3$, $3x - y \geq 1$.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–6 ■ Sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas Resuelva el sistema de ecuaciones y trace la gráfica de las rectas.

1. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 7y = 28 \\ y = \frac{2}{7}x - 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x - 8y = 15 \\ -\frac{3}{2}x + 2y = -4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 10 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 3y = 1 \\ 7x - 2y = 14 \end{cases}$

7–10 ■ Sistemas de ecuaciones no lineales Resuelva el sistema de ecuaciones.

7. $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = 6 + x \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x + 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + \dfrac{4}{y} = 6 \\ x - \dfrac{8}{y} = 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 2y^2 - 7y = 0 \end{cases}$

11–14 ■ Sistemas de ecuaciones no lineales Utilice una calculadora graficadora para resolver el sistema. Redondee las respuestas a la centésima más cercana.

11. $\begin{cases} 0.32x + 0.43y = 0 \\ 7x - 12y = 341 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt{12}x - 3\sqrt{2}y = 660 \\ 7137x + 3931y = 20000 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - y^2 = 10 \\ x = \frac{1}{22}y + 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = 5^x + x \\ y = x^5 + 5 \end{cases}$

15–20 ■ Matrices Se da una matriz.

a) Indique la dimensión de la matriz.
b) ¿Está la matriz en forma escalonada de renglones?
c) ¿Está la matriz en forma escalonada reducida de renglones?
d) Escriba el sistema de ecuaciones para que la matriz dada sea la matriz aumentada.

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

21–42 ■ Sistema de ecuaciones lineales de varias incógnitas Encuentre la solución completa del sistema, o demuestre que el sistema no tiene solución.

21. $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x + 5z = 12 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2x - 6z = 6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x - 7y + 11z = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 2x - 3z = 5 \\ x - 2y + 4w = 9 \\ x + y + 2z + 3w = 5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 6 \\ x - y = -1 \\ 2x + y + 3z = 7 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ 2x - y + z = 2 \\ 2x - 7y + 11z = -9 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + 5z = 10 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y - 4z - w = -1 \\ x - 2y + 4w = -7 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = -3 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 3z = -1 \\ y - 4w = 5 \\ 2y + z + w = 0 \\ 2x + y + 5z - 4w = 4 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 4x - y + 15z = 5 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 5y + 9z = 13 \\ 2x + 7z = 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} -x + 4y + z = 8 \\ 2x - 6y + z = -9 \\ x - 6y - 4z = -15 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x - z + w = 2 \\ 2x + y - 2w = 12 \\ 3y + z + w = 4 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 4z = 4 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ 3x - y - z - w = 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 6 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ x + 4y - 3z = 3 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y - 5z = 1 \\ 4x + 3y + z = 6 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + y - z - w = 2 \\ x - y + z - w = 0 \\ 2x + 2w = 2 \\ 2x + 4y - 4z - 2w = 6 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x - y - 2z + 3w = 0 \\ y - z + w = 1 \\ 3x - 2y - 7z + 10w = 2 \end{cases}$

43. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una paga 6% de interés por año y la otra paga 7%. En la cuenta que paga 7% tiene invertido el doble que en la que paga 6%, y su ingreso anual de intereses es de 600 dólares. ¿Cuánto hay invertido en cada cuenta?

44. Número de monedas Una alcancía tiene 50 monedas de 5, 10 y 25 centavos. El valor total de las monedas es 5.60 dólares, y el valor de las monedas de 10 es cinco veces el valor de las de 5. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

45. Inversiones Clarisse invierte 60 000 dólares en cuentas de mercado de dinero en tres bancos diferentes. El banco A paga 2% de interés por año, el banco B paga 2.5% y el banco C paga 3%. Ella decide invertir en el banco B el doble que en los otros dos bancos. Después de un año, Clarisse ha ganado 1 575 dólares en intereses. ¿Cuánto invirtió en cada banco?

46. Número de pescados Un pescador comercial captura eglefino, robalo y huachinango. Le pagan 1.25 dólares la libra de eglefino, 0.75 la de robalo y 2.00 la libra de huachinango. Ayer capturó 560 libras de pescado con valor de 575 dólares. El eglefino y el huachinango juntos valen 320 dólares. ¿Cuántas libras de cada especie capturó?

47–58 ■ Operaciones matriciales Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Realice las operaciones indicadas, o explique por qué no se pueden realizar.

47. $A + B$

48. $C - D$

49. $2C + 3D$

50. $5B - 2C$

51. GA

52. AG

53. BC

54. CB

55. BF

56. FC

57. $(C + D)E$

58. $F(2C - D)$

59–60 ■ Matrices inversas Verifique que las matrices A y B son inversas entre sí, calculando los productos AB y BA.

59. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

60. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

61–66 ■ Ecuaciones matriciales Resuelva la ecuación matricial para la matriz incógnita X, o demuestre que no existe solución, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

61. $A + 3X = B$

62. $\frac{1}{2}(X - 2B) = A$

63. $2(X - A) = 3B$

64. $2X + C = 5A$

65. $AX = C$

66. $AX = B$

67–74 ■ Determinantes y matrices inversas Determine el determinante y, si es posible, la inversa de la matriz.

67. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

68. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

69. $\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

70. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

71. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

72. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

74. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

75–78 ■ Uso de matrices inversas para resolver un sistema Exprese el sistema de ecuaciones lineales como una ecuación matricial. Luego resuelva la ecuación matricial multiplicando cada lado por la inversa de la matriz de coeficientes.

75. $\begin{cases} 12x - 5y = 10 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$

76. $\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 8x - 7y = -1 \end{cases}$

77. $\begin{cases} 2x + y + 5z = \frac{1}{3} \\ x + 2y + 2z = \frac{1}{4} \\ x + 3z = \frac{1}{6} \end{cases}$

78. $\begin{cases} 2x + 3z = 5 \\ x + y + 6z = 0 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$

79–82 ■ Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema Resuelva el sistema usando la regla de Cramer.

79. $\begin{cases} 2x + 7y = 13 \\ 6x + 16y = 30 \end{cases}$

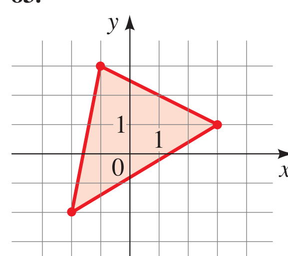
80. $\begin{cases} 12x - 11y = 140 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases}$

81. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ -x + 7y = 9 \\ 5x + 4y + 3z = -9 \end{cases}$

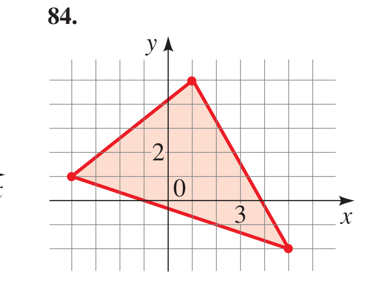
82. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 10 \\ x - 4z = 20 \\ 2x + y + 5z = 30 \end{cases}$

83–84 ■ Área de un triángulo Use la fórmula de determinantes para el área de un triángulo para encontrar el área del triángulo de la figura.

83.



84.



85–90 ■ Descomposición en fracciones parciales Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

85. $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 2x - 15}$

86. $\dfrac{8}{x^3 - 4x}$

87. $\dfrac{2x - 4}{x(x - 1)^2}$

88. $\dfrac{x + 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$

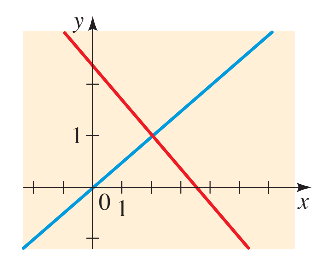
89. $\dfrac{2x - 1}{x^3 + x}$

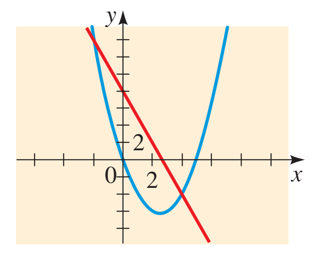
90. $\dfrac{5x^2 - 3x + 10}{x^4 + x^2 - 2}$

91–94 ■ Puntos de intersección Se dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el punto o los puntos de intersección de las gráficas al resolver el sistema.

91. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

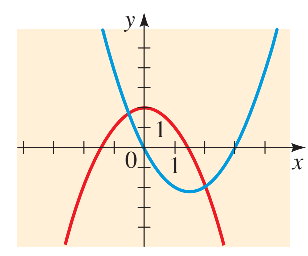
92. $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ y = x^2 - 5x \end{cases}$

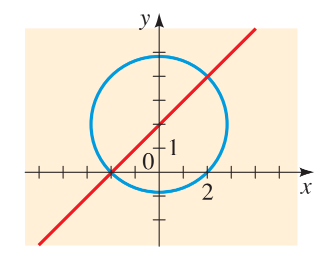




93. $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ x^2 - 3x - y = 0 \end{cases}$

94. $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 4 \end{cases}$

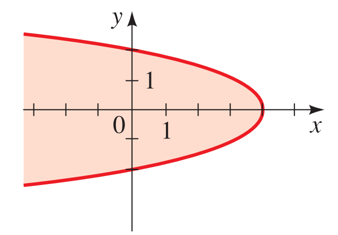


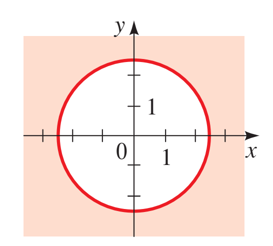


95–96 ■ Encontrar una desigualdad a partir de una gráfica Se da una ecuación y su gráfica. Encuentre una desigualdad cuya solución sea la región sombreada.

95. $x + y^2 = 4$

96. $x^2 + y^2 = 8$





97–100 ■ Trazar gráfica de desigualdades Trace la gráfica de la desigualdad.

97. $3x + y \le 6$

98. $y \ge x^2 - 3$

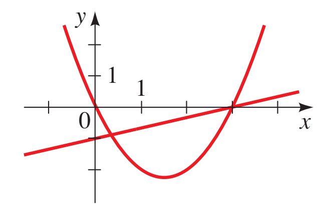
99. $x^2 + y^2 > 9$

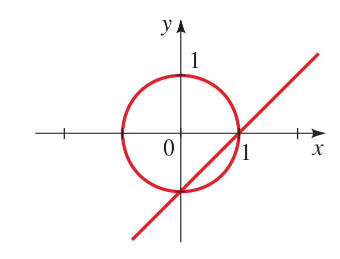
100. $x - y^2 < 4$

101–104 ■ Conjunto solución de un sistema de desigualdades La figura muestra las gráficas de las ecuaciones correspondientes a las desigualdades dadas. Sombree el conjunto solución del sistema de desigualdades.

101. $\begin{cases} y \ge x^2 - 3x \\ y \le \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$

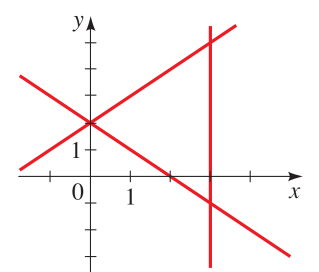
102. $\begin{cases} y \ge x - 1 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$

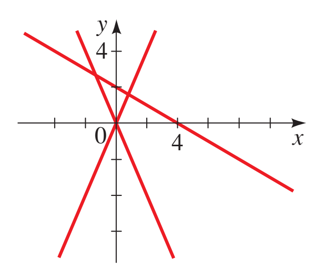




103. $\begin{cases} x + y \ge 2 \\ y - x \le 2 \\ x \le 3 \end{cases}$

104. $\begin{cases} y \ge -2x \\ y \le 2x \\ y \le -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$





105–108 ■ Sistema de desigualdades Trace la gráfica del conjunto solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices y determine si el conjunto solución está acotado o no.

105. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y < 0 \end{cases}$

106. $\begin{cases} y - x^2 \ge 4 \\ y < 20 \end{cases}$

107. $\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ x + 2y \le 12 \\ y \le x + 4 \end{cases}$

108. $\begin{cases} x \ge 4 \\ x + y \ge 24 \\ x \le 2y + 12 \end{cases}$

109–110 ■ Sistema general de ecuaciones Despeje x, y y z en términos de a, b y c.

109. $\begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$

110. $\begin{cases} ax + by + cz = a - b + c \\ bx + by + cz = c \\ cx + cy + cz = c \end{cases} \qquad (a \ne b,\ b \ne c,\ c \ne 0)$

111. Sistemas de ecuaciones generales ¿Para qué valores de k las tres rectas siguientes tienen un punto común de intersección?

$$x + y = 12$$
$$kx - y = 0$$
$$y - x = 2k$$

112. Sistemas de ecuaciones generales ¿Para qué valor de k el sistema siguiente tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases}$$

1–2 ■ Se da un sistema de ecuaciones. ***a***) Determine si el sistema es lineal o no lineal. ***b***) Encuentre todas las soluciones del sistema.

1. $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 6x + y^2 = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

 **3.** Use una calculadora graficadora para encontrar todas las soluciones del sistema redondeadas a dos decimales.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = x^3 - 2x^2 \end{cases}$$

4. En $2\frac{1}{2}$ horas un avión vuela 600 km contra el viento. Tarda 50 minutos en volar 300 km con el viento a favor. Encuentre la velocidad del viento y la velocidad del avión con el viento en calma.

5. Determine si cada matriz está en la forma escalonada por renglones reducida, en la forma escalonada por renglones o en ninguna de estas formas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ***b***) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ***c***) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. Use eliminación de Gauss para encontrar la solución completa del sistema, o demuestre que no existe solución.

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 5z = -5 \\ 2y - 3z = 5 \end{cases}$ ***b***) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 4x + y + 5z = 4 \end{cases}$

7. Use la eliminación de Gauss-Jordan para encontrar la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

8. Anne, Barry y Cathy entran a una cafetería. Anne ordena dos cafés, un jugo y dos donas y paga 6.25 dólares. Barry ordena un café y tres donas y paga 3.75 dólares. Cathy ordena tres cafés, un jugo y cuatro donas y paga 9.25 dólares. Encuentre el precio del café, el jugo y las donas en esta cafetería.

9. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Realice la operación indicada o explique por qué no se puede hacer.

a) $A + B$ ***b***) AB ***c***) $BA - 3B$ ***d***) CBA

e) A^{-1} ***f***) B^{-1} ***g***) $\det(B)$ ***h***) $\det(C)$

10. ***a***) Escriba una ecuación matricial equivalente al siguiente sistema.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x - 2y = 30 \end{cases}$$

b) Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes y úsela para resolver el sistema.

11. Sólo una de las matrices siguientes tiene una inversa. Encuentre el determinante de cada matriz y use los determinantes para identificar aquella que tiene inversa. Luego encuentre la inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Resuelva usando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x \qquad - z = 14 \\ 3x - y + 5z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

13. Encuentre la descomposición de fracción parcial de la función racional.

a) $\dfrac{4x - 1}{(x - 1)^2(x + 2)}$ ***b)*** $\dfrac{2x - 3}{x^3 + 3x}$

14. Trace la gráfica del conjunto solución del sistema de desigualdades. Asigne coordenadas a los vértices.

a) $\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x - y \geq -2 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x^2 + y \leq 5 \\ y \geq 2x + 5 \end{cases}$

La **programación lineal** es una técnica de modelado que se utiliza para determinar la asignación óptima de recursos en finanzas, en las fuerzas militares y en otros campos de la actividad humana. Por ejemplo, un fabricante que produce varios artículos diferentes a partir de la misma materia prima puede usar programación lineal para determinar cuánto de cada producto debe producir para maximizar la utilidad. Esta técnica de modelado es probablemente la aplicación práctica más importante de los sistemas de desigualdades lineales. En 1975 Leonid Kantorovich y T. C. Koopmans ganaron el Premio Nobel en economía por su trabajo en el desarrollo de esta técnica.

Aun cuando la programación lineal se puede aplicar a problemas muy complejos con cientos o hasta miles de incógnitas, consideramos sólo unos pocos ejemplos simples en los que se pueden aplicar los métodos gráficos de la sección 10.9. (Para números grandes de incógnitas se utiliza un método de programación lineal con matrices.) Examinemos un problema típico.

EJEMPLO 1 ■ Fabricar para maximizar la utilidad

Una pequeña fábrica de calzado hace dos estilos de zapatos: choclo y mocasín. En el proceso se utilizan dos máquinas: una cortadora y una máquina de coser. Cada tipo de calzado requiere 15 minutos por par en la cortadora. Los choclos requieren 10 min de costura por par; los mocasines, 20 minutos. Debido a que el fabricante puede contratar sólo un operador por cada máquina, se dispone para cada proceso sólo 8 horas por día. Si la utilidad es de 15 dólares en cada par de choclos y $20 en cada par de mocasines, ¿cuántos pares de cada tipo se deben producir al día para maximizar la utilidad?

Debido a que los mocasines producen más utilidad parecería mejor fabricar sólo mocasines. Sorprendentemente, ésta no resulta ser la solución más rentable.



SOLUCIÓN Primero organizamos en una tabla la información dada. Para ser consistentes convertimos todos los tiempos en horas.

	Choclos	Mocasines	Tiempo disponible
Tiempo en cortadora (h)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	8
Tiempo en máquina de coser (h)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	8
Utilidad	$15	$20	

Describimos el modelo y resolvemos el problema en cuatro pasos.

■ Elegir las incógnitas

Para hacer un modelo matemático primero damos nombres a las cantidades incógnitas. Para este problema hacemos que

x = número de pares de choclos hechos diariamente

y = número de pares de mocasines hechos diariamente

■ Encontrar la función objetivo

Nuestro objetivo es determinar qué valores para x y y dan la máxima utilidad. Dado que cada par de choclos da 15 dólares de utilidad y cada par de mocasines da 20 dólares, la utilidad total está dada por

$$P = 15x + 20y$$

Esta función recibe el nombre de *función objetivo*.

Trazar la gráfica de la región factible

Cuanto más grandes sean x y y, mayor será la utilidad. Pero no podemos seleccionar de manera arbitraria valores grandes para estas incógnitas debido a las limitaciones o las *restricciones* en el problema. Cada restricción es una desigualdad en las incógnitas.

En este problema el número total de horas de corte necesarias es $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$. Puesto que sólo se dispone de 8 horas en la cortadora, tenemos

$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y \leq 8$$

Del mismo modo, si consideramos el tiempo necesario y disponible en la máquina de coser, obtenemos

$$\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3}y \leq 8$$

No podemos producir un número negativo de zapatos, por lo cual también tenemos

$$x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad y \geq 0$$

Así, x y y deben satisfacer las restricciones

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \leq 8 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y \leq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos por 4 la primera desigualdad y por 6 la segunda obtenemos el sistema simplificado

$$\begin{cases} x + y \leq 32 \\ x + 2y \leq 48 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

FIGURA 1

La solución de este sistema (con vértices marcados) está trazada en la figura 1. Los únicos valores que satisfacen las restricciones del problema son los que corresponden a puntos de la región sombreada de la figura 1. Esta recibe el nombre de *región factible* para el problema.

Encontrar la utilidad máxima

Cuando aumentan x o y también aumenta la utilidad. Así, parece razonable que la utilidad máxima ocurrirá en un punto en uno de los lados externos de la región factible, donde es imposible aumentar x o y sin salirse de la región. De hecho, se puede demostrar que el valor máximo ocurre en un vértice. Esto significa que necesitamos verificar la utilidad sólo en los vértices. El valor máximo de P se presenta en el punto (16, 16) donde $P = 560$ dólares. En consecuencia, el fabricante debe hacer 16 pares de choclos y 16 pares de mocasines, para una utilidad diaria máxima de 560 dólares.

Vértice	$P = 15x + 20y$
(0, 0)	0
(0, 24)	$15(0) + 20(24) = \$480$
(16, 16)	$15(16) + 20(16) = \$560$
(32, 0)	$15(32) + 20(0) = \$480$

Utilidad máxima

La **programación lineal** ayuda a la industria telefónica a determinar la forma más eficiente de dirigir llamadas telefónicas. Las decisiones computarizadas de dirección deben hacerse rápidamente para que las personas que realicen llamadas no tengan que esperar por la conexión. Dado que la base de datos de clientes y rutas es enorme, es esencial un método extremadamente rápido para resolver problemas de programación lineal. En 1984 el matemático **Narendra Karmarkar**, de 28 años de edad, trabajando para los Laboratorios Bell en Murray Hill, Nueva Jersey, descubrió uno de estos métodos. Su idea fue tan ingeniosa y su método tan rápido que el descubrimiento causó sensación en el mundo de las matemáticas. Aun cuando los descubrimientos matemáticos raras veces hacen noticia, este fue reportado en la revista *Time* del 3 de diciembre de 1984. Hoy en día las líneas aéreas usan en forma cotidiana la técnica de Karmarkar para reducir al mínimo los costos en la programación de pasajeros, personal de vuelo, combustible, equipaje y trabajadores de mantenimiento.

Todos los problemas de programación lineal que hemos considerado siguen el patrón del ejemplo 1. Cada problema contiene dos incógnitas. El problema describe restricciones, llamadas **limitaciones**, que llevan a un sistema de desigualdades lineales cuya solución se denomina **región factible**. La función que deseamos maximizar o reducir al mínimo se llama **función objetivo**. Esta función siempre alcanza sus valores máximo y mínimo en los **vértices** de la región factible. Esta técnica de modelado comprende cuatro pasos, los cuales se resumen en el siguiente recuadro.

GUÍA PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Elegir las incógnitas.** Determine qué cantidades incógnitas del problema deben recibir el nombre de x y y.
2. **Encontrar la función objetivo.** Escriba una expresión para la función que deseamos maximizar o minimizar.
3. **Trazar la gráfica de la región factible.** Exprese las restricciones como un sistema de desigualdades y trace la gráfica de la solución de este sistema (la región factible).
4. **Encontrar el máximo o mínimo.** Evalúe la función objetivo en los vértices de la región factible para determinar su valor máximo o mínimo.

EJEMPLO 2 ■ Un problema de envíos

Un distribuidor de automóviles tiene almacenes en Millville y Trenton y centros de distribución en Camden y Atlantic City. Todo auto que se venda en estos centros de distribución debe ser entregado desde uno de los almacenes. En cierto día los distribuidores de Camden venden 10 autos y los distribuidores de Atlantic City venden 12. El almacén de Millville tiene 15 autos disponibles y el almacén de Trenton tiene 10. Enviar un auto de Millville a Camden tiene un costo de 50 dólares, enviarlo de Millville a Atlantic City cuesta \$40, de Trenton a Camden \$60 y de Trenton a Atlantic City 55 dólares. ¿Cuántos autos se deben enviar de cada almacén a cada centro de distribución para cumplir con los pedidos al mínimo costo?

SOLUCIÓN Nuestro primer paso es organizar la información dada. Más que construir una tabla trazamos un diagrama para mostrar el movimiento de autos de los almacenes a los centros de distribución (vea la figura 2 que se muestra a continuación). El diagrama muestra el número de autos disponibles en cada almacén o los que se requieren en cada centro de distribución, así como el costo de envío entre dichos lugares.

■ Elegir las incógnitas

Las flechas de la figura 2 indican cuatro posibles rutas, de modo que el problema parece tener cuatro incógnitas. Pero hacemos que

x = número de autos a enviarse de Millville a Camden

y = número de autos a enviarse de Millville a Atlantic City

Para cumplir los pedidos debemos tener

$10 - x$ = número de autos enviados de Trenton a Camden

$12 - y$ = número de autos enviados de Trenton a Atlantic City

Entonces las únicas incógnitas del problema son x y y.

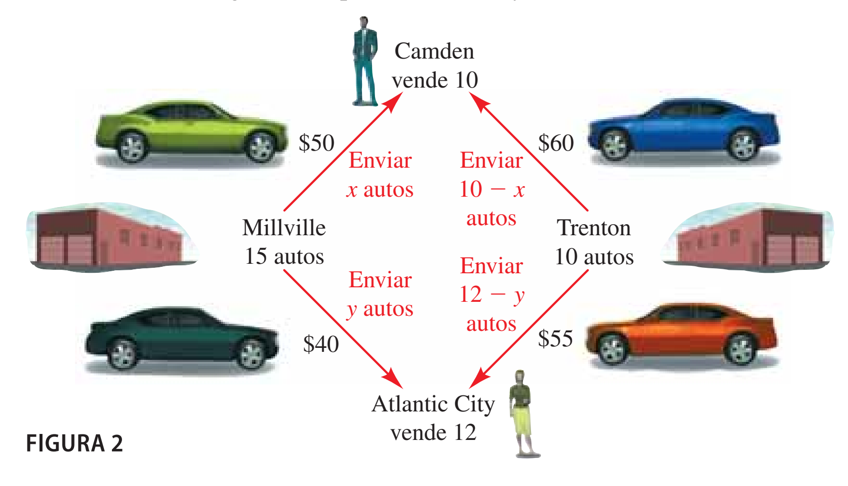


FIGURA 2

Encontrar la función objetivo

El objetivo de este problema es reducir el costo al mínimo. De la figura 2 vemos que el costo total C de enviar los autos es

$$\begin{aligned} C &= 50x + 40y + 60(10 - x) + 55(12 - y) \\ &= 50x + 40y + 600 - 60x + 660 - 55y \\ &= 1260 - 10x - 15y \end{aligned}$$

Esta es la función objetivo.

Trazar la gráfica de la región factible

Ahora deducimos las desigualdades de restricción que definen la región factible. Primero, el número de autos enviados en cada ruta no puede ser negativo, de modo que tenemos

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & y &\geq 0 \\ 10 - x &\geq 0 & 12 - y &\geq 0 \end{aligned}$$

En segundo lugar, el número total de autos enviados desde cada uno de los almacenes no puede exceder del de autos disponibles ahí, de modo que

$$\begin{aligned} x + y &\leq 15 \\ (10 - x) + (12 - y) &\leq 10 \end{aligned}$$

Simplificando la última desigualdad tenemos

$$\begin{aligned} 22 - x - y &\leq 10 \\ -x - y &\leq -12 \\ x + y &\geq 12 \end{aligned}$$

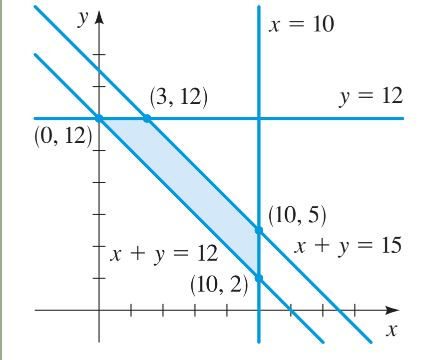


FIGURA 3

Las desigualdades $10 - x \geq 0$ y $12 - y \geq 0$ se pueden volver a escribir como $x \leq 10$ y $y \leq 12$. Entonces la región factible está descrita por las restricciones

$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ x + y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

En la figura 3 se presenta la gráfica de la región factible.

Encontrar el costo mínimo

Verificamos el valor de la función objetivo en cada vértice de la región factible.

Vértice	$C = 1260 - 10x - 15y$
(0, 12)	$1260 - 10(0) - 15(12) = \$1080$
(3, 12)	$1260 - 10(3) - 15(12) = \$1050$ ← Costo mínimo
(10, 5)	$1260 - 10(10) - 15(5) = \$1085$
(10, 2)	$1260 - 10(10) - 15(2) = \$1130$

El costo más bajo se encuentra en el punto (3, 12). Entonces, el distribuidor debe enviar

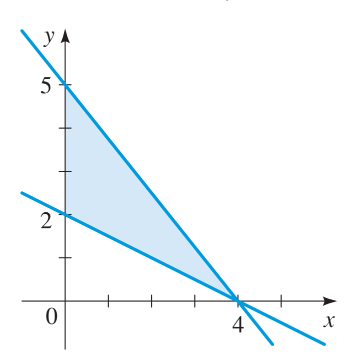
3 autos de Millville a Camden
12 autos de Millville a Atlantic City
7 autos de Trenton a Camden
0 autos de Trenton a Atlantic City ■

En la década de 1940 los matemáticos crearon métodos matriciales para resolver problemas de programación lineal con más de dos incógnitas. Estos métodos fueron utilizados primero por los aliados en la Segunda Guerra Mundial para resolver problemas de abastecimiento similares pero, por supuesto, mucho más complicados que los del ejemplo 2. Mejorar estos métodos matriciales es un campo activo y emocionante de la investigación matemática actual.

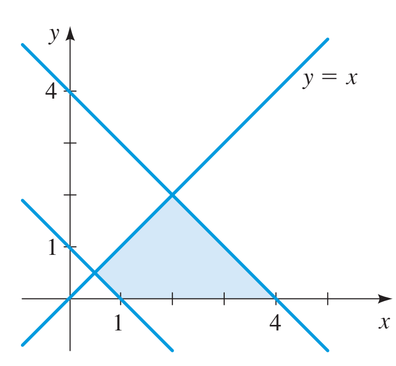
PROBLEMAS

1–4 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada en la región factible indicada.

1. $M = 200 - x - y$



2. $N = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 40$



3. $P = 140 - x + 3y$

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 2x + \ \ y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 28 \end{cases}$$

4. $Q = 70x + 82y$

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x \leq 10,\ y \leq 20 \\ x + \ \ y \geq 5 \\ x + 2y \leq 18 \end{cases}$$

5. Fabricación de muebles Un fabricante de muebles hace mesas y sillas de madera. En el proceso de producción intervienen dos tipos de trabajo: carpintería y acabado. Una mesa requiere 2 horas de carpintería y 1 hora de acabado; una silla requiere 3 horas de carpintería y $\frac{1}{2}$ hora de acabado. La utilidad es 35 dólares por mesa y \$20 por silla. Los empleados del fabricante pueden ejecutar un máximo de 108 horas de trabajo de carpintería y 20 horas de trabajo de acabado por día. ¿Cuántas mesas y sillas deben fabricarse al día para maximizar la utilidad?

6. Un proyecto habitacional Una contratista de viviendas ha subdividido una granja en 100 lotes para construcción. Ha diseñado dos tipos de casas para estos lotes: colonial y estilo ranchero. Una casa colonial requiere 30 000 dólares de capital y producirá una utilidad de \$4 000 cuando se venda. Una casa estilo ranchero requiere 40 000 dólares de capital y dará una utilidad de \$8 000. Si la contratista tiene 3.6 millones de dólares de capital a la mano, ¿cuántas casas de cada tipo debe construir para obtener máxima utilidad? ¿Quedarán vacíos algunos de los lotes?



7. Transporte de frutas Un transportista lleva cítricos de Florida a Montreal. Cada caja de naranjas tiene 4 pies^3 de volumen y pesa 80 libras. Cada caja de toronjas tiene un volumen de 6 pies^3 y pesa 100 libras. Su camión tiene una capacidad máxima de 300 pies^3 y no puede llevar más de 5 600 libras. Además, no se le permite llevar más cajas de toronjas que de naranjas. Si su utilidad es 2.50 dólares por cada caja de naranjas y \$4 por cada caja de toronjas, ¿cuántas cajas de cada cítrico debe transportar para obtener máxima utilidad?

8. Fábrica de calculadoras Un fabricante de calculadoras produce dos modelos: estándar y científica. La demanda a largo plazo para los dos modelos recomienda que la compañía fabrique al menos 100 calculadoras estándar y 80 científicas al día. No obstante, debido a limitaciones en la capacidad de producción, no pueden manufacturarse más de 200 calculadoras estándar y 170 científicas al día. Para satisfacer el contrato firmado, se debe enviar un total de al menos 200 calculadoras por día.

a) Si el costo de producción es de 5 dólares por una calculadora estándar y \$7 por una científica, ¿cuántas de cada modelo se deben producir al día para minimizar este costo?

b) Si cada calculadora estándar resulta en una pérdida de 2 dólares, pero cada científica produce una utilidad de \$5; ¿cuántas de cada modelo deben fabricarse al día para que la utilidad sea máxima?

9. Envío de televisiones Una cadena de tiendas de descuento de aparatos electrónicos tiene una venta de cierta marca de televisiones de alta definición de 60 pulg. La cadena tiene tiendas en Santa Mónica y El Toro; y almacenes en Long Beach y Pasadena. Para satisfacer pedidos urgentes deben enviarse 15 televisiones de los almacenes a la tienda de Santa Mónica y 19 a la de El Toro. Los costos de envío de una televisión son: de Long Beach a Santa Mónica 5 dólares, de Long Beach a El Toro \$6, de Pasadena a Santa Mónica \$4 y de

Pasadena a El Toro 5.50 dólares? Si el almacén de Long Beach tiene 24 aparatos y el almacén de Pasadena tiene 18 en existencia, ¿cuántos deben ser enviados de cada almacén a cada tienda para satisfacer los pedidos con un mínimo costo de envío

10. Entrega de madera contrachapada Un hombre tiene dos tiendas de material de construcción, una en el lado oriente y la otra en el lado poniente de una ciudad. Dos clientes solicitan madera contrachapada de $\frac{1}{2}$ pulgada. El cliente A necesita 50 hojas y el cliente B necesita 70. La tienda del oriente tiene en existencia 80 hojas y la del poniente tiene 45 hojas de esta madera. Los costos de entrega de la tienda del oriente al cliente A son 0.50 dólares por pieza y al cliente B $0.60. Los costos de entrega de la tienda del poniente son $0.40 por pieza al cliente A y $0.55 al cliente B. ¿Cuántas hojas se deben enviar de cada tienda a cada cliente para reducir al mínimo los costos de envío?

11. Empaque de nueces Un dulcero vende dos tipos de mezcla de nueces. El paquete de mezcla estándar contiene 100 g de nueces de la India y 200 g de cacahuates y se vende en 1.95 dólares. El paquete de mezcla de lujo contiene 150 g de nueces de la India y 50 g de cacahuates y se vende en 2.25 dólares. El dulcero tiene disponibles 15 kg de nueces de la India y 20 kg de cacahuates. Con base en la venta de pastas el dulcero necesita tener listos al menos tantos paquetes estándar como de lujo. ¿Cuántas bolsas de cada mezcla debe envasar para que su ingreso sea máximo?

12. Alimento de conejos de laboratorio Un biólogo desea alimentar conejos de laboratorio con una mezcla de dos tipos de alimento. El tipo I contiene 8 g de grasa, 12 g de carbohidratos y 2 g de proteína por onza; el tipo II contiene 12 g de grasa, 12 g de carbohidratos y 1 g de proteína por onza. El tipo I cuesta 0.20 dólares por onza y el tipo II $0.30 por onza. Cada conejo recibe un mínimo diario de 24 g de grasa, 36 g de carbohidratos y 4 g de proteína, pero no más de 5 onzas de alimento por día. ¿Cuántas onzas de alimento de cada tipo se le debe dar a cada conejo para satisfacer las necesidades de dieta al mínimo costo?

13. Inversión en bonos Una mujer desea invertir 12 000 dólares en tres tipos de bonos: bonos municipales que pagan 7% de interés al año, certificados bancarios de inversión que pagan 8% y bonos de alto riesgo que pagan 12%. Por razones de impuestos, ella desea que la cantidad invertida en bonos municipales sea al menos tres veces la cantidad invertida en certificados bancarios. Para que su nivel de riesgo sea manejable, ella invertirá no más de 2 000 dólares en bonos de alto riesgo. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de bono para maximizar su rendimiento anual de intereses? [*Sugerencia:* Sea x = cantidad en bonos municipales y y = cantidad en certificados bancarios. Entonces la cantidad en bonos de alto riego será $12000 - x - y$.]



14. Rendimiento anual de intereses Consulte el problema 13. Suponga que la inversionista decide aumentar el máximo invertido en bonos de alto riesgo a 3 000 dólares, pero deja sin alterar las otras condiciones. ¿En cuánto aumentará su rendimiento de intereses máximo posible?

15. Estrategia financiera Una pequeña compañía de software publica juegos de computadora y software educacional y de utilería. Su estrategia financiera es vender un total de 36 nuevos programas al año, al menos cuatro de los cuales son juegos. El número de programas de utilería publicados nunca es mayor al doble del número de programas educacionales. En promedio, la compañía obtiene una utilidad anual de 5 000 dólares en cada juego de computadora, $8 000 en cada programa educacional y $6 000 en cada programa de utilería. ¿Cuántos de cada tipo de software debe publicar anualmente la compañía para tener máxima utilidad?

16. Región factible Todas las partes de este problema se refieren a la siguiente región factible y función objetivo.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \\ x + 2y \geq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

$$P = x + 4y$$

***a*)** Trace la gráfica de la región factible.

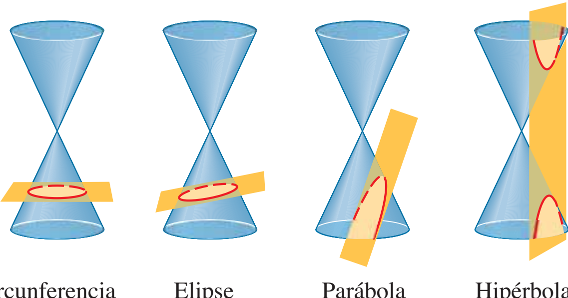
***b*)** En su gráfica del inciso *a*), trace las gráficas de las ecuaciones lineales obtenidas al hacer P igual a 40, 36, 32 y 28.

***c*)** Si usted continúa reduciendo el valor de P, ¿en qué vértice de la región factible tocarán primero estas rectas la región factible?

***d*)** Verifique que el valor máximo de P en la región factible se presente en el vértice que eligió usted en el inciso *c*).

11 Secciones cónicas

Las **secciones cónicas** son las curvas que obtenemos cuando hacemos un corte recto en un cono, como se muestra en la figura. Por ejemplo, si un cono se corta horizontalmente, la sección transversal es una circunferencia. Entonces, una circunferencia es una sección cónica. Otras formas de cortar un cono producen parábolas, elipses e hipérbolas.



Nuestro objetivo en este capítulo es encontrar ecuaciones cuyas gráficas sean las secciones cónicas. Encontraremos ecuaciones para cada una de las otras secciones al analizar sus propiedades *geométricas.* Las secciones cónicas tienen propiedades interesantes que las hacen útiles para numerosas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, una superficie reflectora con secciones transversales parabólicas concentra luz en un solo punto. Esta propiedad de una parábola se utiliza en la construcción de plantas solares para generación de electricidad, como la de California, que se ve en la foto anterior. En el *Enfoque sobre modelado* al final del capítulo investigamos cómo se utilizan estas curvas en arquitectura.

11.1 PARÁBOLAS

■ Definición geométrica de una parábola ■ Ecuaciones y gráficas de parábolas
■ Aplicaciones

■ Definición geométrica de una parábola

En la sección 3.1 vimos que la gráfica de la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

es una curva en forma de U llamada *parábola* que abre ya sea hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de si el signo de a es positivo o negativo.

En esta sección estudiamos parábolas desde un punto de vista geométrico más que algebraico. Empezamos con la definición geométrica de una parábola y mostramos cómo esto nos lleva a la fórmula algebraica con la que ya estamos familiarizados.

> **DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA PARÁBOLA**
>
> Una **parábola** es el conjunto de puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija l (llamada **directriz**).

En la figura 1 se ilustra esta definición. El **vértice** V de la parábola se encuentra a la mitad entre el foco y la directriz, y el **eje de simetría** es la recta que corre por el foco perpendicular a la directriz.

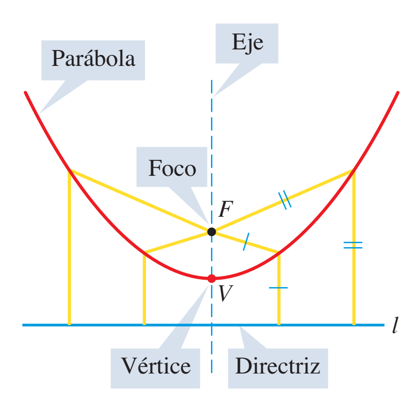


FIGURA 1

En esta sección restringimos nuestra atención a parábolas que están situadas con el vértice en el origen y que tienen un eje de simetría vertical u horizontal. (En las secciones 11.4 se estudian parábolas en posiciones más generales.) Si el foco de dicha parábola es el punto $F(0, p)$, entonces el eje de simetría debe ser vertical y la directriz tiene la ecuación $y = -p$. La figura 2 ilustra el caso $p > 0$.

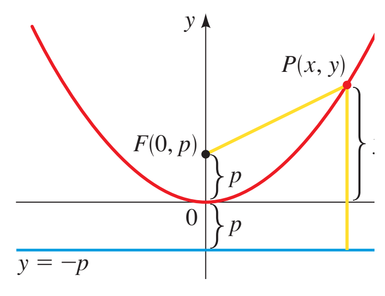


FIGURA 2

Deducción de la ecuación de una parábola Si $P(x, y)$ es cualquier punto en la parábola, entonces la distancia de P al foco F(usando la fórmula de la distancia) es

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

La distancia de P a la directriz es

$$|y - (-p)| = |y + p|$$

Por la definición de una parábola estas dos distancias deben ser iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$x^2 - 2py = 2py \qquad \text{Simplifique}$$

$$x^2 = 4py$$

Si $p > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba; pero si $p < 0$, abre hacia abajo. Cuando x se sustituye por $-x$ la ecuación permanece sin cambio, de modo que la gráfica es simétrica respecto al eje y.

■ Ecuaciones y gráficas de parábolas

El recuadro siguiente resume lo que acabamos de demostrar acerca de la ecuación y las características de una parábola con eje vertical.

PARÁBOLA CON EJE VERTICAL

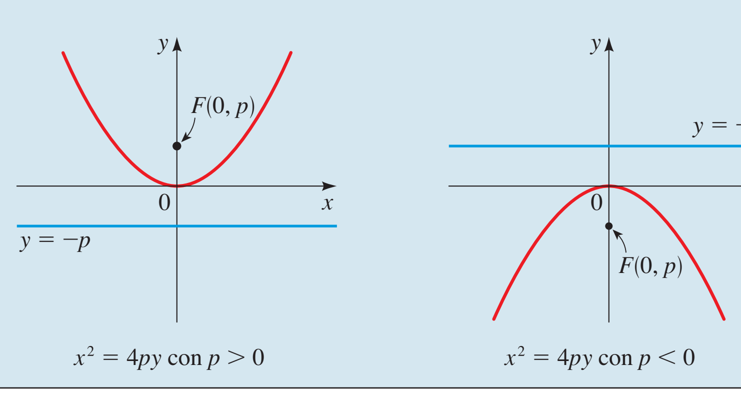
La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 4py$$

es una parábola con las siguientes propiedades.

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(0, p)$
DIRECTRIZ	$y = -p$

La parábola abre hacia arriba si $p > 0$ o hacia abajo si $p < 0$.



$x^2 = 4py$ con $p > 0$ $\qquad$ $x^2 = 4py$ con $p < 0$

EJEMPLO 1 ■ Encontrar la ecuación de una parábola

Encuentre una ecuación para la parábola con vértices $V(0, 0)$ y foco $F(0, 2)$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Dado que el foco es $F(0, 2)$, concluimos que $p = 2$ (de modo que la directriz es $y = -2$). Entonces la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4(2)y \qquad x^2 = 4py \text{ con } p = 2$$

$$x^2 = 8y$$

Puesto que $p = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. Vea la figura 3.

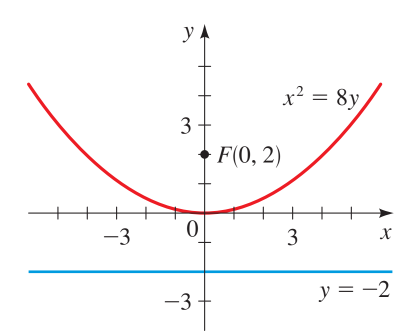


FIGURA 3

Ahora intente hacer los ejercicios 31 y 49 ■

Las matemáticas en el mundo moderno



Imágenes del interior de nuestra cabeza

¿Cómo le gustaría a usted ver el interior de su cabeza? La idea no es particularmente atractiva para la mayoría de nosotros, pero es frecuente que los médicos necesiten precisamente eso. Si pueden ver sin recurrir a cirugía invasiva, es mejor. Una placa de rayos X en realidad no da una imagen del interior, sino simplemente una "gráfica" de la densidad del tejido por el que deben pasar los rayos X. En consecuencia, una placa de rayos X es una vista "aplanada" en una dirección. Suponga que usted obtiene una placa de rayos X desde muchas direcciones diferentes. ¿Se pueden usar estas "gráficas" para reconstruir la imagen interior en tres dimensiones? Este es un problema puramente matemático y fue resuelto por matemáticos hace mucho tiempo. Sin embargo, reconstruir la vista interior requiere miles de tediosos cálculos. Hoy en día, las matemáticas y computadoras de alta velocidad hacen posible "ver dentro" mediante un proceso llamado tomografía asistida por computadora (o escáner CAT). Los matemáticos siguen investigando mejores formas de usar matemáticas para reconstruir imágenes. Una de las técnicas más recientes, llamada imagen de resonancia magnética (MRI), combina biología molecular y matemáticas para una clara "vista interior".

EJEMPLO 2 ■ Encontrar el foco y directriz de una parábola a partir de su ecuación

Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y = -x^2$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Para encontrar el foco y la directriz ponemos la ecuación dada en la forma normal $x^2 = -y$. Comparando esto con la ecuación general $x^2 = 4py$, vemos que $4p = -1$, de modo que $p = -\frac{1}{4}$. Entonces el foco es $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es $y = \frac{1}{4}$. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestran en la figura 4*a*). También podemos trazar la gráfica usando una calculadora graficadora como se muestra en la figura 4*b*).

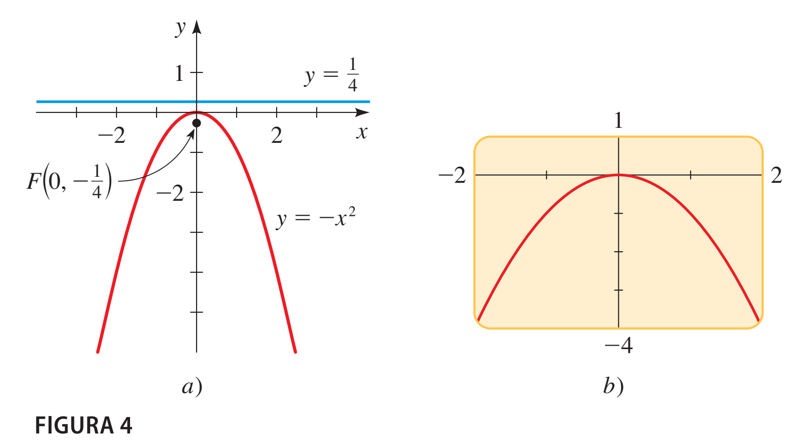


FIGURA 4

Ahora intente hacer el ejercicio 11 ■

Reflejar la gráfica de la figura 2 respecto de la recta diagonal $y = x$ tiene el efecto de intercambiar las funciones de x y y. Esto resulta en una parábola con eje horizontal. Por el mismo método anterior podemos demostrar las siguientes propiedades.

PARÁBOLA CON EJE HORIZONTAL

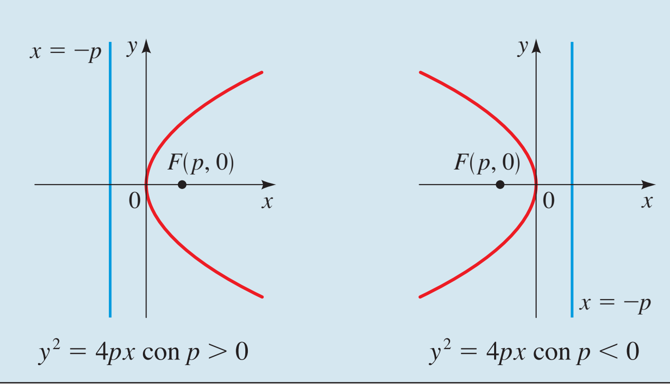
La gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4px$$

es una parábola con las siguientes propiedades.

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(p, 0)$
DIRECTRIZ	$x = -p$

La parábola abre hacia la derecha si $p > 0$ o hacia la izquierda si $p < 0$.



$y^2 = 4px$ con $p > 0$ $\qquad$ $y^2 = 4px$ con $p < 0$

EJEMPLO 3 ■ Una parábola con eje horizontal

Una parábola tiene la ecuación $6x + y^2 = 0$.

a) Encuentre el foco y la directriz de la parábola y trace la gráfica.

b) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN

a) Para encontrar el foco y la directriz ponemos la ecuación dada en la forma normal $y^2 = -6x$. Comparando esto con la ecuación general $y^2 = 4px$, vemos que $4p = -6$, de modo que $p = -\frac{3}{2}$. Entonces el foco $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, y la directriz es $x = \frac{3}{2}$. Puesto que $p < 0$, la parábola abre a la izquierda. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestran en la figura 5*a*).

b) Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora, necesitamos despejar y

$$6x + y^2 = 0$$

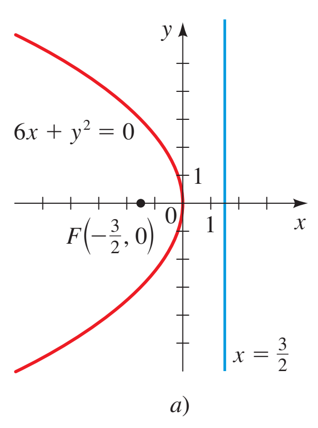
$$y^2 = -6x \qquad \text{Reste } 6x$$

$$y = \pm\sqrt{-6x} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la parábola graficamos ambas funciones

$$y = \sqrt{-6x} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{-6x}$$

como se muestra en la figura 5*b*).



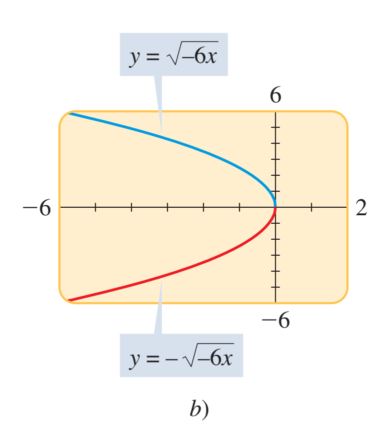


FIGURA 5 *a*) *b*)

Ahora intente hacer los ejercicio 13 y 25 ■

Nota de calculadora graficadora La ecuación $y^2 = 4px$, no define a y como función de x (vea la página 165). Por tanto, para usar la calculadora graficadora para trazar la gráfica una parábola con eje horizontal, primero debemos despejar y. Esto lleva a dos funciones: $y = \sqrt{4px}$ y $y = -\sqrt{4px}$. Necesitamos trazar la gráfica de ambas funciones para obtener la gráfica completa de la parábola. Por ejemplo, en la figura 5*b*) teníamos que trazar la gráfica $y = \sqrt{-6x}$ y $y = -\sqrt{-6x}$ para trazar la gráfica la parábola $y^2 = -6x$.

Podemos usar las coordenadas del foco para estimar el "ancho" de una parábola cuando tracemos su gráfica. El segmento de recta que pasa por el foco y que es perpendicular al eje, con puntos extremos en la parábola, se llama **lado recto**, y su longitud es el **diámetro focal** de la parábola. De la figura 6 podemos ver que la distancia de un punto extremo Q del lado recto a la directriz también es $|2p|$. En consecuencia, la distancia de Q al foco también debe ser $|2p|$ (por la definición de una parábola), de modo que el diámetro focal es $|4p|$. En el siguiente ejemplo usamos el diámetro focal para determinar el "ancho" de una parábola cuando se traza la gráfica de ésta.

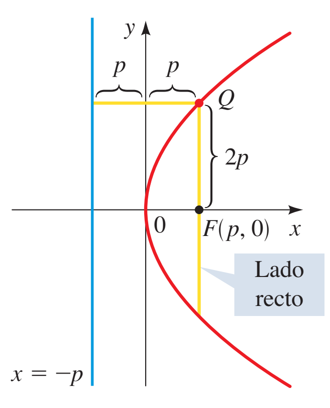


FIGURA 6

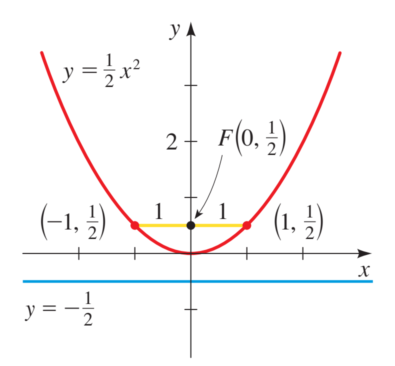


FIGURA 7

EJEMPLO 4 ■ El diámetro focal de una parábola

Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Primero ponemos la ecuación en la forma $x^2 = 4py$.

$$y = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 2y \qquad \text{Multiplique por 2, intercambie los lados}$$

De esta ecuación vemos que $4p = 2$, de modo que el diámetro focal es 2. Al despejar p se obtiene $p = \frac{1}{2}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y la directriz es $y = -\frac{1}{2}$. Dado que el diámetro focal es 2, el lado recto se prolonga 1 unidad a la izquierda y 1 unidad a la derecha del foco. La gráfica está trazada en la figura 7.


Ahora intente hacer el ejercicio 15 ■

En el siguiente ejemplo trazamos la gráfica de una familia de parábolas para demostrar que cambiar la distancia entre los focos y el vértice afecta el "ancho" de la parábola.

EJEMPLO 5 ■ Una familia de parábolas

a) Encuentre ecuaciones para las parábolas con vértice en el origen y focos $F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $F_3(0, 1)$ y $F_4(0, 4)$.

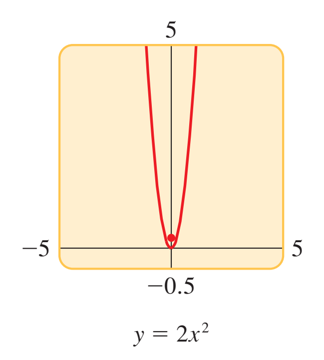
b) Trace las gráficas de las parábolas del inciso *a*). ¿Cuál es su conclusión?

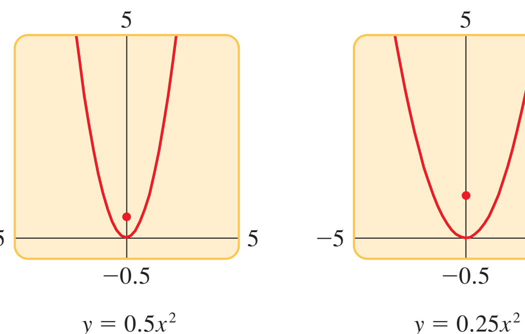
SOLUCIÓN

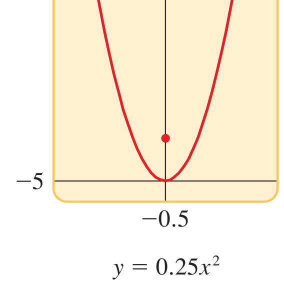
a) Puesto que los focos están en el eje y positivo, las parábolas abren hacia arriba y tienen ecuaciones de la forma $x^2 = 4py$. Esto nos conduce a las siguientes ecuaciones.

Foco	p	Ecuación $x^2 = 4py$	Forma de la ecuación para calculadora graficadora
$F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$	$p = \frac{1}{8}$	$x^2 = \frac{1}{2}y$	$y = 2x^2$
$F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$p = \frac{1}{2}$	$x^2 = 2y$	$y = 0.5x^2$
$F_3(0, 1)$	$p = 1$	$x^2 = 4y$	$y = 0.25x^2$
$F_4(0, 4)$	$p = 4$	$x^2 = 16y$	$y = 0.0625x^2$

b) Las gráficas están trazadas en la figura 8. Vemos que cuanto más cercano está el foco del vértice, más angosta es la parábola.







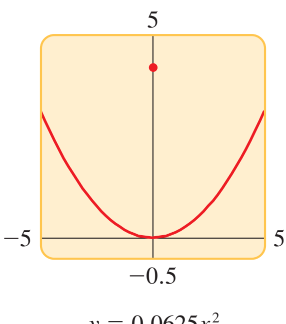


FIGURA 8 Familia de parábolas

Ahora intente hacer el ejercicio 59 ■

Aplicaciones

Las parábolas tienen una importante propiedad que las hace útiles como reflectores para lámparas y telescopios. La luz de una fuente colocada en el foco de una superficie con sección transversal parabólica se reflejará de modo tal que viaja paralela al eje de la parábola (vea la figura 9). Entonces, un espejo parabólico refleja la luz en un haz de rayos paralelos. Recíprocamente, la luz que se aproxima al reflector en rayos paralelos a este eje de simetría se concentra en el foco. Esta *propiedad de reflexión*, que se puede demostrar mediante el cálculo, se utiliza en la construcción de telescopios reflectores.

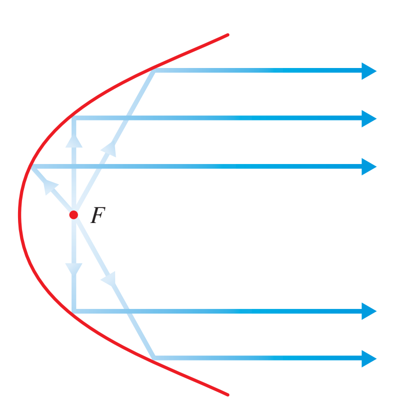


FIGURA 9 Reflector parábolico

EJEMPLO 6 ■ Encontrar el punto focal de un reflector buscador

Un proyector tiene un reflector parabólico que forma un "tazón", que mide 12 pulgadas de ancho de borde a borde y 8 pulgadas de profundidad, como se muestra en la figura 10. Si el filamento de la bombilla eléctrica está situado en el foco, ¿a qué distancia está del vértice del reflector?

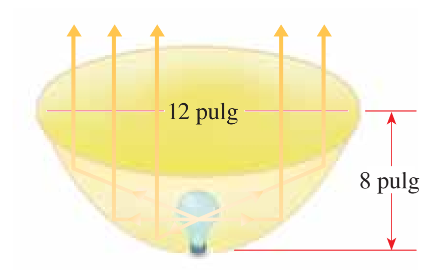


FIGURA 10 Un reflector parabólico



ARQUÍMEDES (287-212 a.C.) fue el más grande matemático de la Antigüedad. Nació en Siracusa, colonia griega de Sicilia, una generación después de Euclides (vea la página 542). Uno de sus muchos descubrimientos es la Ley de la Palanca (vea la página 79). Es famoso por haber dicho: "Dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré al mundo".

Renombrado como genio mecánico por sus numerosos inventos de ingeniería, diseñó poleas para levantar barcos pesados y el tornillo espiral para transportar agua a niveles más altos. Se dice que usó espejos parabólicos para concentrar los rayos del Sol para incendiar los barcos romanos que atacaban Siracusa.

El rey Herón II de Siracusa una vez sospechó que un orfebre se había guardado parte del oro destinado para su corona y que la había sustituido por una cantidad igual de plata. El Rey le pidió consejo a Arquímedes. Cuando este se encontraba profundamente inmerso en sus pensamientos en un baño público, descubrió la solución al problema del Rey cuando observó que el volumen de su cuerpo era el mismo que el volumen del agua desplazada por este en la tina de baño. Con esta idea pudo medir el volumen de cada corona y así determinar cuál era la corona más densa, toda de oro. La historia nos dice que salió desnudo, corriendo hacia su casa, gritando: "¡Eureka, Eureka!" ("¡Lo he encontrado, lo he encontrado!"). Este incidente atestigua el enorme poder de concentración de Arquímedes.

A pesar de su proeza en ingeniería, Arquímedes se enorgullecía de sus descubrimientos matemáticos entre los que se incluyen las fórmulas para el volumen de una esfera $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$ y su área superficial $\left(S = 4\pi r^2\right)$, así como un cuidadoso análisis de las propiedades de las parábolas y otras cónicas.

FIGURA 11

SOLUCIÓN Introducimos un sistema de coordenadas y colocamos una sección transversal parabólica del reflector de modo que su vértice se encuentre en el origen y su eje sea vertical (vea la figura 11). Entonces la ecuación de esta parábola tiene la forma $x^2 = 4py$. De la figura 11 vemos que el punto (6, 8) está en la parábola. Usamos esto para encontrar p.

$$6^2 = 4p(8) \qquad \text{El punto (6, 8) satisface la ecuación } x^2 = 4py$$

$$36 = 32p$$

$$p = \tfrac{9}{8}$$

El foco es $F\left(0, \frac{9}{8}\right)$, de modo que la distancia entre el vértice y el foco es $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ pulg. Dado que el filamento está colocado en el foco, está situado a $1\frac{1}{8}$ de pulg del vértice del reflector.

Ahora intente hacer el ejercicio 61 ■

11.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

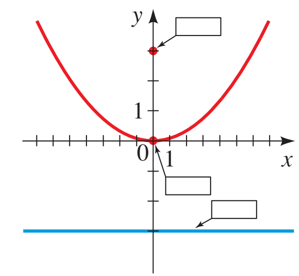
1. Una parábola es el conjunto de todos los puntos del plano que son equidistantes de un punto fijo llamado ________ y de una recta fija llamada ________ de la parábola.

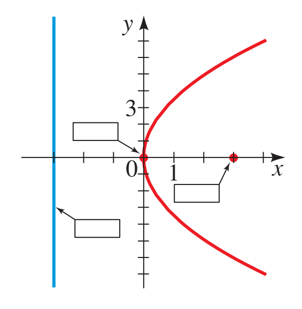
2. La gráfica de la ecuación $x^2 = 4py$ es una parábola con foco $F(__, __)$ y directriz $y =$ ________. Por tanto, la gráfica de $x^2 = 12y$ es una parábola con foco $F(__, __)$ y directriz $y =$ ________.

3. La gráfica de la ecuación $y^2 = 4px$ es una parábola con foco $F(__, __)$ y la directriz $x =$ ________. Por tanto, la gráfica de $y^2 = 12x$ es una parábola con foco $F(__, __)$ y directriz $x =$ ________.

4. Rotule el foco, la directriz y el vértice en las gráficas de las parábolas de los ejercicios 2 y 3.

a) $x^2 = 12y$ ***b)*** $y^2 = 12x$





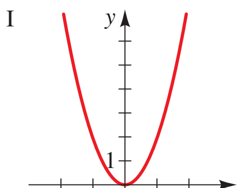
HABILIDADES

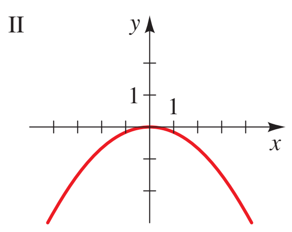
5–10 ■ Gráficas de parábolas Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-VI. Dé razones para sus respuestas.

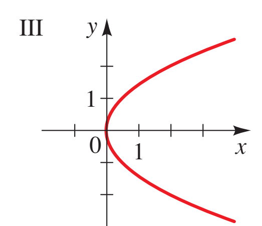
5. $y^2 = 2x$ **6.** $y^2 = -\frac{1}{4}x$

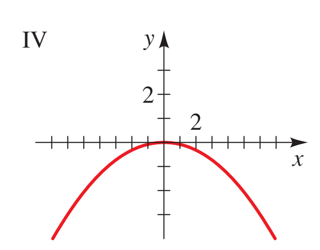
7. $x^2 = -6y$ **8.** $2x^2 = y$

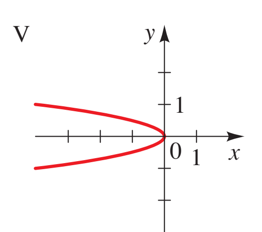
9. $y^2 - 8x = 0$ **10.** $12y + x^2 = 0$

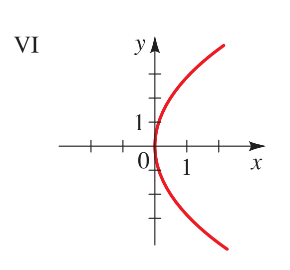
I


II


III


IV


V


VI


11–24 ■ Gráficas de parábolas Se da una ecuación de una parábola ***a)*** Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola. ***b)*** Trace la gráfica de la parábola y su directriz.

11. $x^2 = 8y$ **12.** $x^2 = -4y$

13. $y^2 = -24x$ **14.** $y^2 = 16x$

15. $y = -\frac{1}{8}x^2$ **16.** $x = 2y^2$

17. $x = -2y^2$ **18.** $y = \frac{1}{4}x^2$

19. $5y = x^2$ **20.** $9x = y^2$

21. $x^2 + 12y = 0$ **22.** $x + \frac{1}{5}y^2 = 0$

23. $5x + 3y^2 = 0$ **24.** $8x^2 + 12y = 0$

25–30 ■ Gráficas de parábolas Use la calculadora graficadora para trazar la gráfica la parábola.

25. $x^2 = 16y$ **26.** $x^2 = -8y$

27. $y^2 = -\frac{1}{3}x$ **28.** $8y^2 = x$

29. $4x + y^2 = 0$ **30.** $x - 2y^2 = 0$

31–48 ■ Encontrar la ecuación de una parábola Encuentre una ecuación para la parábola que tiene su vértice en el origen y satisface las condiciones dadas.

31. Foco: $F(0, 6)$ **32.** Foco: $F(0, -\frac{1}{4})$

33. Foco: $F(-8, 0)$ **34.** Foco: $F(5, 0)$

35. Foco: $F(0, -\frac{3}{4})$ **36.** Foco: $F(-\frac{1}{12}, 0)$

37. Directriz: $x = -4$ **38.** Directriz: $y = \frac{1}{2}$

39. Directriz: $y = \frac{1}{10}$ **40.** Directriz: $x = -\frac{1}{8}$

41. Directriz: $x = \frac{1}{20}$ **42.** Directriz: $y = -5$

43. Foco en el eje x positivo, a 2 unidades de distancia de la directriz

44. Foco en el eje y negativo, a 6 unidades de distancia de la directriz

45. Abre hacia abajo con el foco a 10 unidades del vértice

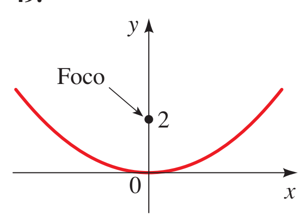
46. Abre hacia arriba con el foco a 5 unidades del vértice

47. La directriz tiene intersección y igual a 6

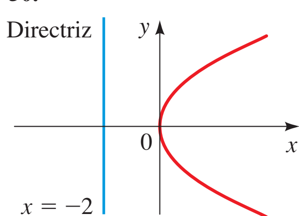
48. Diámetro focal 8 y foco en el eje y negativo

49–58 ■ Encontrar la ecuación de una parábola Encuentre una ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.

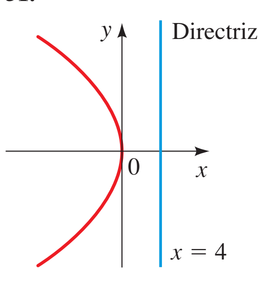
49.



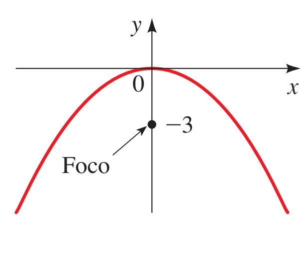
50.



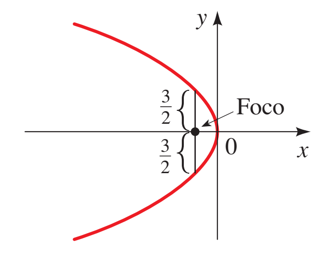
51.



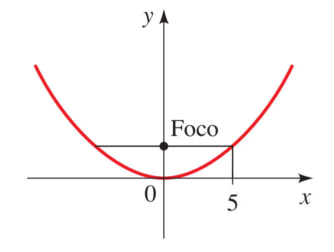
52.



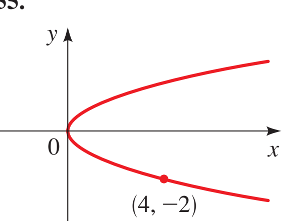
53.



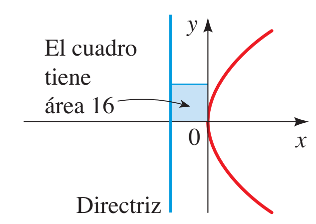
54.



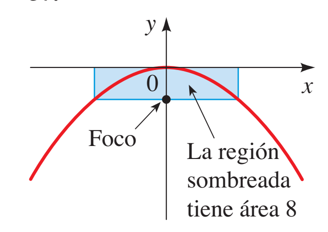
55.



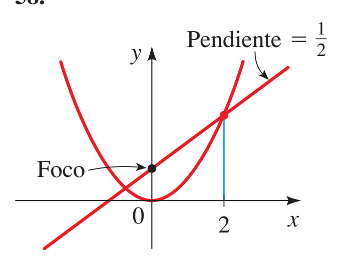
56.



57.



58.



59–60 ■ Familias de parábolas ***a***) Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con la descripción dada. ***b***) Trace las gráficas. ¿Cuál es su conclusión?

59. La familia de parábolas con vértice en el origen y con directrices $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = 4$ y $y = 8$.

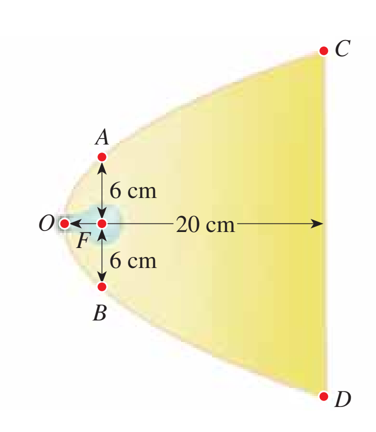
60. La familia de parábolas con vértice en el origen, con foco en el eje y positivo, y con diámetros focales 1, 2, 4 y 8.

APLICACIONES

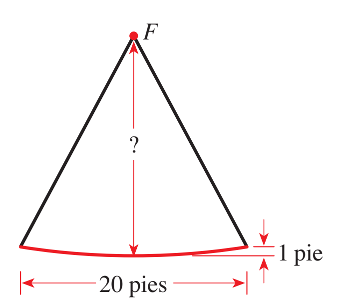
61. Reflector parabólico En la figura se muestra una lámpara con un reflector parabólico. La bombilla eléctrica está colocada en el foco y el diámetro focal es de 12 centímetros.

a) Encuentre una ecuación de la parábola.

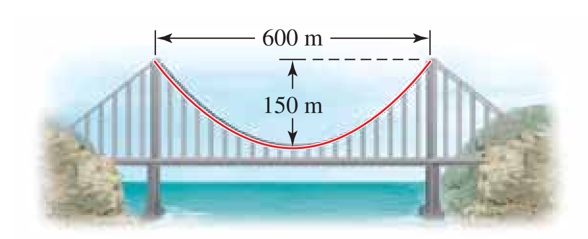
b) Encuentre el diámetro $d(C, D)$ de la abertura, 20 cm del vértice.



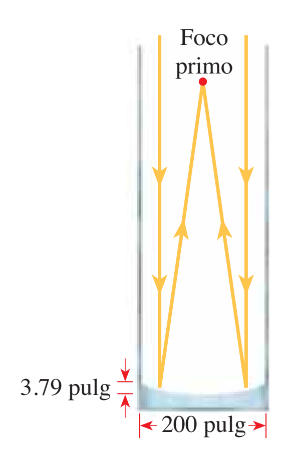
62. Disco satelital Un reflector para disco satelital es parabólico en sección transversal, con receptor en el foco F. El reflector mide 1 pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (vea la figura). ¿A qué distancia está el receptor del vértice del reflector parabólico?



63. Puente colgante En un puente colgante la forma de los cables de suspensión es parabólica. El puente que se muestra en la figura tiene torres que están a 600 m una de la otra, y el punto más bajo de los cables de suspensión está a 150 m debajo de la cúspide de las torres. Encuentre la ecuación de la parte parabólica de los cables colocando el origen del sistema de coordenadas en el vértice. [*Nota:* Esta ecuación se emplea para encontrar la longitud del cable necesario en la construcción del puente.]



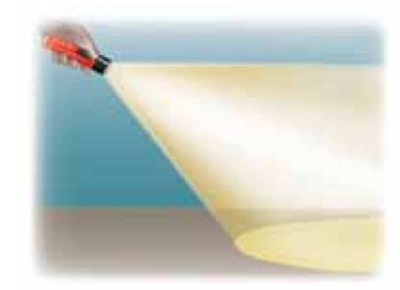
64. Telescopio reflector El telescopio Hale del Observatorio de Monte Palomar tiene un espejo de 200 pulgadas, como se muestra en la figura. El espejo está construido en forma parabólica que recolecta luz de las estrellas y la enfoca en el **foco primo**, es decir, el foco de la parábola. El espejo mide 3.79 pulgadas de profundidad en su centro. Encuentre la **longitud focal** de este espejo parabólico, es decir, la distancia del vértice al foco.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

65. DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN: Parábolas en el mundo real En el texto se dan varios ejemplos de los usos de parábolas. Encuentre otras situaciones de la vida real en las que se presentan parábolas. Consulte una enciclopedia científica en la sección de bibliografía de su biblioteca, o busque en internet.

66. DISCUSIÓN: Cono de luz de una linterna Una linterna se sostiene para formar una superficie iluminada en el suelo como se muestra en la figura. ¿Es posible poner en ángulo la linterna, de modo tal que el límite de la superficie iluminada sea una parábola? Explique su respuesta.



11.2 ELIPSES

■ Definición geométrica de una elipse ■ Ecuaciones y gráficas de elipses ■ Excentricidad de una elipse

■ Definición geométrica de una elipse

Una elipse es una curva ovalada que se asemeja a una circunferencia alargada. Para mayor precisión tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ELIPSE

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. (Vea la figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la elipse.

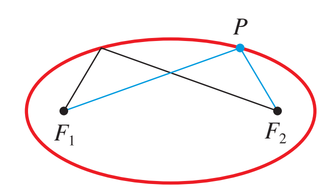


FIGURA 1

La definición geométrica sugiere un método sencillo para trazar una elipse. Coloque una hoja de papel en un tablero de dibujo e inserte tachuelas en los dos puntos que han de ser los focos de la elipse. Sujete los extremos de una cuerda a las tachuelas, como se muestra en la figura 2*a*). Con la punta de un lápiz mantenga tensa la cuerda. Mueva el lápiz con todo cuidado alrededor de los focos, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. El lápiz trazará una elipse porque la suma de las distancias desde la punta del lápiz a los focos siempre será igual a la longitud de la cuerda, que es una constante.

Si la cuerda es sólo ligeramente más larga que la distancia entre los focos, entonces la elipse que sea trazada será de forma alargada como en la figura 2*a*), pero si los focos están cerca uno del otro respecto a la longitud de la cuerda, la elipse será casi una circunferencia como se muestra en la figura 2*b*).

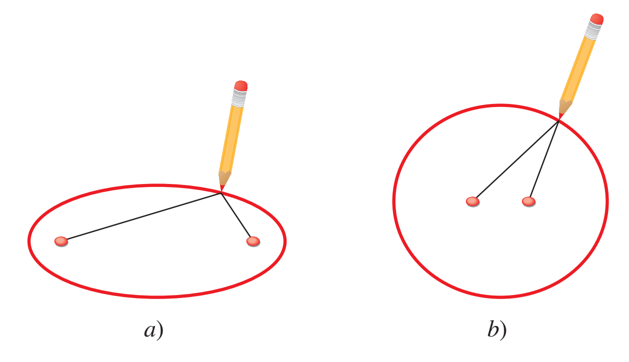


FIGURA 2

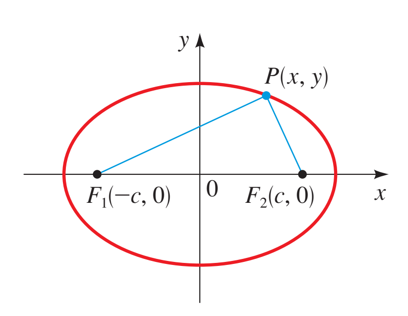


FIGURA 3

Deducción de la ecuación de una elipse Para obtener la ecuación más sencilla para una elipse colocamos los focos sobre el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ de modo que el origen estará a la mitad entre ellos (vea la figura 3).

Para mayor facilidad hacemos que la suma de las distancias desde un punto en la elipse a los focos sea $2a$. Entonces, si $P(x, y)$ es cualquier punto en la elipse, tenemos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Y de la fórmula de distancia, tenemos

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado cada lado y desarrollando, obtenemos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

que se simplifica a

$$4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Dividiendo cada lado entre 4 y elevando al cuadrado otra vez resulta

$$a^2[(x + c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dado que la suma de las distancias de P a los focos debe ser mayor que la distancia entre los focos tenemos que $2a > 2c$, o $a > c$. En consecuencia, $a^2 - c^2 > 0$ y podemos dividir cada lado de la ecuación anterior entre $a^2(a^2 - c^2)$ para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por comodidad, sea $b^2 = a^2 - c^2$ (con $b > 0$). Puesto que $b^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. La ecuación anterior se convierte entonces en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

Esta es la ecuación de la elipse. Para trazar la gráfica necesitamos conocer los puntos de intersección en los ejes x y y. Haciendo que $y = 0$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

de modo que $x^2 = a^2$ o $x = \pm a$. Así, la elipse cruza el eje z en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ como en la figura 4. Estos puntos se llaman **vértices** de la elipse y el segmento que los une se denomina **eje mayor**. Su longitud es $2a$.

Si $a = b$ en la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Entonces $x^2 + y^2 = a^2$. Esto demuestra que en este caso la "elipse" es una circunferencia con radio a.

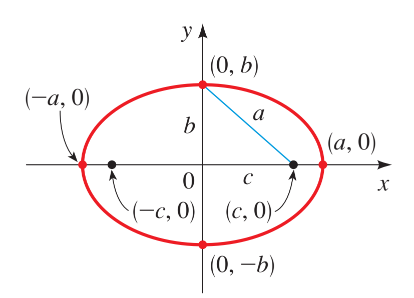


FIGURA 4
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$

Del mismo modo, si hacemos que $x = 0$, obtenemos $y = \pm b$, de modo que la elipse cruza el eje y en $(0, b)$ y $(0, -b)$. El segmento que une estos puntos recibe el nombre de **eje menor** y tiene longitud $2b$. Observe que $2a > 2b$, por lo cual el eje mayor es más largo que el eje menor. El origen es el **centro** de la elipse.

Si los focos de la elipse se colocan sobre el eje y en $(0, \pm c)$ en lugar del eje x, entonces las funciones de x y de y se invierten en el análisis anterior y obtenemos una elipse vertical.

Ecuaciones y gráficas de elipses

El cuadro siguiente resume lo que acabamos de demostrar acerca de la ecuación y las características de una elipse con centro en el origen.

En la ecuación estándar de una elipse, a^2 es el denominador *mayor* y b^2 es el *menor*. Para encontrar c^2 restamos: denominador mayor menos denominador menor.

ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una elipse con centro en el origen y tiene las propiedades dadas.

ECUACIÓN	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
	$a > b > 0$	$a > b > 0$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE MAYOR	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
EJE MENOR	Vertical, longitud $2b$	Horizontal, longitud $2b$
FOCOS	$(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$	$(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$
GRÁFICA	y, b, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $-a$, 0, a, x, $-b$	y, a, $F_2(0, c)$, $-b$, 0, b, x, $-a$, $F_1(0, -c)$

EJEMPLO 1 ■ Trazar una elipse

Una elipse tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

a) Encuentre los focos, los vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor, y trace la gráfica.

b) Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

a) Puesto que el denominador de x^2 es mayor, la elipse tiene un eje horizontal mayor. Esto da $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, de modo que $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$. Entonces $a = 3$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$.

FOCOS	$(\pm\sqrt{5}, 0)$
VÉRTICES	$(\pm 3, 0)$
LONGITUD DE EJE MAYOR	6
LONGITUD DE EJE MENOR	4

En la figura 5*a*)se muestra la gráfica.

b) Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora necesitamos despejar *y*.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9} \qquad \text{Reste } \frac{x^2}{9}$$

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \qquad \text{Multiplique por 4}$$

$$y = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \qquad \text{Saque raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la elipse trazamos la gráfica de ambas funciones:

$$y = 2\sqrt{1 - x^2/9} \qquad \text{y} \qquad y = -2\sqrt{1 - x^2/9}$$

como se muestra en la figura 5*b*).

Las órbitas de los planetas son elipses, con el Sol en un foco.

Observe que la ecuación de una elipse no define *y* como función de *x* (vea la página 165). Es por esto que necesitamos trazar la gráfica de dos funciones para trazar la gráfica de una elipse.

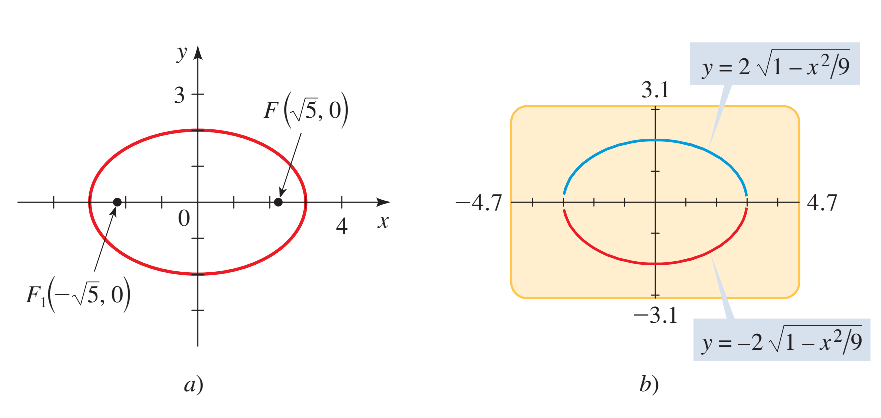


FIGURA 5 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Ahora intente hacer los ejercicios 9 y 35

EJEMPLO 2 ■ Encontrar los focos de una elipse

Encuentre los focos de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Primero ponemos la ecuación en forma estándar. Dividiendo entre 144, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Dado que $16 > 9$, esta es una elipse con sus focos en el eje y y con $a = 4$ y $b = 3$. Tenemos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$
$$c = \sqrt{7}$$

Entonces los focos son $(0, \pm\sqrt{7})$. En la figura 6*a*) se muestra la gráfica.

También podemos trazar la gráfica usando una calculadora graficadora como se muestra en la figura 6*b*).

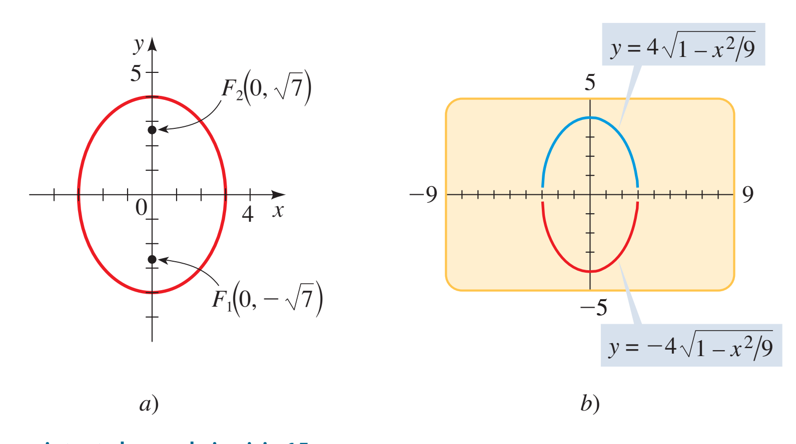


FIGURA 6
$16x^2 + 9y^2 = 144$

Ahora intente hacer el ejercicio 15 ■

EJEMPLO 3 ■ Encontrar la ecuación de una elipse

Los vértices de una elipse son $(\pm 4, 0)$ y los focos son $(\pm 2, 0)$. Encuentre su ecuación y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Dado que los vértices son $(\pm 4, 0)$ tenemos $a = 4$ y el eje mayor es horizontal. Los focos son $(\pm 2, 0)$, de modo que $c = 2$. Para escribir la ecuación necesitamos encontrar b. Puesto que $c^2 = a^2 - b^2$ tenemos

$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

La gráfica se muestra en la figura 7.

FIGURA 7
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

Ahora intente hacer los ejercicios 31 y 39 ■

Excentricidad de una elipse

Ya antes en esta sección (figura 2) vimos que si $2a$ es sólo ligeramente mayor que $2c$, la elipse es larga y delgada, mientras que si $2a$ es mucho mayor que $2c$, la elipse es casi una circunferencia. Medimos la desviación de una elipse de ser casi una circunferencia por la relación entre a y c.

DEFINICIÓN DE EXCENTRICIDAD

Para la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ o $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (con $a > b > 0$), la **excentricidad** $\boldsymbol{e}$ es el número

$$e = \frac{c}{a}$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La excentricidad de toda elipse satisface $0 < e < 1$.

Por tanto, si e es cercana a 1, entonces c es casi igual a a y la elipse tiene forma alargada, pero si e es cercana a 0 entonces la elipse tiene forma casi de una circunferencia. La excentricidad es una medida de qué tan "estirada" está la elipse.

En la figura 8 mostramos diferentes elipses para demostrar el efecto de variar la excentricidad e.

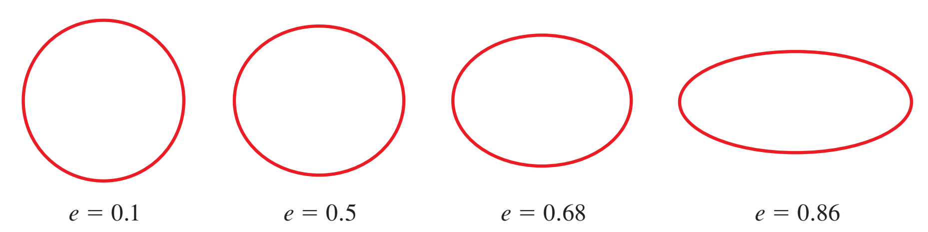


FIGURA 8 Elipses con varias excentricidades

EJEMPLO 4 ■ Encontrar la ecuación de una elipse a partir de su excentricidad y sus focos

Encuentre la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 8)$ y excentricidad, $e = \frac{4}{5}$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Se dan $e = \frac{4}{5}$ y $c = 8$. Por tanto,

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{a} \qquad \text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}$$

$$4a = 40 \qquad \text{Multiplique en cruz}$$

$$a = 10$$

Para encontrar b usamos el hecho de que $c^2 = a^2 - b^2$.

$$8^2 = 10^2 - b^2$$

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$b = 6$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Debido a que los focos están sobre el eje y, la elipse está orientada verticalmente. Para trazar la elipse encontramos los puntos de intersección: los puntos de intersección en el eje x son ± 6; y en el eje y, son ± 10. En la figura 9 está trazada la gráfica.

FIGURA 9 $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

Ahora intente hacer el ejercicio 53 ■

Excentricidades de las órbitas de los planetas

Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco. Para casi todos los planetas estas elipses tienen excentricidad muy pequeña, de modo que son casi circulares. Mercurio y Plutón, los planetas conocidos más cercano y más alejado del Sol, respectivamente, tienen órbitas visiblemente elípticas.

Planeta	Excentricidad
Mercurio	0.206
Venus	0.007
Tierra	0.017
Marte	0.093
Júpiter	0.048
Saturno	0.056
Urano	0.046
Neptuno	0.010
Plutón*	0.248

*Plutón es un "planeta enano".

La atracción gravitacional hace que los planetas se muevan en órbitas elípticas alrededor del Sol, con éste en un foco. Esta sorprendente propiedad fue observada primero por Johannes Kepler y deducida posteriormente por Isaac Newton a partir de su Ley de la Gravitación Universal mediante el cálculo. Las órbitas de los planetas tienen excentricidades diferentes, pero en su mayoría son casi circulares (vea al margen).

Las elipses, como las parábolas, tienen una interesante *propiedad de reflexión* que conduce a varias aplicaciones prácticas. Si una fuente de luz se coloca en un foco de una superficie reflectora con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz será reflejada de la superficie al otro foco como se muestra en la figura 10. Este principio, que funciona para las ondas sonoras, así como para las ondas de luz, se usa en *litotricia*, que es un tratamiento médico para eliminar piedras en los riñones. El paciente es colocado en una tina de agua con secciones transversales elípticas, de modo que la piedra del riñón queda localizada de una manera precisa en un foco. Ondas de sonido de alta intensidad generadas en el otro foco son reflejadas a la piedra y ésta queda destruida con daño mínimo al tejido circundante. El paciente se salva del trauma de una cirugía y se recupera en sólo días en lugar de semanas.

La propiedad de reflexión de elipses se usa también en la construcción de *galerías susurrantes*. El sonido proveniente de un foco rebota en las paredes y el techo de una sala elíptica y pasa por el otro foco. En estas salas hasta los susurros más débiles pronunciados en un foco se pueden oír claramente en el otro foco. Algunas galerías susurrantes famosas son el National Statuary Hall del capitolio de Estados Unidos, en Washington, D.C. (vea la página 836), y el Tabernáculo Mormón en Salt Lake City, Utah.

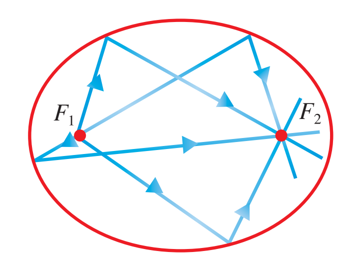


FIGURA 10

11.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

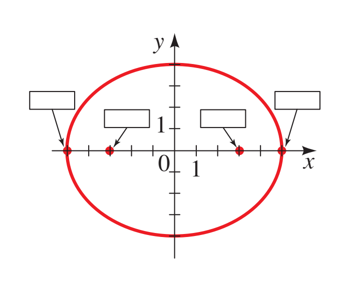
1. Una elipse es el conjunto de todos los puntos del plano para el cual la ________ de las distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos F_1 y F_2 se llaman ________ de la elipse.

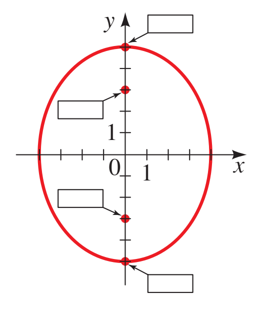
2. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b > 0$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(\pm c, 0)$, donde $c =$ ____. Entonces la gráfica de $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

3. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ con $a > b > 0$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(0, \pm c)$, donde $c =$ ________. Por tanto, la gráfica de $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

4. Rotule los vértices y focos en las gráficas dadas para las elipses de los ejercicios 2 y 3.

a) $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ ***b)*** $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$





HABILIDADES

5–8 ■ Gráficas de elipses Relacione la ecuación con las gráficas marcadas

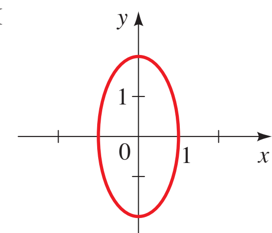
5. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

6. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

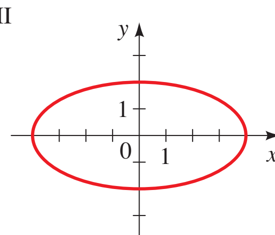
7. $4x^2 + y^2 = 4$

8. $16x^2 + 25y^2 = 400$

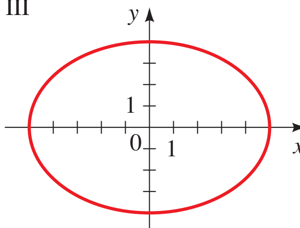
I



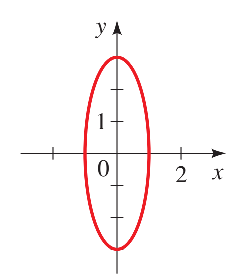
II



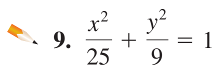
III



IV



9–28 ■ Trazar gráficas de elipses Se da una ecuación de una elipse. ***a)*** Encuentre los vértices, los focos y la excentricidad de la elipse. ***b)*** Determine las longitudes de los ejes mayor y menor, y trace la gráfica.



9. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

10. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

11. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{81} = 1$

12. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

13. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

14. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

15. $9x^2 + 4y^2 = 36$

16. $4x^2 + 25y^2 = 100$

17. $x^2 + 4y^2 = 16$

18. $4x^2 + y^2 = 16$

19. $16x^2 + 25y^2 = 1600$

20. $2x^2 + 49y^2 = 98$

21. $3x^2 + y^2 = 9$

22. $x^2 + 3y^2 = 9$

23. $2x^2 + y^2 = 4$

24. $3x^2 + 4y^2 = 12$

25. $x^2 + 4y^2 = 1$

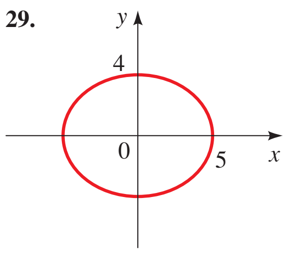
26. $9x^2 + 4y^2 = 1$

27. $x^2 = 4 - 2y^2$

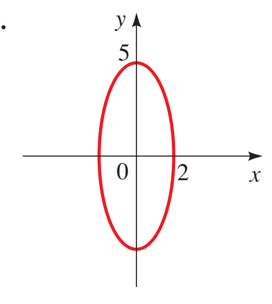
28. $y^2 = 1 - 2x^2$

29–34 ■ Determinar la ecuación de una elipse Encuentre una ecuación para la elipse cuya gráfica se muestra.

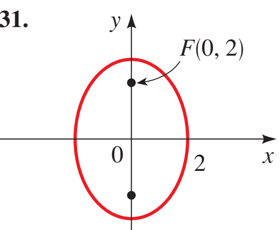
29.



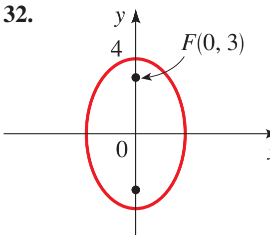
30.



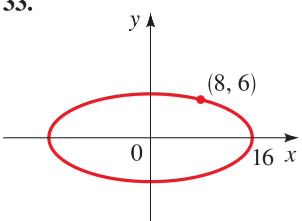
31.



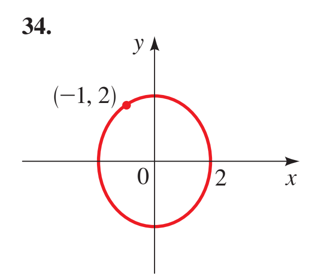
32.



33.



34.



35–38 ■ Trazar la gráfica de elipses Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica la elipse.

35. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

36. $x^2 + \dfrac{y^2}{12} = 1$

37. $6x^2 + y^2 = 36$

38. $x^2 + 2y^2 = 8$

39–56 ■ Determinar la ecuación de una elipse Encuentre una ecuación para la elipse, que satisfaga las condiciones dadas.

39. Focos: $(\pm 4, 0)$, vértices: $(\pm 5, 0)$

40. Focos: $(0, \pm 3)$, vértices: $(0, \pm 5)$

41. Focos: $(\pm 1, 0)$, vértices: $(\pm 2, 0)$

42. Focos: $(0, \pm 2)$, vértices: $(0, \pm 3)$

43. Focos: $(0, \pm\sqrt{10})$, vértices: $(0, \pm 7)$

44. Focos: $(\pm\sqrt{15}, 0)$, vértices: $(\pm 6, 0)$

45. Longitud de eje mayor: 4, longitud de eje menor: 2, focos en eje y

46. Longitud de eje mayor: 6, longitud de eje menor: 4, focos en eje x

47. Focos: $(0, \pm 2)$, longitud de eje menor: 6

48. Focos: $(\pm 5, 0)$, longitud de eje mayor: 12

49. Puntos extremos de eje mayor: $(\pm 10, 0)$, distancia entre focos: 6

50. Puntos extremos de eje menor: $(0, \pm 3)$, distancia entre focos: 8

51. Longitud de eje mayor: 10, focos en eje x, la elipse pasa por el punto $(\sqrt{5}, 2)$

52. Longitud de eje mayor: 10, focos en eje x, la elipse pasa por el punto $(\sqrt{5}, \sqrt{40})$

53. Excentricidad: $\frac{1}{3}$, focos: $(0, \pm 2)$

54. Excentricidad: 0.75, focos: $(\pm 1.5, 0)$

55. Excentricidad: $\sqrt{3}/2$, focos en eje y, longitud de eje mayor: 4

56. Excentricidad: $\sqrt{5}/3$, focos en eje y, longitud de eje mayor: 12

HABILIDADES Plus

57–60 ■ Intersección de elipses Encuentre los puntos de intersección del par de elipses. Trace las gráficas de cada par de ecuaciones en los mismos ejes de coordenadas y rotule los puntos de intersección.

57. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$

58. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$

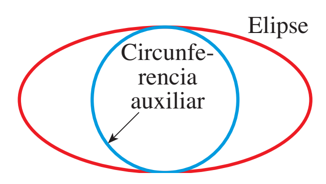
59. $\begin{cases} 100x^2 + 25y^2 = 100 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

60. $\begin{cases} 25x^2 + 144y^2 = 3600 \\ 144x^2 + 25y^2 = 3600 \end{cases}$

61. Circunferencia auxiliar La **circunferencia auxiliar** de una elipse es la circunferencia con radio igual a la mitad de la longitud del eje menor y centro igual que en la elipse (vea la figura). La circunferencia auxiliar es entonces la circunferencia máxima que puede caber dentro de una elipse.

a) Encuentre una ecuación para la circunferencia auxiliar de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

b) Para la elipse y la circunferencia auxiliar del inciso *a*) demuestre que si (s, t) es un punto en la circunferencia auxiliar, entonces $(2s, t)$ es un punto en la elipse.





62. Familia de elipses

a) Use calculadora graficadora para trazar la mitad superior (la parte en los cuadrantes primero y segundo) de la familia de elipses $x^2 + ky^2 = 100$ para $k = 4, 10, 25$ y 50.

b) ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de elipses? ¿Cómo difieren?

63. Familia de elipses Si $k > 0$ la ecuación siguiente representa la elipse:

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4 + k} = 1$$

Demuestre que todas las elipses representadas por esta ecuación tienen los mismos focos, no importa cuál sea el valor de k.

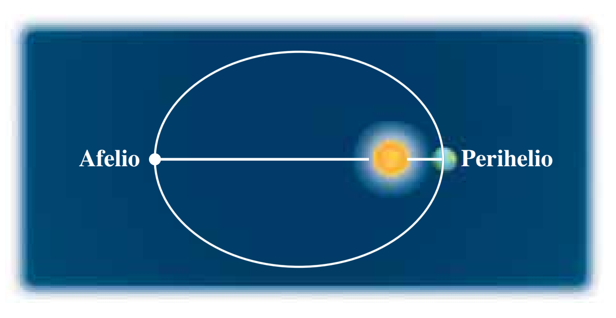
64. ¿Qué tan ancha es una elipse en sus focos? Un *lado recto* para una elipse es un segmento de recta perpendicular al eje mayor en un foco, con puntos extremos en la elipse, como se muestra en la figura. Demuestre que la longitud de un lado recto es $2b^2/a$ para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

y, b, Lado recto, −a, a, x, −b, Foco

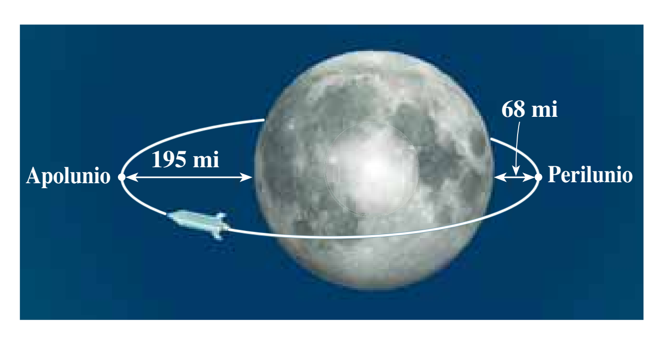
APLICACIONES

65. Perihelio y afelio Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto en la órbita en el que el planeta está más cercano al Sol se denomina **perihelio**, y el punto en el que está más alejado se llama **afelio**. Estos puntos son los vértices de la órbita. La distancia de la Tierra al Sol es de 147 000 000 de km en el perihelio y 153 000 000 de km en el afelio. Encuentre una ecuación para la órbita de la Tierra. (Coloque el origen en el centro de la órbita con el Sol en el eje x.)



66. La órbita de Plutón Con una excentricidad de 0.25, la órbita de Plutón es la más excéntrica del sistema solar. La longitud del eje menor de su órbita es aproximadamente 10 000 000 000 de km. Encuentre la distancia entre Plutón y el Sol en el perihelio y en el afelio. (Vea el ejercicio 65.)

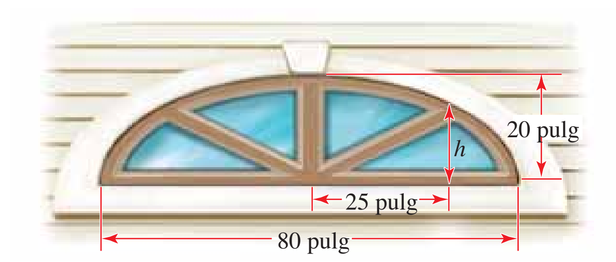
67. Órbita lunar Para un cuerpo en órbita elíptica alrededor de la Luna, los puntos en la órbita que están más cercanos y más lejanos del centro de la Luna se llaman **perilunio** y **apolunio**, respectivamente. Estos son los vértices de la órbita. El centro de la Luna está en un foco de la órbita. La nave espacial *Apollo 11* fue puesta en órbita lunar con perilunio a 68 millas y apolunio a 195 millas sobre la superficie de la Luna. Suponiendo que la Luna sea una esfera con radio de 1 075 millas encuentre una ecuación para la órbita del *Apollo 11*. (Coloque los ejes de las coordenadas de modo que el origen se encuentre en el centro de la órbita y que los focos estén situados en el eje x.)



68. Elipse de madera contrachapada Un carpintero desea construir una mesa elíptica de una hoja de madera contrachapada, de 4 por 8 pies. Trazará la elipse usando el método de “chincheta e hilo” que se ilustra en las figuras 2 y 3. ¿Cuánto hilo debe usar y a qué distancia debe colocar las chinchetas, si la elipse ha de ser la más grande posible de cortar de la hoja de madera contrachapada?



69. Ventana ojival Una ventana "ojival" sobre una puerta se construye en la forma de la mitad superior de una elipse, como se ve en la figura. La ventana mide 20 pulgadas de alto en su punto más alto y 80 pulgadas en la parte inferior. Encuentre la altura de la ventana a 25 pulgadas del centro de la base.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

70. DISCUSIÓN: Trazar una elipse en un pizarrón Intente trazar una elipse en un pizarrón de modo tan preciso como sea posible. ¿Cómo ayudarían en este proceso un hilo y dos amigos?

71. DISCUSIÓN: Cono de luz de una linterna Una linterna ilumina una pared como se ilustra en la figura. ¿Cuál es la forma del límite del área iluminada? Explique su respuesta.



72. DISCUSIÓN: ¿Es una elipse? Se envuelve con papel una botella cilíndrica y luego se usa un compás para dibujar una circunferencia en el papel, como se muestra en la figura. Cuando se extiende la hoja de, ¿la forma trazada en este es una elipse? (No es necesario que demuestre su respuesta, pero podría hacer el experimento y ver el resultado.)



11.3 HIPÉRBOLAS

■ Definición geométrica de una hipérbola ■ Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

■ Definición geométrica de una hipérbola

Aun cuando elipses e hipérbolas tienen formas completamente diferentes, sus definiciones y ecuaciones son similares. En lugar de usar la *suma* de distancias entre dos focos fijos, como en el caso de una elipse, usamos la *diferencia* para definir una hipérbola.

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA HIPÉRBOLA

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya diferencia de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. (Vea la figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

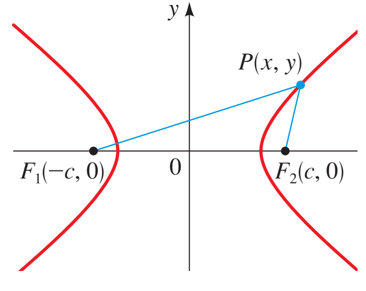


FIGURA 1 P es una hipérbola si $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Deducción de la ecuación de una hipérbola Al igual que en el caso de la elipse obtenemos la ecuación más sencilla para la hipérbola al colocar los focos sobre el eje x en $(\pm c, 0)$ como se muestra en la figura 1. Por definición, si $P(x, y)$ está sobre la hipérbola, entonces $d(P, F_1) - d(P, F_2)$ o $d(P, F_2) - d(P, F_1)$ debe ser igual a alguna constante positiva, a la que llamamos $2a$. Por tanto, tenemos

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

o

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Procediendo como hicimos en el caso de la elipse (sección 11.2), simplificamos esto a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Del triángulo PF_1F_2 de la figura 1 vemos que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| < 2c$. Se deduce que $2a < 2c$, o que $a < c$. Entonces $c^2 - a^2 > 0$ por lo que podemos hacer que $b^2 = c^2 - a^2$. Entonces simplificamos la última ecuación mostrada para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la *ecuación de la hipérbola*. Si en esta ecuación sustituimos x por $-x$ o y por $-y$, permanecerá sin cambio, de modo que la hipérbola es simétrica alrededor de los ejes x y y y alrededor del origen. Los puntos de intersección x son $\pm a$, y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. No hay punto de intersección y porque hacer que $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola conduce a $-y^2 = b^2$, que no tiene solución real. Además, la ecuación de la hipérbola implica que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1$$

de modo que $x^2/a^2 \geq 1$; entonces $x^2 \geq a^2$ y por tanto $x \geq a$ o $x \leq -a$. Esto significa que la hipérbola está formada por dos partes llamadas **ramas**. El segmento que une los dos vértices en las ramas separadas es el **eje transverso** de la hipérbola y el origen recibe el nombre de **centro**.

Si ponemos los focos de la hipérbola en el eje y en lugar del eje x, esto tiene el efecto de invertir las funciones de x y de y en la deducción de la ecuación de la hipérbola. Esto conduce a una hipérbola con eje transverso vertical.

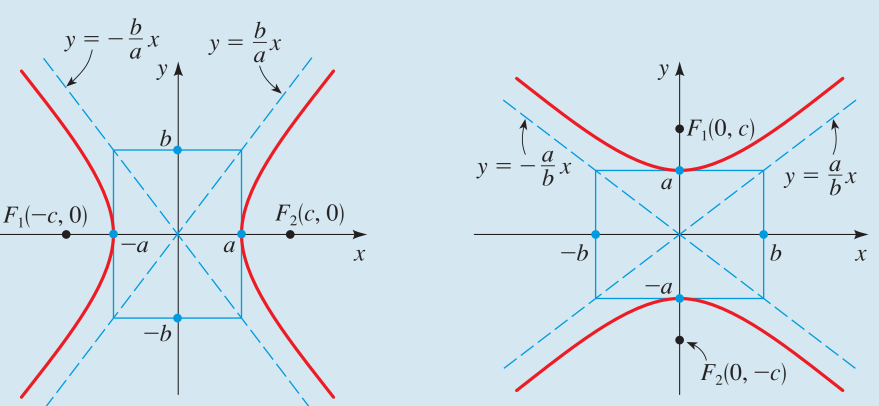
Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

En el recuadro siguiente se indican las propiedades principales de las hipérbolas.

HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una hipérbola con centro en el origen y tiene las propiedades dadas.

ECUACIÓN	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$	$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE TRANSVERSO	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
ASÍNTOTAS	$y = \pm \dfrac{b}{a}x$	$y = \pm \dfrac{a}{b}x$
FOCOS	$(\pm c, 0), \quad c^2 = a^2 + b^2$	$(0, \pm c), \quad c^2 = a^2 + b^2$
GRÁFICA		



En la sección 3.6 se estudian las asíntotas de funciones racionales.

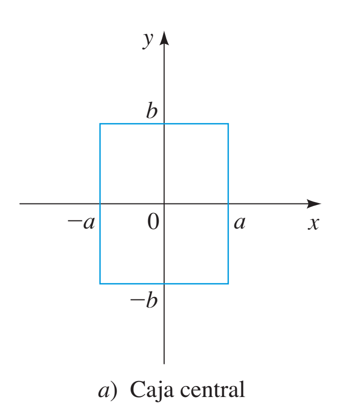
Las *asíntotas* mencionadas en este recuadro son rectas a las que la hipérbola se aproxima para valores grandes de x y de y. Para encontrar las asíntotas en el primer caso del cuadro, de la ecuación despejamos y para obtener

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

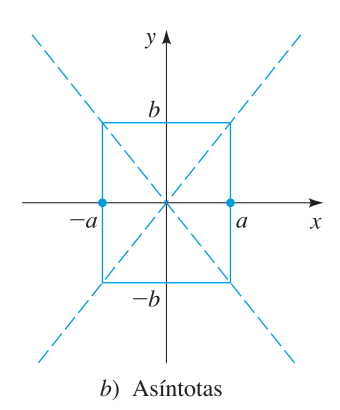
$$= \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando x se hace grande, a^2/x^2 se acerca a cero. En otras palabras, cuando $x \to \infty$, tenemos $a^2/x^2 \to 0$. Entonces para x grande, el valor de y puede aproximarse cuando $y = \pm(b/a)x$. Esto demuestra que estas rectas son asíntotas de la hipérbola.

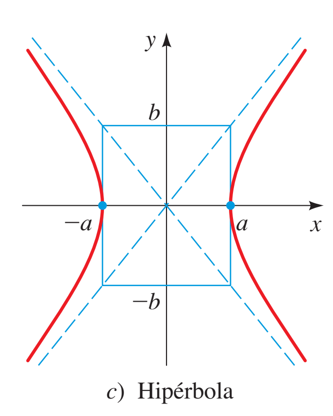
Las asíntotas son una ayuda esencial para trazar la gráfica de una hipérbola; sirven para determinar su forma. Una manera útil de encontrar las asíntotas, para una hipérbola con eje transverso horizontal, es colocar primero los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. Luego trace segmentos horizontales y verticales que pasen por estos puntos para construir un rectángulo como se muestra en la figura 2*a*). A este rectángulo se le da el nombre de **caja central** de la hipérbola. Las pendientes de las diagonales de la caja central son $\pm b/a$ de modo que, al prolongarlas, obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$, como están trazadas en la figura 2*b*). Por último determinamos los vértices y usamos las asíntotas como guía para trazar la hipérbola que se ilustra en la figura 2*c*). (Para trazar la gráfica de una hipérbola que tenga un eje transverso vertical se aplica un procedimiento similar.)



a) Caja central



b) Asíntotas



c) Hipérbola

FIGURA 2 Pasos para trazar la gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

CÓMO TRAZAR UNA HIPÉRBOLA

1. **Trazar la caja central.** Este es el rectángulo con centro en el origen, con lados paralelos a los ejes, que cruza un eje en $\pm a$ y el otro en $\pm b$.
2. **Trazar las asíntotas.** Estas son las rectas obtenidas al prolongar las diagonales de la caja central.
3. **Determinar los vértices.** Estos son los dos puntos de intersección en x o los dos puntos de intersección en y.
4. **Trazar la hipérbola.** Empiece en un vértice y trace una rama de la hipérbola, aproximando las asíntotas. Trace la otra rama del mismo modo.

EJEMPLO 1 ■ Una hipérbola con eje transverso horizontal

Una hipérbola tiene la ecuación

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

a) Encuentre los vértices, los focos y las asíntotas, y trace la gráfica.

b) Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

***a*)** Primero dividimos ambos lados de la ecuación entre 144 para ponerla en forma normal:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Dado que el término en x^2 es positivo, la hipérbola tiene un eje transverso horizontal; sus vértices y focos están en el eje x. Puesto que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$ obtenemos $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{16 + 9} = 5$. Por tanto, tenemos

VÉRTICES	$(\pm 4, 0)$
FOCOS	$(\pm 5, 0)$
ASÍNTOTAS	$y = \pm \frac{3}{4}x$

La longitud del eje transverso es $2a = 8$. Después de trazar la caja central y las asíntotas, completamos el dibujo de la hipérbola como en la figura 3*a*).

Observe que la ecuación de una hipérbola no define a y como función de x (vea la página 165). Esta es la razón por la que necesitamos trazar la gráfica de dos funciones para trazar la gráfica de una hipérbola.

***b*)** Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora necesitamos despejar y.

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$-16y^2 = -9x^2 + 144 \qquad \text{Reste } 9x^2$$

$$y^2 = 9\left(\frac{x^2}{16} - 1\right) \qquad \text{Divida entre } -16 \text{ y factorice } 9$$

$$y = \pm 3\sqrt{\frac{x^2}{16} - 1} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola trazamos las gráficas de las funciones

$$y = 3\sqrt{(x^2/16) - 1} \qquad \text{y} \qquad y = -3\sqrt{(x^2/16) - 1}$$

como se muestra en la figura 3*b*).

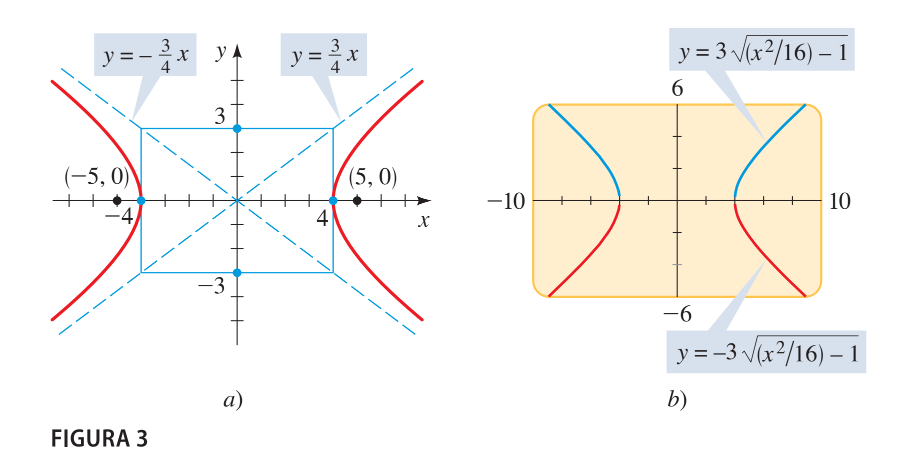


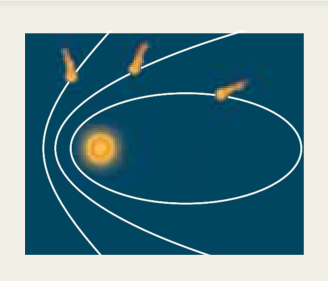
FIGURA 3
$9x^2 - 16y^2 = 144$

Ahora intente hacer los ejercicios 9 y 33 ■

EJEMPLO 2 ■ Una hipérbola con eje transverso vertical

Encuentre los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.

$$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$$



Trayectorias de los cometas

La trayectoria de un cometa es una elipse, una parábola o una hipérbola con el Sol en un foco. Este dato se puede comprobar mediante el cálculo y las leyes de Newton del movimiento.* Si la trayectoria es una parábola o una hipérbola el cometa nunca regresará. Si su trayectoria es una elipse, se puede determinar de manera precisa cuándo y dónde podrá verse de nuevo el cometa. El cometa Halley tiene una trayectoria elíptica y regresa cada 75 años; la última vez que se avistó fue en 1987. Su órbita es una elipse muy excéntrica; se espera que regrese al sistema solar interior hacia el año 4377.

———

*James Stewart, *Cálculo*, 7a ed. (Belmont, CA: Brooks/Cole, 2012), pp. 892 y 896.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir la ecuación en la forma estándar para una hipérbola

$$x^2 - 9y^2 = -9$$

$$y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \text{Divida entre } -9$$

Debido a que el término en y^2 es positivo la hipérbola tiene un eje transverso vertical; sus focos y vértices están en el eje y. Puesto que $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$ obtenemos $a = 1$, $b = 3$ y $c = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Entonces, tenemos

VÉRTICES	$(0, \pm 1)$
FOCOS	$(0, \pm\sqrt{10})$
ASÍNTOTAS	$y = \pm\frac{1}{3}x$

La longitud del eje transverso es $2a = 2$. Trazamos la caja central y las asíntotas, luego completamos la gráfica como se muestra en la figura 4*a*). También podemos trazar la gráfica usando la calculadora graficadora como se muestra en la figura 4*b*).

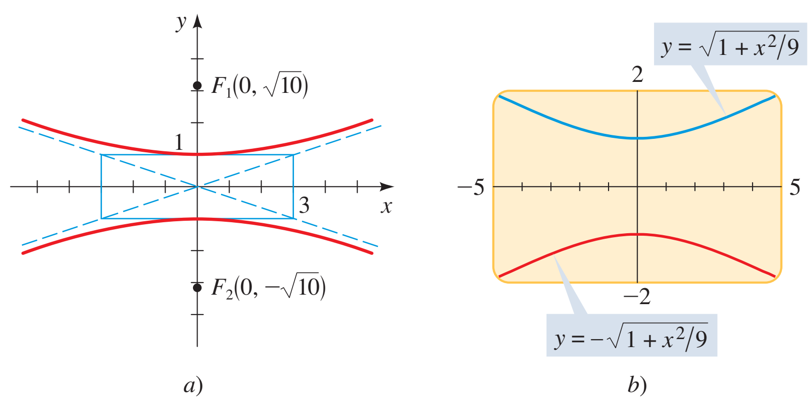


FIGURA 4
$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$

Ahora intente hacer los ejercicios 21 y 35 ■

EJEMPLO 3 ■ Encontrar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y focos

Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ y focos $(\pm 4, 0)$. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN Dado que los vértices están sobre el eje x, la hipérbola tiene un eje transverso horizontal. Su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tenemos $a = 3$ y $c = 4$. Para encontrar b usamos la relación $a^2 + b^2 = c^2$.

$$3^2 + b^2 = 4^2$$

$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$b = \sqrt{7}$$

Entonces la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

En la figura 5 se muestra la gráfica.

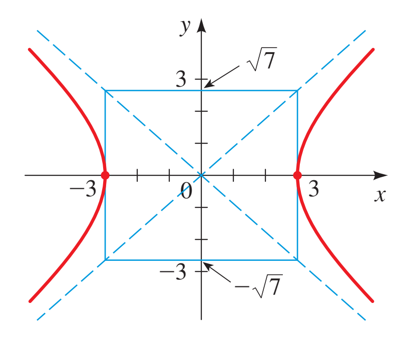


FIGURA 5
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

Ahora intente hacer los ejercicios 27 y 37 ■

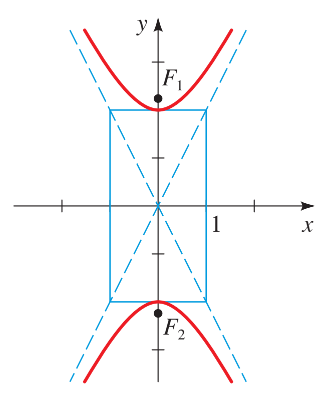


FIGURA 6
$\dfrac{y^2}{4} - x^2 = 1$

EJEMPLO 4 ■ Encontrar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y asíntotas

Encuentre la ecuación y los focos de la hipérbola con vértices $(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm 2x$. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN Dado que los vértices están en el eje y, la hipérbola tiene un eje transverso vertical con $a = 2$. De la ecuación de la asíntota vemos que $a/b = 2$. Puesto que $a = 2$ obtenemos $2/b = 2$, de modo que $b = 1$. Por tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Para encontrar los focos calculamos $c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, de modo que $c = \sqrt{5}$. En consecuencia, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. En la figura 6 se muestra la gráfica.

Ahora intente hacer los ejercicios 31 y 41 ■

Al igual que las parábolas y las elipses, las hipérbolas tienen una interesante *propiedad reflectora*. Una luz dirigida a un foco de un espejo hiperbólico se refleja hacia el otro foco, como se muestra en la figura 7. Esta propiedad se emplea en la construcción de telescopios del tipo Cassegrain. Un espejo hiperbólico se coloca en el tubo del telescopio de modo que la luz reflejada del reflector parabólico primario se dirige a un foco del espejo hiperbólico. La luz se vuelve a enfocar entonces a un punto más accesible abajo del reflector primario (figura 8).

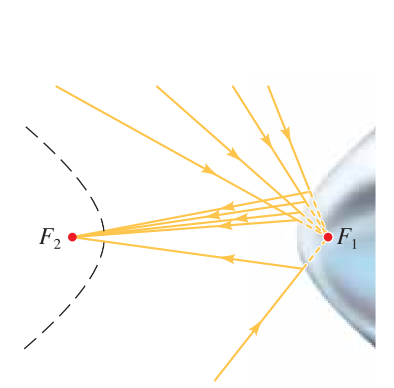


FIGURA 7 Propiedad reflectora de hipérbolas

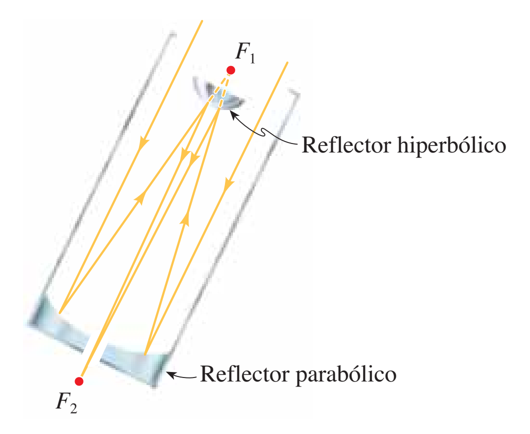


FIGURA 8 Telescopio tipo Cassegrain

El sistema LORAN (LOng RAnge Navigation) se utilizó hasta principios de la década de 1990; ahora ha sido sustituido por el sistema GPS (vea la página 753). En el sistema LORAN se usan hipérbolas a bordo de un barco para determinar su posición. En la figura 9, estaciones de radio en A y B transmiten señales simultáneamente para que sean recibidas por el barco en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia del tiempo en la recepción de estas señales en una diferencia de distancia $d(P, A) - d(P, B)$. Por la definición de la hipérbola, esto permite localizar el barco en una rama de una hipérbola con focos en A y B (trazada en negro en la figura). El mismo procedimiento se realiza con otras dos estaciones de radio en C y D, y esto permite localizar el barco en una segunda hipérbola (mostrada en rojo en la figura). (En la práctica sólo son necesarias tres estaciones porque una estación se puede usar como foco para ambas hipérbolas.) Las coordenadas del punto de intersección de estas dos hipérbolas, que pueden ser calculadas de manera precisa por la computadora, dan la posición de P.

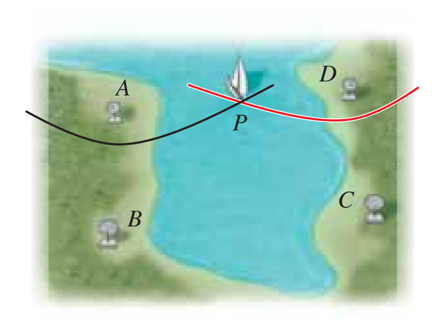


FIGURA 9 Sistema LORAN para encontrar la posición de un barco

11.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

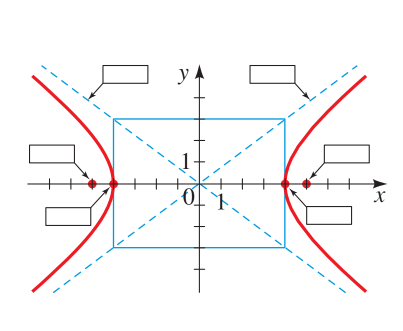
1. Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano para el que la ________ de las distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos F_1 y F_2 se llaman ________ de la hipérbola.

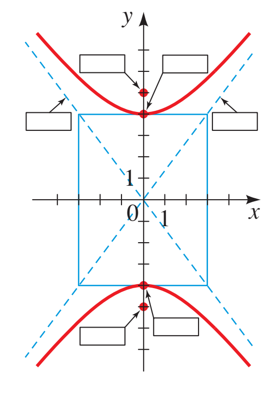
2. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$, $b > 0$ es una hipérbola con eje transerval ________ (horizontal/vertical), vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(\pm c, 0)$, donde $c =$ ________. Por tanto, la gráfica de $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

3. La gráfica de la ecuación $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$, $b > 0$ es una hipérbola con eje transerval ________ (horizontal/vertical), vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(0, \pm c)$, donde $c =$ ________. Por tanto, la gráfica de $\dfrac{y^2}{4^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

4. Rotule los vértices, focos y asíntotas en las gráficas dadas por las hipérbolas de los ejercicios 2 y 3.

a) $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ ***b)*** $\dfrac{y^2}{4^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1$





HABILIDADES

5–8 ■ Gráficas de hipérbolas Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

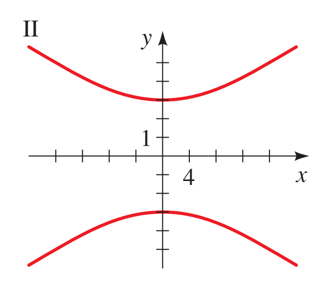
5. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ **6.** $y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$

7. $16y^2 - x^2 = 144$ **8.** $9x^2 - 25y^2 = 225$

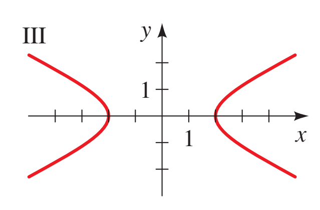


I

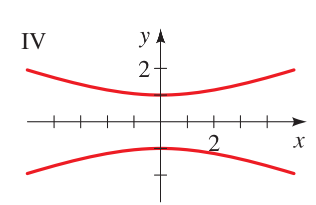
II



III



IV



9–26 ■ Gráfica de hipérbolas Se da una ecuación de una hipérbola. ***a)*** Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola. ***b)*** Determine la longitud del eje transverso. ***c)*** Trace una gráfica de la hipérbola.

9. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **10.** $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

11. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{4} = 1$ **12.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

13. $y^2 - \dfrac{x^2}{25} = 1$ **14.** $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$

15. $x^2 - y^2 = 1$ **16.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

17. $9x^2 - 4y^2 = 36$ **18.** $25y^2 - 9x^2 = 225$

19. $4y^2 - 9x^2 = 144$ **20.** $y^2 - 25x^2 = 100$

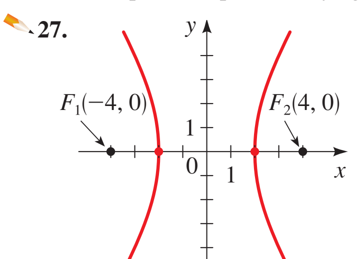
21. $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$ **22.** $3y^2 - x^2 - 9 = 0$

23. $x^2 - y^2 + 4 = 0$ **24.** $x^2 - 3y^2 + 12 = 0$

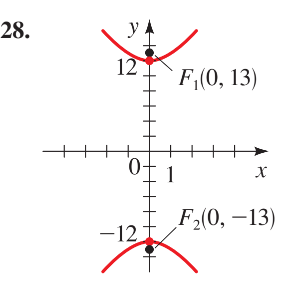
25. $4y^2 - x^2 = 1$ **26.** $9x^2 - 16y^2 = 1$

27–32 ■ Determinar la ecuación de la hipérbola Encuentre la ecuación para la hipérbola cuya gráfica se muestra.

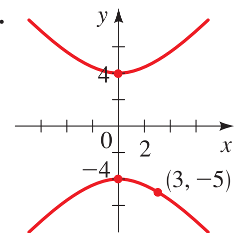
27.



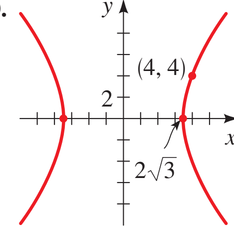
28.



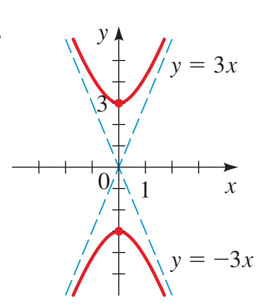
29.



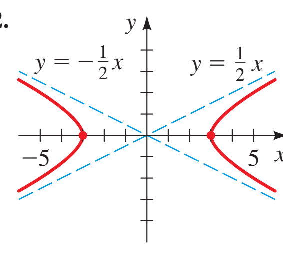
30.



31.



32.



33–36 ■ Trazar las gráficas de hipérbolas Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la hipérbola.

33. $x^2 - 2y^2 = 8$

34. $3y^2 - 4x^2 = 24$

35. $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{6} = 1$

36. $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

37–50 ■ Determinar la ecuación de una hipérbola Encuentre una ecuación para la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

37. Focos: $(\pm 5, 0)$, vértices: $(\pm 3, 0)$

38. Focos: $(0, \pm 10)$, vértices: $(0, \pm 8)$

39. Focos: $(0, \pm 2)$, vértices: $(0, \pm 1)$

40. Focos: $(\pm 6, 0)$, vértices: $(\pm 2, 0)$

41. Vértices: $(\pm 1, 0)$, asíntotas: $y = \pm 5x$

42. Vértices: $(0, \pm 6)$, asíntotas: $y = \pm \frac{1}{3}x$

43. Vértices: $(0, \pm 6)$, la hipérbola pasa por $(-5, 9)$

44. Vértices: $(\pm 2, 0)$, la hipérbola pasa por $(3, \sqrt{30})$

45. Asíntotas: $y = \pm x$, la hipérbola pasa por $(5, 3)$

46. Asíntotas: $y = \pm x$, la hipérbola pasa por $(1, 2)$

47. Focos: $(0, \pm 3)$, la hipérbola pasa por $(1, 4)$

48. Focos: $(\pm\sqrt{10}, 0)$, la hipérbola pasa por $(4, \sqrt{18})$

49. Focos: $(\pm 5, 0)$, longitud de eje transverso: 6

50. Focos: $(0, \pm 1)$, longitud de eje transverso: 1

HABILIDADES Plus

51. Asíntotas perpendiculares

a) Demuestre que las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ son perpendiculares entre sí.

b) Encuentre la ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y con asíntotas perpendiculares entre sí.

52. Hipérbolas conjugadas Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se dice que están *conjugadas* entre sí.

a) Demuestre que las hipérbolas

$$x^2 - 4y^2 + 16 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4y^2 - x^2 + 16 = 0$$

están conjugadas entre sí y trace sus gráficas en los mismos ejes de coordenadas.

b) ¿Qué tienen en común las hipérbolas del inciso *a*)?

c) Demuestre que cualquier par de hipérbolas conjugadas tiene la relación que usted encontró en el inciso *b*).

53. Ecuación de una hipérbola En la deducción de la ecuación de la hipérbola al principio de esta sección dijimos que la ecuación

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

se simplifica a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Indique los pasos necesarios para demostrar lo anterior.

54. Verificación de una propiedad geométrica de una hiperbólica

a) Para la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

determine los valores de a, b y c, y encuentre las coordenadas de los focos F_1 y F_2.

b) Demuestre que el punto $P(5, \frac{16}{3})$ está sobre esta hipérbola.

c) Encuentre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$.

d) Verifique que la diferencia entre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$ es $2a$.

55. Hipérbolas confocales Las hipérbolas se llaman *confocales* si tienen los mismos focos.

a) Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{16-k} = 1 \qquad 0 < k < 16$$

son confocales.



b) Use una calculadora graficadora para trazar las ramas superiores de la familia de hipérbolas del inciso *a*) para $k = 1, 4, 8$ y 12. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando k aumenta?

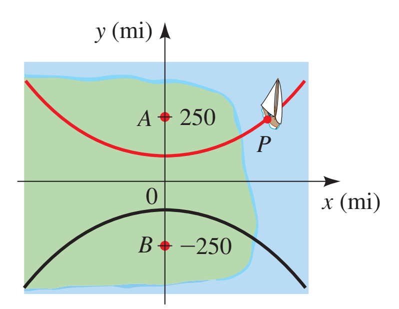
APLICACIONES

56. Navegación En la figura, las estaciones LORAN en A y B están a 500 millas entre sí, y el barco en P recibe la señal de la estación A 2 640 microsegundos (μs) antes de recibir la señal de la estación B.

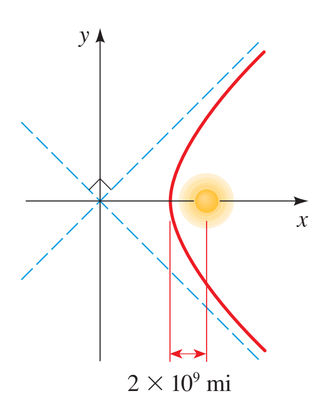
a) Suponiendo que las señales de radio viajan a 940 pies/μs, encuentre $d(P, A) - d(P, B)$.

b) Encuentre una ecuación para la rama de la hipérbola señalada en rojo en la figura. (Use millas como la unidad de distancia.)

c) Si A está al norte de B y si P está al este de A, ¿a qué distancia está P de A?



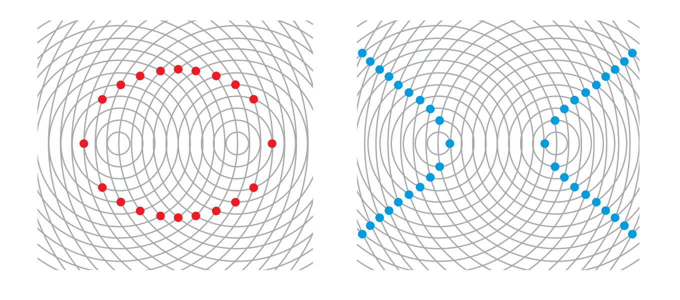
57. Trayectorias de cometas Algunos cometas como el Halley son objetos permanentes del sistema solar, moviéndose en órbitas elípticas alrededor del Sol. Otros cometas pasan por el sistema solar sólo una vez, siguiendo una trayectoria hiperbólica con el Sol en un foco. La figura muestra la trayectoria de uno de estos cometas. Encuentre una ecuación para la trayectoria, suponiendo que lo más que se acerca el cometa al Sol es 2×10^9 millas y que la trayectoria que el cometa estaba tomando, antes de acercarse al sistema solar, está en ángulo recto respecto a la trayectoria con la que continúa después de salir del sistema solar.



58. Olas en una piscina Se dejan caer simultáneamente dos piedras en una piscina con el agua en calma. Las crestas de las ondas resultantes forman circunferencias concéntricas igualmente espaciadas, como se muestra en las figuras. Las olas interaccionan unas con otras para crear ciertos patrones de interferencia.

a) Explique por qué los puntos rojos están sobre una elipse.

b) Explique por qué los puntos azules están sobre una hipérbola.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

59. DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN: Hipérbolas en el mundo real En el texto se dan varios ejemplos de usos de las hipérbolas. Encuentre otras situaciones en la vida real en las que aparecen hipérbolas. Consulte una enciclopedia científica en su biblioteca o busque en internet.

60. DISCUSIÓN: Luces de una lámpara La luz de una lámpara forma una superficie luminosa en una pared como se muestra en la figura. ¿Por qué el límite de esta superficie iluminada es una hipérbola? ¿Puede una persona sostener una linterna para que su haz forme una hipérbola en el suelo?



11.4 CÓNICAS DESPLAZADAS

■ Desplazamiento de gráficas de ecuaciones ■ Elipses desplazadas ■ Parábolas desplazadas ■ Hipérbolas desplazadas ■ La ecuación general de una cónica desplazada

En las secciones anteriores estudiamos parábolas con vértices en el origen y elipses e hipérbolas con centros en el origen. Nos restringiremos a estos casos porque estas ecuaciones tienen la forma más sencilla. En esta sección consideraremos cónicas cuyos vértices y centros no están necesariamente en el origen, y determinaremos la forma en que esto afecta sus ecuaciones.

■ Desplazamiento de gráficas de ecuaciones

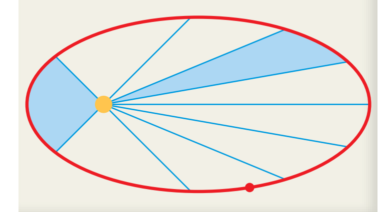
En la sección 2.6 estudiamos transformaciones de funciones que tienen el efecto de desplazar sus gráficas. En general, para cualquier ecuación en x y y, si sustituimos x con $x - h$



JOHANNES KEPLER (1571-1630) fue el primero en describir correctamente el movimiento de los planetas. La cosmología de su tiempo postulaba complicados sistemas de circunferencias moviéndose en círculo para describir dichos movimientos. Kepler buscaba una descripción más sencilla y armónica. Como astrónomo oficial de la corte imperial de Praga, estudió las observaciones astronómicas del danés Tycho Brahe cuyos datos eran los más precisos de que se disponía en aquel tiempo. Después de numerosos intentos por encontrar una teoría, Kepler hizo el trascendental descubrimiento de que las órbitas de los planetas son elípticas. Sus tres grandes leyes del movimiento planetario son

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en un foco.
2. El segmento de recta que une al Sol y a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (véase la figura).
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

La formulación de Kepler de estas leyes es quizá la deducción más impresionante hecha a partir de datos empíricos en la historia de la ciencia.



o con $x + h$, la gráfica de la nueva ecuación es simplemente la vieja gráfica desplazada horizontalmente; si y se sustituye con $y - k$ o con $y + k$, la gráfica se desplaza verticalmente. El siguiente recuadro da los detalles.

DESPLAZAMIENTO DE GRÁFICAS DE ECUACIONES

Si h y k son números reales positivos, entonces sustituir x por $x - h$ o por $x + h$, o sustituir y con $y - k$ o por $y + k$ tiene los siguientes efectos en la gráfica de cualquier ecuación en x y y.

Sustitución	Cómo se desplaza la gráfica
1. Se sustituye x con $x - h$	Hacia la derecha h unidades
2. Se sustituye x con $x + h$	Hacia la izquierda h unidades
3. Se sustituye y con $y - k$	Hacia arriba k unidades
4. Se sustituye y con $y + k$	Hacia abajo k unidades

Elipses desplazadas

Apliquemos desplazamiento horizontal y vertical a la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuya gráfica se muestra en la figura 1. Si la desplazamos de modo que su centro se encuentre en el punto (h, k) y no en el origen, entonces su ecuación se convierte en

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

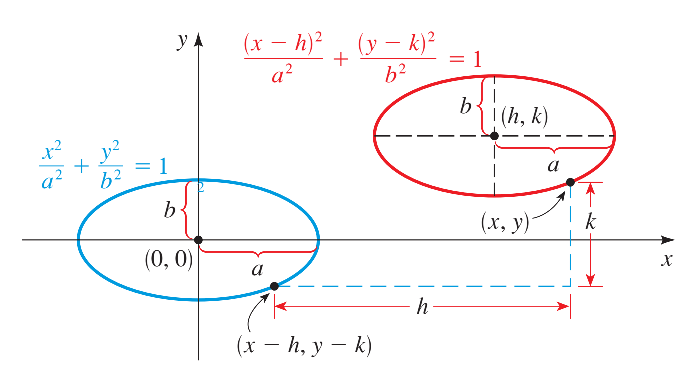


FIGURA 1 Elipse desplazada

EJEMPLO 1 ■ Trazar la gráfica de una elipse desplazada

Trace una gráfica de la elipse

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

y determine las coordenadas de los focos.

SOLUCIÓN La elipse

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse desplazada}$$

está desplazada de modo que su centro está en $(-1, 2)$. Se obtiene de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse con centro en el origen}$$

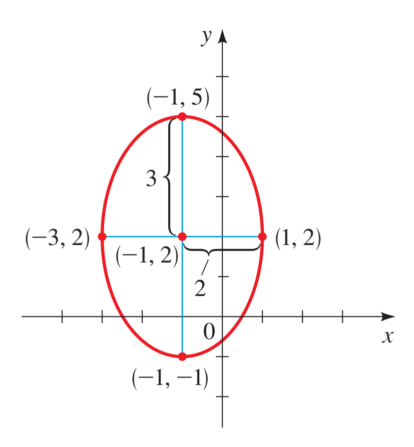


FIGURA 2
$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

al desplazarla a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades. Los puntos extremos de los ejes menor y mayor de la elipse con centro en el origen son (2, 0), (−2, 0), (0, 3), (0, −3). Aplicamos los desplazamientos requeridos a estos puntos para obtener los puntos correspondientes en la elipse desplazada:

$$\begin{aligned}(2, 0) &\rightarrow (2 - 1, 0 + 2) = (1, 2)\\(-2, 0) &\rightarrow (-2 - 1, 0 + 2) = (-3, 2)\\(0, 3) &\rightarrow (0 - 1, 3 + 2) = (-1, 5)\\(0, -3) &\rightarrow (0 - 1, -3 + 2) = (-1, -1)\end{aligned}$$

Esto nos ayuda a trazar la gráfica de la figura 2.

Para encontrar los focos de la elipse desplazada primero encontramos los focos de la elipse con centro en el origen. Dado que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, tenemos $c^2 = 9 - 4 = 5$, de modo que $c = \sqrt{5}$. Por tanto, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. Desplazando a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades, obtenemos

$$\begin{aligned}(0, \sqrt{5}) &\rightarrow (0 - 1, \sqrt{5} + 2) = (-1, 2 + \sqrt{5})\\(0, -\sqrt{5}) &\rightarrow (0 - 1, -\sqrt{5} + 2) = (-1, 2 - \sqrt{5})\end{aligned}$$

En consecuencia, los focos de la elipse desplazada son

$$(-1, 2 + \sqrt{5}) \qquad \text{y} \qquad (-1, 2 - \sqrt{5})$$

Ahora intente hacer el ejercicio 7 ■

EJEMPLO 2 ■ Determinar la ecuación de una elipse desplazada

Los vértices de una elipse son (−7, 3) y (3, 3) y los focos son (−6, 3) y (2, 3). Encuentre la ecuación de la elipse y trace su gráfica.

SOLUCIÓN El centro de la elipse es el punto medio del segmento de recta entre los vértices. Por la fórmula de punto medio el centro es

La fórmula de punto medio se muestra en la página 94.

$$\left(\frac{-7+3}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (-2, 3) \qquad \text{Centro}$$

Ya que los vértices se encuentran sobre una recta horizontal, el eje mayor es horizontal. La longitud del eje mayor es $3 - (-7) = 10$, por lo que $a = 5$. La distancia entre los focos es $2 - (-6) = 8$, entonces $c = 4$. Ya que $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos

$$\begin{aligned}4^2 &= 5^2 - b^2 && c = 4, a = 5\\b^2 &= 25 - 16 = 9 && \text{Despeje } b^2\end{aligned}$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \qquad \text{Ecuación de la elipse desplazada}$$

En la figura 3 se muestra la gráfica.

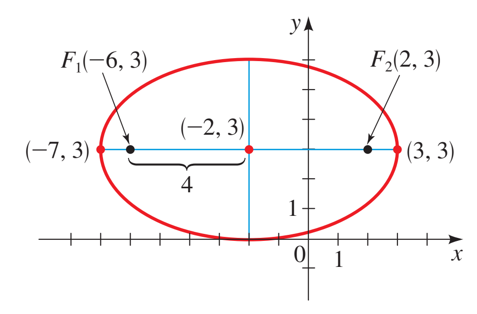
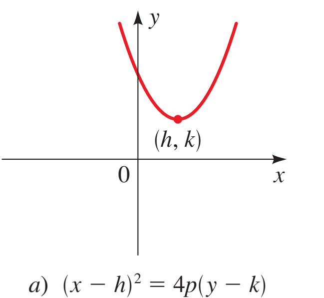


FIGURA 3 Gráfica de $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

Ahora intente hacer el ejercicio 35 ■

Parábolas desplazadas

La aplicación de desplazamientos a las parábolas conduce a las ecuaciones y gráficas que se muestran en la figura 4.



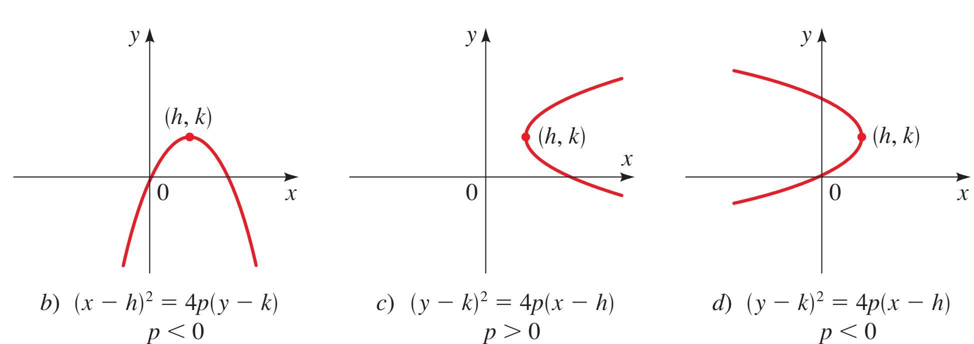


FIGURA 4 Parábolas desplazadas

EJEMPLO 3 ■ Trazar la gráfica de una parábola desplazada

Determine el vértice, el foco y la directriz y trace una gráfica de la parábola.

$$x^2 - 4x = 8y - 28$$

SOLUCIÓN Completamos el cuadrado en x para poner esta ecuación en una de las formas de la figura 4.

$$x^2 - 4x + 4 = 8y - 28 + 4 \qquad \text{Sume 4 para completar el cuadrado}$$

$$(x - 2)^2 = 8y - 24 \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$(x - 2)^2 = 8(y - 3) \qquad \text{Parábola desplazada}$$

Esta parábola abre hacia arriba con vértice en (2, 3). Se obtiene de la parábola

$$x^2 = 8y \qquad \text{Parábola con vértice en el origen}$$

al desplazar a la derecha 2 unidades y hacia arriba 3 unidades. Dado que $4p = 8$ tenemos $p = 2$, el foco está 2 unidades arriba del vértice y la directriz está 2 unidades abajo del vértice. Entonces el foco es (2, 5) y la directriz es $y = 1$. En la figura 4 se muestra la gráfica.

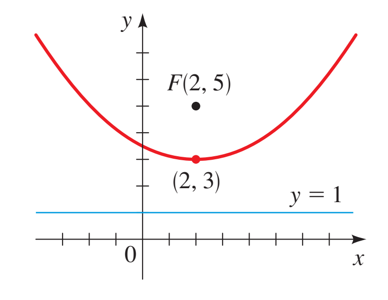


FIGURA 5
$x^2 - 4x = 8y - 28$

Ahora intente hacer los ejercicios 13 y 19 ■

Hipérbolas desplazadas

La aplicación de desplazamientos a las hipérbolas conduce a las ecuaciones y gráficas que se muestran en la figura 6.

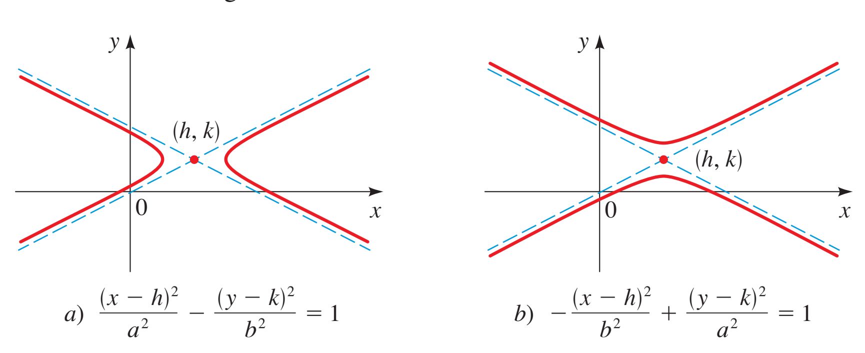


FIGURA 6 Hipérbolas desplazadas

EJEMPLO 4 ■ Trazar la gráfica de una hipérbola desplazada

Una cónica desplazada tiene la ecuación

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

a) Complete el cuadrado en x y y para demostrar que la ecuación representa una hipérbola.

***b*)** Encuentre el centro, los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.



***c*)** Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

***a*)** Completamos los cuadrados tanto de x como de y:

$$9(x^2 - 8x \quad\quad) - 16(y^2 + 2y \quad\quad) = 16 \qquad \text{Agrupe términos y factorice}$$

$$9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 16 + 9 \cdot 16 - 16 \cdot 1 \qquad \text{Complete los cuadrados}$$

$$9(x - 4)^2 - 16(y + 1)^2 = 144 \qquad \text{Divida esto entre 144}$$

$$\frac{(x - 4)^2}{16} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1 \qquad \text{Hipérbola desplazada}$$

Comparando esto con la figura 6*a*) vemos que ésta es la ecuación de una hipérbola desplazada.

***b*)** La hipérbola desplazada tiene centro $(4, -1)$ y un eje transverso horizontal.

CENTRO $(4, -1)$

Su gráfica tendrá la misma forma que la hipérbola no desplazada

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Hipérbola con centro en el origen}$$

Dado que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, tenemos $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Entonces los focos se encuentran 5 unidades a la izquierda y a la derecha del centro, y los vértices están 4 unidades a cada lado del centro.

FOCOS $(-1, -1)$ y $(9, -1)$

VÉRTICES $(0, -1)$ y $(8, -1)$

Las asíntotas de la hipérbola no desplazada son $y = \pm\frac{3}{4}x$, de modo que las asíntotas de la hipérbola desplazada se encuentran como sigue.

ASÍNTOTAS

$$y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}(x - 4)$$

$$y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}x \mp 3$$

$$y = \tfrac{3}{4}x - 4 \quad \text{y} \quad y = -\tfrac{3}{4}x + 2$$

Para ayudarnos a trazar la hipérbola trazamos la caja central; se prolonga 4 unidades a la izquierda y a la derecha del centro, y 3 unidades hacia arriba y hacia abajo del centro. Entonces trazamos las asíntotas y completamos la gráfica de la hipérbola desplazada como se muestra en la figura 7*a*).

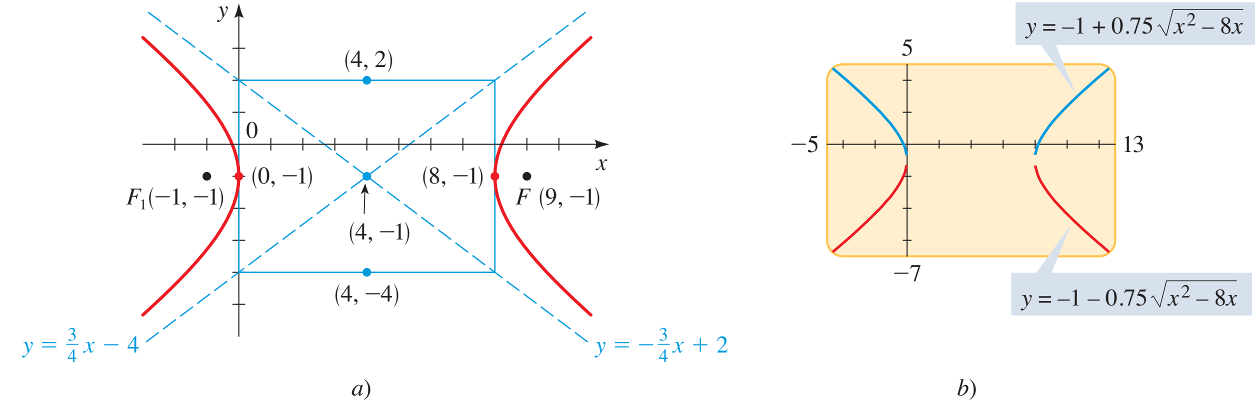


FIGURA 7 $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$

c) Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora necesitamos despejar y. La ecuación dada es una ecuación cuadrática en y, de modo que usamos la fórmula cuadrática para despejar y. Al escribir la ecuación en la forma

$$16y^2 + 32y - 9x^2 + 72x + 16 = 0$$

Observe que la ecuación de una hipérbola no define a y como función de x (vea la página 165). Es por ello que necesitamos trazar la gráfica de dos funciones para trazar la gráfica de una hipérbola.

obtenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4(16)(-9x^2 + 72x + 16)}}{2(16)} && \text{Fórmula cuadrática} \\ &= \frac{-32 \pm \sqrt{576x^2 - 4608x}}{32} && \text{Desarrolle} \\ &= \frac{-32 \pm 24\sqrt{x^2 - 8x}}{32} && \text{Saque el factor 576 del radical} \\ &= -1 \pm \tfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 8x} && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola, graficamos las funciones

$$y = -1 + 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

y

$$y = -1 - 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

tal como se muestra en la figura 7*b*).

 **Ahora intente hacer los ejercicios 21, 27 y 61** ■

■ La ecuación general de una cónica desplazada

Si desarrollamos y simplificamos las ecuaciones de cualesquiera de las cónicas desplazadas que se ilustran en las figuras 1, 4 y 6, entonces siempre vamos a obtener una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C son diferentes de cero. A la inversa, si empezamos con una ecuación de esta forma, entonces completamos el cuadrado en x y y para ver cuál tipo de sección cónica representa. En algunos casos la gráfica de la ecuación resulta ser sólo un par de rectas o un solo punto, o puede no haber gráfica en absoluto. Estos casos reciben el nombre de **cónicas degeneradas**. Si la ecuación no es degenerada, entonces podemos saber si representa una parábola, una elipse o una hipérbola simplemente con examinar los signos de A y C como se describe en el recuadro siguiente.

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CÓNICA DESPLAZADA

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C son diferentes de cero, es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados la gráfica es

1. una parábola si A o C es 0,
2. una elipse si A y C tienen el mismo signo (o una circunferencia, si $A = C$).
3. una hipérbola si A y C tienen signos contrarios.

EJEMPLO 5 ■ Una ecuación que conduce a una cónica degenerada

Trace la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$$

SOLUCIÓN Dado que los coeficientes de x^2 y y^2 son de signo contrario, esta ecuación se ve como si debiera representar una hipérbola (como la ecuación del ejemplo 4). Para ver si éste es el caso completamos los cuadrados:

$$9(x^2 + 2x \qquad) - (y^2 - 6y \qquad) = 0 \qquad \text{Agrupe términos y factorice 9}$$
$$9(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = 0 + 9 \cdot 1 - 9 \qquad \text{Complete los cuadrados}$$
$$9(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = 0 \qquad \text{Factorice}$$
$$(x + 1)^2 - \frac{(y - 3)^2}{9} = 0 \qquad \text{Divida entre 9}$$

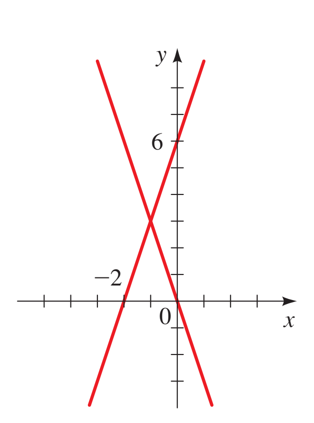


FIGURA 8
$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$

Para que esto se ajuste a la forma de la ecuación de una hipérbola necesitaríamos una constante diferente de cero a la derecha del signo igual. De hecho, un análisis más detallado indica que esta es la ecuación de un par de rectas que se intersecan:

$$(y - 3)^2 = 9(x + 1)^2$$
$$y - 3 = \pm 3(x + 1) \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$
$$y = 3(x + 1) + 3 \qquad \text{o} \qquad y = -3(x + 1) + 3$$
$$y = 3x + 6 \qquad\qquad y = -3x$$

Estas rectas están graficadas en la figura 8.

Ahora intente hacer el ejercicio 55 ■

Debido a que la ecuación del ejemplo 5 a primera vista parecía la ecuación de una hipérbola, pero como resultó que representaba simplemente un par de rectas, nos referiremos a su gráfica como una **hipérbola degenerada**. Las elipses y parábolas degeneradas también pueden aparecer cuando completamos los cuadrados en una ecuación que parece representar una cónica. Por ejemplo, la ecuación

$$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 6 = 0$$

se ve como si debiera representar una elipse porque los coeficientes de x^2 y y^2 tienen el mismo signo. Al completar el cuadrado obtenemos

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 1)^2}{4} = -\frac{1}{4}$$

que no tiene solución en absoluto (porque la suma de los dos cuadrados no puede ser negativa). Esta ecuación es, por tanto, degenerada.

11.4 EJERCICIOS

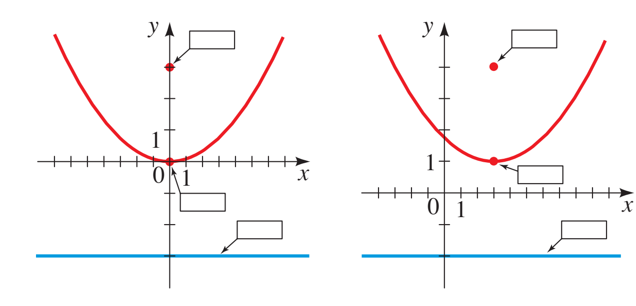
CONCEPTOS

1. Suponga que deseamos trazar la gráfica de una ecuación en x y y.

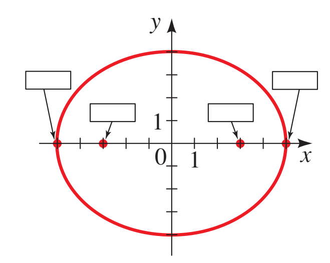
a) Si sustituimos x con $x - 3$, la gráfica de la ecuación se desplaza a la ________ 3 unidades. Si sustituimos x con $x + 3$, la gráfica de la ecuación se desplaza a la ________ 3 unidades.

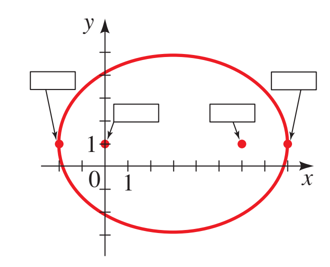
b) Si sustituimos y con $y - 1$, la gráfica de la ecuación se desplaza ________ 1 unidad. Si sustituimos y con $y + 1$, la gráfica de la ecuación se desplaza ________ 1 unidad.

2. Se dan las gráficas de $x^2 = 12y$ y $(x - 3)^2 = 12(y - 1)$. Rotule el foco, la directriz y el vértice de cada parábola.

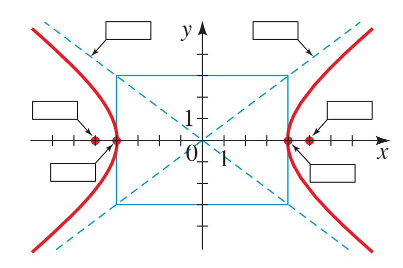


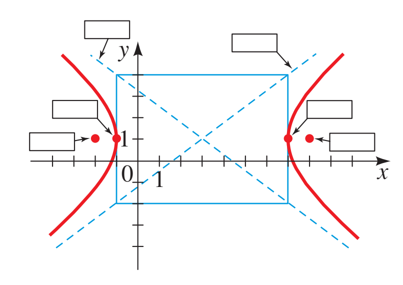
3. Se dan las gráficas de $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ y $\dfrac{(x-3)^2}{5^2} + \dfrac{(y-1)^2}{4^2} = 1$. Rotule los vértices y los focos en cada elipse.





4. Se dan las gráficas de $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ y $\dfrac{(x-3)^2}{4^2} - \dfrac{(y-1)^2}{3^2} = 1$. Rotule los vértices, los focos y las asíntotas en cada hipérbola.





HABILIDADES

5–12 ■ Trazar la gráfica de elipses desplazadas Se da una ecuación de una elipse. ***a)*** Encuentre el centro, los focos y los vértices de la elipse. ***b)*** Determine las longitudes de los ejes mayor y menor. ***c)*** Trace la gráfica de la elipse.

5. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ **6.** $\dfrac{(x-3)^2}{16} + (y+3)^2 = 1$

7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y+5)^2}{25} = 1$ **8.** $x^2 + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

9. $\dfrac{(x+5)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

10. $\dfrac{(x+1)^2}{36} + \dfrac{(y+1)^2}{64} = 1$

11. $4x^2 + 25y^2 - 50y = 75$

12. $9x^2 - 54x + y^2 + 2y + 46 = 0$

13–20 ■ Trazar la gráfica de parábolas desplazadas Se da la ecuación de una parábola. ***a)*** Encuentre el vértice, el foco y la directriz de la parábola. ***b)*** Trace una gráfica que muestre la parábola y su directriz.

13. $(x-3)^2 = 8(y+1)$ **14.** $(y+1)^2 = 16(x-3)$

15. $(y+5)^2 = -6x + 12$ **16.** $y^2 = 16x - 8$

17. $2(x-1)^2 = y$ **18.** $-4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y$

19. $y^2 - 6y - 12x + 33 = 0$

20. $x^2 + 2x - 20y + 41 = 0$

21–28 ■ Trazar la gráfica de hipérbolas desplazadas Se da la ecuación de una hipérbola. ***a)*** Encuentre el centro, los focos, los vértices y las asíntotas de la hipérbola. ***b)*** Trace una gráfica que muestre la hipérbola y sus asíntotas.

21. $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$ **22.** $(x-8)^2 - (y+6)^2 = 1$

23. $y^2 - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$

24. $\dfrac{(y-1)^2}{25} - (x+3)^2 = 1$

25. $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$ **26.** $\dfrac{(y+2)^2}{36} - \dfrac{x^2}{64} = 1$

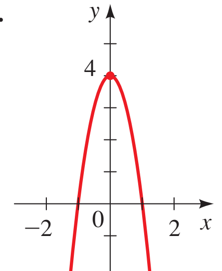
27. $36x^2 + 72x - 4y^2 + 32y + 116 = 0$

28. $25x^2 - 9y^2 - 54y = 306$

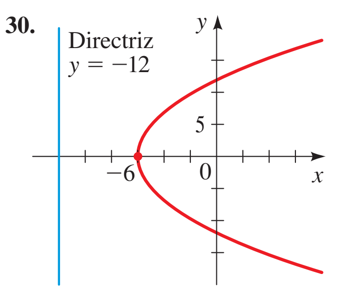
29–34 ■ Determinar la ecuación de una cónica desplazada Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.



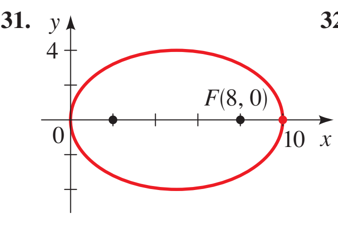
29.



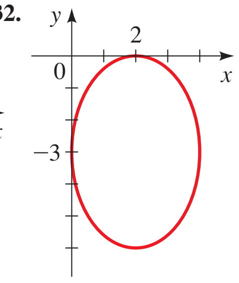
30.



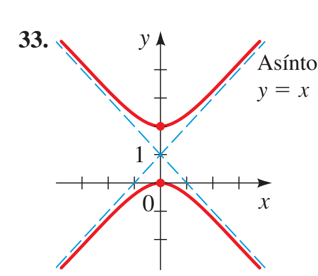
31.



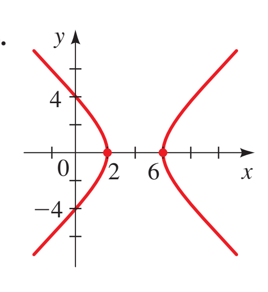
32.



33.



34.



35–46 ■ Encuentre la ecuación de una cónica desplazada Determine una ecuación para la sección cónica con las propiedades dadas.

35. La elipse con centro $C(2, -3)$, vértices $V_1(-8, -3)$ y $V_2(12, -3)$ y focos $F_1(-4, -3)$ y $F_2(8, -3)$

36. La elipse con vértices $V_1(-1, -4)$ y $V_2(-1, 6)$ y focos $F_1(-1, -3)$ y $F_2(-1, 5)$

37. La hipérbola con centro $C(-1, 4)$, vértices $V_1(-1, -3)$ y $V_2(-1, 11)$ y focos $F_1(-1, -5)$ y $F_2(-1, 13)$

38. La hipérbola con vértices $V_1(-1, -1)$ y $V_2(5, -1)$ y focos $F_1(-4, -1)$ y $F_2(8, -1)$

39. La parábola con vértice $V(-3, 5)$ y directriz $y = 2$

40. La parábola con foco $F(1, 3)$ y directriz $x = 3$

41. La hipérbola con focos $F_1(1, -5)$ y $F_2(1, 5)$ que pasa por el punto $(1, 4)$.

42. La hipérbola con focos $F_1(-2, 2)$ y $F_2(4, 2)$ que pasa por el punto $(3, 2)$.

43. La elipse con focos $F_1(1, -4)$ y $F_2(5, -4)$ que pasa por el punto $(3, 1)$

44. La elipse con focos $F_1(3, -4)$ y $F_2(3, 4)$, e intersecciones x, 0 y 6

45. La parábola que pasa por el punto $(6, 1)$, con vértices $V_1(-1, 2)$ y eje horizontal de simetría

46 La parábola que pasa por el punto $(6, -2)$, con vértice $V(4, -1)$ y eje vertical de simetría

47–58 ■ Trazar las gráficas de cónicas desplazadas Complete el cuadrado para determinar si la ecuación representa una elipse, una parábola, una hipérbola o una cónica degenerada. Si la gráfica es una elipse, encuentre el centro, los focos, los vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor. Si es una parábola, encuentre el vértice, el foco y la directriz. Si es una hipérbola, encuentre el centro, los focos, los vértices y las asíntotas. Luego, trace la gráfica de la ecuación. Si la ecuación no tiene gráfica, explique por qué.

47. $y^2 = 4(x + 2y)$

48. $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$

49. $x^2 - 5y^2 - 2x + 20y = 44$

50. $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

51. $4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$

52. $2x^2 + y^2 = 2y + 1$

53. $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

54. $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$

55. $x^2 + 16 = 4(y^2 + 2x)$

56. $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

57. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

58. $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y + 300 = 0$



59–62 ■ Trazar la gráfica desplazada Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica la cónica.

59. $2x^2 - 4x + y + 5 = 0$

60. $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

61. $9x^2 + 36 = y^2 + 36x + 6y$

62. $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y = 0$

HABILIDADES Plus

63. Cónica degenerada Determine cuál debe ser el valor de F si la gráfica de la ecuación

$$4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$$

es ***a)*** una elipse, ***b)*** un solo punto o ***c)*** el conjunto vacío.

64. Focos y vértice comunes Encuentre una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y que tiene su otro foco en el origen.



65. Parabolas confocales Este ejercicio se refiere a parábolas *confocales*, es decir, familias de parábolas que tienen el mismo foco.

a) Trace gráficas de la familia de parábolas

$$x^2 = 4p(y + p)$$

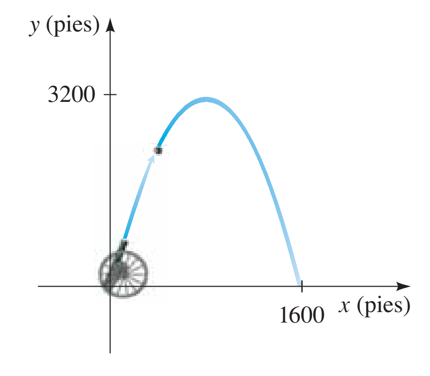
para $p = -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

b) Demuestre que cada parábola de esta familia tiene su foco en el origen.

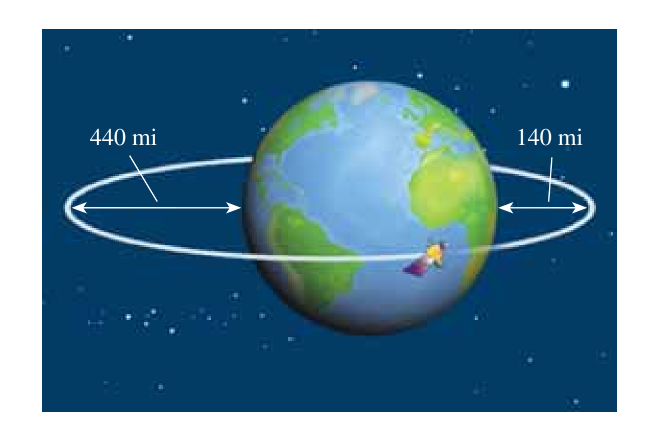
c) Describa el efecto de mover en la gráfica el vértice más cerca del origen.

APLICACIONES

66. Trayectoria de una bala de cañón Un cañón dispara un proyectil como se muestra en la figura. La trayectoria del proyectil es una parábola con vértice en el punto más alto de la trayectoria. Si el proyectil cae al suelo a 1 600 pies del cañón y el punto más alto que alcanza es 3 200 pies sobre el suelo, encuentre una ecuación para su trayectoria. Coloque el origen en el lugar donde está el cañón.



67. Órbita de un satélite Un satélite está en órbita elíptica alrededor de la Tierra con el centro de esta en un foco, como se muestra en la figura. La altura del satélite arriba de la Tierra varía entre 140 y 440 millas. Suponga que la Tierra es una esfera con radio de 3 960 mi. Encuentre una ecuación para la trayectoria del satélite con el origen en el centro de la Tierra.



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

68. DISCUSIÓN: Una familia de cónicas confocales Las cónicas que comparten un foco se llaman **confocales**. Considere la familia de cónicas que tienen un foco en (0, 1) y un vértice en el origen como se muestra en la figura.

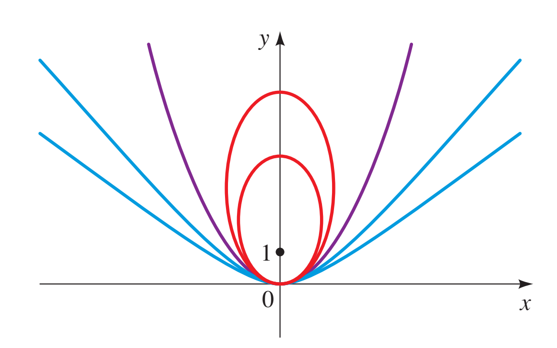
a) Encuentre ecuaciones de dos elipses diferentes que tengan estas propiedades.

b) Encuentre ecuaciones de dos hipérbolas diferentes que tengan estas propiedades.

c) Explique por qué sólo una parábola satisface estas propiedades. Encuentre su ecuación.

d) Trace las cónicas que encontró en los incisos *a*), *b*) y *c*) en los mismos ejes de coordenadas (para las hipérbolas trace sólo las ramas superiores).

e) ¿Cómo están relacionadas las elipses y las hipérbolas con la parábola?



11.5 ROTACIÓN DE EJES

■ Rotación de ejes ■ Ecuación general de una cónica ■ El discriminante

En la sección 11.4 estudiamos cónicas con ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ya vimos que la gráfica es siempre una elipse, parábola o hipérbola con ejes horizontales o verticales (excepto en los casos degenerados). En esta sección estudiaremos la ecuación de segundo grado más general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Veremos que la gráfica de una ecuación de esta forma también es una cónica. De hecho, al girar los ejes de las coordenadas un ángulo apropiado podemos eliminar el término Bxy y luego usar nuestro conocimiento de secciones cónicas para analizar la gráfica.

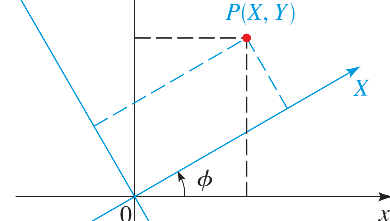


FIGURA 1

■ Rotación de ejes

En la figura 1 los ejes x y y han sido girados un ángulo agudo ϕ alrededor del origen para producir un nuevo par de ejes, que llamamos ejes X y Y. Un punto P que tiene coordenadas (x, y) en el sistema antiguo tiene coordenadas (x, y) en el nuevo sistema. Si hacemos que r denote la distancia de P del origen y que θ sea el ángulo que el segmento OP forma

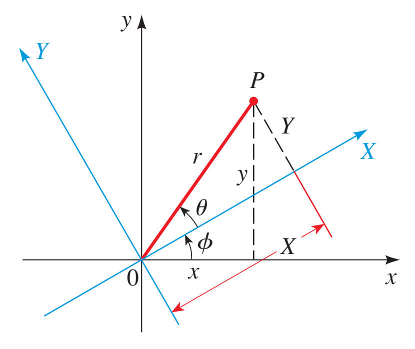


FIGURA 2

con el nuevo eje X, entonces de la figura 2 podemos ver (al considerar los dos triángulos rectángulos de la figura) que

$$X = r\cos\theta \qquad\qquad Y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$x = r\cos(\theta + \phi) \qquad\qquad y = r\,\text{sen}(\theta + \phi)$$

Usando la fórmula de adición del coseno, vemos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \phi) \\ &= r(\cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\phi) \\ &= (r\cos\theta)\cos\phi - (r\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\phi \\ &= X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi \end{aligned}$$

Del mismo modo podemos aplicar la fórmula de adición del seno a la expresión para y para obtener $y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi$. Tratando estas ecuaciones para x y y como un sistema de ecuaciones lineales con las variables X y Y (vea el ejercicio 35) obtenemos expresiones para X y Y en términos de x y y como se detalla en el recuadro siguiente.

FÓRMULAS PARA ROTACIÓN DE EJES

Suponga que los ejes x y y de un plano de coordenadas se giran sobre el ángulo agudo ϕ para producir los ejes X y Y como se muestra en la figura 1. Entonces las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en los planos xy y XY están relacionadas como sigue:

$$x = X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi \qquad\qquad X = x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi$$
$$y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi \qquad\qquad Y = -x\,\text{sen}\,\phi + y\cos\phi$$

EJEMPLO 1 ■ Rotación de ejes

Si los ejes de coordenadas se giran 30° encuentre las coordenadas XY del punto con coordenadas xy $(2, -4)$.

SOLUCIÓN Usando las fórmulas de rotación de ejes con $x = 2$, $y = -4$ y $\phi = 30°$, obtenemos

$$X = 2\cos 30° + (-4)\,\text{sen}\,30° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$$

$$Y = -2\,\text{sen}\,30° + (-4)\cos 30° = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}$$

Las coordenadas XY son $(-2 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$.

Ahora intente hacer el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Giro de una hipérbola

Gire los ejes de coordenadas un ángulo de 45° para demostrar que la gráfica de la ecuación $xy = 2$ es una hipérbola.

SOLUCIÓN Usamos las fórmulas de rotación de ejes con $\phi = 45°$ para obtener

$$x = X\cos 45° - Y\,\text{sen}\,45° = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X\,\text{sen}\,45° + Y\cos 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación original da

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 2$$

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

Reconocemos esto como una hipérbola con vértices $(\pm 2, 0)$ en el sistema de coordenadas XY. Sus asíntotas son $Y = \pm X$, que corresponden a los ejes de coordenadas del sistema xy (vea la figura 3).

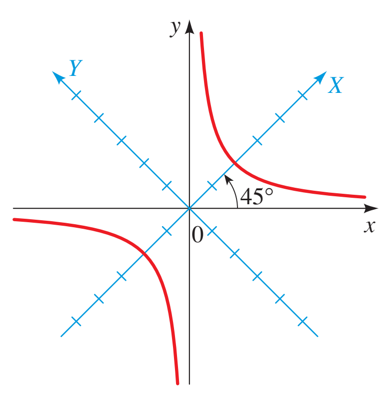


FIGURA 3
$xy = 2$

Ahora intente hacer el ejercicio 11 ■

■ Ecuación general de una cónica

El método del ejemplo 2 se puede usar para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación con X y Y que no tiene un término XY al elegir un ángulo de rotación apropiado. Para encontrar el ángulo que funcione giramos los ejes un ángulo ϕ y sustituimos x y y usando las fórmulas de rotación de ejes:

$$\begin{aligned} A(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)^2 &+ B(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi) \\ &+ C(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi)^2 + D(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi) \\ &+ E(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi) + F = 0 \end{aligned}$$

Si desarrollamos esto y reunimos términos semejantes obtenemos una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\phi + B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\operatorname{sen}^2\phi \\ B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) \\ C' &= A\operatorname{sen}^2\phi - B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\cos^2\phi \\ D' &= D\cos\phi + E\operatorname{sen}\phi \\ E' &= -D\operatorname{sen}\phi + E\cos\phi \\ F' &= F \end{aligned}$$

Para eliminar los términos XY nos gustaría elegir ϕ de modo que $B' = 0$, es decir,

Fórmulas de ángulo doble

$\operatorname{sen} 2\phi = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi$

$\cos 2\phi = \cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi$

$$2(C - A) \operatorname{sen} \phi \cos \phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) = 0$$

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\phi + B \cos 2\phi = 0 \qquad \text{Fórmulas de ángulo doble del seno y coseno}$$

$$B \cos 2\phi = (A - C) \operatorname{sen} 2\phi$$

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} \qquad \text{Divida entre } B \operatorname{sen} 2\phi$$

El cálculo anterior demuestra el teorema siguiente.

SIMPLIFICACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE CÓNICAS

Para eliminar el término xy en la ecuación general de cónicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gire los ejes el ángulo agudo ϕ que satisfaga

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

EJEMPLO 3 ■ Eliminar el término en *xy*

Use una rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación

$$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$$

Identifique y trace la curva.

SOLUCIÓN Para eliminar el término en xy giramos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Entonces $2\phi = 60°$ y, por tanto, $\phi = 30°$. Con este valor de ϕ obtenemos

$$x = X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - Y\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Fórmula de rotación de ejes}$$

$$y = X\left(\frac{1}{2}\right) + Y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{sen} \phi = \frac{1}{2}$$

Al sustituir estos valores por x y y en la ecuación dada obtenemos

$$6\sqrt{3}\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right) + 4\sqrt{3}\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 21\sqrt{3}$$

Desarrollando y reuniendo términos semejantes, obtenemos

$$7\sqrt{3}X^2 + 3\sqrt{3}Y^2 = 21\sqrt{3}$$

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{7} = 1 \qquad \text{Divida entre } 21\sqrt{3}$$

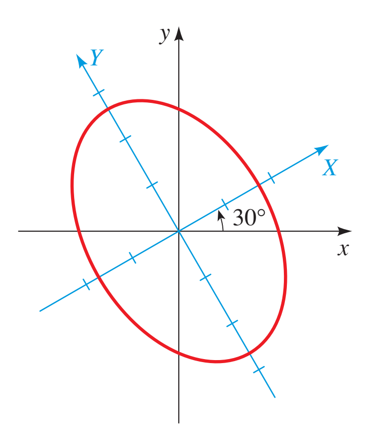


FIGURA 4
$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$

Ésta es la ecuación de una elipse en el sistema de coordenadas XY. Los focos se encuentran sobre el eje Y. Dado que $a^2 = 7$ y $b^2 = 3$, la longitud del eje mayor es $2\sqrt{7}$ y la longitud del eje menor es $2\sqrt{3}$. En la figura 4 está trazada la elipse.

Ahora intente hacer el ejercicio 17 ■

En el ejemplo anterior pudimos determinar ϕ sin dificultad puesto que hemos recordado que $\cot 60° = \sqrt{3}/3$. En general, encontrar ϕ no es tan fácil. El siguiente ejemplo ilustra la forma en que las siguientes fórmulas de medio ángulo, que son válidas para $0 < \phi < \pi/2$, son útiles para determinar ϕ (vea la sección 7.3).

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} \qquad \operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

EJEMPLO 4 ■ Trazar la gráfica de una cónica girada

Una cónica tiene la ecuación

$$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$$

a) Use una rotación de ejes para eliminar el término en xy.

b) Identifique y trace la gráfica.

c) Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

a) Para eliminar el término xy giramos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga la ecuación

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{64 - 36}{96} = \frac{7}{24}$$

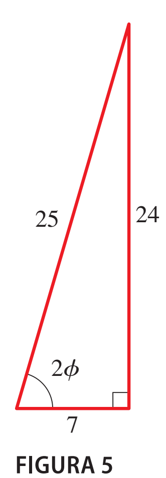


FIGURA 5

En la figura 5 trazamos un triángulo con $\cot 2\phi = \frac{7}{24}$. Vemos que

$$\cos 2\phi = \tfrac{7}{25}$$

entonces, usando las fórmulas de medio ángulo obtenemos

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Las fórmulas de rotación de ejes entonces dan

$$x = \tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tenemos

$$64\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)^2 + 96\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right)$$
$$+ 36\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right)^2 - 15\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right) + 20\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right) - 25 = 0$$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO





Gráficas con computadora II

Una imagen en una pantalla de computadora se almacena en la memoria de la computadora como una gran matriz. Cada entrada de la matriz contiene información sobre un pixel de la imagen. En el *Proyecto de descubrimiento: Gráfica con computadora I* hemos experimentado con el uso de operaciones con matrices para transformar una imagen −estirarla, reducirla, reflejarla o cortarla. Pero la rotación de una imagen requiere el conocimiento de las fórmulas de rotación que estudiamos en esta sección. En este proyecto experimentamos con el uso de matrices de rotación para girar una imagen. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

*Este material se encuentra disponible en inglés.

Desarrollando y reuniendo términos semejantes obtenemos

$$100X^2 + 25Y - 25 = 0$$

$$4X^2 = -Y + 1 \qquad \text{Simplifique}$$

$$X^2 = -\tfrac{1}{4}(Y - 1) \qquad \text{Divida entre 4}$$

***b*)** Reconocemos esto como la ecuación de una parábola que abre a lo largo del eje Y negativo y tiene vértice $(0, 1)$ en las coordenadas XY. Puesto que $4p = -\frac{1}{4}$, tenemos $p = -\frac{1}{16}$, por tanto el foco es $(0, \frac{15}{16})$ y la directriz es $Y = \frac{17}{16}$. Usando

$$\phi = \cos^{-1}\tfrac{4}{5} \approx 37°$$

trazamos la gráfica en la figura 6*a*).

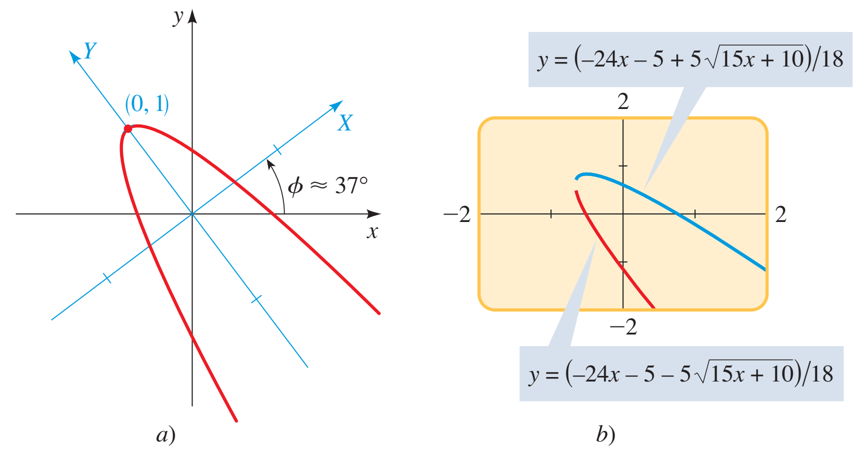
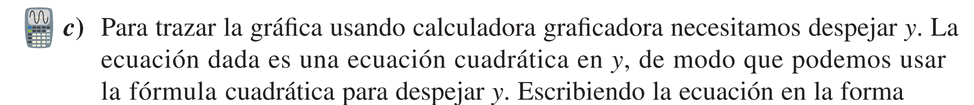


FIGURA 6
$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$



***c*)** Para trazar la gráfica usando calculadora graficadora necesitamos despejar y. La ecuación dada es una ecuación cuadrática en y, de modo que podemos usar la fórmula cuadrática para despejar y. Escribiendo la ecuación en la forma

$$36y^2 + (96x + 20)y + (64x^2 - 15x - 25) = 0$$

obtenemos

$$y = \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{(96x + 20)^2 - 4(36)(64x^2 - 15x - 25)}}{2(36)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{6000x + 4000}}{72} \qquad \text{Desarrolle}$$

$$= \frac{-96x - 20 \pm 20\sqrt{15x + 10}}{72} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{-24x - 5 \pm 5\sqrt{15x + 10}}{18} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la parábola graficamos las funciones

$$y = \left(-24x - 5 + 5\sqrt{15x + 10}\right)/18 \qquad \text{y} \qquad y = \left(-24x - 5 - 5\sqrt{15x + 10}\right)/18$$

como se muestra en la figura 6*b*).

Ahora intente hacer el ejercicio 23 ■

El discriminante

En los ejemplos 3 y 4 pudimos identificar el tipo de cónica al girar los ejes. El siguiente teorema da reglas para identificar el tipo de cónica directamente de la ecuación, sin girar los ejes.

IDENTIFICACIÓN DE CÓNICAS POR EL DISCRIMINANTE

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados la gráfica es

1. una parábola si $B^2 - 4AC = 0$,
2. una elipse si $B^2 - 4AC < 0$,
3. una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación.

Demostración Si giramos los ejes un ángulo ϕ obtenemos una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde A', B', C', . . . están dadas por las fórmulas de la página 818. Un cálculo sencillo demuestra que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

Por tanto, la expresión $B^2 - 4AC$ sigue sin cambio para cualquier rotación. En particular, si elegimos una rotación que elimina el término en xy ($B' = 0$), obtenemos

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

En este caso, $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Por tanto, $B^2 - 4AC = 0$ si A' o C' son cero; $B^2 - 4AC < 0$ si A' y C' tienen el mismo signo; y $B^2 - 4AC > 0$ si A' y C' tienen signos contrarios. De acuerdo con el recuadro de la página 812 estos casos corresponden a la gráfica de la última ecuación mostrada siendo una parábola, una elipse o una hipérbola, respectivamente. ■

En la demostración indicamos que el discriminante no cambia con ninguna rotación; por esta razón se dice que el discriminante es **invariante** bajo rotación.

EJEMPLO 5 ■ Identificación de una cónica por el discriminante 

Una cónica tiene la ecuación

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + x - y + 4 = 0$$

a) Use el discriminante para identificar la cónica.

b) Confirme su respuesta al inciso *a*) graficando la cónica con una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

a) Puesto que $A = 3$, $B = 5$ y $C = -2$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 > 0$$

por lo que la cónica es una hipérbola.

b) Usando la fórmula cuadrática despejamos y para obtener

$$y = \frac{5x - 1 \pm \sqrt{49x^2 - 2x + 33}}{4}$$

Graficamos estas funciones en la figura 7. La gráfica confirma que esta es una hipérbola.

Ahora intente hacer el ejercicio 29 ■

$y = (5x - 1 + \sqrt{49x^2 - 2x + 33})/4$

5

−3

3

−5

$y = (5x - 1 - \sqrt{49x^2 - 2x + 33})/4$



FIGURA 7

11.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Suponga que los ejes x y y son girados un ángulo agudo ϕ para producir los nuevos ejes X y Y. Un punto P en el plano puede ser descrito por sus coordenadas xy (x, y) o sus coordenadas XY (X, Y). Estas coordenadas están relacionadas por las siguientes fórmulas.

$x =$ ______________ $X =$ ______________

$y =$ ______________ $Y =$ ______________

2. Considere la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a) En general, la gráfica de esta ecuación es una ____________.

b) Para eliminar el término xy de esta ecuación giramos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga

$\cot 2\phi =$ ____________.

c) El discriminante de esta ecuación es ____________.

Si el discriminante es 0, la gráfica es una ____________;

si es negativo, la gráfica es ____________;

y si es positivo, la gráfica es ____________.

HABILIDADES

3–8 ■ Rotación de ejes Determine las coordenadas XY del punto dado si los ejes de coordenadas se giran el ángulo indicado.

3. $(1, 1)$, $\phi = 45°$

4. $(-2, 1)$, $\phi = 30°$

5. $(3, -\sqrt{3})$, $\phi = 60°$

6. $(2, 0)$, $\phi = 15°$

7. $(0, 2)$, $\phi = 55°$

8. $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $\phi = 45°$

9–14 ■ Encuentre la ecuación para una cónica girada Determine la ecuación de la cónica dada en coordenadas XY cuando los ejes de las coordenadas se giran al ángulo indicado.

9. $x^2 - 3y^2 = 4$, $\phi = 60°$

10. $y = (x - 1)^2$, $\phi = 45°$

11. $x^2 - y^2 = 2y$, $\phi = \cos^{-1}\frac{3}{5}$

12. $x^2 + 2y^2 = 16$, $\phi = \text{sen}^{-1}\frac{3}{5}$

13. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$, $\phi = 30°$

14. $xy = x + y$, $\phi = \pi/4$

15–28 ■ Trazar la gráfica de una cónica girada *a*) Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. *b*) Use rotación de ejes para eliminar el término xy. *c*) Trace la gráfica.

15. $xy = 8$

16. $xy + 4 = 0$

17. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$

18. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$

19. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20 = 0$

20. $21x^2 + 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 144$

21. $\sqrt{3}x^2 + 3xy = 3$

22. $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$

23. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

24. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 156x - 65y = 0$

25. $2\sqrt{3}x^2 - 6xy + \sqrt{3}x + 3y = 0$

26. $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 100(x - y - 1)$

27. $52x^2 + 72xy + 73y^2 = 40x - 30y + 75$

28. $(7x + 24y)^2 = 600x - 175y + 25$

29–32 ■ Identificar una cónica a partir de su discriminante *a*) Use el discriminante para identificar la cónica. *b*) Confirme su respuesta al trazar la gráfica de la cónica usando una calculadora graficadora.

29. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x - 5 = 0$

30. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

31. $6x^2 + 10xy + 3y^2 - 6y = 36$

32. $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y = 0$

HABILIDADES Plus

33. Identificar una hipérbola usando rotación de ejes

a) Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una hipérbola.

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 200x - 150y + 600 = 0$$

b) Encuentre las coordenadas XY y xy del centro, los vértices y los focos.

c) Encuentre las ecuaciones de las asíntotas en coordenadas XY y xy.

34. Identificar una parábola usando rotación de ejes

a) Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una parábola.

$$2\sqrt{2}(x + y)^2 = 7x + 9y$$

b) Encuentre las coordenadas XY y xy del vértice y el foco.

c) Encuentre la ecuación de la directriz en las coordenadas XY y xy.

35. Fórmulas de rotación de ejes Resuelva las ecuaciones

$$x = X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi$$
$$y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi$$

despeje X y Y en términos de x y y. [*Sugerencia:* Para empezar multiplique la primera ecuación por $\cos\phi$ y la segunda por $\text{sen}\,\phi$, luego sume las dos ecuaciones para despejar X.]

36. Trazar la gráfica de una ecuación usando ejes de rotación Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

es parte de una parábola al girar los ejes un ángulo de 45°. [*Sugerencia:* Primero convierta la ecuación a una que no tenga radicales.]

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

37. DEMOSTRACIÓN: Forma matricial de las fórmulas de rotación de ejes Sean Z, Z' y R las matrices

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad Z' = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

a) Demuestre que las fórmulas de rotación de ejes se pueden escribir como

$$Z = RZ' \qquad \text{y} \qquad Z' = R^{-1}Z$$

b) Sean R_1 y R_2 matrices que representan rotaciones de los ángulos ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente. Demuestre que la matriz producto R_1R_2 representa una rotación de un ángulo $\phi_1 + \phi_2$. [*Sugerencia:* Use las fórmulas de adición del seno y del coseno para simplificar las entradas de la matriz R_1R_2.]

38. DEMOSTRACIÓN: Invariantes algebraicas Una cantidad es invariante bajo rotación si no cambia cuando los ejes son girados. Se indicó en el texto que para la ecuación general de una cónica la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación.

a) Use las fórmulas para A', B' y C' de la página 818 para demostrar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación; es decir, demuestre que

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

b) Demuestre que $A + C$ es invariante bajo rotación.

c) ¿Será la cantidad F invariante bajo rotación?

39. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Invariantes geométricas ¿Espera usted que la distancia entre dos puntos sea invariante bajo rotación? Demuestre su respuesta al comparar la distancia $d(P, Q)$ y $d(P', Q')$, donde P' y Q' son las imágenes de P y Q bajo una rotación de ejes.

11.6 ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

■ Una descripción geométrica unificada de cónicas ■ Ecuaciones polares de cónicas

■ Una descripción geométrica unificada de cónicas

Antes en este capítulo hemos definido una parábola en términos de un foco y una directriz, pero definimos la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección daremos un tratamiento más unificado de los tres tipos de cónicas en términos de un foco y directriz. Si colocamos el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar sencilla. Además, en forma polar, la rotación de cónicas se convierte en un asunto muy sencillo. Las ecuaciones polares de elipses son importantes en la deducción de las leyes de Kepler (vea la página 808).

DESCRIPCIÓN EQUIVALENTE DE CÓNICAS

Sea F un punto fijo (el **foco**), ℓ una recta fija (la **directriz**) y sea e un número positivo fijo (la **excentricidad**). El conjunto de todos los puntos P tal que la relación entre la distancia de P a F y la distancia de P a ℓ es la constante e, es una cónica. Esto es, el conjunto de todos los puntos P tal que

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = e$$

es una cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $e < 1$ o una hipérbola si $e > 1$.

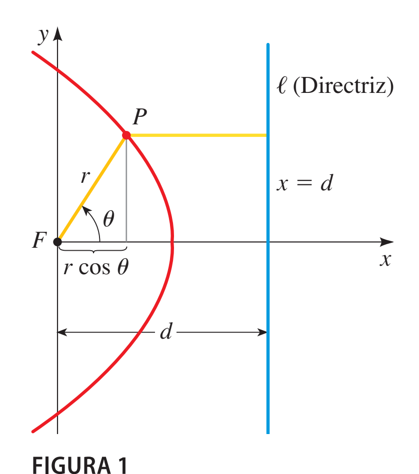


FIGURA 1

Demostración Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, \ell)$ y, por tanto, la condición dada se convierte en la definición de una parábola como se da en la sección 11.1.

Ahora, suponga que $e \neq 1$. Coloquemos el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. En este caso la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), vemos de la figura 1 que $d(P, F) = r$ y $d(P, \ell) = d - r\cos\theta$. Entonces la condición $d(P, F)/d(P, \ell) = e$, o $d(P, F) = e \cdot d(P, \ell)$, se convierte en

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de esta ecuación polar y convertimos a coordenadas rectangulares obtenemos

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2 \qquad \text{Desarrolle y simplifique}$$

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{Divida entre } 1 - e^2 \text{ y complete el cuadrado}$$

Si $e < 1$, divida entonces ambos lados de esta ecuación entre $e^2d^2/(1 - e^2)^2$ da una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$h = \frac{-e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Esta es la ecuación de una elipse con centro $(h, 0)$. En la sección 11.2 encontramos que los focos de una elipse están a una distancia c del centro, donde $c^2 = a^2 - b^2$. En nuestro caso

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Entonces $c = e^2d/(1 - e^2) = -h$, lo cual confirma que el foco definido en el teorema (es decir, el origen) es el mismo que el foco definido en la sección 11.2. También se deduce que

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Si $e > 1$, una demostración similar demuestra que la cónica es una hipérbola con $e = c/a$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. ■

Ecuaciones polares de cónicas

En la demostración vimos que la ecuación polar de la cónica de la figura 1 es $r = e(d - r\cos\theta)$. Despejando r obtenemos

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si la directriz se escoge para que se encuentre a la *izquierda* del foco ($x = -d$), entonces obtenemos la ecuación $r = ed/(1 - e\cos\theta)$. Si la directriz es *paralela* al eje polar ($y = d$ o $y = -d$), entonces obtenemos $\operatorname{sen}\theta$ en lugar de $\cos\theta$ en la ecuación. Estas observaciones se resumen en el recuadro siguiente y en la figura 2.

ECUACIONES POLARES DE CÓNICAS

Una ecuación polar de la forma

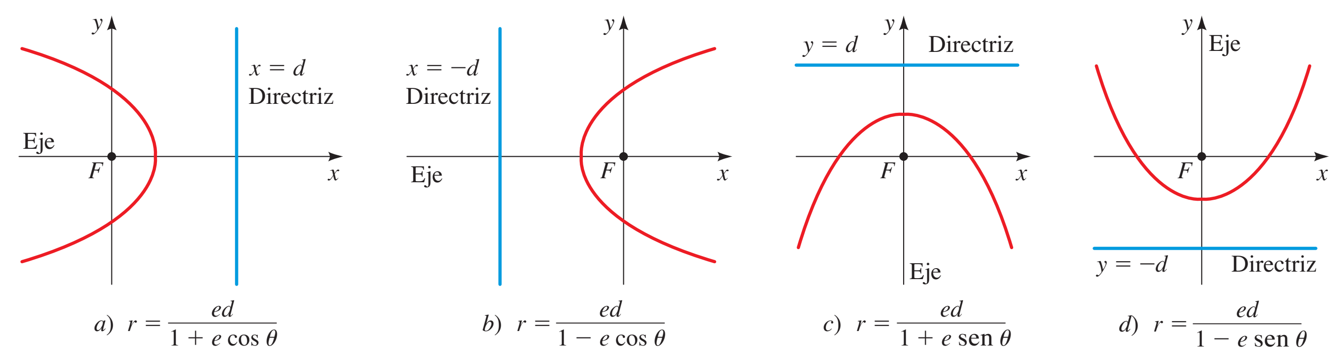
$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta}$$

representa una cónica con un foco en el origen y con excentricidad e. La cónica es

1. una parábola si $e = 1$,

2. una elipse si $0 < e < 1$,

3. una hipérbola si $e > 1$.



a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ *b)* $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ *c)* $r = \dfrac{ed}{1 + e\,\mathrm{sen}\,\theta}$ *d)* $r = \dfrac{ed}{1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta}$

FIGURA 2 La forma de la ecuación polar de una cónica indica la posición de la directriz.

Para trazar la gráfica la ecuación polar de una cónica primero determinamos la posición de la directriz a partir de la forma de la ecuación. Los cuatro casos que aparecen se muestran en la figura 2. (La figura muestra sólo las partes de las gráficas que están cerca del foco en el origen. La forma del resto de la gráfica depende de si la ecuación representa una parábola, una elipse o una hipérbola.) El eje de una cónica es perpendicular a la directriz; específicamente tenemos lo siguiente:

1. Para una parábola el eje de simetría es perpendicular a la directriz.

2. Para una elipse el eje mayor es perpendicular a la directriz.

3. Para una hipérbola el eje transverso es perpendicular a la directriz.

EJEMPLO 1 ■ Encontrar una ecuación polar para una cónica

Encuentre una ecuación polar para la parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la recta $y = -6$.

SOLUCIÓN Al usar $e = 1$ y $d = 6$ y usando el inciso *d*) de la figura 2 vemos que la ecuación polar de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \mathrm{sen}\,\theta}$$

Ahora intente hacer el ejercicio 3 ■

Para trazar la gráfica una cónica polar es útil determinar los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Usando estos puntos y un conocimiento del tipo de cónica (que obtenemos de la excentricidad), fácilmente podemos tener una idea aproximada de la forma y la posición de la gráfica.

EJEMPLO 2 ■ Identificar y trazar una cónica

Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

a) Demuestre que la cónica es una elipse y trace la gráfica.

b) Encuentre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor.

SOLUCIÓN

a) Dividiendo el numerador y el denominador entre 3, tenemos

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Dado que $e = \frac{2}{3} < 1$ la ecuación representa una elipse. Para una gráfica aproximada localizamos los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (vea la figura 3).

θ	r
0	10
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{10}{3}$
π	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10}{3}$

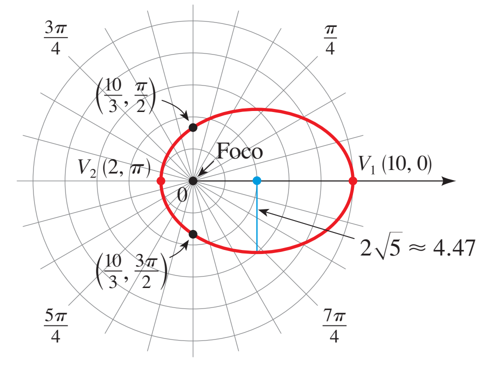


FIGURA 3 $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$

b) Al comparar la ecuación con la de la figura 2 vemos que el eje mayor es horizontal. Entonces los puntos extremos del eje mayor son $V_1(10, 0)$ y $V_2(2, \pi)$. Por tanto, el centro de la elipse está en $C(4, 0)$, el punto medio de V_1V_2.

La distancia entre los vértices V_1 y V_2 es 12; entonces la longitud del eje mayor es $2a = 12$, de modo que $a = 6$. Para determinar la longitud del eje menor necesitamos encontrar b. De la página 825 tenemos $c = ae = 6(\frac{2}{3}) = 4$, así

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

En consecuencia, $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$ y la longitud del eje menor es $2b = 4\sqrt{5} \approx 8.94$.

 **Ahora intente hacer los ejercicios 17 y 21** ■

EJEMPLO 3 ■ Identificar y trazar una cónica

Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{12}{2 + 4\,\text{sen}\,\theta}$$

a) Demuestre que la cónica es una hipérbola y trace la gráfica.

b) Encuentre el centro de la hipérbola y trace las asíntotas.

SOLUCIÓN

a) Dividiendo el numerador y denominador entre 2 tenemos

$$r = \frac{6}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$$

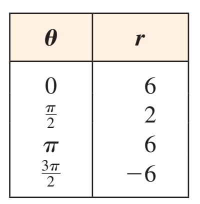
Puesto que $e = 2 > 1$ la ecuación representa una hipérbola. Para una gráfica aproximada localizamos los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (vea la figura 4).

b) Comparando la ecuación con la de la figura 2 vemos que el eje transverso es vertical. Entonces los puntos extremos del eje transverso (los vértices de la hipérbola) son $V_1(2, \pi/2)$ y $V_2(-6, 3\pi/2) = V_2(6, \pi/2)$. Por tanto, el centro de la hipérbola es $C(4, \pi/2)$, el punto medio de V_1V_2.

Para trazar las asíntotas necesitamos encontrar a y b. La distancia entre V_1 y V_2 es 4; así, la longitud del eje transverso es $2a = 4$, por tanto, $a = 2$. Para encontrar b primero encontramos c. De la página 825 tenemos que $c = ae = 2 \cdot 2 = 4$, por lo cual

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

En consecuencia, $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$. Conocer a y b nos permite trazar la caja central de la cual obtenemos las asíntotas mostradas en la figura 4.



θ	r
0	6
$\frac{\pi}{2}$	2
π	6
$\frac{3\pi}{2}$	-6

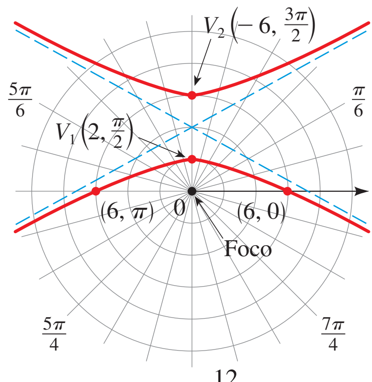


FIGURA 4 $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$

Ahora intente hacer el ejercicio 25 ■

Cuando giramos las secciones cónicas es mucho más conveniente usar ecuaciones polares que ecuaciones cartesianas. Usamos el hecho de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ girada en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen un ángulo α (vea el ejercicio 65 en la sección 8.2).

EJEMPLO 4 ■ Girar una elipse



Suponga que la elipse del ejemplo 2 se gira un ángulo $\pi/4$ alrededor del origen. Encuentre una ecuación polar para la elipse resultante y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Obtenemos la ecuación de la elipse girada al sustituir θ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el ejemplo 2. Por tanto, la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

Usamos esta ecuación para trazar la gráfica de la elipse girada en la figura 5. Observe que la elipse ha sido girada alrededor del foco en el origen.

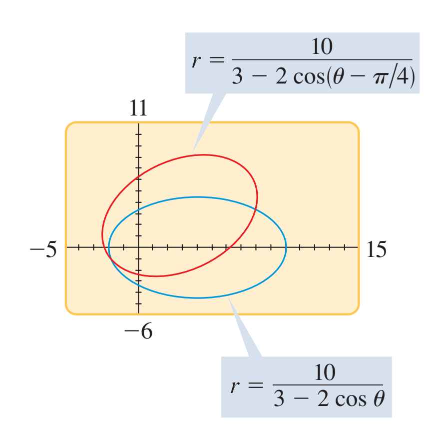
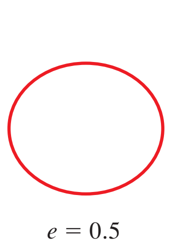


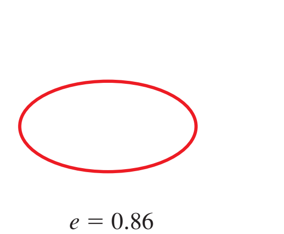
FIGURA 5

Ahora intente hacer el ejercicio 37 ■

En la figura 6 usamos una computadora para trazar varias cónicas para demostrar el efecto de variar la excentricidad e. Observe que cuando e es cercana a 0, la elipse es casi circunferencia y se hace más alargada conforme e aumenta. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola. Cuando e aumenta a más de 1 la cónica es una hipérbola siempre más pronunciada.



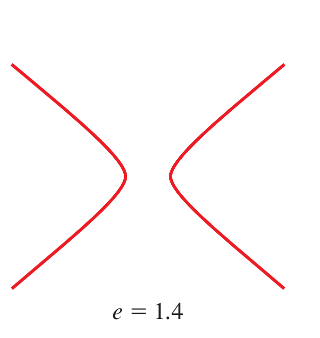
$e = 0.5$



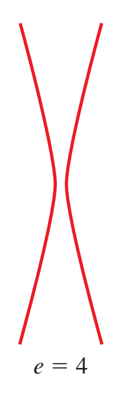
$e = 0.86$



$e = 1$



$e = 1.4$



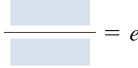
$e = 4$

FIGURA 6

11.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Todas las cónicas se pueden describir geométricamente usando un punto fijo F llamado ______ y una recta fija ℓ llamada ______. Para un número positivo fijo e el conjunto de todos los puntos que satisfagan

 $= e$

es una ______. Si $e = 1$, la cónica es una ______; si $e < 1$, la cónica es una ______; si $e > 1$, la cónica es una ______. El número e se denomina ______ de la cónica.

2. La ecuación polar de una cónica con excentricidad e tiene una de las siguientes formas:

$r =$ ______ o $r =$ ______

HABILIDADES

3–10 ■ Determinar una ecuación polar para una cónica Escriba una ecuación polar de una cónica que tenga su foco en el origen y satisfaga las condiciones dadas.

3. Elipse, excentricidad $\frac{2}{3}$, directriz $x = 3$

4. Hipérbola, excentricidad $\frac{4}{3}$, directriz $x = -3$

5. Parábola, directriz $y = 2$

6. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $y = -4$

7. Hipérbola, excentricidad 4, directriz $r = 5 \sec \theta$

8. Elipse, excentricidad 0.6, directriz $r = 2 \csc \theta$

9. Parábola, vértice en $(5, \pi/2)$

10. Elipse, excentricidad 0.4, vértice en $(2, 0)$

11–16 ■ Gráficas de ecuaciones cónicas polares Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para su respuesta.

11. $r = \dfrac{6}{1 + \cos \theta}$

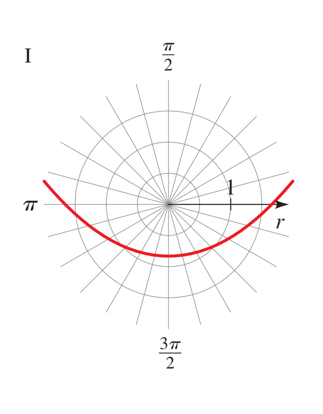
12. $r = \dfrac{2}{2 - \cos \theta}$

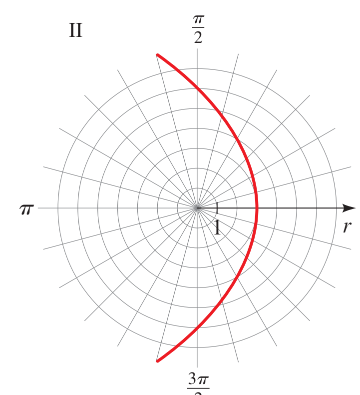
13. $r = \dfrac{3}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

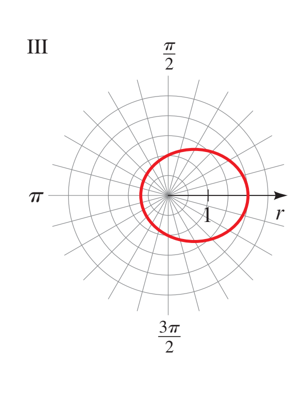
14. $r = \dfrac{5}{3 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

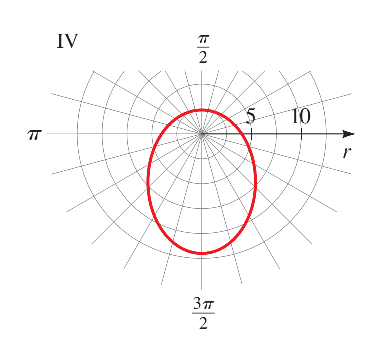
15. $r = \dfrac{12}{3 + 2 \operatorname{sen} \theta}$

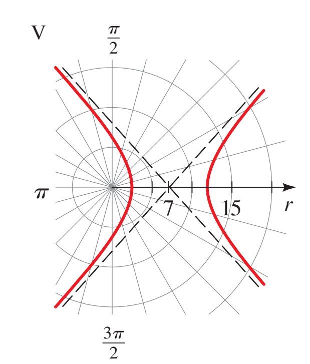
16. $r = \dfrac{12}{2 + 3 \cos \theta}$

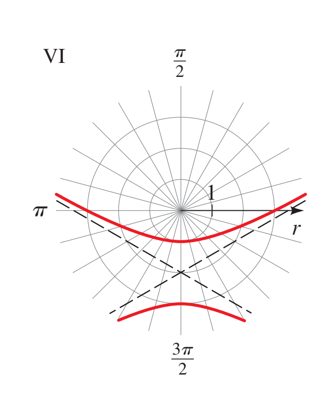












17–20 ■ Ecuación polar para una parábola Se da una ecuación polar de una cónica. ***a***) Demuestre que la cónica es una parábola y trace su gráfica. ***b***) Encuentre el vértice y la directriz e indíquelos en la gráfica.

17. $r = \dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **18.** $r = \dfrac{3}{2 + 2\operatorname{sen}\theta}$

19. $r = \dfrac{5}{3 + 3\cos\theta}$ **20.** $r = \dfrac{2}{5 - 5\cos\theta}$

21–24 ■ Ecuación polar para una elipse Se da una ecuación polar de una cónica. ***a***) Demuestre que la cónica es una elipse y trace su gráfica. ***b***) Encuentre los vértices y la directriz e indíquelos en la gráfica. ***c***) Encuentre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor.

21. $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$ **22.** $r = \dfrac{6}{3 - 2\operatorname{sen}\theta}$

23. $r = \dfrac{12}{4 + 3\operatorname{sen}\theta}$ **24.** $r = \dfrac{18}{4 + 3\cos\theta}$

25–28 ■ Ecuación polar para una hipérbola Se da una ecuación polar de una cónica. ***a***) Demuestre que la cónica es una hipérbola y trace su gráfica. ***b***) Encuentre los vértices y la directriz e indíquelos en la gráfica. ***c***) Encuentre el centro de la hipérbola y trace las asíntotas.

25. $r = \dfrac{8}{1 + 2\cos\theta}$ **26.** $r = \dfrac{10}{1 - 4\operatorname{sen}\theta}$

27. $r = \dfrac{20}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$ **28.** $r = \dfrac{6}{2 + 7\cos\theta}$

29–36 ■ Identifique y trace la gráfica ***a***) Encuentre la excentricidad e identifique la cónica. ***b***) Trace la cónica y rotule los vértices.

29. $r = \dfrac{4}{1 + 3\cos\theta}$ **30.** $r = \dfrac{8}{3 + 3\cos\theta}$

31. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ **32.** $r = \dfrac{10}{3 - 2\operatorname{sen}\theta}$

33. $r = \dfrac{6}{2 + \operatorname{sen}\theta}$ **34.** $r = \dfrac{5}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$

35. $r = \dfrac{7}{2 - 5\operatorname{sen}\theta}$ **36.** $r = \dfrac{8}{3 + \cos\theta}$



37–40 ■ Girar una cónica Se da una ecuación polar de una cónica. ***a***) Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica. ***b***) Si esta cónica se gira alrededor del origen el ángulo dado θ escriba la ecuación resultante. ***c***) Trace gráficas de la cónica original y la cónica girada en la misma pantalla.

37. $r = \dfrac{1}{4 - 3\cos\theta}$; $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ **38.** $r = \dfrac{2}{5 - 3\operatorname{sen}\theta}$; $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

39. $r = \dfrac{2}{1 + \operatorname{sen}\theta}$; $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

40. $r = \dfrac{9}{2 + 2\cos\theta}$; $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$

HABILIDADES Plus



41. Familia de cónicas Trace la gráfica de las cónicas $r = e/(1 - e\cos\theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la curva?



42. Familia de cónicas

a) Trace la gráfica de las cónicas

$$r = \frac{ed}{(1 + e\operatorname{sen}\theta)}$$

para $e = 1$ y varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d a la forma de la cónica?

b) Trace la gráfica de estas cónicas para $d = 1$ y varios valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la cónica?

APLICACIONES

43. Órbita de la Tierra La ecuación polar de una elipse se puede expresar en términos de su excentricidad e y la longitud a de su eje mayor.

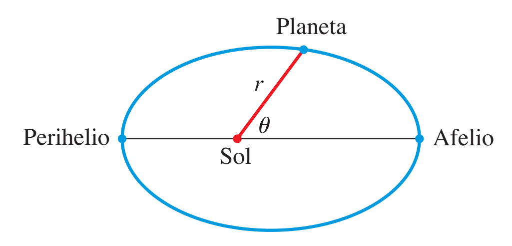
a) Demuestre que la ecuación polar de una elipse con directriz $x = -d$ se puede escribir en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

[*Sugerencia:* Use la relación $a^2 = e^2d^2/(1 - e^2)^2$ dada en la demostración de la página 825.]

b) Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco) dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es aproximadamente 2.99×10^8 km.

44. Perihelio y afelio Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Las posiciones de un planeta que son más cercanas al Sol y más alejadas del Sol se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente.



a) Use el ejercicio 43*a*) para demostrar que la distancia del perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia del afelio es $a(1 + e)$.

b) Use los datos del ejercicio 43*b*) para encontrar las distancias de la Tierra al Sol en el perihelio y en el afelio.

45. Órbita de Plutón La distancia de Plutón al Sol es 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Use el ejercicio 44 para encontrar la excentricidad de la órbita de Plutón.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

46. DISCUSIÓN: Distancia a un foco Cuando encontramos ecuaciones polares para las cónicas colocamos un foco en el polo. Es fácil encontrar la distancia de ese foco a cualquier punto en la cónica. Explique en qué forma la ecuación polar da esa distancia.

47. DISCUSIÓN: Ecuaciones polares de órbitas Cuando un satélite gira en órbita alrededor de la Tierra su trayectoria es una elipse con un foco en el centro de la Tierra. ¿Por qué los científicos usan coordenadas polares (en lugar de rectangulares) para rastrear la posición de satélites? [*Sugerencia:* Su respuesta al ejercicio 46 es importante aquí.]

CAPÍTULO 11 ■ REPASO

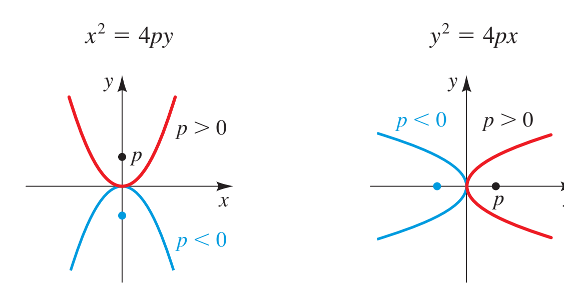
PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Definición geométrica de una parábola (p. 782)

Una **parábola** es el conjunto de puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo F (**foco**) y una recta fija l (**directriz**).

Gráficas de parábolas con vértice en el origen (pp. 783, 784)

Una parábola con vértice en el origen tiene una ecuación de la forma $x^2 = 4py$ si su eje es vertical y una ecuación de la forma $y^2 = 4px$ si su eje es horizontal.



Foco $(0, p)$, directriz $y = -p$ Foco $(p, 0)$, directriz $x = -p$

Definición geométrica de la elipse (p. 790)

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en el plano para el cual la suma de las distancias a cada uno de los dos puntos dados F_1 y F_2 (los **focos**) es una constante fija.

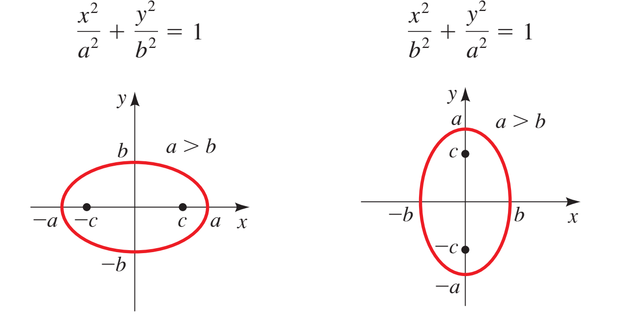
Gráficas de elipses con centro en el origen (p. 792)

Una elipse con centro en el origen tiene una ecuación de la forma

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ si su eje es horizontal y una ecuación de la forma

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ si su eje es vertical (donde en cada caso $a > b > 0$).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$ Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$

Excentricidad de una elipse (p. 795)

La **excentricidad** de una elipse con ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ o $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (donde $a > b > 0$) es el número

$$e = \frac{c}{a}$$

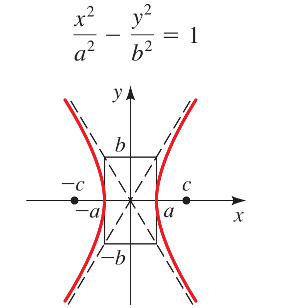
donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La excentricidad e de cualquier elipse es un número entre 0 y 1. Si e está cerca de 0, entonces la elipse es casi circular; si e está más cerca llega a 1, estará más alargada.

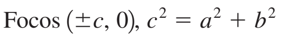
Definición geométrica de una hipérbola (p. 799)

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en el plano para el cual el valor absoluto de la diferencia de las distancias a cada uno de los dos puntos dados F_1 y F_2 (los focos) es una constante fija.

Gráficas de hipérbolas con centro en el origen (p. 800)

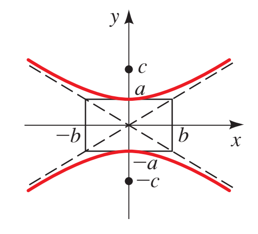
Una **hipérbola** con centro en el origen tiene una ecuación de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ si su eje es horizontal y una ecuación de la forma $-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ si su eje es vertical.





Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{b}{a}x$



Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 + b^2$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{a}{b}x$

Cónicas desplazadas (p. 808)

Si el vértice de una parábola o el centro de una elipse o de una hipérbola no residen en el origen sino más bien en el punto (h, k), entonces nos referimos a la curva como una **cónica desplazada**. Para encontrar la ecuación de la cónica desplazada utilizamos la forma “no desplazada” para la curva apropiada y sustituimos x por $x - h$ y y por $y - k$.

Ecuación general de una cónica desplazada (p. 812)

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(donde ni A y C son 0) es una cónica o una cónica degenerada. En los casos de no degeneradas la gráfica es

1. una **parábola** si $A = 0$ o $C = 0$,

2. una **elipse** si A y C tienen el mismo signo (o un círculo, si $A = C$),

3. una **hipérbola** si A y C tienen signo opuesto.

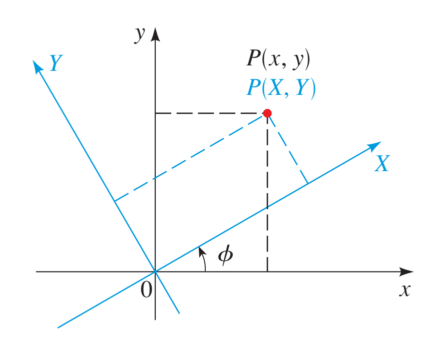
Para ver una gráfica cónica cuya ecuación se da en forma general, complete los cuadrados en x y y para poner la ecuación en forma estándar de una parábola, una elipse o una hipérbola.

Rotación de ejes (p. 817)

Supongamos que los ejes x y y en un plano de coordenadas se giran un ángulo agudo ϕ para producir los ejes, X y Y como se muestra en la figura siguiente. Entonces las coordenadas de un punto en los planos de XY y xy están relacionadas como sigue:

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi \qquad X = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi$$

$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi \qquad Y = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi$$



La ecuación general de la cónica (pp. 819, 822)

La ecuación general de una cónica es de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama discriminante de la ecuación. La gráfica es

1. una parábola si $B^2 - 4AC = 0$,

2. una elipse si $B^2 - 4AC < 0$,

3. una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

Para eliminar el término xy en la ecuación general de una cónica, gire los ejes a través de un ángulo ϕ que satisface

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

Ecuaciones polares de cónicas (p. 825)

Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta}$$

representa una cónica con un foco en el origen y con excentricidad e. La cónica es

1. una parábola si $e = 1$,

2. una elipse si $0 < e < 1$,

3. una hipérbola si $e > 1$.

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a)*** Dé la definición geométrica de una parábola.

b) Dé la ecuación de una parábola con vértice en el origen y con eje vertical. ¿Dónde está el foco? ¿Cuál es la directriz?

c) Trace la gráfica de la ecuación $x^2 = 8y$. Indique el foco en la gráfica.

2. ***a)*** Dé la definición geométrica de la elipse.

b) Dé la ecuación de una elipse con centro en el origen y con eje mayor a lo largo del eje x. ¿Cuál es el eje principal? ¿Cuál es el eje menor? ¿Dónde están los focos? ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?

c) Trace la gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. ¿Cuáles son las longitudes de los ejes mayores y menores? ¿Dónde están los focos?

3. ***a)*** Dé la definición geométrica de una hipérbola.

b) Dé la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y con eje transversal a lo largo del eje x. ¿Cuál es el eje transversal? ¿Dónde están los vértices? ¿Cuáles son las asíntotas? ¿Dónde están los focos?

c) ¿Cuál es un buen primer paso en la representación gráfica de la hipérbola que se describe en el inciso *b*)?

d) Trace la gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. ¿Cuáles son las asíntotas? ¿Dónde están los vértices? ¿Dónde están los focos? ¿Cuál es la longitud del eje transversal?

4. ***a)*** Supongamos que se nos da una ecuación en x y y. Que h y k son números positivos. ¿Cuál es el efecto en la gráfica de la ecuación si se sustituye x por $x - h$ o $x + h$ si y se sustituye por $y - k$ o $y + k$?

b) Trace una gráfica de $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$

5. ***a)*** ¿Cómo puede saber si la siguiente cónica no degenerada es una parábola, una elipse o una hipérbola?

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

b) ¿Qué cónica representa $3x^2 - 5y^2 + 4x + 5y - 8 = 0$?

6. *a*) Supongamos que los ejes x y y se giran un ángulo agudo ϕ para producir los ejes X y Y. ¿Cuáles son las ecuaciones que relacionan las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en el plano xy y en el plano XY, respectivamente?
   b) En la siguiente ecuación, ¿cómo se elimina el término xy?
   $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
   c) Use rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación
   $$25x^2 - 14xy + 25y^2 = 288$$
   Trace la gráfica de la ecuación.

7. *a*) ¿Cuál es el discriminante de la ecuación en el ejercicio 6? ¿Cómo se puede usar el discriminante para determinar el tipo de cónica que representa la ecuación?
   b) Utilice el discriminante para identificar la ecuación en el ejercicio 6.

8. *a*) Escriba las ecuaciones polares que representan una cónica con excentricidad e. ¿Para qué valores de e la cónica es una elipse? ¿Para cuáles una hipérbola? ¿Y para cuáles una parábola?
   b) ¿Qué cónica representa la ecuación polar $r = 2/(1 - \cos\theta)$? Trace la gráfica de la cónica.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–12 ■ Trazar la gráfica de parábolas Se da una ecuación de una parábola. ***a***) Encuentre el vértice, el foco y la directriz de la parábola. ***b***) Trace la gráfica de la parábola y su directriz.

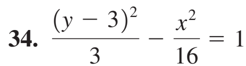
1. $y^2 = 4x$
2. $x = \frac{1}{12}y^2$
3. $\frac{1}{8}x^2 = y$
4. $x^2 = -8y$
5. $x^2 + 8y = 0$
6. $2x - y^2 = 0$
7. $(y - 2)^2 = 4(x + 2)$
8. $(x + 3)^2 = -20(y + 2)$
9. $\frac{1}{2}(y - 3)^2 + x = 0$
10. $2(x + 1)^2 = y$
11. $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 2y + 4$
12. $x^2 = 3(x + y)$

13–24 ■ Trazar la gráfica de elipses Se da la ecuación de elipse. ***a***) Encuentre el centro, los vértices y los focos de la elipse. ***b***) Determine las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse. ***c***) Trace la gráfica de la elipse.

13. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
14. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
15. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
16. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{36} = 1$
17. $x^2 + 4y^2 = 16$
18. $9x^2 + 4y^2 = 1$
19. $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
20. $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$
21. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{36} = 1$
22. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y+5)^2}{25} = 1$
23. $4x^2 + 9y^2 = 36y$
24. $2x^2 + y^2 = 2 + 4(x - y)$

25–36 ■ Trazar la gráfica de hipérbolas Se da la ecuación de una hipérbola. ***a***) Encuentre el centro, los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola. ***b***) Trace la gráfica de la hipérbola.

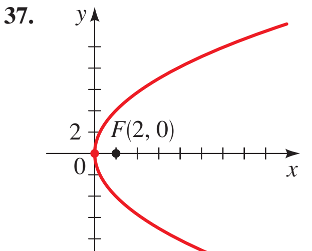
25. $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
26. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{32} = 1$
27. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{49} = 1$
28. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{4} = 1$
29. $x^2 - 2y^2 = 16$
30. $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$
31. $\dfrac{(x+4)^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
32. $\dfrac{(x-2)^2}{8} - \dfrac{(y+2)^2}{8} = 1$
33. $\dfrac{(y-3)^2}{4} - \dfrac{(x+1)^2}{36} = 1$
34. $\dfrac{(y-3)^2}{3} - \dfrac{x^2}{16} = 1$



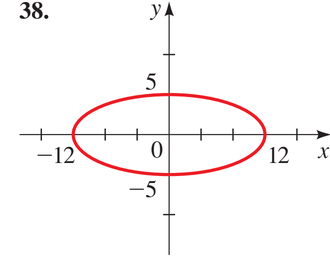
35. $9y^2 + 18y = x^2 + 6x + 18$
36. $y^2 = x^2 + 6y$

37–42 ■ Encontrar la ecuación de una cónica Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

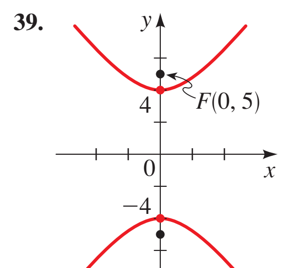
37.



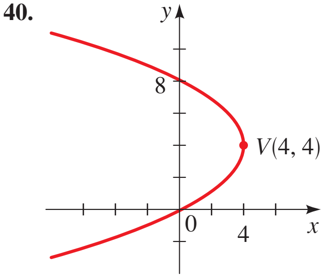
38.



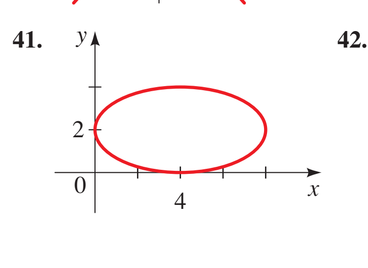
39.



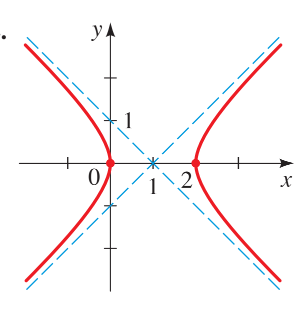
40.



41.



42.



43–54 ■ Identificar y trazar la gráfica de la cónica Determine si la ecuación representa una elipse, una parábola, una hipérbola o una cónica degenerada. Si la gráfica es una elipse, encuentre el centro, los focos y los vértices. Si es una parábola, encuentre el vértice, el foco y la directriz. Si se trata de una hipérbola encuentre el centro, los focos, los vértices y las asíntotas. Luego trace la gráfica de la ecuación. Si la ecuación no tiene gráfica explique por qué.

43. $\dfrac{x^2}{12} + y = 1$ **44.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{144} = \dfrac{y}{12}$

45. $x^2 - y^2 + 144 = 0$ **46.** $x^2 + 6x = 9y^2$

47. $4x^2 + y^2 = 8(x + y)$ **48.** $3x^2 - 6(x + y) = 10$

49. $x = y^2 - 16y$ **50.** $2x^2 + 4 = 4x + y^2$

51. $2x^2 - 12x + y^2 + 6y + 26 = 0$

52. $36x^2 - 4y^2 - 36x - 8y = 31$

53. $9x^2 + 8y^2 - 15x + 8y + 27 = 0$

54. $x^2 + 4y^2 = 4x + 8$

55–64 ■ Determinar la ecuación de una cónica Encuentre una ecuación para la sección cónica con las propiedades dadas.

55. La parábola con foco $F(0, 1)$ y directriz $y = -1$.

56. La parábola con vértice en el origen y foco $F(5, 0)$.

57. La elipse con centro en el origen y con intersecciones x, ± 2 e intersecciones y, ± 5.

58. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$.

59. La elipse con centro $C(0, 4)$, focos $F_1(0, 0)$ y $F_2(0, 8)$, y longitud 10 de eje mayor.

60. La hipérbola con centro $C(2, 4)$, focos $F_1(2, 1)$ y $F_2(2, 7)$ y vértices $V_1(2, 6)$ y $V_2(2, 2)$.

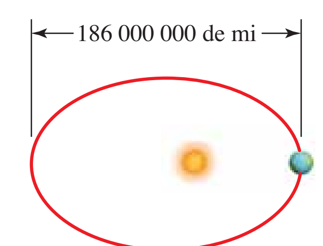
61. La elipse con focos $F_1(1, 1)$ y $F_2(1, 3)$ y con un vértice en el eje x.

62. La parábola con vértice $V(5, 5)$ y directriz el eje y.

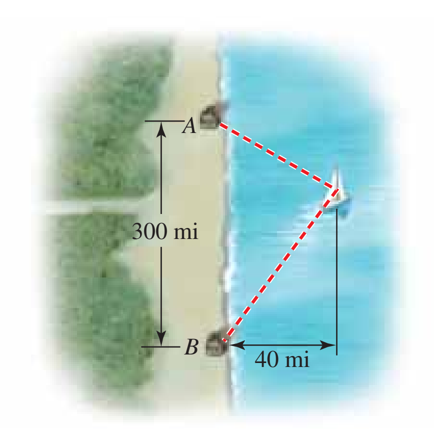
63. La elipse con vértices $V_1(7, 12)$ y $V_2(7, -8)$ y que pasa por el punto $P(1, 8)$.

64. La parábola con vértice $V(-1, 0)$ y eje horizontal de simetría, que cruza el eje y en $y = 2$.

65. La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una elipse con el Sol en un foco. La elipse tiene eje mayor de 186 000 000 de millas y excentricidad 0.017. Encuentre la distancia entre la Tierra y el Sol cuando la Tierra está ***a)*** más cercana al Sol y ***b)*** más alejada del Sol.



66. LORAN Un barco está localizado a 40 millas de una orilla recta. Las estaciones A y B están localizadas en la orilla, a 300 millas entre sí. De las señales LORAN el capitán determina que su barco está 80 mi más cerca de A que de B. Encuentre la posición del barco. (Coloque A y B en el eje y con el eje x a la mitad entre ellas. Encuentre las coordenadas x y y del barco.)





67. Familia de elipses

a) Trace las gráficas de la siguiente familia de elipses para $k = 1, 2, 4$ y 8.

$$\frac{x^2}{16 + k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

b) Demuestre que todas las elipses del inciso *a*) tienen los mismos focos.

68. Familia de parábolas

a) Trace las gráficas de la siguiente familia de parábolas para $k = \frac{1}{2}, 1, 2$ y 4.

$$y = kx^2$$

b) Encuentre los focos de las parábolas del inciso *a*).

c) ¿En qué forma cambia la posición del foco cuando k aumenta?

69–72 ■ Identificar una cónica Se da la ecuación de una cónica. ***a)*** Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. ***b)*** Use una rotación de ejes para eliminar el término en xy. ***c)*** Trace la gráfica.

69. $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

70. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y - 4 = 0$

71. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y = 0$

72. $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$



73–76 ■ Identificar una cónica a partir de su gráfica Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la cónica. Identifique el tipo de cónica a partir de la gráfica.

73. $5x^2 + 3y^2 = 60$ **74.** $9x^2 - 12y^2 + 36 = 0$

75. $6x + y^2 - 12y = 30$ **76.** $52x^2 - 72xy + 73y^2 = 100$

77–80 ■ Ecuaciones polares de las cónicas Se da una ecuación polar de una cónica. ***a)*** Encuentre la excentricidad e identifique la cónica. ***b)*** Trace la cónica y rotule los vértices.

77. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$ **78.** $r = \dfrac{2}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

79. $r = \dfrac{4}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$ **80.** $r = \dfrac{12}{1 - 4\cos\theta}$

1. Encuentre el foco y la directriz de la parábola $x^2 = -12y$, y trace su gráfica.

2. Encuentre los vértices, los focos y las longitudes de los ejes mayor y menor para la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Luego trace su gráfica.

3. Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. Luego trace su gráfica.

4. Encuentre una ecuación para la parábola cuyo vértice es (0, 0) y foco (4, 0).

5. Encuentre una ecuación para la elipse cuyos focos están en (± 3, 0) y focos en (± 4, 0).

6. Encuentre una ecuación para la elipse cuyos focos están en (0, ± 5) y con asíntotas $y = \pm \frac{3}{4}x$.

7–9 ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

7.

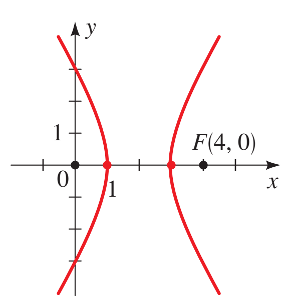
(−4, 2)

y 1 −1 0 x

8.

y (4, 3) 2 0 2 x

9.



10–12 ■ Determine si la ecuación representa una elipse, una parábola o una hipérbola. Si la gráfica es una elipse encuentre el centro, los focos y los vértices. Si es una parábola encuentre el vértice, el foco y la directriz. Si se trata de una hipérbola, encuentre el centro, los focos, los vértices y las asíntotas. Luego trace la gráfica de la ecuación.

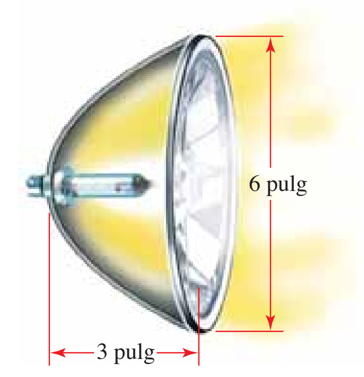
10. $16x^2 + 36y^2 - 96x + 36y + 9 = 0$

11. $9x^2 - 8y^2 + 36x + 64y = 164$

12. $2x + y^2 + 8y + 8 = 0$

13. Encuentre una ecuación de la elipse con centro (2, 0), focos (2, ± 3) y eje mayor de longitud 8.

14. Encuentre una ecuación para la parábola con foco (2, 4) y directriz el eje x.



15. Un reflector parabólico para las luces delanteras de un auto forma la silueta de un tazón de 6 pulgadas de ancho en su abertura y 3 pulgadas de profundidad como se muestra en la figura. ¿A qué distancia del vértice debe estar colocado el filamento de la bombilla eléctrica si este ha de estar colocado en el foco?

16. ***a***) Use el discriminante para determinar si la gráfica de esta ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$$

b) Use rotación de ejes para eliminar el término xy de la ecuación.

c) Trace la gráfica de la ecuación.

d) Encuentre las coordenadas de los vértices de esta cónica (en el sistema de coordenadas xy).

17. ***a***) Encuentre la ecuación polar de la cónica que tiene un foco en el origen, excentricidad $e = \frac{1}{2}$ y directriz $x = 2$. Trace la gráfica de la cónica.

b) ¿Qué tipo de cónica está representada por la siguiente ecuación? Trace su gráfica.

$$r = \frac{3}{2 - \operatorname{sen} \theta}$$

EN NUESTRO SITIO WEB SE PUEDE ENCONTRAR UN EXAMEN DE REPASO ACUMULATIVO DE LOS CAPÍTULOS 10 Y 11.
Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

Cónicas en arquitectura

Muchos edificios emplean secciones cónicas en su diseño. Los arquitectos tienen varias razones para usar estas curvas que van de estabilidad estructural a simple belleza. Pero, ¿cómo se puede construir con toda precisión una enorme parábola, elipse o hipérbola de concreto o acero? En este *Enfoque sobre modelado* veremos cómo se pueden usar las propiedades geométricas para construir estas formas.

Cónicas en construcciones

En tiempos antiguos la arquitectura era parte de las matemáticas por lo que los arquitectos tenían que ser matemáticos. Muchas de las estructuras que construyeron (pirámides, templos, anfiteatros y proyectos de irrigación) todavía están en servicio. En los tiempos modernos los arquitectos emplean principios matemáticos incluso más refinados. Las siguientes fotografías muestran algunas estructuras que emplean secciones cónicas en su diseño.



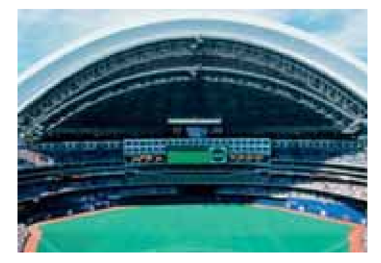
Anfiteatro romano en Alejandría, Egipto (círculo)

Nick Wheeler/Encyclopedia/Corbis



Cielo raso de la Sala de Estatuas en el Capitolio de Estados Unidos (elipse)

Architect of the Capitol



Techo del Skydome en Toronto, Canadá (parábola)

Walter Schmid/The Image Bank/Getty Images



Techo del Aeropuerto Dulles de Washington (hipérbola y parábola)

Andrew Holt/Photographer's Choice/Getty Images



Planetario McDonnell, San Luis, Missouri (hipérbola)

Joe Sohm/VisionsofAmerica/Photodisc/Getty Images



Ático en La Pedrera, Barcelona, España (parábola)

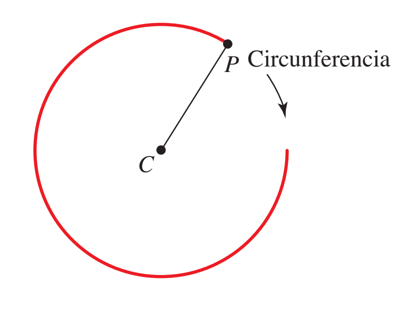
O. Alamany & E. Vicens/Terra/Corbis

Los arquitectos tienen diferentes razones para usar cónicas en sus diseños. Por ejemplo, el arquitecto español Antoni Gaudí utilizó parábolas en el ático de La Pedrera (vea arriba la foto). Él razonó que como una cuerda suspendida entre dos puntos con carga igualmente distribuida (como en un puente colgante) tiene la forma de una parábola, una parábola invertida daría el mejor apoyo para un techo plano.

Construcción de cónicas

Las ecuaciones de las cónicas son útiles en la manufactura de objetos pequeños porque una herramienta de corte controlada por computadora puede trazar con precisión una curva dada por una ecuación. Pero en el proyecto de un edificio, ¿cómo podemos construir una parte de una parábola, elipse o hipérbola que abarque el cielo raso o las paredes de un edificio? Las propiedades geométricas de las cónicas permiten formas prácticas de construcción. Por ejemplo, si fuéramos a construir una torre circular, escogeríamos un

punto de centro, asegurándonos de que las paredes de la torre estuvieran a una distancia fija de ese punto. Pueden construirse muros elípticos usando una cuerda anclada a dos puntos como se muestra en la figura 1.



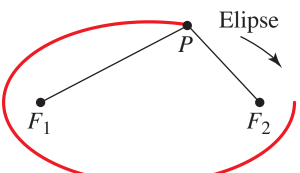


FIGURA 1 Construcción de una circunferencia y de una elipse

Para construir una parábola podemos usar el aparato que se ilustra en la figura 2. Una cuerda de longitud a se ancla en F y A. La escuadra en T, también de longitud a, se desliza a lo largo de una barra recta L. Un lápiz en P sostiene tirante la cuerda contra la escuadra en T. A medida que la escuadra en T se desliza a la derecha, el lápiz traza una curva.

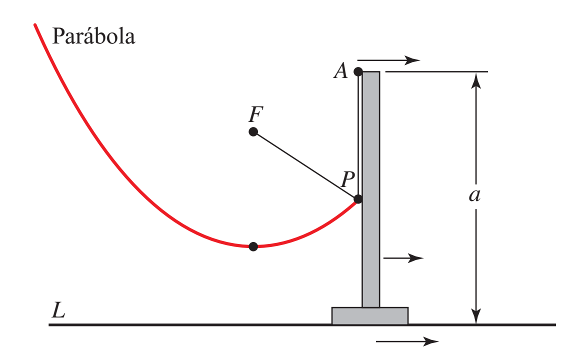


FIGURA 2 Construcción de una parábola

De la figura vemos que

$$d(F, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La cuerda es de longitud } a$$

$$d(L, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La escuadra en T es de longitud } a$$

Se deduce que $d(F, P) + d(P, A) = d(L, P) + d(P, A)$. Restando $d(P, A)$ de cada lado obtenemos

$$d(F, P) = d(L, P)$$

La última ecuación dice que la distancia de F a P es igual a la distancia de P a la recta L. De esta forma la curva es una parábola con foco F y directriz L.

En proyectos de construcción es más fácil construir una recta que una curva. Por tanto, en algunos edificios, como en la Torre Kobe (vea el problema 4) se produce una superficie curva al usar numerosas rectas. También podemos producir una curva usando rectas como la parábola que se muestra en la figura 3.

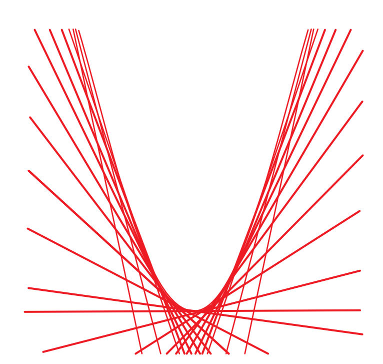


FIGURA 3 Rectas tangentes a una parábola

Cada recta es **tangente** a la parábola; esto es, la recta toca la parábola exactamente en un punto y no cruza la parábola. La recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (a, a^2) es

$$y = 2ax - a^2$$

Le pedimos que demuestre esto en el problema 6. La parábola recibe el nombre de **envolvente** de dichas rectas.

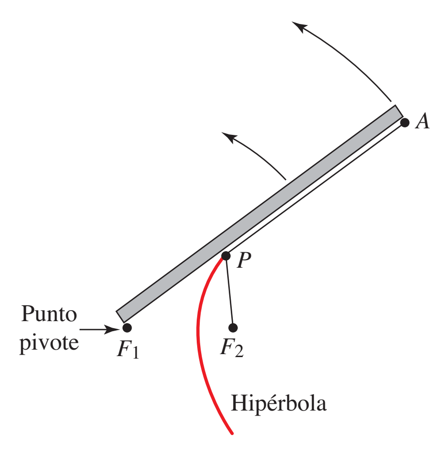
PROBLEMAS

1. Cónicas en arquitectura Las fotografías de la página 836 muestran seis ejemplos de construcciones que contienen secciones cónicas. Investigue en internet para encontrar otros ejemplos de estructuras que emplean parábolas, elipses o hipérbolas en sus diseños. Encuentre al menos un ejemplo de cada tipo de cónica.

2. Construcción de una hipérbola En este problema construimos una hipérbola. La barra de madera de la figura puede hacer pivote en F_1. Una cuerda más corta que la barra está anclada en F_2 y en A, el otro extremo de la barra. Un lápiz en P mantiene tirante la cuerda contra la barra cuando se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor de F_1.

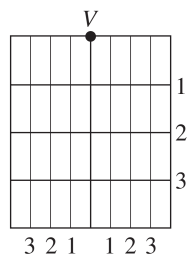
***a*)** Demuestre que la curva trazada por el lápiz es una rama de una hipérbola con focos en F_1 y F_2.

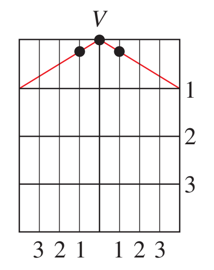
***b*)** ¿Cómo debe reconfigurarse el aparato para trazar la otra rama de la hipérbola?

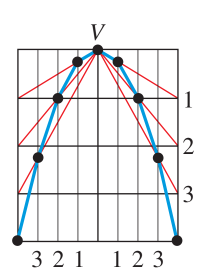


3. Una parábola en un rectángulo El método siguiente se puede usar para construir una parábola que ajuste en un rectángulo determinado. La parábola será aproximada por muchos segmentos de recta cortos.

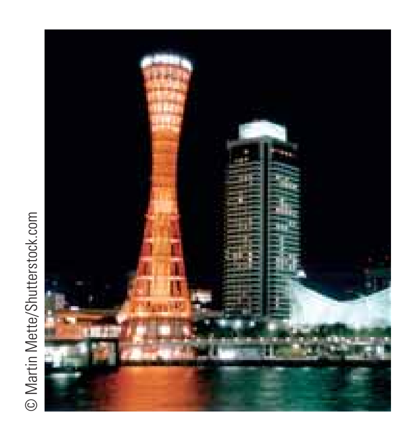
Primero trazamos un rectángulo. Divídalo a la mitad mediante un segmento de recta vertical y marque el punto extremo superior como V. Luego divida la longitud y el ancho de cada rectángulo medio en un número igual de partes para formar rectas en cuadrícula como se muestra en la siguiente figura. Trace las rectas desde V hacia los puntos extremos de la recta horizontal 1 de la cuadrícula, y rotule los puntos donde estas rectas intersecan las rectas verticales de cuadrícula marcadas con 1. Luego trace las rectas de V a los puntos extremos de la recta 2 horizontal de la cuadrícula. Continúe de esa forma hasta que haya empleado todas las rectas horizontales de la cuadrícula. Ahora use segmentos de recta para unir los puntos que ha marcado para obtener una aproximación a la parábola deseada. Aplique este procedimiento para trazar una parábola que ajuste en un rectángulo de 6 por 10 pies en un rectángulo de césped.



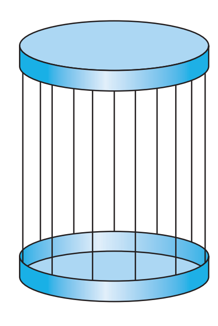


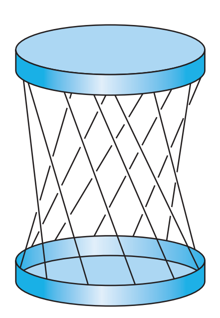


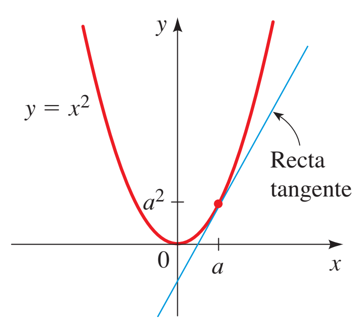
4. Hipérbolas a partir de líneas rectas En este problema construimos formas hiperbólicas usando líneas rectas. Perfore el borde de dos tapas de plástico grandes dejando espacios iguales entre los agujeros. Con cuerdas de igual longitud enlace los agujeros como se muestra en la figura de la página siguiente. Sosteniendo tirantes las cuerdas, tuerza una tapa contra la otra. Una superficie imaginaria que pasa por las cuerdas tiene secciones transversales



hiperbólicas. (Un ejemplo arquitectónico de esto es la Torre de Kobe en Japón que se muestra en la fotografía.) ¿Qué ocurre con los vértices de las secciones transversales hiperbólicas cuando las tapas se tuercen más?







5. Rectas tangentes a una parábola En este problema demostramos que la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (a, a^2) tiene la ecuación $y = 2ax - a^2$.

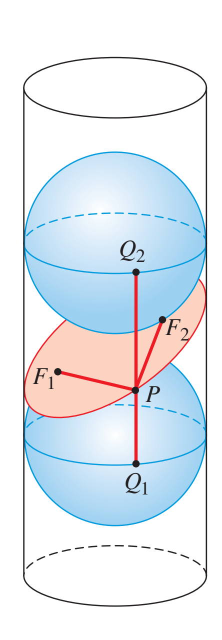
***a*)** Sea m la pendiente de la recta tangente en (a, a^2). Demuestre que la ecuación de la recta tangente es $y - a^2 = m(x - a)$.

***b*)** Use el hecho de que la recta tangente cruza la parábola sólo en un punto para demostrar que (a, a^2) es la única solución del sistema

$$\begin{cases} y - a^2 = m(x - a) \\ y = x^2 \end{cases}$$

***c*)** Elimine y del sistema del inciso *b*) para obtener una ecuación cuadrática en x. Demuestre que el discriminante de esta cuadrática es $(m - 2a)^2$. Dado que el sistema del inciso *b*) tiene exactamente una solución, el discriminante debe ser igual a 0. Encuentre m.

***d*)** Sustituya en la ecuación del inciso *a*) el valor que encontró para m en el inciso *c*), y simplifique para obtener la ecuación de la recta tangente.



6. Un cilindro cortado En este problema demostramos que cuando un cilindro es cortado por un plano, se forma una elipse. Un ejemplo arquitectónico de esto es el Planetario Tycho Brahe de Copenhague (vea fotografía). En la figura un cilindro es cortado por un plano, lo que resulta en la curva roja. Dentro del cilindro se deslizan dos esferas con el mismo radio que el cilindro, de modo que apenas tocan el plano en F_1 y F_2. Elija un punto arbitrario P de la curva, y sean Q_1 y Q_2 los dos puntos sobre el cilindro donde una recta vertical que pasa por P toca el "ecuador" de cada esfera.

***a*)** Demuestre que $PF_1 = PQ_1$ y $PF_2 = PQ_2$. [*Sugerencia:* Use el hecho de que todas las tangentes a una esfera desde un punto determinado fuera de la esfera son de la misma longitud.]

***b*)** Explique por qué $PQ_1 + PQ_2$ es igual para todos los puntos P en la curva.

***c*)** Demuestre que $PF_1 + PF_2$ es igual para todos los puntos P en la curva.

***d*)** Concluya que la curva es una elipse con focos F_1 y F_2.





12 Sucesiones y series

A lo largo de este libro hemos usado funciones para modelar situaciones del mundo real. Las funciones que hemos utilizado siempre han tenido números reales como entrada. Sin embargo, muchas situaciones del mundo real ocurren por etapas: etapa 1, 2, 3, . . . Para modelar este tipo de situaciones necesitamos funciones cuyas entradas sean los números naturales 1, 2, 3, . . . (que representan las etapas). Por ejemplo, las alturas que alcanza una pelota que rebota se representan con los números naturales 1, 2, 3, . . . (que representan las alturas 1, 2, 3, . . .). Una función f que modele las alturas de la pelota después de cada rebote tiene números naturales 1, 2, 3, . . . como entradas y da las alturas máximas como $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, . . . En general, una función cuyas entradas son los números naturales se llama una *sucesión*. Podemos pensar en una sucesión como simplemente una lista de números escritos en un orden específico.

La cantidad en una cuenta bancaria al final de cada mes, los pagos de la hipoteca y la cantidad de una anualidad también son sucesiones. Las fórmulas que generan estas sucesiones mueven nuestra economía; nos permiten solicitar préstamos para comprar la casa de nuestros sueños, más cerca de cuando nos graduemos que de cuando nos pensionemos.

Muchos patrones en la naturaleza se pueden modelar mediante sucesiones. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci describe tales variados patrones naturales como el crecimiento de una población de conejos, los arreglos de las hojas en una planta, la disposición de las escamas de una piña y el intrincado patrón de un nautilus (fotografía de arriba).

12.1 SUCESIONES Y NOTACIÓN DE SUMATORIA

■ Sucesiones ■ Sucesiones definidas en forma recursiva ■ Sumas parciales de una sucesión ■ Notación sigma

En términos generales, una sucesión es una lista infinita de números. Es frecuente que los números de una sucesión se escriban $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Los puntos quieren decir que la lista continúa hasta el infinito. Un ejemplo simple es la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{array}$$

Podemos describir el patrón de la sucesión que acabamos de mostrar con la siguiente *fórmula*:

$$a_n = 5n$$

Usted habrá pensado ya en una forma diferente de describir el modelo, es decir, "pasa de un número al siguiente sumando 5". Esta forma natural de describir la sucesión está expresada por la *fórmula de recurrencia*:

$$a_n = a_{n-1} + 5$$

empezando con $a_1 = 5$. Intente sustituir $n = 1, 2, 3, \ldots$ en cada una de estas fórmulas para ver cómo se producen los números de la sucesión. En esta sección vemos la forma en que se usan estas diferentes formas para describir sucesiones específicas.

■ Sucesiones

Cualquier lista ordenada de números se puede ver como una función cuyos valores de entrada son $1, 2, 3, \ldots$ y cuyos valores de salida son números de la lista. Así, definimos una sucesión como sigue:

DEFINICIÓN DE UNA SUCESIÓN

Una **sucesión** es una función a cuyo dominio es el conjunto de números naturales. Los **términos de la sucesión** son los valores de la función

$$a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n), \ldots$$

Por lo general escribimos a_n en lugar de la notación de función $a(n)$. En consecuencia, los términos de la sucesión se escriben como

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 se denomina **primer término**, a_2 se llama **segundo término** y, en general, a_n recibe el nombre de ***n*-ésimo término**.

Ahora veamos un ejemplo simple de una sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Otra forma de escribir esta sucesión es mediante la notación de función:

$$a(n) = 2n$$

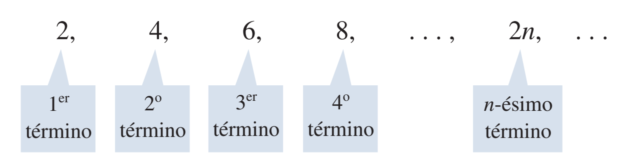
por tanto,

$$a(1) = 2, a(2) = 4, a(3) = 6, \ldots$$

Podemos escribir una sucesión en esta forma cuando es evidente cuáles son los términos subsiguientes de la sucesión. Esta sucesión está formada por números pares. Para ser más precisos, no obstante, necesitamos especificar un procedimiento para encontrar *todos* los términos de la sucesión. Esto se puede hacer al dar una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión. En este caso,

$$a_n = 2n$$

y la sucesión se puede escribir como



Observe cómo la fórmula $a_n = 2n$ da todos los términos de la sucesión. Por ejemplo, al sustituir 1, 2, 3 y 4 para n se obtienen los primeros cuatro términos:

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Para encontrar el 103° término de esta sucesión usamos $n = 103$ para obtener

$$a_{103} = 2 \cdot 103 = 206$$

EJEMPLO 1 ■ Encontrar los términos de una sucesión

Encuentre los primeros cinco términos del centésimo término de la sucesión definida por cada fórmula.

a) $a_n = 2n - 1$ ***b)*** $c_n = n^2 - 1$

c) $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ ***d)*** $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

SOLUCIÓN Para encontrar los primeros cinco términos sustituimos $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 en la fórmula del n-ésimo término. Para encontrar el 100º término, sustituimos $n = 100$. Esto da lo siguiente.

***n*-ésimo término**	**Primeros cinco términos**	**100º término**
a) $2n - 1$	1, 3, 5, 7, 9	199
b) $n^2 - 1$	0, 3, 8, 15, 24	9999
c) $\dfrac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$	$\frac{100}{101}$
d) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2^{100}}$

Ahora intente realizar los ejercicios 3, 5, 7 y 9 ■

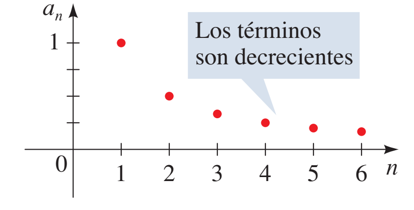


FIGURA 1

FIGURA 2

En el ejemplo 1*d*) la presencia de $(-1)^n$ en la sucesión tiene el efecto de hacer términos sucesivos alternadamente negativos y positivos.

Con frecuencia es útil representar una sucesión con una gráfica. Dado que una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales podemos trazar su gráfica en el plano cartesiano. Por ejemplo, la gráfica de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

se muestra en la figura 1.

Compare la gráfica de la sucesión que se muestra en la figura 1 con la gráfica de

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

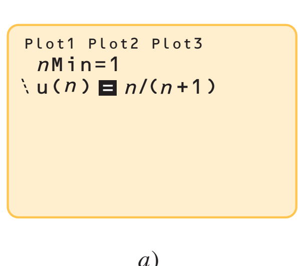
que se muestra en la figura 2. La gráfica de toda sucesión está formada por puntos aislados que *no están* conectados.

Vea el apéndice D*, *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para más instrucciones específicas para trabajar con sucesiones.
Visite **www.stewartmath.com****.

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible en inglés

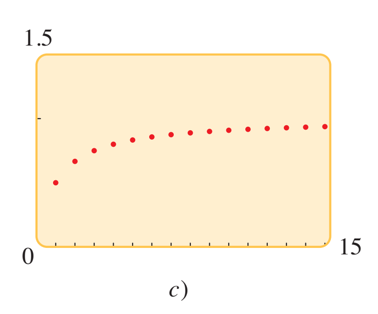
Las calculadoras graficadoras son útiles para analizar sucesiones. Para trabajar con sucesiones en una TI-83 ponemos la calculadora en el modo de `Seq` (modo de "sucesión") como en la figura 3*a*). Si ingresamos la sucesión $u(n) = n/(n + 1)$ del ejemplo 1*c*) podemos presentar en la pantalla los términos usando la instrucción `TABLE` como se muestra en la figura 3*b*). También podemos trazar la gráfica de la sucesión como se muestra en la figura 3*c*).



a)

n	u(n)	
1	.5	
2	.66667	
3	.75	
4	.8	
5	.83333	
6	.85714	
7	.875	
n=1		

b)



c)

FIGURA 3
$u(n) = n/(n + 1)$

No todas las sucesiones pueden estar definidas por una fórmula. Por ejemplo, no hay fórmula conocida para la sucesión de números primos:[1]

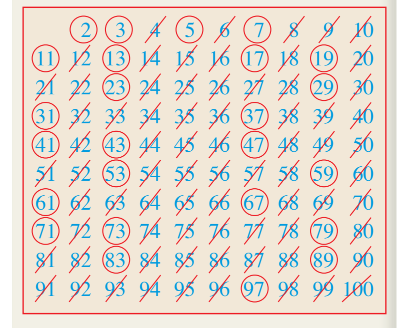
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, . . .

Encontrar patrones es una parte va de las matemáticas. Considere la sucesión que se inicia con

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

¿Puede usted detectar un patrón en estos números? En otras palabras, ¿puede definir una sucesión cuyos primeros cuatro términos son estos números? La respuesta a esta pregunta parece fácil; estos números son los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4. Entonces, la sucesión que buscamos está definida por $a_n = n^2$. Sin embargo, Esta no es la *única* sucesión cuyos primeros cuatro términos son 1, 4, 9, 16. En otras palabras, la respuesta a nuestro problema no es única (vea el ejercicio 86). En el siguiente ejemplo nos interesa encontrar una sucesión *obvia* cuyos primeros términos concuerden con los dados.

ERATÓSTENES (hacia 276–195 a.C.) fue un afamado geógrafo, matemático y astrónomo griego. Con toda precisión calculó la circunferencia de la Tierra mediante un ingenioso método, sin embargo, es más famoso por su método para encontrar números primos, ahora llamado *criba de Eratóstenes*. El método consiste en hacer una lista de enteros, empezando con el 2 (el primer primo) y luego cruzar todos los múltiplos de 2, que no son primos. El siguiente número restante en la lista es el 3 (segundo número primo) y otra vez cruzamos todos los múltiplos de este. El siguiente número restante es el 5 (tercer número primo) y cruzamos todos los múltiplos del mismo, y así sucesivamente. De esta forma todos los números que no son primos quedan cruzados y los números restantes son los primos.



EJEMPLO 2 ■ Encontrar el *n*-ésimo término de una sucesión

Encuentre el *n*-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se dan.

***a*)** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$ ***b*)** $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

SOLUCIÓN

***a*)** Observamos que los numeradores de estas fracciones son números impares y los denominadores son números pares. Los números pares son de la forma $2n$, y los impares son de la forma $2n - 1$ (un número impar difiere del número par en 1). Por tanto, una sucesión que tiene estos números para sus primeros cuatro términos está dada por

$$a_n = \frac{2n - 1}{2n}$$

***b*)** Estos números son potencias de 2, y se alternan en signo, de modo que una sucesión que concuerde con estos términos está dada por

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

Usted debe verificar que estas fórmulas generan en realidad los términos dados.

Ahora intente realizar los ejercicios 29 y 35 ■

[1] Un *número primo* es un número entero p cuyos únicos divisores son p y 1. (Por convención, el número 1 no se considera primo.)

Números primos grandes
La búsqueda de números primos grandes fascina a muchas personas. Al momento de escribir esto, el número primo conocido más grande es

$$2^{57\,885\,161} - 1$$

Fue descubierto por el Dr. Curtis Cooper de la Universidad Central de Missouri, en enero de 2013. En notación decimal este número contiene 17 425 170 dígitos. Si se escribiera completo ocuparía más de tres veces todas las páginas que contiene este libro. Cooper estuvo trabajando con un grupo grande de internet conocido como GIMPS (el Great Internet Mersenne Prime Search). Los números de la forma $2^p - 1$, donde p es primo, se denominan números Mersenne y se verifican más fácilmente respecto a su calidad de primos que otros. Esto es por lo cual los primos conocidos más grandes son de esta forma.

Sucesiones definidas en forma recursiva

Algunas sucesiones no tienen fórmulas definitorias sencillas como las del ejemplo anterior. El n-ésimo término de una sucesión puede depender de alguno o de todos los términos que lo preceden. Una sucesión definida de esta forma se denomina **recursiva**. Veamos a continuación dos ejemplos.

EJEMPLO 3 ■ Encontrar los términos de una sucesión definida en forma recursiva

Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión definida en forma recursiva por $a_1 = 1$ y

$$a_n = 3(a_{n-1} + 2)$$

a) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.

b) Use una calculadora graficadora para encontrar el 20º término de la sucesión.

SOLUCIÓN

a) La fórmula que define esta sucesión es de recurrencia. Nos permite encontrar el n-ésimo término a_n si conocemos el término anterior a_{n-1}. Entonces, podemos encontrar el segundo término a partir del primero, el tercer término a partir del segundo, el cuarto término a partir del tercer término, y así sucesivamente. Dado que nos dan el primer término $a_1 = 1$ podemos continuar como sigue:

$$a_2 = 3(a_1 + 2) = 3(1 + 2) = 9$$
$$a_3 = 3(a_2 + 2) = 3(9 + 2) = 33$$
$$a_4 = 3(a_3 + 2) = 3(33 + 2) = 105$$
$$a_5 = 3(a_4 + 2) = 3(105 + 2) = 321$$

En consecuencia, los primeros cinco términos de esta sucesión son

$$1, 9, 33, 105, 321, \ldots$$

b) Observe que para encontrar el 20º término de la sucesión del ejemplo 3, primero debemos encontrar los 19 términos anteriores. Esto se hace con más facilidad usando una calculadora graficadora. La figura 4*a*) muestra cómo ingresar esta sucesión en la calculadora TI-83. De la figura 4*b*) vemos que el 20º término de la sucesión es

$$a_{20} = 4\,649\,045\,865$$

Vea el apéndice D*, *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para más instrucciones específicas para trabajar con sucesiones.
Visite **www.stewartmath.com****.

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible ven inglés

```
Plot1 Plot2 Plot3
 nMin=1
\u(n)=3(u(n-1)+2)
 u(nMin)={1}
```

a)

```
u(20)
            4649045865
```

b)

FIGURA 4
$u(n) = 3(u(n-1) + 2), u(1) = 1$

Ahora intente realizar los ejercicios 15 y 25 ■

EJEMPLO 4 ■ La sucesión de Fibonacci

Encuentre los primeros 11 términos de la sucesión definida en forma recursiva por $F_1 = 1, F_2 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$



FIBONACCI (1175-1250) nació en Pisa, Italia, y se educó en el norte de África. Viajó extensamente por el Mediterráneo y aprendió varios métodos entonces en uso para escribir números. A su regreso a Pisa, en 1202, Fibonacci apoyó el uso del sistema decimal hindú-árabe, que es el que usamos hoy en día, más que el sistema numérico romano que en aquel tiempo se usaba en Europa. Su libro más famoso, *Liber Abaci*, expone las ventajas del sistema hindú-árabe. En realidad, la multiplicación y la división eran tan complicadas usando números romanos que era necesario un título universitario para dominar estos conocimientos. Curiosamente, en 1299, la ciudad de Florencia proscribió el uso del sistema decimal a comerciantes y financieros, exigiendo números escritos en romanos o con palabras. Nosotros sólo podemos especular acerca de las razones de esta ley.

SOLUCIÓN Para encontrar F_n necesitamos encontrar los dos términos precedentes, F_{n-1} y F_{n-2}. Ya que nos dan F_1 y F_2, procedemos como sigue:

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Es claro lo que está ocurriendo aquí. Cada término es simplemente la suma de los dos términos que lo preceden, de modo que con toda facilidad podemos escribir tantos términos como queramos. Ahora se presentan los primeros 11 términos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

La sucesión del ejemplo 4 se denomina **sucesión de Fibonacci**, en honor del matemático italiano del siglo XIII quien la usó para resolver un problema en torno a la cría de conejos (vea el ejercicio 85). La sucesión también se presenta en muchas otras situaciones en la naturaleza. (Vea las figuras 5 y 6.) De hecho, tantos fenómenos se comportan como la sucesión de Fibonacci que una publicación matemática trimestral, el *Fibonacci Quarterly*, está dedicada por entero a sus propiedades.

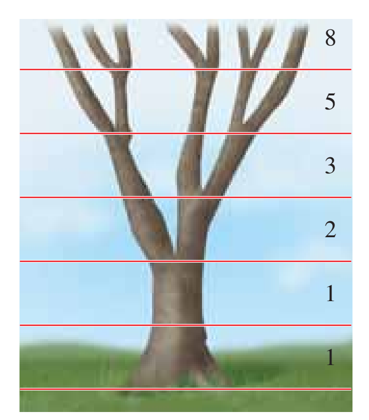
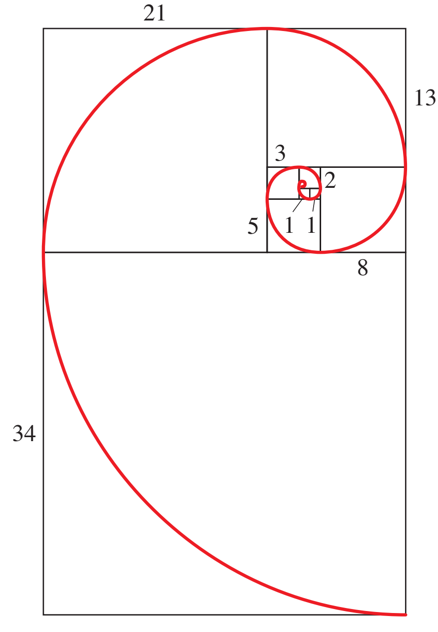


FIGURA 5 Sucesión de Fibonacci en las ramas de un árbol



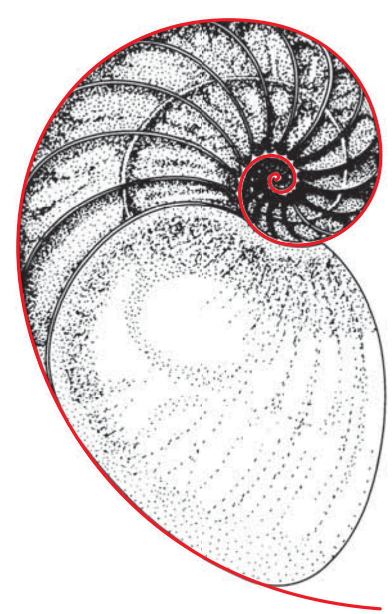


FIGURA 6 Espiral de Fibonacci — Concha de nautilo

Sumas parciales de una sucesión

En cálculo, con frecuencia estamos interesados en sumar los términos de una sucesión. Esto conduce a la siguiente definición.

SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN

Para la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

las **sumas parciales** son

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

S_1 se llama **primera suma parcial**, S_2 es la **segunda suma parcial**, y así sucesivamente. S_n se llama ***n*-ésima suma parcial**. La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ se llama **sucesión de sumas parciales**.

EJEMPLO 5 ■ Encontrar las sumas parciales de una sucesión

Encuentre las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión dada por $a_n = 1/2^n$.

SOLUCIÓN Los términos de la sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Las primeras cuatro sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Observe que, en el valor de cada suma parcial el denominador es una potencia de 2 y el numerador es uno menos que el denominador. En general, la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Los primeros cinco términos de a_n y S_n están graficados en la figura 7.

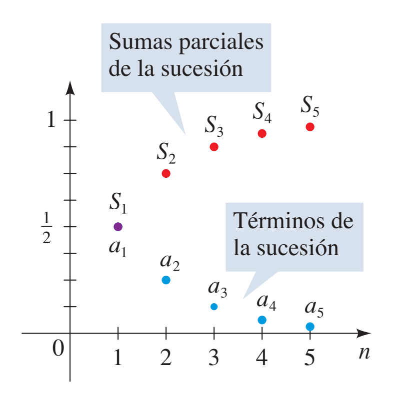


FIGURA 7 Gráfica de la sucesión a_n y la sucesión de sumas parciales S_n

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

EJEMPLO 6 ■ Encontrar las sumas parciales de una sucesión

Encuentre las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

SOLUCIÓN Las primeras cuatro sumas parciales son

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$$

¿Detecta el patrón aquí? Desde luego. La n-ésima suma parcial es

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

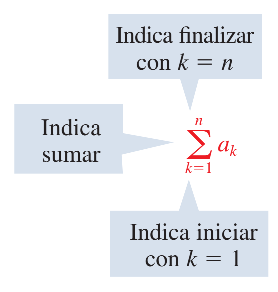
Ahora intente realizar el ejercicio 45 ■

■ Notación sigma

Dada una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

podemos escribir la suma de los primeros n términos usando **notación de sumatoria**, o **notación sigma**. Esta notación toma su nombre de la letra griega Σ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra S para "suma"). La notación sigma se usa como sigue:



$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

El lado izquierdo de esta expresión se lee: "La sumatoria de a_k de $k = 1$ a $k = n$". La letra k se llama **índice de la sumatoria**, o **variable de la sumatoria**, y la idea es sustituir k en la expresión después de la sigma por los enteros 1, 2, 3, . . . , n, y sumar las expresiones resultantes, llegando al lado derecho de la ecuación.

EJEMPLO 7 ■ Notación sigma

Encuentre cada suma.

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ ***b)*** $\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j}$ ***c)*** $\sum_{k=5}^{10} k$ ***d)*** $\sum_{i=1}^{6} 2$

SOLUCIÓN

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

b) $\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$

c) $\displaystyle\sum_{k=5}^{10} k = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$

Ahora intente realizar los ejercicios 47 y 49 ■

```
sum(seq(K²,K,1,5,1))
                    55
sum(seq(1/J,J,3,5,
1))▶Frac
                 47/60
```

FIGURA 8

Podemos usar una calculadora graficadora para evaluar sumas. Por ejemplo, la figura 8 muestra cómo se usa la TI-83 para evaluar las sumas de los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 7.

EJEMPLO 8 ■ Escribir sumas en notación sigma

Escriba cada suma usando notación sigma.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$

b) $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77}$

SOLUCIÓN

a) Podemos escribir

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = \sum_{k=1}^{7} k^3$$

b) Una forma natural de escribir esta suma es

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=3}^{77} \sqrt{k}$$

No obstante, no hay una forma única de escribir una suma en notación sigma. También podríamos escribir esta suma como

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=0}^{74} \sqrt{k+3}$$

o

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=1}^{75} \sqrt{k+2}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 67 y 69 ■

La razón de oro

Los antiguos griegos consideraban que un segmento de recta se ha de dividir en la **razón de oro** si la razón entre la parte más corta y la parte más larga es igual que la razón entre la parte más larga y todo el segmento.



Entonces, el segmento mostrado está dividido en la razón de oro si

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x}$$

Esto conduce a una ecuación cuadrática cuya solución positiva es

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Esta razón se presenta naturalmente en muchos lugares. Por ejemplo, experimentos psicológicos muestran que la forma más agradable del rectángulo es aquella cuyos lados están en una razón de oro. Los antiguos griegos estuvieron de acuerdo con esto y construyeron sus templos con esta razón.

La razón de oro está relacionada con la sucesión de Fibonacci. De hecho, se puede demostrar mediante cálculo* que el cociente entre dos números sucesivos de Fibonacci

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

se acerca más a la razón de oro cuanto más grande sea el valor de n. Trate de encontrar esta razón para $n = 10$.



*Vea *Principles of Problem Solving* 13 [Principios para la resolución de problemas 13] en el sitio web de este libro: www.stewartmath.com. [Este material se encuentra disponible en inglés.]

Las siguientes propiedades de sumas son consecuencias naturales de propiedades de los números reales.

PROPIEDADES DE SUMAS

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, y $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ sucesiones. Entonces, para todo entero positivo n y cualquier número real c, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

3. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

Demostración Para demostrar la propiedad 1, escribimos el lado izquierdo de la ecuación para obtener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

Debido a que la adición es conmutativa y asociativa podemos reacomodar los términos del lado derecho para obtener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Al volver a escribir el lado derecho usando notación sigma da la propiedad 1. La propiedad 2 se demuestra en una forma similar. Para demostrar la propiedad 3 usamos la propiedad distributiva:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$
$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$ ■

12.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una sucesión es una función cuyo dominio es ________.

2. La n-ésima suma parcial de una sucesión es la suma de los primeros ________ términos de la sucesión. Entonces, para la sucesión $a_n = n^2$ la cuarta suma parcial es $S_4 =$ ____ + ____ + ____ + ____ = ____.

HABILIDADES

3–14 ■ Términos de una sucesión Encuentre los primeros cuatro términos y el 100º término de la sucesión.

3. $a_n = n - 3$

4. $a_n = 2n - 1$

5. $a_n = \dfrac{1}{2n + 1}$

6. $a_n = n^2 - 1$

7. $a_n = 5^n$

8. $a_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$

9. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

10. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

11. $a_n = 1 + (-1)^n$

12. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n + 1}$

13. $a_n = n^n$

14. $a_n = 3$

15–20 ■ Sucesiones recursivas Se da la fórmula de una sucesión definida recursivamente. Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.

15. $a_n = 2(a_{n-1} + 3)$ y $a_1 = 4$

16. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{6}$ y $a_1 = -24$

17. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ y $a_1 = 1$

18. $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$ y $a_1 = 1$

19. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 2$

20. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ y $a_1 = a_2 = a_3 = 1$



21–26 ■ Términos de una sucesión Use una calculadora graficadora para hacer lo siguiente. ***a***) Encontrar los primeros 10 términos de la sucesión. ***b***) Trazar la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión.

21. $a_n = 4n + 3$ **22.** $a_n = n^2 + n$

23. $a_n = \dfrac{12}{n}$ **24.** $a_n = 4 - 2(-1)^n$

25. $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$ y $a_1 = 2$

26. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 3$

27–38 ■ *n*-ésimo término de una sucesión Encuentre el n-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se dan.

27. 2, 4, 6, 8, . . . **28.** 1, 3, 5, 7, . . .

29. 2, 4, 8, 16, . . . **30.** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

31. −2, 3, 8, 13, . . . **32.** 7, 4, 1, −2, . . .

33. 5, −25, 125, −625, . . . **34.** 3, 0.3, 0.03, 0.003, . . .

35. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$ **36.** $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

37. 0, 2, 0, 2, 0, 2, . . . **38.** $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$

39–42 ■ Sumas parciales Encuentre las primeras seis sumas parciales $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ de la sucesión cuyo n-ésimo término está dado.

39. 1, 3, 5, 7, . . . **40.** $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

41. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \ldots$ **42.** −1, 1, −1, 1, . . .

43–46 ■ *n*-ésimo suma parcial Encuentre las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión a_n.

43. $a_n = \dfrac{2}{3^n}$ **44.** $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

45. $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

46. $a_n = \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ [*Sugerencia:* Use una propiedad de logaritmos para escribir el n-ésimo término como una diferencia.]

47–54 ■ Evaluación de una suma Encuentre la suma.

47. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k$ **48.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2$

49. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}$ **50.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} (-1)^j$

51. $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} [1 + (-1)^i]$ **52.** $\displaystyle\sum_{i=4}^{12} 10$

53. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}$ **54.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} i2^i$



55–60 ■ Evaluación de una suma Use una calculadora graficadora para evaluar la suma.

55. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$ **56.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

57. $\displaystyle\sum_{j=7}^{20} j^2(1 + j)$ **58.** $\displaystyle\sum_{j=5}^{15} \frac{1}{j^2 + 1}$

59. $\displaystyle\sum_{n=0}^{22} (-1)^n 2n$ **60.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^n}{n}$

61–66 ■ Notación sigma Escriba la suma sin usar notación sigma.

61. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^3$ **62.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{j-1}{j+1}}$

63. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \sqrt{k+4}$ **64.** $\displaystyle\sum_{k=6}^{9} k(k+3)$

65. $\displaystyle\sum_{k=3}^{100} x^k$ **66.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x^j$

67–74 ■ Notación sigma Escriba la suma usando notación sigma.

67. $2 + 4 + 6 + \cdots + 50$

68. $2 + 5 + 8 + \cdots + 29$

69. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

70. $\dfrac{1}{2 \ln 2} - \dfrac{1}{3 \ln 3} + \dfrac{1}{4 \ln 4} - \dfrac{1}{5 \ln 5} + \cdots + \dfrac{1}{100 \ln 100}$

71. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{999 \cdot 1000}$

72. $\dfrac{\sqrt{1}}{1^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

73. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100}$

74. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \cdots - 100x^{99}$

HABILIDADES Plus

75. *n*-ésimo término de la sucesión Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2\sqrt{2}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \ldots$$

[*Sugerencia:* Escriba cada término como una potencia de 2.]



76. Comparar una sucesión con la sucesión de Fibonacci Defina la sucesión

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)$$

Use la instrucción `TABLE` en una calculadora graficadora para encontrar los primeros 10 términos de esta sucesión. Compare con la sucesión de Fibonacci F_n.

APLICACIONES

77. Interés compuesto Julio deposita 2 000 dólares en una cuenta de ahorros que paga 2.4% de interés al año, capitalizado mensualmente. La cantidad en la cuenta después de n meses está dada por

$$A_n = 2\,000\left(1 + \frac{0.024}{12}\right)^n$$

a) Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.

b) Encuentre la cantidad en la cuenta después de 3 años.

78. Interés compuesto Al finalizar cada mes, Elena deposita 100 dólares en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado mensualmente. La cantidad de interés que ha acumulado después de n meses está dada por la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1.005^n - 1}{0.005} - n\right)$$

a) Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.

b) Encuentre el interés que ha acumulado después de 5 años.

79. Población de una ciudad En el año 2004, una ciudad ha incorporado una población de 35 000 habitantes. Se espera que la población aumente a razón de 2% al año. La población n años después de 2004 está dada por la sucesión

$$P_n = 35\,000(1.02)^n$$

a) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.

b) Encuentre la población en 2014.

80. Pagar una deuda Margarita le solicita en préstamo 10 000 dólares a su tío y conviene en saldarlo con pagos mensuales de 200 dólares. Su tío le cobra 0.5% de interés al mes sobre el saldo.

a) Demuestre que su saldo A_n en el n-ésimo mes está dado en forma recursiva por $A_0 = 10\,000$ y

$$A_n = 1.005A_{n-1} - 200$$

b) Encuentre su saldo después de seis meses.

81. Cultivo de peces Un criador de pescado tiene 5 000 bagres en su estanque. El número de bagres aumenta 8% al mes, y el criador cosecha 300 bagres mensuales.

a) Demuestre que la población de bagres P_n después de n meses está dada recursivamente por $P_0 = 5\,000$ y

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300$$

b) ¿Cuántos peces hay en el estanque después de 12 meses?

82. Precio de una casa El precio medio de una casa en el condado de Orange aumenta alrededor de 6% al año. En 2002 el precio medio era de 240 000 dólares. Sea P_n el precio medio n años después de 2002.

a) Encuentre una fórmula para la sucesión P_n.

b) Encuentre el precio medio esperado en 2010.

83. Aumentos de salario A un vendedor recientemente contratado se le promete un salario inicial de 30 000 dólares al año con un aumento de 2 000 dólares anuales. Sea S_n su salario en su n-ésimo año de empleo.

a) Encuentre una definición recursiva de S_n.

b) Encuentre su salario en su quinto año de empleo.

84. Concentración de una solución Una bióloga está tratando de encontrar la concentración óptima de sal para el crecimiento de cierta especie de molusco. Empieza con una solución de salmuera que tiene 4 g/L de sal y aumenta la concentración en 10% al día. Denote con C_0 la concentración inicial y C_n la concentración después de n días.

a) Encuentre una definición recursiva de C_n.

b) Encuentre la concentración de sal después de 8 días.

85. Conejos de Fibonacci Fibonacci planteó el siguiente problema: supongamos que los conejos viven por siempre y que mensualmente cada par produce un nuevo par que se hace productivo a la edad de 2 meses. Si empezamos con un par recién nacido, ¿cuántos pares de conejos tendremos en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es F_n, donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

86. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Diferentes sucesiones que empiezan iguales

a) Demuestre que los primeros cuatro términos de la sucesión $a_n = n^2$ son

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

b) Demuestre que los primeros cuatro términos de la sucesión $a_n = n^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ también son

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

c) Encuentre una sucesión cuyos primeros seis términos son los mismos que los de $a_n = n^2$ pero cuyos términos sucesivos difieren de esta sucesión.

d) Encuentre dos sucesiones diferentes que empiezan con

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

87. DISCUSIÓN: Una sucesión definida en forma recursiva Encuentre los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Haga una conjetura acerca de este tipo de sucesión. Intente otros valores diferentes para a_1 para probar su conjetura.

88. DISCUSIÓN: Un tipo diferente de recursión Encuentre los primeros 10 términos de la sucesión definida por

$$a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}}$$

con

$$a_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad a_2 = 1$$

¿En qué difiere esta sucesión recursiva respecto a las otras de esta sección?

12.2 SUCESIONES ARITMÉTICAS

■ Sucesiones aritméticas ■ Sumas parciales de sucesiones aritméticas

En esta sección estudiamos un tipo especial de sucesión, llamado sucesión aritmética.

■ Sucesiones aritméticas

Quizá la forma más sencilla de generar una sucesión es empezar con un número a y sumarle una cantidad constante fija d, una y otra vez.

DEFINICIÓN DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA

Una **sucesión aritmética** es una sucesión de la forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$$

El número a es el **primer término** y d es la **diferencia común** de la sucesión. El ***n*-ésimo** término de una sucesión aritmética está dado por

$$a_n = a + (n - 1)d$$

El número d se llama diferencia común porque cualesquier dos términos consecutivos de una sucesión aritmética difieren en d.

EJEMPLO 1 ■ Sucesiones aritméticas

a) Si $a = 2$ y $d = 3$, entonces tenemos la sucesión aritmética

$$2, 2 + 3, 2 + 6, 2 + 9, \ldots$$

o $$2, 5, 8, 11, \ldots$$

Cualesquier dos términos consecutivos de esta sucesión difieren en $d = 3$. El n-ésimo término es $a_n = 2 + 3(n - 1)$.

b) Considere la sucesión aritmética

$$9, 4, -1, -6, -11, \ldots$$

Aquí la diferencia común es $d = -5$. Los términos de una sucesión aritmética decrecen si la diferencia común es negativa. El n-ésimo término es $a_n = 9 - 5(n - 1)$.

c) La gráfica de la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2(n - 1)$ se muestra en la figura 1. Observe que los puntos de la gráfica se encuentran sobre la recta $y = 2x - 1$, que tiene pendiente $d = 2$.

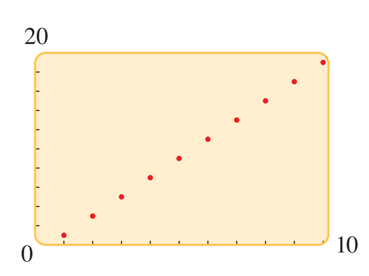


FIGURA 1


Ahora intente realizar los ejercicios 5, 11 y 17 ■

Vea el apéndice D*, *Uso de la calculadora graficadora TI-83/84*, para más instrucciones específicas para trabajar con sucesiones.
Visite **www.stewartmath.com****.

* Este material se encuentra disponible en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

** Este material se encuentra disponible ven inglés

Una sucesión aritmética está determinada completamente por el primer término a y la diferencia común d. Así, si conocemos los primeros dos términos de una sucesión aritmética, entonces podemos encontrar una fórmula para el n-ésimo término como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ Encuentre los términos de una sucesión aritmética

Encuentre los primeros seis términos y el 300º término de la sucesión aritmética

$$13, 7, 1, -5, \ldots$$

Las matemáticas en el mundo moderno

División equitativa de activos

Dividir equitativamente una propiedad entre varias personas es del mayor interés para los matemáticos. Problemas de esta naturaleza incluyen la distribución del presupuesto nacional, dividir tierras en conflicto o las propiedades en casos de divorcios. En 1994 Brams y Taylor encontraron una vía matemática de dividir cosas en forma equitativa. La solución que dieron ha sido aplicada a problemas de división en ciencias políticas, procedimientos legales y otros campos de actividad. Para entender el problema considere el siguiente ejemplo. Suponga que las personas *A* y *B* desean dividir justamente una propiedad entre las dos. Dividirla *justamente* significa que *A* y *B* deben quedar satisfechos con el resultado de la división. Solución: *A* divide la propiedad en dos partes, luego *B* escoge la parte que desee. Dado que *A* y *B* obtienen una parte en el proceso de división, cada uno debe quedar satisfecho. La situación se hace mucho más complicada si tres o más personas intervienen (y aquí es donde entran las matemáticas).

Dividir cosas con justicia y razón exige mucho más que simplemente cortarlas a la mitad; debe tomarse en cuenta el *valor relativo* que cada persona asigne a lo que se divide. Un caso de la Biblia ilustra con claridad lo anterior. Dos mujeres aparecen frente al rey Salomón, cada una diciendo ser la madre de un mismo recién nacido. La solución del rey Salomón era cortar el niño en dos. La madre real, que le da mucho más valor al bebé que cualquier otra persona, de inmediato abandona su reclamo para salvar la vida de su hijo.

Recientemente se han aplicado soluciones matemáticas a los problemas de división exacta en un tratado internacional, la Convención sobre Leyes del Mar. Si un país desea construir sobre una parte del lecho marino se requiere que divida la porción en dos, una parte será para uso del país y otra para uso de un consorcio que lo preservará para su posterior uso por parte de un país menos desarrollado. El consorcio es el primero en escoger.

SOLUCIÓN Dado que el primer término es 13, tenemos $a = 13$. La diferencia común es $d = 7 - 13 = -6$. Por tanto el n-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 13 - 6(n - 1)$$

De lo anterior encontramos los primeros seis términos:

$$13, 7, 1, -5, -11, -17, \ldots$$

El 300º término es $a_{300} = 13 - 6(300 - 1) = -1781$.

Ahora intente realizar el ejercicio 33 ■

El siguiente ejemplo muestra que una sucesión aritmética está determinada completamente por *cualesquiera* dos de sus términos.

EJEMPLO 3 ■ Encontrar términos de una sucesión aritmética

El 11º término de una sucesión aritmética es 52, y el 19º término es 92. Encuentre el 1 000º término.

SOLUCIÓN Para encontrar el n-ésimo término de esta sucesión necesitamos encontrar a y d en la fórmula

$$a_n = a + (n - 1)d$$

De esta fórmula obtenemos

$$a_{11} = a + (11 - 1)d = a + 10d$$
$$a_{19} = a + (19 - 1)d = a + 18d$$

Como $a_{11} = 52$ y $a_{19} = 92$, obtenemos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 52 = a + 10d \\ 92 = a + 18d \end{cases}$$

Despejando a y d de este sistema obtenemos $a = 2$ y $d = 5$. (Verifique esto.) Entonces el n-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 2 + 5(n - 1)$$

El 1 000º término es $a_{1000} = 5(1\,000 - 1) = 4\,997$.

Ahora intente realizar el ejercicio 47 ■

■ Sumas parciales de sucesiones aritméticas

Suponga que queremos encontrar la suma de los números 1, 2, 3, 4, . . . , 100, es decir,

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

Cuando el famoso matemático C. F. Gauss (vea la página 290) era un escolar, su profesor planteó este problema a todo el grupo con la esperanza de mantener ocupados un buen rato a los estudiantes. Para su sorpresa, Gauss solucionó el problema casi de inmediato. Su idea era ésta: dado que estamos sumando números producidos de acuerdo con un patrón fijo, debe haber un patrón (o fórmula) para encontrar la suma. Empezó por escribir los números del 1 al 100 y luego debajo de ellos escribió los mismos números en orden inverso. Al escribir S por la suma y al sumar los términos correspondientes se obtiene

$$\begin{array}{rcl} S &=& 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ S &=& 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S &=& 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Se deduce que $2S = 100(101) = 10\,100$ y, por tanto, $S = 5\,050$.

Por supuesto, la sucesión de números naturales 1, 2, 3, . . . es una sucesión aritmética (con $a = 1$ y $d = 1$), y el método para sumar los primeros 100 términos de esta sucesión se puede usar para encontrar una fórmula para la n-ésima suma parcial de cualquier sucesión aritmética. Queremos encontrar la suma de los primeros n términos de la sucesión aritmética cuyos términos son $a_k = a + (k - 1)d$; esto es, queremos encontrar

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d] \\ &= a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n-1)d] \end{aligned}$$

Usando el método de Gauss, escribimos

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n = & a & + & (a+d) & + \cdots + & [a+(n-2)d] & + & [a+(n-1)d] \\ S_n = & [a+(n-1)d] & + & [a+(n-2)d] & + \cdots + & (a+d) & + & a \\ \hline 2S_n = & [2a+(n-1)d] & + & [2a+(n-1)d] & + \cdots + & [2a+(n-1)d] & + & [2a+(n-1)d] \end{array}$$

Hay n términos idénticos en el lado derecho de esta ecuación, entonces

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

Observe que $a_n = a + (n - 1)d$ es el n-ésimo término de esta sucesión. Por tanto, podemos escribir

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$$

Esta última fórmula dice que la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es el promedio de los términos primero y n-ésimo multiplicados por n, el número de términos de la suma. Luego resumimos este resultado.

SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA

Para la sucesión aritmética $a_n = a + (n - 1)d$ la ***n*-ésima suma parcial**

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n-1)d]$$

está dada por cualquiera de las dos fórmulas siguientes.

1. $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ **2.** $S_n = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$

EJEMPLO 4 ■ Encontrar una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la suma de los primeros 50 números impares.

SOLUCIÓN Los números impares forman una sucesión aritmética con $a = 1$ y $d = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, por lo que el 50º número impar es $a_{50} = 2(50) - 1 = 99$. Sustituyendo la fórmula 2 para la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$S_{50} = 50\left(\frac{a + a_{50}}{2}\right) = 50\left(\frac{1 + 99}{2}\right) = 50 \cdot 50 = 2500$$

Ahora intente realizar el ejercicio 51 ■

EJEMPLO 5 ■ Encontrar una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la siguiente suma parcial de una sucesión aritmética:

$$3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + 159$$

SOLUCIÓN Para esta sucesión $a = 3$ y $d = 4$, por tanto, $a_n = 3 + 4(n - 1)$. Para encontrar cuál término de la sucesión es el último término 159, utilizamos la fórmula para el n-ésimo término y despejamos n.

$$159 = 3 + 4(n - 1) \qquad \text{Sea } a_n = 159$$

$$39 = n - 1 \qquad \text{Reste 3; divida entre 4}$$

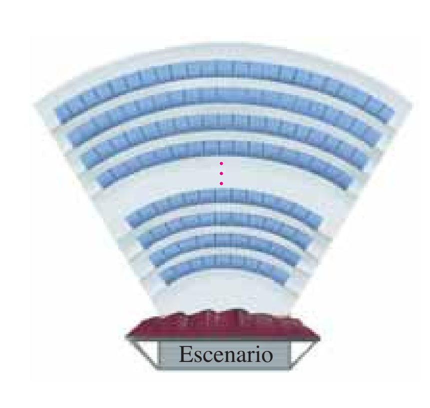
$$n = 40 \qquad \text{Sume 1}$$

Para encontrar la suma parcial de los primeros 40 términos utilizamos la fórmula 1 para la n-ésima suma parcial de una sucesión aritmética:

$$S_{40} = \tfrac{40}{2}[2(3) + 4(40 - 1)] = 3240$$

Ahora intente realizar el ejercicio 57 ■

EJEMPLO 6 ■ Encontrar la capacidad de asientos de un anfiteatro



Un anfiteatro tiene 50 filas de asientos con 30 en la primera fila, 32 en la segunda, 34 en la tercera, y así sucesivamente. Encuentre el número total de asientos.

SOLUCIÓN Los números de asientos de las filas forman una sucesión aritmética con $a = 30$ y $d = 2$. Dado que hay 50 filas el número total de asientos es la suma

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}[2(30) + 49(2)] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$= 3950$$

Por tanto, el anfiteatro tiene 3 950 asientos.

Ahora intente realizar el ejercicio 75 ■

EJEMPLO 7 ■ Encontrar el número de términos de una suma parcial

¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 5, 7, 9, . . . se deben sumar para obtener 572?

SOLUCIÓN Nos piden encontrar n cuando $S_n = 572$. Sustituyendo $a = 5$, $d = 2$ y $S_n = 572$ en la fórmula 1 para la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$572 = \frac{n}{2}[2 \cdot 5 + (n - 1)2] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$572 = 5n + n(n - 1) \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$0 = n^2 + 4n - 572 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$0 = (n - 22)(n + 26) \qquad \text{Factorice}$$

Esto da $n = 22$ o $n = -26$. Pero como n es el *número* de términos de esta suma parcial, debemos tener $n = 22$.

Ahora intente realizar el ejercicio 65 ■

12.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una sucesión aritmética es una sucesión donde la ________ entre términos sucesivos es constante.

2. La sucesión $a_n = a + (n - 1)d$ es una sucesión aritmética en la que a es el primer término y d es el ________ ________. Entonces, para la sucesión aritmética $a_n = 2 + 5(n - 1)$ el primer término es ________, y la diferencia común es ________.

3–4 ■ *¿Verdadero o falso?* Si es *falso*, explique.

3. La n-ésima suma parcial de una sucesión aritmética es el promedio de los términos primero y último n veces.

4. Si conocemos los términos primero y segundo de una sucesión aritmética, entonces podemos encontrar cualquier otro término.

HABILIDADES

5–10 ■ Términos de una sucesión aritmética Se da el n-ésimo término de una sucesión aritmética. ***a***) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión. ***b***) ¿Cuál es la diferencia común d? ***c***) Trace la gráfica de los términos que encontró en el inciso a).

5. $a_n = 7 + 3(n - 1)$ **6.** $a_n = -10 + 20(n - 1)$

7. $a_n = -6 - 4(n - 1)$ **8.** $a_n = -10 + 4(n - 1)$

9. $a_n = \frac{5}{2} - (n - 1)$ **10.** $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)$

11–16 ■ *n*-ésimo término de una sucesión aritmética Encuentre el n-ésimo término de la sucesión aritmética con primer término dado a y diferencia común d. ¿Cuál es el décimo término?

11. $a = 9, \quad d = 4$ **12.** $a = -5, \quad d = 4$

13. $a = -0.7, \quad d = -0.2$ **14.** $a = 14, \quad d = -\frac{3}{2}$

15. $a = \frac{5}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}$ **16.** $a = \sqrt{3}, \quad d = \sqrt{3}$

17–26 ■ ¿Sucesión aritmética? Se dan los cuatro primeros términos de una sucesión. ¿Pueden estos ser los términos de una sucesión aritmética? Si es así, encuentre la diferencia común.

17. 11, 17, 23, 29, . . . **18.** $-31, -19, -7, 5, \ldots$

19. $16, 9, 2, -4, \ldots$ **20.** 100, 68, 36, 4, . . .

21. 2, 4, 8, 16, . . . **22.** 2, 4, 6, 8, . . .

23. $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, \ldots$ **24.** $\ln 2, \ln 4, \ln 8, \ln 16, \ldots$

25. 2.6, 4.3, 6.0, 7.7, . . . **26.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

27–32 ■ ¿Sucesión aritmética? Encuentre los cinco primeros términos de la sucesión y determine si es aritmética. Si es aritmética determine la diferencia común y exprese el n-ésimo término de la sucesión en la forma estándar $a_n = a + (n - 1)d$.

27. $a_n = 4 + 7n$ **28.** $a_n = 4 + 2^n$

29. $a_n = \dfrac{1}{1 + 2n}$ **30.** $a_n = 1 + \dfrac{n}{2}$

31. $a_n = 6n - 10$ **32.** $a_n = 3 + (-1)^n n$

33–44 ■ Términos de una sucesión aritmética Determine la diferencia común, el quinto término, el n-ésimo término y el centésimo término de la sucesión aritmética.

33. 4, 10, 16, 22, . . . **34.** $-1, 11, 23, 35, \ldots$

35. $29, 11, -7, -25 \ldots$ **36.** 64, 49, 34, 19, . . .

37. 4, 9, 14, 19, . . . **38.** 11, 8, 5, 2, . . .

39. $-12, -8, -4, 0, \ldots$ **40.** $\frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}, \ldots$

41. 25, 26.5, 28, 29.5, . . . **42.** 15, 12.3, 9.6, 6.9, . . .

43. $2, 2 + s, 2 + 2s, 2 + 3s, \ldots$

44. $-t, -t + 3, -t + 6, -t + 9, \ldots$

45–50 ■ Determinar los términos de una sucesión aritmética Encontrar el 50º término de la sucesión aritmética con la descripción dada.

45. El 50º término es 1 000 y la diferencia común es 6. Encuentre los términos primero y segundo.

46. El centésimo término es -750, y la diferencia común es -20. Encuentre el quinto término...

47. El término decimocuarto es $\frac{2}{3}$, y el noveno término es $\frac{1}{4}$. Encuentre los términos primero y n-ésimo.

48. El doceavo término es 118, y el octavo término es 146. Encuentre los términos primero y n-ésimo.

49. El primer término es 25, y la diferencia común es 18. ¿Cuál término de la sucesión es igual a 601?

50. El primer término es de 3 500 y la diferencia común es -15. ¿Cuál término de la sucesión es igual a 2 795?

51–56 ■ Sumas parciales de una sucesión aritmética Encuentre la suma parcial S_n de la sucesión aritmética que satisfaga las condiciones dadas.

51. $a = 3, \quad d = 5, \quad n = 20$

52. $a = 10, \quad d = -8, \quad n = 30$

53. $a = -40, \quad d = 14, \quad n = 15$

54. $a = -2, \quad d = 23, \quad n = 25$

55. $a_1 = 55, \quad d = 12, \quad n = 10$

56. $a_2 = 8, \quad a_5 = 9.5, \quad n = 15$

57–64 ■ Sumas parciales de una sucesión aritmética Se da una suma parcial de una sucesión aritmética. Encuentre la suma.

57. $1 + 5 + 9 + \cdots + 401$

58. $-3 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + \frac{3}{2} + 3 + \cdots + 30$

59. $250 + 233 + 216 + \cdots + 97$

60. $89 + 85 + 81 + \cdots + 13$

61. $0.7 + 2.7 + 4.7 + \cdots + 56.7$

62. $-10 - 9.9 - 9.8 - \cdots - 0.1$

63. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}(3 + 0.25k)$ **64.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{20}(1 - 2n)$

65–66 ■ Sumar términos de una sucesión aritmética Encuentre el número de términos de la sucesión aritmética con la descripción dada que se debe agregar para obtener un valor de 2 700.

65. El primer término es 5 y la diferencia común es 2.

66. El primer término es 12 y la diferencia común es 8.

HABILIDADES Plus

67. Triángulo especial Demuestre que un triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión aritmética es semejante a un triángulo de 3-4-5.

68. Producto de números Encuentre el producto de los números

$$10^{1/10}, 10^{2/10}, 10^{3/10}, 10^{4/10}, \ldots, 10^{19/10}$$

69. Sucesión armónica Una sucesión es **armónica** si los recíprocos de los términos de la sucesión forman una sucesión aritmética. Determine si la siguiente sucesión es armónica:

$$1, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{1}{3}, \ldots$$

70. Media armónica La **media armónica** de dos números es el recíproco del promedio de los recíprocos de los dos números. Encuentre la media armónica de 3 y 5.

APLICACIONES

71. Depreciación El valor de compra de una computadora de oficina es de 12 500 dólares. Su depreciación anual es de 1 875 dólares. Encuentre el valor de la computadora después de 6 años.

72. Postes en una pila Se están almacenando postes telefónicos en una pila con 25 postes en la primera capa, 24 en la segunda, y así sucesivamente. Si hay 12 capas ¿cuántos postes telefónicos contiene la pila?



73. Aumentos de salario Un hombre tiene un trabajo con salario de 30 000 dólares al año. Le prometen un aumento de 2 300 dólares al año. Encuentre su ganancia total para el décimo periodo.

74. Autocinema Un autocinema tiene espacios para 20 autos en la primera fila de estacionamiento, 22 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente. Si en el cine hay 21 filas encuentre el número de autos que se pueden estacionar.

75. Asientos en un teatro Un arquitecto diseña un teatro con 15 asientos en la primera fila, 18 en la segunda, 21 en la tercera, y así sucesivamente. Si el teatro ha de tener capacidad para 870 asientos, ¿cuántas filas debe usar el arquitecto en su diseño?

76. Pelota en caída Cuando se suelta un cuerpo en caída libre cerca de la superficie de la Tierra, la atracción gravitacional es tal que el cuerpo cae 16 pies en el primer segundo, 48 en el siguiente segundo, 80 en el tercer segundo, y así sucesivamente.

***a*)** Encuentre la distancia total que cae una pelota en 6 s.

***b*)** Encuentre una fórmula para la distancia total que cae una pelota en n segundos.

77. Los doce días de navidad En la bien conocida canción "The Twelve Days of Christmas" [Los doce días de Navidad], una persona le da a su novia k regalos en el k-ésimo día por cada uno de los 12 días de Navidad. Esta persona también repite cada regalo en cada día subsiguiente. Entonces, en el 12º día la novia recibe un regalo por el primer día, 2 regalos por el segundo, 3 regalos por el tercer día, y así sucesivamente. Demuestre que el número de regalos recibidos en el 12º día es una suma parcial de una sucesión aritmética. Encuentre esta suma.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

78. DISCUSIÓN: Medias aritméticas La **media aritmética** (o promedio) de dos números a y b es

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Observe que m es la misma distancia de a que de b, de modo que a, m, b es una sucesión aritmética. En general, si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ están igualmente espaciadas entre a y b de modo que

$$a, m_1, m_2, \ldots, m_k, b$$

es una sucesión aritmética, entonces $m_1, m_2, \ldots, m_k$ se llaman k medias aritméticas entre a y b.

***a*)** Inserte dos medias aritméticas entre 10 y 18.

***b*)** Inserte tres medias aritméticas entre 10 y 18.

***c*)** Suponga que un médico necesita aumentarle a un paciente la dosis de cierta medicina, de 100 a 300 mg por día en cinco pasos iguales. ¿Cuántas medias aritméticas debe insertar entre 100 y 300 para dar la progresión de dosis diarias y cuáles son estas medias?

12.3 SUCESIONES GEOMÉTRICAS

■ Sucesiones geométricas ■ Sumas parciales de sucesiones geométricas
■ ¿Qué es una serie infinita? ■ Serie geométrica infinita

En esta sección estudiamos sucesiones geométricas. Este tipo de sucesiones se presenta con frecuencia en aplicaciones de finanzas, crecimiento poblacional y en otras áreas.

■ Sucesiones geométricas

Recuerde que una sucesión aritmética se genera cuando repetidamente sumamos un número d a un término inicial a. Una sucesión *geométrica* se genera cuando empezamos con un número a y repetidamente *multiplicamos* por una constante r fija diferente de cero.

DEFINICIÓN DE SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Una **sucesión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

El número a es el **primer término** y r es la **razón común** de la sucesión. El ***n*-ésimo** término de una sucesión geométrica está dado por

$$a_n = ar^{n-1}$$

El número r recibe el nombre de razón común porque la razón de cualesquiera dos términos consecutivos es r.

EJEMPLO 1 ■ Sucesiones geométricas

***a*)** Si $a = 3$ y $r = 2$, entonces tenemos la sucesión geométrica

$$3, \quad 3 \cdot 2, \quad 3 \cdot 2^2, \quad 3 \cdot 2^3, \quad 3 \cdot 2^4, \quad \ldots$$

o

$$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

Observe que la razón de cualesquiera dos términos consecutivos es $r = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 3(2)^{n-1}$.

***b*)** La sucesión

$$2, -10, 50, -250, 1250, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 2$ y $r = -5$. Cuando r es negativa, los términos de la sucesión se alternan en signo. El n-ésimo término es $a_n = 2(-5)^{n-1}$.

***c*)** La sucesión

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{3}$. El n-ésimo término es $a_n = 1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

***d*)** La gráfica de la sucesión geométrica definida por $a_n = \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1}$ se muestra en la figura 1. Observe que los puntos en la gráfica se encuentran en la gráfica de la función exponencial $y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-1}$.

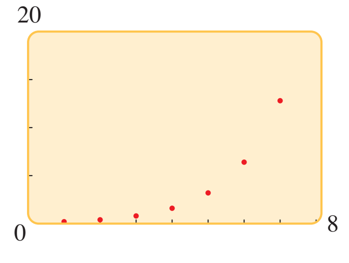


FIGURA 1

Si $0 < r < 1$, entonces los términos de la sucesión geométrica ar^{n-1} disminuyen, pero si $r > 1$, entonces los términos aumentan. (¿Qué sucede si $r = 1$?)


Ahora intente realizar los ejercicios 5, 9 y 13 ■

Las sucesiones geométricas se presentan de manera natural. Ahora veamos un ejemplo simple. Suponga que una pelota tiene una elasticidad tal que, cuando se deja caer, rebota un tercio de la distancia que ha caído. Si esta pelota se deja caer de una altura de 2 m, entonces rebota a una altura de $2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ m. En su segundo rebote, regresa a una altura de $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ m, y así sucesivamente (vea la figura 2). Entonces, la altura h_n que la pelota alcanza en su n-ésimo rebote está dada por la sucesión geométrica

$$h_n = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

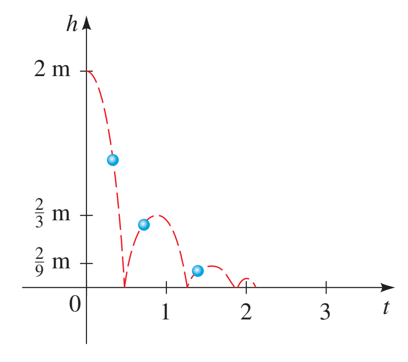


FIGURA 2

Podemos encontrar el n-ésimo término de una sucesión geométrica si conocemos cualesquiera dos términos como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2 ■ Encontrar términos de una sucesión geométrica

Encuentre la relación común, el primer término, el n-ésimo término y el octavo término de la sucesión geométrica

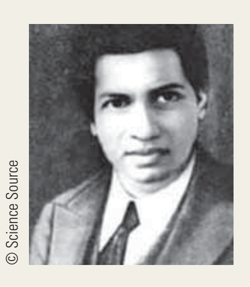
$$5, 15, 45, 135, \ldots$$

SOLUCIÓN Para encontrar una fórmula para el n-ésimo término de esta sucesión necesitamos encontrar el primer término a y la razón común r. Claramente, $a = 5$. Para encontrar r debemos encontrar la razón de cualesquiera dos términos consecutivos. Por ejemplo, $r = \frac{45}{15} = 3$. Entonces

$$a_n = 5(3)^{n-1} \qquad a_n = ar^{n-1}$$

El octavo término es $a_8 = 5(3)^{8-1} = 5(3)^7 = 10\,935$.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■



SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920) nació en el seno de una familia pobre, en la pequeña población de Kumbakonam, India. Autodidacta en matemáticas trabajó aislado virtualmente de otros matemáticos. A la edad de 25 años le escribió una carta a G. H. Hardy, principal matemático inglés de su tiempo, donde le citaba algunos descubrimientos que había hecho. Sus descubrimientos incluyeron la siguiente serie para el cálculo de π:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Hardy de inmediato reconoció el genio de Ramanujan y durante los siguientes seis años ambos trabajaron juntos en Londres hasta que Ramanujan cayó enfermo y regresó a su tierra natal, en India, donde murió un año después. Ramanujan fue un genio con una capacidad fenomenal para ver patrones ocultos en las propiedades de los números. La mayor parte de sus descubrimientos fueron escritos como complicadas series infinitas, cuya importancia fue reconocida hasta muchos años después de su muerte. En el último año de su vida escribió 130 páginas de misteriosas fórmulas, muchas de las cuales todavía desafían ser probadas. Hardy cuenta que en una ocasión cuando visitó a Ramanujan en un hospital y llegó en taxi, le comentó a Ramanujan que el número de placas del taxi, 1729, no era interesante. Ramanujan respondió: "Sí, es un número muy interesante; es el más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos en dos formas diferentes".

EJEMPLO 3 ■ Encontrar términos de una sucesión geométrica

El tercer término de una sucesión geométrica es $\frac{63}{4}$ y el sexto término es $\frac{1701}{32}$. Encuentre el quinto término.

SOLUCIÓN Dado que esta sucesión es geométrica, su n-ésimo término está dado por la fórmula $a_n = ar^{n-1}$. Por tanto,

$$a_3 = ar^{3-1} = ar^2$$

$$a_6 = ar^{6-1} = ar^5$$

De los valores que nos dan para estos dos términos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{63}{4} = ar^2 \\ \frac{1701}{32} = ar^5 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema dividiendo.

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{\frac{1701}{32}}{\frac{63}{4}}$$

$$r^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{Simplifique}$$

$$r = \frac{3}{2} \qquad \text{Tome la raíz cúbica de cada lado}$$

Sustituyendo r en la primera ecuación se obtiene

$$\frac{63}{4} = a\left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \text{Sustituya } r = \tfrac{3}{2} \text{ en } \tfrac{63}{4} = ar^2$$

$$a = 7 \qquad \text{Despeje } a$$

Se deduce que el n-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Entonces, el quinto término es

$$a_5 = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{5-1} = 7\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{567}{16}$$

 **Ahora intente realizar el ejercicio 41** ■

■ Sumas parciales de sucesiones geométricas

Para las sucesiones geométricas $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$, la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1}$$

Para encontrar una fórmula para S_n multiplicamos S_n por r y restamos de S_n.

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \\ rS_n &= \phantom{a + {}} ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n \end{aligned}$$

Por tanto,

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad r \neq 1$$

Resumimos este resultado.

SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Para la sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$, la **n-ésima suma parcial**

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \qquad r \neq 1$$

está dada por

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

EJEMPLO 4 ■ Encontrar una suma parcial de una sucesión geométrica

Encuentre la siguiente suma parcial para una sucesión geométrica

$$1 + 4 + 16 + \cdots + 4\,096$$

SOLUCIÓN Para esta sucesión $a = 1$ y $r = 4$, por tanto, $a_n = 4^{n-1}$. Ya que $4^6 = 4\,096$ usamos la fórmula para S_n con $n = 7$ y tenemos

$$S_7 = 1 \cdot \frac{1 - 4^7}{1 - 4} = 5\,461$$

Entonces esta suma parcial es igual a 5 461.

Ahora intente realizar los ejercicios 49 y 53 ■

EJEMPLO 5 ■ Encontrar una suma parcial de una sucesión geométrica

Encuentre la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 7\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{k-1}$.

SOLUCIÓN La suma dada es la quinta suma parcial de una sucesión geométrica con primer término $a = 7\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 7$ y $r = -\frac{2}{3}$. En consecuencia, por la fórmula para S_n con $n = 6$ tenemos

$$S_6 = 7 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^6}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = 7 \cdot \frac{1 - \frac{64}{729}}{\frac{5}{3}} = \frac{931}{243} \approx 3.83$$

Ahora intente realizar el ejercicio 59 ■

■ ¿Qué es una serie infinita?

Una expresión de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Encontrar patrones

Encontrar patrones en la naturaleza es una parte importante del modelado matemático. Si podemos encontrar un patrón (o una fórmula) que describa los términos de una sucesión, entonces podemos utilizar el patrón para predecir los términos siguientes de la sucesión. En este proyecto investigamos sucesiones de diferencias y cómo estas nos ayudan a encontrar patrones en números poligonales triangulares, cuadrados, pentagonales y otros. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

*Este material se encuentra disponible en inglés.

recibe el nombre de **serie infinita**. Los puntos quieren decir que debemos continuar la suma indefinidamente. ¿Qué significado podemos dar a la suma de una cantidad infinita de números? Al principio parecería que no es posible sumar infinitamente muchos números y llegar a un número finito, pero considere el siguiente problema. Usted tiene un pastel y desea cortarlo y comer primero la mitad del pastel, luego comer la mitad de lo que queda, luego otra vez comer la mitad de lo que queda, y así sucesivamente. Este proceso puede continuar indefinidamente porque en cada etapa quedará algo del pastel. (Vea la figura 3.)

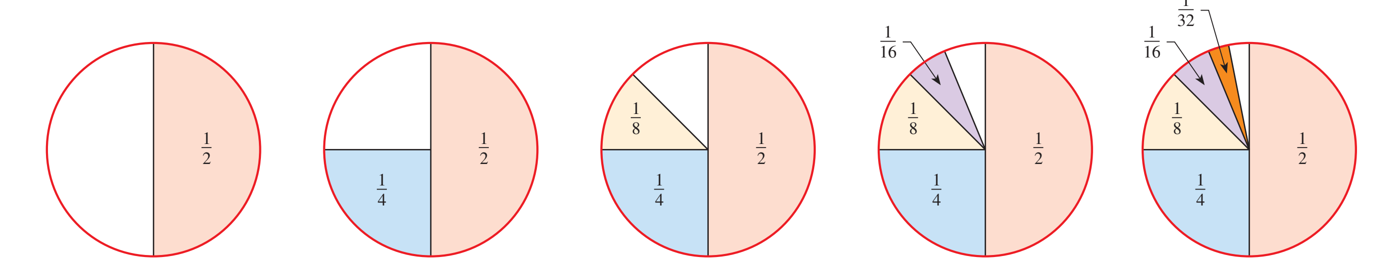


FIGURA 3

¿Significa esto que es imposible comer todo el pastel? Por supuesto que no. Escribamos lo que ha comido de este pastel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Esta es una serie infinita donde observamos dos cosas: primero, de la figura 3 es evidente que, sin importar cuántos términos de esta serie sumemos, el total nunca excederá de 1. En segundo término, cuantos más términos de esta serie sumemos, la suma se acerca más a 1 (vea la figura 3). Esto sugiere que el número 1 se puede escribir como la suma de una cantidad infinita de números más pequeños:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Para ser más precisos veamos las sumas parciales de esta serie:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{3}{4} \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{7}{8} \\
S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{15}{16}
\end{aligned}$$

y, en general (vea el ejemplo 5 de la sección 12.1).

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

A medida que n es cada vez más grande estamos sumando más y más de los términos de esta serie. De manera intuitiva, cuando n se hace más grande S_n se acerca más a la suma de la serie. Ahora observe que a medida que n aumenta de valor $1/2^n$ se acerca cada vez más a 0. Entonces S_n se acerca a $1 - 0 = 1$. Usando esta notación de la sección 3.6, podemos escribir

$$S_n \to 1 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

En general, si S_n se acerca a un número finito S cuando n crece, decimos que la serie infinita **converge** (o es **convergente**). El número S se denomina **suma de la serie infinita**. Si una serie infinita no converge, decimos que la serie **diverge** (o es **divergente**).

Ahora veamos otra forma de obtener la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita:

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ &= a + r(a + ar + ar^2 + \cdots) \\ &= a + rS \end{aligned}$$

De la ecuación $S = a + rS$ despejamos S para obtener

$$\begin{aligned} S - rS &= a \\ (1 - r)S &= a \\ S &= \frac{a}{1 - r} \end{aligned}$$

Serie geométrica infinita

Una **serie geométrica infinita** es una serie de la forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Podemos aplicar el razonamiento usado antes para encontrar la suma de una serie geométrica infinita. La n-ésima suma parcial de esta serie está dada por la fórmula

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad r \neq 1$$

Se puede demostrar que si $|r| < 1$, entonces r^n se acerca a 0 cuando n se hace grande (podemos fácilmente convencernos de esto con ayuda de una calculadora). Se deduce que S_n se acerca a $a/(1 - r)$ cuando n se hace grande, o bien

$$S_n \to \frac{a}{1 - r} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Entonces la suma de esta serie geométrica infinita es $a/(1 - r)$.

SUMA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA INFINITA

Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

converge y tiene la suma

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Si $|r| \geq 1$ la serie diverge.

EJEMPLO 6 ■ Series infinitas

Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente. Si es convergente encuentre su suma.

a) $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \cdots$ **b)** $1 + \frac{7}{5} + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^3 + \cdots$

Las matemáticas en el mundo moderno



© Bill Ross/Cusp/Corbis

Fractales

Muchas de las cosas que modelamos en este libro tienen formas regulares que se pueden predecir, pero avances recientes en matemáticas han hecho posible modelar cosas tan aparentemente raras o incluso caóticas como una nube, una flama vacilante, una montaña o una costa escarpada. Las herramientas básicas en este tipo de modelado son las figuras geométricas generadas por divisiones sucesivas inventadas por el matemático Benoit Mandelbrot. Un *fractal* es una forma geométrica construida a partir de una forma básica sencilla, reduciendo a escala y repitiendo la forma indefinidamente de acuerdo con una regla dada. Los fractales tienen un número infinito de detalles, lo cual significa que cuanto más de cerca veamos, más veremos de ellas. También son *semejantes a sí mismos*, es decir, al hacer un acercamiento en una parte de la figura geométrica veremos el mismo detalle que la forma original. Debido a la belleza de sus formas los fractales son utilizados en cine para crear paisajes de ficción o fondos exóticos.

Aun cuando un fractal tiene una forma compleja se producen de acuerdo con reglas muy sencillas. Esta propiedad de los fractales se aprovecha en un proceso de almacenar imágenes en una computadora que se llama *compresión fractal de imagen*. En este proceso una imagen se almacena como una forma básica sencilla; repitiendo la forma de acuerdo con la regla se produce la figura original. Este es un método extraordinariamente eficiente para almacenar imágenes, y es así como miles de imágenes en color se pueden poner en un solo disco compacto.

SOLUCIÓN

a) Esta es una serie geométrica infinita con $a = 2$ y $r = \frac{1}{5}$. Dado que $|r| = \left|\frac{1}{5}\right| < 1$ la serie converge. Por la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita tenemos

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

b) Esta es una serie geométrica infinita con $a = 1$ y $r = \frac{7}{5}$. Dado que $|r| = \left|\frac{7}{5}\right| > 1$ la serie diverge.

Ahora intente realizar los ejercicios 65 y 69 ■

EJEMPLO 7 ■ Escribir un decimal repetido como una fracción

Encuentre la fracción que represente el número racional $2.3\overline{51}$.

SOLUCIÓN Este decimal repetido se puede escribir como una serie:

$$\frac{23}{10} + \frac{51}{1000} + \frac{51}{100\,000} + \frac{51}{10\,000\,000} + \frac{51}{1\,000\,000\,000} + \cdots$$

Después del primer término los términos de esta serie forman una serie geométrica infinita con

$$a = \frac{51}{1000} \qquad \text{y} \qquad r = \frac{1}{100}$$

Entonces la suma de esta parte de la serie es

$$S = \frac{\frac{51}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{51}{990}$$

Por tanto, $$2.3\overline{51} = \frac{23}{10} + \frac{51}{990} = \frac{2328}{990} = \frac{388}{165}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 77 ■

12.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una sucesión geométrica es una sucesión donde la ________ de términos sucesivos es constante.

2. La sucesión $a_n = ar^{n-1}$ es una sucesión geométrica en la que a es el primer término y r es la ________ ________. Entonces para la sucesión geométrica $a_n = 2(5)^{n-1}$ el primer término es ________ y la razón común es ________.

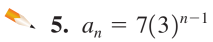
3. *¿Verdadero o falso?* Si conocemos los términos primero y segundo de una sucesión geométrica, entonces podemos encontrar cualquier otro término.

4. ***a***) La n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$ está dada por $S_n =$ ________.

b) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ es una serie infinita ________. Si $|r| < 1$, entonces esta serie ________ y su suma es $S =$ ________. Si $|r| \geq 1$, la serie ________.

HABILIDADES

5–8 ■ *n*-ésimo término de una sucesión geométrica Se da el n-ésimo término de una sucesión. ***a***) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión. ***b***) ¿Cuál es la razón común r? ***c***) Trace la gráfica de los términos que encontró en el inciso *a*).



5. $a_n = 7(3)^{n-1}$

6. $a_n = 6(-0.5)^{n-1}$

7. $a_n = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

8. $a_n = 3^{n-1}$

9–12 ■ *n*-ésimo término de una sucesión geométrica Encuentre el n-ésimo término de la sucesión geométrica con primer término dado a y razón común r. ¿Cuál es el cuarto término?

9. $a = 7, \quad r = 4$

10. $a = -3, \quad r = -2$

11. $a = \frac{5}{2}, \quad r = -\frac{1}{2}$

12. $a = \sqrt{3}, \quad r = \sqrt{3}$

13–22 ■ ¿Sucesión geométrica? Se dan los cuatro primeros términos de una sucesión. Determine si estos términos pueden ser los términos de una sucesión geométrica. Si la sucesión es geométrica encuentre la razón común.

13. 3, 6, 12, 24, . . .

14. 3, 48, 93, 138, . . .

15. $3072, 1536, 768, 384, \ldots$ **16.** $432, -144, 48, -16, \ldots$

17. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ **18.** $27, -9, 3, -1, \ldots$

19. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **20.** $e^2, e^4, e^6, e^8, \ldots$

21. $1.0, 1.1, 1.21, 1.331, \ldots$ **22.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

23–28 ■ ¿Sucesión geométrica? Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión y determine si es geométrica. Si es geométrica, encuentre la razón común, y exprese el n-ésimo término de la sucesión en la forma estándar $a_n = ar^{n-1}$.

23. $a_n = 2(3)^n$ **24.** $a_n = 4 + 3^n$

25. $a_n = \dfrac{1}{4^n}$ **26.** $a_n = (-1)^n 2^n$

27. $a_n = \ln(5^{n-1})$ **28.** $a_n = n^n$

29–38 ■ Términos de una sucesión geométrica Determine la razón común, el quinto término y el n-ésimo término de la sucesión geométrica.

29. $2, 6, 18, 54, \ldots$ **30.** $7, \frac{14}{3}, \frac{28}{9}, \frac{56}{27}, \ldots$

31. $0.3, -0.09, 0.027, -0.0081, \ldots$

32. $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots$

33. $144, -12, 1, -\frac{1}{12}, \ldots$ **34.** $-8, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \ldots$

35. $3, 3^{5/3}, 3^{7/3}, 27, \ldots$ **36.** $t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{4}, \dfrac{t^4}{8}, \ldots$

37. $1, s^{2/7}, s^{4/7}, s^{6/7}, \ldots$ **38.** $5, 5^{c+1}, 5^{2c+1}, 5^{3c+1}, \ldots$

39–46 ■ Determinar los términos de una sucesión geométrica Encuentre el término indicado de la sucesión geométrica con la descripción dada.

39. El primer término de una sucesión geométrica es 15 y el segundo término es 6. Encuentre el cuarto término.

40. El primer término es $\frac{1}{12}$ y el segundo término es $-\frac{1}{2}$. Encuentre el sexto término.

41. El primer término es $-\frac{1}{3}$ y el sexto término es 9. Encuentre los términos primero y segundo.

42. El cuarto término es 12 y el séptimo término es $\frac{32}{9}$. Encuentre los términos primero y n-ésimo.

43. El tercer término es -18 y el sexto término es 9 216. Encuentre los términos primero y n-ésimo.

44. El tercer término es -54 y el sexto término es $\frac{729}{256}$. Encuentre los términos primero y segundo.

45. La razón común es 0.75 y el cuarto término es 729. Encuentre los primeros tres términos.

46. La razón común es $\frac{1}{6}$ y el tercer término es 18. Encuentre los términos primero y séptimo.

47. ¿Cuál término es? El primer término de una sucesión geométrica es 1 536 y la razón común es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál término de la sucesión es igual a 6?

48. ¿Cuál término es? Los términos segundo y quinto de una sucesión geométrica son 30 y 3 750, respectivamente. ¿Cuál término de la sucesión es igual a 468 750?

49–52 ■ Sumas parciales de una sucesión geométrica Encuentre la suma parcial S_n de la sucesión geométrica que satisfaga las condiciones dadas.

49. $a = 5, \ r = 2, \ n = 6$ **50.** $a = \frac{2}{3}, \ r = \frac{1}{3}, \ n = 4$

51. $a_3 = 28, \ a_6 = 224, \ n = 6$

52. $a_2 = 0.12, \ a_5 = 0.00096, \ n = 4$

53–58 ■ Sumas parciales de una sucesión geométrica Encuentre la suma.

53. $1 + 3 + 9 + \cdots + 2187$

54. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{512}$

55. $-15 + 30 - 60 + \cdots - 960$

56. $5120 + 2560 + 1280 + \cdots + 20$

57. $1.25 + 12.5 + 125 + \cdots + 12\,500\,000$

58. $10800 + 1080 + 108 + \cdots + 0.000108$

59–64 ■ Sumas parciales de una sucesión geométrica Encuentre la suma.

59. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ **60.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 8\left(-\tfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

61. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 5(-2)^{k-1}$ **62.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 10(5)^{k-1}$

63. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ **64.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 64\left(\tfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

65–76 ■ Series geométricas infinitas Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente. Si es convergente encuentre su suma.

65. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots$ **66.** $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

67. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots$ **68.** $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{25} + \dfrac{8}{125} + \cdots$

69. $1 + \dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 + \cdots$

70. $\dfrac{1}{3^6} + \dfrac{1}{3^8} + \dfrac{1}{3^{10}} + \dfrac{1}{3^{12}} + \cdots$

71. $3 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{8} + \cdots$

72. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

73. $3 - 3(1.1) + 3(1.1)^2 - 3(1.1)^3 + \cdots$

74. $-\dfrac{100}{9} + \dfrac{10}{3} - 1 + \dfrac{3}{10} - \cdots$

75. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4} + \cdots$

76. $1 - \sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 4 - \cdots$

77–82 ■ Decimales periódicos Exprese el decimal periódico como una fracción.

77. $0.777\ldots$ **78.** $0.2\overline{53}$ **79.** $0.030303\ldots$

80. $2.11\overline{25}$ **81.** $0.\overline{112}$ **82.** $0.123123123\ldots$

HABILIDADES Plus

83. Medias geométricas Si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una sucesión geométrica, entonces $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ son **medias geométricas** entre a_1 y a_n. Inserte tres medias geométricas entre 5 y 80.

84. Suma parcial de una sucesión geométrica Encuentre la suma de los primeros 10 términos de la sucesión

$$a + b, a^2 + 2b, a^3 + 3b, a^4 + 4b, \ldots$$

85–86 ■ ¿Aritmética o geométrica? Se dan los cuatro primeros términos de una sucesión. Determine si estos términos pueden ser los de una sucesión aritmética, una sucesión geométrica o ninguna de estas. Si la sucesión es aritmética o geométrica encuentre el siguiente término.

85. ***a***) $5, -3, 5, -3, \ldots$ ***b***) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$

c) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$ ***d***) $-3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \ldots$

86. ***a***) $1, -1, 1, -1, \ldots$ ***b***) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}, 1, \ldots$

c) $2, -1, \frac{1}{2}, 2, \ldots$ ***d***) $x - 1, x, x + 1, x + 2, \ldots$

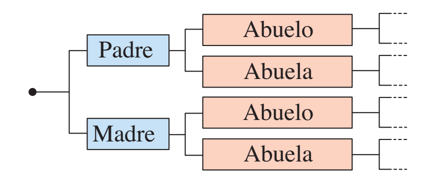
APLICACIONES

87. Depreciación Una compañía constructora compra un buldócer en 160 000 dólares. Cada año, el valor de esta máquina se deprecia 20% del valor que tenía en el año anterior. Sea V_n el valor de la máquina en el n-ésimo año. (Sea $n = 1$ el año de compra del buldócer.)

a) Encuentre una fórmula para V_n.

b) ¿En qué año será menor a 100 000 dólares el valor del buldócer?

88. Árbol familiar Una persona tiene a sus padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, y así sucesivamente. ¿Cuántos antepasados tiene una persona 15 generaciones atrás?

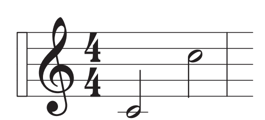


89. Pelota que rebota Una pelota se deja caer de una altura de 80 pies. La elasticidad de esta pelota es tal que la hace rebotar tres cuartos de la distancia que ha caído. ¿A qué altura rebota la pelota en el quinto rebote? Encuentre una fórmula para encontrar la altura a la que rebota la pelota en el n-ésimo rebote.

90. Cultivo de bacterias Un cultivo tiene inicialmente 5 000 bacterias y su tamaño aumenta 8% cada hora. ¿Cuántas bacterias están presentes al término de 5 horas? Encuentre una fórmula para el número de bacterias presentes después de n horas.

91. Mezcla de refrigerante El radiador de un camión tiene una capacidad para 5 galones y se llena con agua. Un galón de agua se saca del radiador y se sustituye con un galón de anticongelante; entonces se retira del radiador un galón de la mezcla y otra vez se sustituye con un galón de anticongelante. Este proceso se repite indefinidamente. ¿Cuánta agua quedará en el tanque después que este proceso se repita 3 veces? ¿Cinco veces? ¿n veces?

92. Frecuencias musicales Las frecuencias de las notas musicales (medidas en ciclos por segundo) forman una sucesión geométrica. La nota Do mayor tiene una frecuencia de 256, y la Do que es una octava más alta tiene una frecuencia de 512. Encuentre la frecuencia de la Do dos octavas debajo de la Do mayor.



93. Pelota que rebota Se deja caer una pelota desde una altura de 9 pies. La elasticidad de la pelota es tal que siempre rebota un tercio de la distancia que ha caído.

a) Encuentre la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que hace contacto con el suelo la quinta vez.

b) Encuentre una fórmula para la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que hace contacto con el suelo la n-ésima vez.

94. Plan geométrico de ahorros Una mujer con mucha paciencia desea juntar mil millones de dólares. Decide seguir un esquema simple: el primer día ahorra 1 centavo, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día, y así sucesivamente, duplicando el número de centavos cada día. ¿Cuánto dinero tendrá al término de 30 días? ¿Cuántos días le tomará a esta mujer realizar su deseo?

95. San Ives El siguiente es una bien conocida rima para niños:

Cuando iba a San Ives,
Conocí a un hombre con siete esposas;
Cada esposa tenía siete sacos;
Cada saco tenía siete gatos;
Cada gato tenía siete gatitos;
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿Cuántos iban a San Ives?

Suponiendo que todo el grupo va realmente a San Ives demuestre que la respuesta a la pregunta de la rima es una suma parcial de una sucesión geométrica y encuentre la suma.

96. Concentración de medicamento Cierto medicamento se administra una vez al día. La concentración del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente aumenta rápidamente al principio, pero cada dosis sucesiva tiene menos efecto que la anterior. La cantidad total del medicamento (en mg) en el torrente sanguíneo después de la n-ésima dosis está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} 50\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$$

a) Encuentre la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo después de $n = 10$ días.

b) Si el medicamento se toma a largo plazo, la cantidad en el torrente sanguíneo se aproxima con la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} 50\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$. Encuentre la suma de esta serie.

97. Pelota que rebota Cierta pelota rebota a la mitad de la altura desde la cual se deja caer. Use una serie geométrica infinita para aproximar la distancia total que recorre la pelota desde que se deja caer a 1 m del suelo hasta que alcanza el reposo.

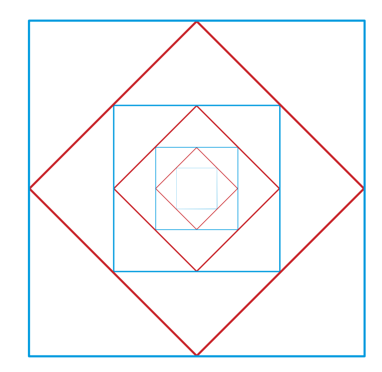
98. Pelota que rebota Si la pelota del ejercicio 97 se deja caer desde una altura de 8 pies, entonces se requiere 1 s para su primer rebote completo desde la primera vez que toca el

suelo hasta que lo toca la segunda vez. Cada rebote subsiguiente completo requiere $1/\sqrt{2}$ del tiempo que el rebote anterior completo. Use una serie geométrica infinita para estimar el intervalo desde el instante en que la pelota toca el suelo por primera vez hasta que deja de rebotar.

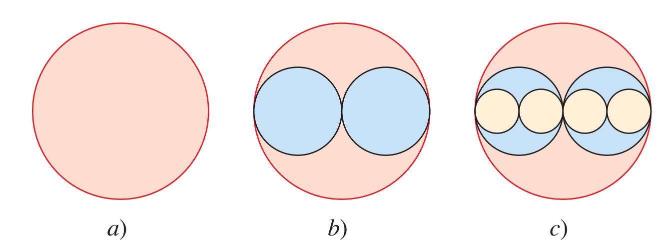
99. Geometría Los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 se unen para formar un nuevo cuadrado. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado. (Vea la figura.)

a) Encuentre la suma de las áreas de todos los cuadrados.

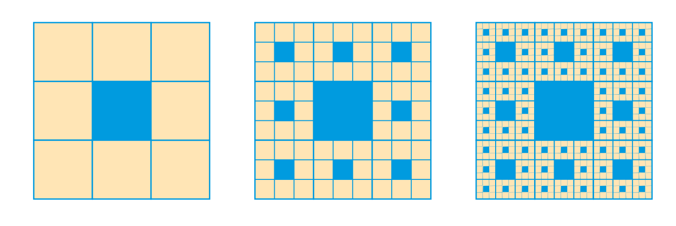
b) Encuentre la suma de los perímetros de todos los cuadrados.



100. Geometría Se corta un disco circular de papel con radio R como se muestra en la figura *a*). Se cortan dos discos de papel con radio $\frac{1}{2}R$ y se colocan sobre el primer disco, como en la figura *b*), y luego cuatro discos de radio $\frac{1}{4}R$ se colocan sobre los dos primeros discos como se muestra en la figura *c*). Suponiendo que este proceso se pueda repetir indefinidamente, encuentre el área total de todos los discos.



101. Geometría Un cuadrado amarillo de lado 1 se divide en nueve cuadrados más pequeños, y el cuadrado de en medio se pinta de azul como se muestra en la figura. Cada uno de los cuadrados más pequeños se divide a su vez en nueve cuadrados, y estos cuadrados de en medio se pintan de azul. Si este proceso se continúa indefinidamente, ¿cuál es el área total que se pinta de azul?



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

102. DEMOSTRACIÓN: Recíprocos de una sucesión geométrica Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común r, demuestre que la sucesión

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$$

es también una sucesión geométrica y encuentre la razón común.

103. DEMOSTRACIÓN: Logaritmos de una sucesión geométrica Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común $r > 0$ y $a_1 > 0$, demuestre que la sucesión

$$\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots$$

es una sucesión aritmética y encuentre la diferencia común.

104. DEMOSTRACIÓN: Exponenciales de una sucesión aritmética Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética con diferencia común d, demuestre que la sucesión

$$10^{a_1}, 10^{a_2}, 10^{a_3}, \ldots$$

es una sucesión geométrica y encuentre la razón común.

12.4 MATEMÁTICAS DE FINANZAS

■ La cantidad de una anualidad ■ El valor presente de una anualidad ■ Compras a plazos

Muchas transacciones financieras se relacionan con pagos que se hacen a intervalos regulares. Por ejemplo, si una persona deposita 100 dólares cada mes en una cuenta que paga intereses, ¿cuál será el valor de su cuenta al término de 5 años? Si una persona solicita un préstamo de 100 000 dólares para comprar una casa, ¿de cuánto deben ser los pagos mensuales para pagar el préstamo en 30 años? Cada una de estas preguntas implica la suma de una sucesión de números; usamos los resultados de la sección anterior para contestarlas.

■ La cantidad de una anualidad

Una **anualidad** es una suma de dinero que se liquida en pagos regulares e iguales. Aun cuando la palabra *anualidad* sugiere pagos anuales (o al año) estos se pueden hacer semestral, trimestral o mensualmente, o mediante algún otro intervalo regular. Los pagos

por lo general se hacen al término del intervalo para pagar. La **cantidad de una anualidad** es la suma de todos los pagos individuales desde el momento del primero hasta que se hace el último pago junto con todos los intereses. Denotamos esta suma por A_f (el subíndice f aquí se utiliza para denotar cantidad *final*).

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de la cantidad de una anualidad

Un inversionista deposita 400 dólares los días 15 de diciembre y 15 de junio durante 10 años en una cuenta que gana intereses a razón de 8% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto habrá en la cuenta inmediatamente después del último pago?

Cuando calcule tasa de interés en calculadora recuerde convertir los porcentajes a decimales. Por ejemplo 8% es 0.08.

SOLUCIÓN Necesitamos encontrar la cantidad de una anualidad que consta de 20 pagos semestrales de 400 dólares cada uno. Dado que la tasa de interés es 8% al año, capitalizada semestralmente, la tasa de interés por periodo es $i = 0.08/2 = 0.04$. El primer pago está en la cuenta durante 19 periodos, el segundo durante 18 periodos, y así sucesivamente.

El último pago no recibe intereses. La situación se puede ilustrar por medio de la línea de tiempo de la figura 1.

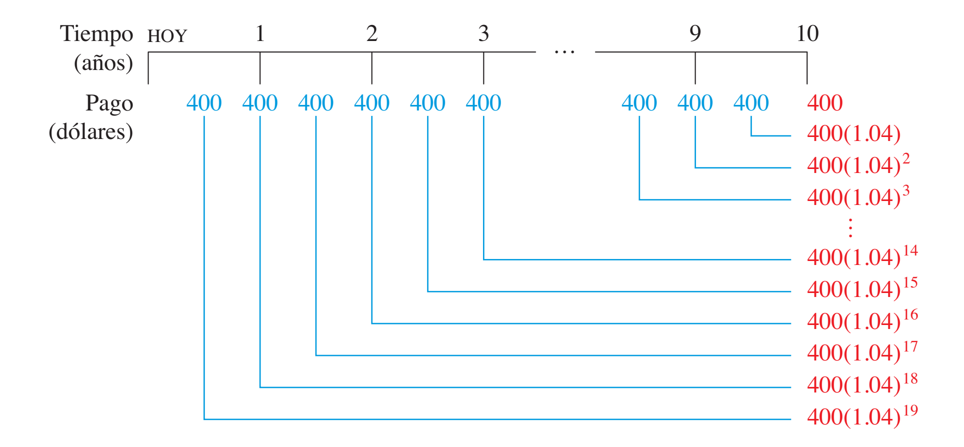


FIGURA 1

La cantidad A_f de la anualidad es la suma de estas 20 cantidades. Así,

$$A_f = 400 + 400(1.04) + 400(1.04)^2 + \cdots + 400(1.04)^{19}$$

Pero esta es una serie geométrica con $a = 400$, $r = 1.04$ y $n = 20$, entonces

$$A_f = 400\frac{1 - (1.04)^{20}}{1 - 1.04} \approx 11\,911.23$$

Por tanto, la cantidad en la cuenta después del último pago es 11 911.23 dólares.

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

En general, el pago regular de anualidad se llama **renta periódica** y se denota con R. También denotamos con i la tasa de interés por periodo y con n el número de pagos. *Siempre suponemos que el periodo en el que el interés se capitaliza es igual al tiempo entre pagos.* Mediante el mismo razonamiento que en el ejemplo 1 vemos que la cantidad A_f de una anualidad es

$$A_f = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}$$

Dado que esta es la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica con $a = R$ y $r = 1 + i$, la fórmula para la suma parcial da

$$A_f = R\frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = R\frac{1 - (1 + i)^n}{-i} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Las matemáticas en el mundo moderno

Economía y matemáticas

La salud de la economía mundial está determinada por factores interrelacionados como son oferta, demanda, producción, consumo, precios, distribución y miles de otros factores. Estos están a su vez determinados por decisiones de economía (por ejemplo, si uno compra o no cierta marca de dentífrico) que diariamente toman miles de millones de personas. ¿De qué forma la creación y la distribución de bienes de consumo de hoy afectará la economía de mañana? Estas preguntas son abordadas por matemáticos que trabajan en modelos matemáticos de la economía. En la década de 1940 Wassily Leontief, pionero en este campo de actividad, creó un modelo formado por miles de ecuaciones que describen la forma en que sectores diferentes de la economía, por ejemplo, la industria del petróleo, transporte y comunicaciones, interaccionan entre sí. Un método diferente de plantear modelos económicos, que se refiere a individuos en la economía y en contraposición a sectores grandes, fue iniciado por John Hash en la década de 1950. En este modelo, que utiliza *teoría del juego*, la economía es un juego donde los participantes toman decisiones que con frecuencia llevan a ganancias mutuas. Leontief y Nash recibieron el Premio Nobel en Economía en 1973 y en 1994, respectivamente. La teoría de economía continúa siendo una parte importante de la investigación matemática.

CANTIDAD DE UNA ANUALIDAD

La cantidad A_f de una anualidad formada de n pagos regulares e iguales de una cantidad R con tasa de interés i por periodo está dada por

$$A_f = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

EJEMPLO 2 ■ Cálculo de la cantidad de una anualidad

¿Cuánto dinero debe invertirse cada mes a 12% anual, capitalizado mensualmente, para obtener 4 000 dólares en 18 meses?

SOLUCIÓN En este problema $i = 0.12/12 = 0.01$, $A_f = 4000$ y $n = 18$. Necesitamos encontrar la cantidad R de cada pago. Por la fórmula para la cantidad de una anualidad,

$$4000 = R\,\frac{(1+0.01)^{18} - 1}{0.01}$$

Despejando R, obtenemos

$$R = \frac{4000(0.01)}{(1+0.01)^{18} - 1} \approx 203.928$$

Entonces la inversión mensual debe ser de 203.93 dólares.

Ahora intente realizar el ejercicio 9 ■

■ El valor presente de una anualidad

Si usted fuera a recibir 10 000 dólares dentro de cinco años, valdrían mucho menos que si tuviera 10 000 dólares ahora. Esto es por el interés que podría acumular durante los siguientes cinco años si invirtiera el dinero ahora. ¿Qué cantidad menor estaría una persona dispuesta a aceptar *ahora* en lugar de recibir 10 000 dólares dentro de cinco años? Esta es la cantidad de dinero que, junto con el interés, valdría 10 000 dólares dentro de cinco años. La cantidad que estamos buscando aquí recibe el nombre de *valor descontado* o *valor presente*. Si la tasa de interés es 8% anual, capitalizado trimestralmente, entonces el interés por periodo es $i = 0.08/4 = 0.02$ y hay $4 \times 5 = 20$ periodos. Si con PV denotamos el valor presente, entonces por la fórmula para interés compuesto (sección 4.1), tenemos

$$10\,000 = PV(1+i)^n = PV(1+0.02)^{20}$$

entonces

$$PV = 10\,000(1+0.02)^{-20} \approx 6729.713$$

Por tanto, en esta situación el valor presente de 10 000 dólares es \$6 729.71. Este razonamiento conduce a una fórmula general para valor presente. Si una cantidad A_f se ha de pagar en una suma total n periodos a partir de ahora y la tasa de interés por periodo es i, entonces su **valor presente** A_p está dado por

$$A_p = A_f(1+i)^{-n}$$

Del mismo modo, el **valor presente de una anualidad** es la cantidad A_p que debe invertirse ahora a la tasa de interés i por periodo para dar n pagos, cada uno de una cantidad R. Claramente, A_p es la suma de los valores presentes de cada pago individual (vea el ejercicio 29). Otra forma de encontrar A_p es observar que A_p es el valor presente de A_f:

$$A_p = A_f(1+i)^{-n} = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

EL VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD

El **valor presente** A_p de una anualidad formada por n pagos regulares e iguales de una cantidad R, y tasa de interés i por periodo, está dado por

$$A_p = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

EJEMPLO 3 ■ Cálculo del valor presente de una anualidad

Una persona gana 10 000 000 dólares en la lotería de California, y la cantidad se paga en pagos anuales de medio millón de dólares cada uno durante 20 años. ¿Cuál es el valor presente de este premio? Suponga que la persona puede ganar 10% de interés, capitalizado anualmente.

SOLUCIÓN Puesto que la cantidad ganada se paga como una anualidad necesitamos encontrar su valor presente. Aquí, $i = 0.1$, $R = \$500\,000$ y $n = 20$. Por tanto

$$A_p = 500\,000\,\frac{1-(1+0.1)^{-20}}{0.1} \approx 4\,256\,781.859$$

Esto significa que el ganador sólo obtendría 4 256 781.86 dólares si se le pagaran de inmediato.

Ahora intente realizar el ejercicio 11 ■

Compras a plazos

Cuando una persona compra a plazos una casa o un auto, los pagos que debe hacer son una anualidad cuyo valor presente es la cantidad del préstamo.

EJEMPLO 4 ■ La cantidad de un préstamo

Una estudiante desea comprar un auto. Ella puede pagar 200 dólares al mes, pero no tiene dinero para el enganche o el pago inicial. Si ella puede hacer estos pagos durante cuatro años y la tasa de interés es 12%, ¿qué precio de compra puede pagar?

SOLUCIÓN Los pagos que la estudiante hace constituyen una anualidad cuyo valor presente es el precio del auto (que también es la cantidad del préstamo, en este caso). Aquí, tenemos $i = 0.12/12 = 0.01$, $R = 200$ y $n = 12 \times 4 = 48$, entonces

$$A_p = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 200\,\frac{1-(1+0.01)^{-48}}{0.01} \approx 7594.792$$

En consecuencia, la estudiante puede comprar un auto cuyo precio de 7 594.79 dólares.

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

Cuando un banco hace un préstamo que ha de ser pagado con pagos iguales y regulares R, entonces los pagos forman una anualidad cuyo valor presente A_p es la cantidad del préstamo. Entonces, para encontrar la cantidad de los pagos, despejamos R de la fórmula para la cantidad de una anualidad. Esto da la siguiente fórmula para R.

COMPRAS A PLAZOS

Si un préstamo A_p ha de pagarse en n pagos iguales y regulares con tasa de interés i por periodo, entonces la cantidad R de cada pago está dado por

$$R = \frac{iA_p}{1-(1+i)^{-n}}$$

EJEMPLO 5 ■ Cálculo de pagos mensuales de hipoteca

Un matrimonio solicita en préstamo de 100 000 dólares a 9% de interés como préstamo hipotecario sobre una casa. Pueden esperar hacer pagos mensuales durante 30 años para pagar el préstamo. ¿Cuál es la cantidad de cada pago?

SOLUCIÓN Los pagos de hipoteca forman una anualidad cuyo valor presente es $A_p =$ 100 000 dólares. También $i = 0.09/12 = 0.0075$ y $n = 12 \times 30 = 360$. Estamos buscando la cantidad R de cada pago.

De la fórmula para compras a plazos, tenemos

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{(0.0075)(100\,000)}{1 - (1 + 0.0075)^{-360}} \approx 804.623$$

Entonces los pagos mensuales son de 804.62 dólares.

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

Ahora ilustramos el uso de calculadoras graficadoras para resolver problemas relacionados con compras a plazos.

EJEMPLO 6 ■ Cálculo de la tasa de interés a partir de la cantidad de pagos mensuales

Un distribuidor de autos vende un auto nuevo en 18 000 dólares. Ofrece al comprador que realice pagos de 405 dólares al mes durante 5 años. ¿Qué tasa de interés está cobrando este distribuidor de autos?

SOLUCIÓN Los pagos forman una anualidad con valor presente de $A_p = 18\,000$ dólares, $R = 405$ y $n = 12 \times 5 = 60$. Para encontrar la tasa de interés debemos despejar i de la ecuación

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Luego de experimentar un poco nos convencemos de que no es posible despejar algebraicamente i de esta ecuación. Entonces, para encontrar i, usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica R como función de la tasa de interés x, y así usamos la gráfica para encontrar la tasa de interés correspondiente al valor de R que buscamos (405 dólares en este caso). Puesto que $i = x/2$, trazamos la gráfica de la función

$$R(x) = \frac{\frac{x}{12}(18\,000)}{1 - \left(1 + \frac{x}{12}\right)^{-60}}$$

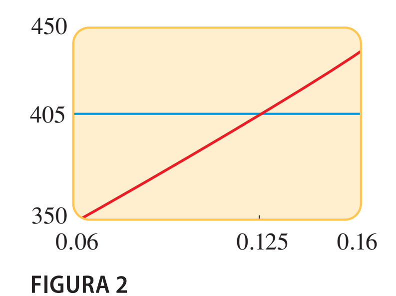


FIGURA 2

en el rectángulo de vista [0.06, 0.16] × [350, 450], como se muestra en la figura 2. También graficamos la recta $R(x) = 405$ en el mismo rectángulo de vista. Luego, al mover el cursor al punto de intersección de las dos gráficas encontramos que el valor x correspondiente es aproximadamente 0.125. Entonces la tasa de interés es alrededor de $12\frac{1}{2}$ por ciento.

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

12.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una anualidad es una suma de dinero que se liquida en pagos regulares e iguales. El ________ de una anualidad es la suma de todos los pagos individuales junto con todo el interés.

2. La ________ ________ de una anualidad es la cantidad que debe ser invertida hoy a una tasa de interés i por periodo para dar n pagos, cada uno de una cantidad R.

APLICACIONES

3. Anualidad Encuentre la cantidad de una anualidad que está formada por 10 pagos anuales de 1 000 dólares cada uno en una cuenta que paga 6% de interés por año.

4. Anualidad Encuentre la cantidad de una anualidad que está formada por 24 pagos anuales de 500 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés por año, capitalizado mensualmente.

5. Anualidad Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 20 pagos anuales de 5 000 dólares cada uno en una cuenta que paga interés de 12% al año.

6. Anualidad Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 20 pagos semestrales de 500 dólares cada uno, en una cuenta que paga interés de 6% al año, capitalizado semestralmente.

7. Anualidad Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 16 pagos trimestrales de 300 dólares cada uno, en una cuenta que paga interés de 8% al año capitalizado trimestralmente.

8. Anualidad Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 40 pagos anuales de 2 000 dólares cada uno, en una cuenta que paga interés de 5% al año.

9. Ahorros ¿Cuánto dinero debe ser invertido cada trimestre al 10% al año, capitalizado trimestralmente, para tener 5 000 dólares en dos años?

10. Ahorros ¿Cuánto dinero debe ser invertido cada trimestre al 6% al año, capitalizado mensualmente, para tener 2 000 dólares en ocho meses?

11. Anualidad ¿Cuál es el valor presente de una anualidad formada por 20 pagos semestrales de 1 000 dólares a una tasa de interés de 9% al año, capitalizado semestralmente?

12. Anualidad ¿Cuál es el valor presente de una anualidad formada por 30 pagos mensuales de 300 dólares a una tasa de interés de 8% al año, capitalizado mensualmente?

13. Financiamiento de una anualidad ¿Cuánto dinero debe ser invertido ahora al 9% al año, capitalizado semestralmente, para financiar una anualidad de 20 pagos de 200 dólares cada uno, pagados cada 6 meses, siendo el primer pago dentro de 6 meses.

14. Financiamiento de una anualidad Un hombre de 55 años deposita 50 000 dólares para financiar una anualidad con una compañía de seguros. El dinero será invertido al 8% al año, capitalizado semestralmente. Él ha de retirar pagos semestrales hasta que cumpla los 65 años de edad. ¿Cuál es la cantidad de cada pago?

15. Financiamiento de un auto Una mujer desea solicitar 12 000 dólares en préstamo para comprar un auto. Ella desea pagar el préstamo con pagos mensuales durante 4 años. Si la tasa de interés en este préstamo es $10\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizado mensualmente, ¿cuál es la cantidad de cada pago?

16. Hipoteca ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de 80 000 dólares a 30 años al 9% de interés? ¿Cuál es el pago mensual sobre esta misma hipoteca si ha de pagarse en un periodo de 15 años?

17. Hipoteca ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de 100 000 dólares a 30 años al 8% de interés al año, capitalizado mensualmente? ¿Cuál es la cantidad total pagada sobre este préstamo en un periodo de 30 años?

18. Hipoteca ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de 200 000 dólares a 15 años al 6% de interés? ¿Cuál es la cantidad total pagada sobre este préstamo en un periodo de 15 años?

19. Hipoteca La Dra. Gupta está considerando una hipoteca de 30 años al 6% de interés. Ella puede hacer pagos de 3 500 dólares al mes. ¿De qué cantidad es el préstamo que puede solicitar?

20. Hipoteca Un matrimonio puede hacer pagos mensuales de 650 dólares. Si la tasa de la hipoteca es 9% y el matrimonio desea asegurar una hipoteca de 30 años, ¿cuánto pueden solicitar en préstamo?

21. Financiamiento de un auto Jane conviene en comprar un auto con un enganche de 2 000 dólares y pagos de 220 al mes durante 3 años. Si la tasa de interés es 8% por año, capitalizado mensualmente, ¿cuál es el precio real de compra de su auto?

22. Financiamiento de un anillo Mike compra un anillo para su novia por el que paga 30 dólares al mes durante un año. Si la tasa de interés es 10% por año, capitalizado mensualmente, ¿cuál es el precio del anillo?

23. Hipoteca Una pareja asegura un préstamo de 100 000 dólares a 30 años al $9\frac{3}{4}\%$ al año, capitalizado mensualmente, para comprar una casa.

a) ¿Cuál es la cantidad de su pago mensual?

b) ¿Qué cantidad total pagarán en el periodo de 30 años?

c) Si en lugar de tomar el préstamo la pareja deposita los pagos mensuales en una cuenta que paga $9\frac{3}{4}\%$ de interés por año, capitalizado mensualmente, ¿cuánto habrá en su cuenta al final del periodo de 30 años?

24. Hipoteca Una pareja necesita una hipoteca de 300 000 dólares. Su corredor de hipotecas les presenta dos opciones: una hipoteca de 30 años al $6\frac{1}{2}\%$ de interés o una hipoteca de 15 años al $5\frac{3}{4}\%$ de interés.

a) Encuentre el pago mensual sobre la hipoteca de 30 años y sobre la hipoteca de 15 años. ¿Cuál hipoteca tiene el pago mensual más alto?

b) Encuentre la cantidad total a pagar durante la vida del préstamo. ¿Cuál hipoteca tiene el pago total más bajo durante su vida?

25. Tasa de interés John compra un sistema de sonido estéreo en 640 dólares. Él conviene en pagar 32 dólares al mes durante 2 años. Suponiendo que el interés se capitalice mensualmente, ¿qué tasa de interés está pagando?

26. Tasa de interés Los pagos de Janet por su auto de 12 500 dólares son de 420 dólares al mes durante 3 años. Suponiendo que el interés se capitalice mensualmente, ¿cuál tasa de interés está pagando sobre el préstamo de su auto?

27. Tasa de interés Un artículo en una tienda departamental tiene un precio de 189.99 dólares y se puede adquirir con 20 pagos de 10.50 dólares. Encuentre la tasa de interés, suponiendo que el interés se capitaliza mensualmente.

28. Tasa de interés Un hombre compra un anillo de diamantes en 2 000 dólares por un enganche de 200 dólares y pagos mensuales de $88 durante 2 años. Suponiendo que el interés se capitaliza mensualmente, ¿qué tasa de interés está pagando?

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

29. DESCUBRIMIENTO: Valor presente de una anualidad

a) Trace una recta como en el ejemplo 1 para demostrar que el valor presente de una anualidad es la suma de los valores presentes de cada pago, es decir,

$$A_p = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

b) Use el inciso *a*) para deducir la fórmula para A_p dada en el texto.

30. DESCUBRIMIENTO: Una anualidad que dura para siempre Una **anualidad a perpetuidad** es aquella que continúa para siempre. Estas anualidades son útiles para establecer fondos de becas y asegurar que continúe la asignación de dinero.

a) Trace una recta (como en el ejemplo 1) para demostrar que para establecer una anualidad a perpetuidad de una cantidad R por periodo, la cantidad que debe ser invertida hoy es

$$A_p = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} + \cdots$$

donde i es la tasa de interés por periodo.

b) Encuentre la suma de la serie infinita del inciso *a*) para demostrar que

$$A_p = \frac{R}{i}$$

c) ¿Cuánto dinero debe invertirse hoy al 10% al año, capitalizado anualmente, para dar una anualidad de 5 000 dólares anuales a perpetuidad? El primer pago vence dentro de un año.

d) ¿Cuánto dinero debe invertirse hoy al 8% por año, capitalizado trimestralmente, para dar una anualidad de 3 000 dólares anuales a perpetuidad? El primer pago vence dentro de un año.

31. DESCUBRIMIENTO: Amortización de una hipoteca Cuando compraron su casa John y Mary obtuvieron una hipoteca de 90 000 dólares al 9% de interés, pagable mensualmente en 30 años. Su pago es de 724.17 dólares al mes (compruebe esto, usando la fórmula en el texto). El banco les dio un **plan de amortización** que es una tabla que muestra cuánto del pago es interés, cuánto va hacia el principal y el resto del principal después de cada pago. La tabla siguiente muestra los primeros asientos del plan de amortización.

Número de pago	Pago total	Pago de interés	Pago de principal	Principal restante
1	724.17	675.00	49.17	89 950.83
2	724.17	674.63	49.54	89 901.29
3	724.17	674.26	49.91	89 851.38
4	724.17	673.89	50.28	89 801.10

Después de 10 años han hecho 120 pagos y se preguntan cuánto deben todavía, pero han perdido el plan de amortización.

a) ¿Cuánto deben todavía John y Mary sobre su hipoteca? [*Sugerencia*: El saldo restante es el valor presente de los 240 pagos restantes.]

b) ¿Cuánto de su siguiente pago es interés, y cuánto va al capital? [*Sugerencia:* Como 9% ÷ 12 = 0.75%, deben pagar 0.75% del capital restante en intereses cada mes.]

12.5 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

■ Conjetura y demostración ■ Inducción matemática

Hay dos aspectos en matemáticas, descubrimiento y demostración, y son de igual importancia. Debemos descubrir algo antes de intentar probarlo y no podemos estar seguros de su verdad, sino hasta que lo hayamos demostrado. En esta sección examinaremos más de cerca la relación entre estos dos componentes clave en matemáticas.

■ Conjetura y demostración

Intentemos hacer un simple experimento. Sumemos más y más números impares como sigue:

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

¿Qué observa el lector acerca de los números del lado derecho de estas ecuaciones? Todos son, en efecto, cuadrados perfectos. Estas ecuaciones dicen lo siguiente:

La suma del primer número impar es 1^2.
La suma de los primeros 2 números impares es 2^2.
La suma de los primeros 3 números impares es 3^2.
La suma de los primeros 4 números impares es 4^2.
La suma de los primeros 5 números impares es 5^2.

Considere el polinomio

$$p(n) = n^2 - n + 41$$

Veamos ahora algunos valores de $p(n)$:

$$p(1) = 41 \quad p(2) = 43$$
$$p(3) = 47 \quad p(4) = 53$$
$$p(5) = 61 \quad p(6) = 71$$
$$p(7) = 83 \quad p(8) = 97$$

Todos los valores hasta aquí son números primos. De hecho, si continuamos encontraremos que $p(n)$ es primo para todos los números naturales hasta $n = 40$. Podría parecer razonable en este punto conjeturar que $p(n)$ es primo para *todo* número natural n. Pero esa conjetura sería demasiado apresurada porque se ve fácilmente que $p(41)$ *no es* primo. Esto ilustra que no podemos estar seguros de la verdad de un enunciado, sin importar cuántos casos especiales verifiquemos. Necesitamos un argumento convincente, es decir, una *demostración*, para determinar la verdad de un enunciado.

Esto conduce de manera natural a la siguiente pregunta: ¿es cierto que para todo número natural n, la suma de los primeros n números impares es n^2? ¿Podría ser verdadera esta sorprendente propiedad? Podríamos intentar algunos números más y encontrar que el patrón persiste para los primeros 6, 7, 8, 9 y 10 números impares. En este punto nos sentimos seguros de que esto siempre es verdadero, de manera que hacemos una *conjetura:*

La suma de los primeros n números impares es n^2.

En vista de que sabemos que el n-ésimo número impar es $2n - 1$, podemos escribir este enunciado más precisamente como

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Es importante ver que esta es todavía una conjetura. Al verificar un número finito de casos no podemos concluir que una propiedad es verdadera para todos los números (hay una cantidad infinita de estos). Para ver lo anterior con más claridad suponga que alguien nos dice que ha sumado el primer billón de números impares y ha encontrado que *no* suman más de 1 billón al cuadrado. ¿Qué le diríamos a esta persona? Sería poco inteligente decir que estamos seguros de que es verdad porque ya hemos verificado los primeros cinco casos. No obstante, podríamos tomar papel y lápiz y empezar a verificarlo, tarea que probablemente nos tome el resto de nuestra vida. La tragedia sería que, después de completar esta tarea, todavía no estaríamos seguros de la verdad de la conjetura. ¿Sabe por qué?

Ahora veamos el poder de una demostración matemática. Una **demostración** es un argumento claro que prueba la verdad de un enunciado fuera de toda duda.

Inducción matemática

Consideremos una clase especial de demostración llamada **inducción matemática**. Ahora veamos cómo funciona: suponga que tenemos un enunciado que dice algo acerca de todos los números naturales n. Por ejemplo, para cualquier número natural n, sea $P(n)$ el siguiente enunciado:

$P(n)$: La suma de los primeros n números impares es n^2

Puesto que este enunciado es acerca de todos los números naturales contiene un número infinito de enunciados; los llamaremos $P(1)$, $P(2)$, . . .

$P(1)$: La suma del primer número impar es 1^2.
$P(2)$: La suma de los primeros 2 números impares es 2^2.
$P(3)$: La suma de los primeros 3 números impares es 3^2.
⋮ ⋮

¿Cómo podemos demostrar todos estos enunciados al mismo tiempo? La inducción matemática es una forma inteligente de hacer eso exactamente.

Lo esencial de la idea es: suponga que podemos demostrar que siempre que uno de estos enunciados sea verdadero, entonces el siguiente de la lista también es verdadero. En otras palabras,

Si para toda k, $P(k)$ es verdadero, entonces $P(k + 1)$ es verdadero.

Esto se denomina **paso de inducción** porque nos conduce de la verdad de un enunciado a la verdad del siguiente. Ahora suponga que también podemos demostrar que

$P(1)$ es verdadero.

El paso de inducción ahora nos conduce por la siguiente cadena de enunciados:

$P(1)$ es verdadero, de modo que $P(2)$ es verdadero.
$P(2)$ es verdadero, de modo que $P(3)$ es verdadero.
$P(3)$ es verdadero, de modo que $P(4)$ es verdadero.
⋮ ⋮



BLAISE PASCAL (1623 1662) es considerado una de las mentes más versátiles de la historia moderna. Fue escritor y filósofo, así como un talentoso matemático y físico. Entre sus aportaciones que aparecen en este libro están el triángulo de Pascal y el principio de inducción matemática.

El padre de Pascal, también matemático, pensaba que su hijo no debería estudiar matemáticas sino hasta que cumpliera 15 o 16 años. Pero a los 12 Blaise insistió en aprender geometría y demostró casi todos los teoremas por sí solo. A los 19 inventó la primera sumadora mecánica. En 1647, después de escribir un importante tratado sobre secciones cónicas, abruptamente abandonó las matemáticas porque sintió que sus intensos estudios contribuían a su mala salud. Se dedicó entonces a recreaciones frívolas tales como el juego, pero esto sólo sirvió para despertar su interés en la probabilidad. En 1654 milagrosamente sobrevivió a un accidente en un carruaje en el que sus caballos cayeron por un puente. Tomando esto como signo de Dios, Pascal entró a un monasterio donde estudió teología y filosofía, y escribió su famoso libro *Pensées*. También continuó su investigación matemática. Valoraba la fe y la intuición más que la razón como fuente de la verdad, declarando que "el corazón tiene sus propias razones, que la razón no puede conocer".

Así, vemos que si se demuestran el paso de inducción y $P(1)$, entonces el enunciado $P(n)$ está demostrado para toda n. Ahora veamos un resumen de este importante método de demostración.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Para todo número natural n, sea $P(n)$ un enunciado que depende de n. Suponga que se satisfacen las dos condiciones siguientes.

1. $P(1)$ es verdadero.
2. Si $P(k)$ es verdadero para todo número natural k, entonces $P(k + 1)$ es verdadero.

Entonces $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales n.

Para aplicar este principio hay dos pasos:

Paso 1 Probar que $P(1)$ es verdadero.

Paso 2 Suponer que $P(k)$ es verdadero y usar esta suposición para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadero.

Observe que en el paso 2 no demostramos que $P(k)$ es verdadero. Sólo demostramos que si $P(k)$ es verdadero, *entonces* $P(k + 1)$ también lo es. La suposición de que $P(k)$ es verdadero se llama **hipótesis de inducción**.



Ahora usamos inducción matemática para demostrar que la conjetura que hicimos al principio de esta sección es verdadera.

EJEMPLO 1 ■ Una demostración por inducción matemática

Demuestre que, para todos los números naturales n,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

SOLUCIÓN Denotemos con $P(n)$ el enunciado $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Paso 1 Necesitamos demostrar que $P(1)$ es verdadero. Pero $P(1)$ es simplemente el enunciado de que $1 = 1^2$ que, por supuesto, es verdadero.

Paso 2 Suponemos que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Queremos usar esto para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadero, es decir,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

[Observe que obtenemos $P(k + 1)$ al sustituir $k + 1$ por cada n en el enunciado $P(n)$.] Empezamos con el lado izquierdo y usamos la hipótesis de inducción para obtener el lado derecho de la ecuación:

Esto es igual a k^2 por la hipótesis de inducción

$$
\begin{aligned}
&1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\
&= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)] + [2(k + 1) - 1] && \text{Agrupe los primeros } k \text{ términos} \\
&= k^2 + [2(k + 1) - 1] && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= k^2 + [2k + 2 - 1] && \text{Propiedad distributiva} \\
&= k^2 + 2k + 1 && \text{Simplifique} \\
&= (k + 1)^2 && \text{Factorice}
\end{aligned}
$$

Entonces $P(k + 1)$ se deduce de $P(k)$, y esto completa el paso de inducción.

Habiendo demostrado los pasos 1 y 2 concluimos por el principio de inducción matemática que $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n.



EJEMPLO 2 ■ Una demostración por inducción matemática

Demuestre que para todo número natural n,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

SOLUCIÓN Sea $P(n)$ el enunciado $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$. Queremos demostrar que $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales n.

Paso 1 Necesitamos demostrar que $P(1)$ es verdadero, pero $P(1)$ dice que

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

y este enunciado es claramente verdadero.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

Deseamos usar esto para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadero, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2}$$

Por tanto, empezamos con el lado izquierdo y usamos la hipótesis de inducción para obtener el lado derecho:

Esto es igual a $\frac{k(k + 1)}{2}$ por la hipótesis de inducción

$$
\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) \\
&= [1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k + 1) && \text{Agrupe los primeros } k \text{ términos} \\
&= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && \text{Factorice } k + 1 \\
&= (k + 1)\left(\frac{k + 2}{2}\right) && \text{Común denominador} \\
&= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} && \text{Escriba } k + 2 \text{ como } k + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Entonces $P(k + 1)$ se deduce de $P(k)$, y esto completa el paso de inducción.

Habiendo probado los pasos 1 y 2 concluimos por el principio de inducción matemática que $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales n.

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

El recuadro siguiente da fórmulas para las sumas de potencias de los primeros n números naturales. Estas son importantes en cálculo. La fórmula 1 se demuestra en el ejemplo 2. Las otras fórmulas también se demuestran usando inducción matemática (vea los ejercicios 6 y 9).

SUMAS DE POTENCIAS

0. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Puede ocurrir que un enunciado $P(n)$ sea falso para los primeros números naturales, pero verdadero a partir de algún número en adelante. Por ejemplo, podríamos desear demostrar que $P(n)$ es verdadero para $n \geq 5$. Observe que si demostramos que $P(5)$ es verdadero, entonces este hecho junto con el paso de inducción implicaría la verdad de $P(5), P(6), P(7), \ldots$ El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 3 ■ Demostrar una desigualdad por inducción matemática

Demuestre que $4n < 2^n$ para toda $n \geq 5$.

SOLUCIÓN Denotemos con $P(n)$ el enunciado $4n < 2^n$.

Paso 1 $P(5)$ es el enunciado de que $4 \cdot 5 < 2^5$, o sea $20 < 32$, que es verdadero.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$4k < 2^k$$

Deseamos usar esto para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero, es decir,

$$4(k+1) < 2^{k+1}$$

Obtenemos $P(k+1)$ si sustituimos n por $k+1$ en el enunciado $P(n)$.

Entonces empezamos con el lado izquierdo de la desigualdad y usamos la hipótesis de inducción para demostrar que es menor que el lado derecho. Para $k \geq 5$ tenemos

$$\begin{aligned} 4(k+1) &= 4k + 4 && \text{Propiedad distributiva} \\ &< 2^k + 4 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &< 2^k + 4k && \text{Porque } 4 < 4k \\ &< 2^k + 2^k && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 2 \cdot 2^k && \\ &= 2^{k+1} && \text{Propiedad de exponentes} \end{aligned}$$

Por tanto, $P(k+1)$ se deduce de $P(k)$ y esto completa el paso de inducción.

Habiendo demostrado los pasos 1 y 2 concluimos por el principio de inducción matemática que $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales $n \geq 5$.

Ahora intente realizar el ejercicio 21 ■

12.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La inducción matemática es un método para demostrar que un enunciado $P(n)$ es verdadero para todos los números ________ n. En el paso 1 demostramos que ________ es verdadero.

2. ¿Qué de lo siguiente es verdadero respecto al paso 2 en una demostración por inducción matemática?

(i) Demostramos: "$P(k + 1)$ es verdadero".

(ii) Demostramos: "Si $P(k)$ es verdadero, entonces $P(k + 1)$ es verdadero".

HABILIDADES

3–14 ■ Demostración de una fórmula Use inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todos los números naturales n.

3. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

4. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

5. $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n + 2) = \dfrac{n(3n + 7)}{2}$

6. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

8. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n + 2) = \dfrac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}$

9. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$

10. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

11. $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$

12. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{(n + 1)}$

13. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n$
$= 2[1 + (n - 1)2^n]$

14. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

15–24 ■ Demostración de un enunciado Use inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero.

15. $n^2 + n$ es divisible entre 2 para todos los números naturales n.

16. $5^n - 1$ es divisible entre 4 para todos los números naturales n.

17. $n^2 - n + 41$ es impar para todos los números naturales n.

18. $n^3 - n + 3$ es divisible entre 3 para todos los números naturales n.

19. $8^n - 3^n$ es divisible entre 5 para todos los números naturales n.

20. $3^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para todos los números naturales n.

21. $n < 2^n$ para todos los números naturales n.

22. $(n + 1)^2 < 2n^2$ para todos los números naturales $n \geq 3$.

23. Si $x > -1$, entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todos los números naturales n.

24. $100n \leq n^2$ para toda $n \geq 100$.

25. Fórmula para una sucesión recursiva Una sucesión se define en forma recursiva por $a_{n+1} = 3a_n$ y $a_1 = 5$. Demuestre que $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ para todos los números naturales n.

26. Fórmula para una sucesión recursiva Una sucesión está definida en forma recursiva por $a_{n+1} = 3a_n - 8$ y $a_1 = 4$. Encuentre una fórmula explícita para a_n y luego use inducción matemática para demostrar que la fórmula que encontró es verdadera.

27. Demostrar una factorización Demuestre que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todos los números naturales n. [*Sugerencia:* $x^{k+1} - y^{k+1} = x^k(x - y) + (x^k - y^k)y$.]

28. Demostrar una factorización Demuestre que $x + y$ es un factor de $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ para todos los números naturales n.

HABILIDADES Plus

29–33 ■ Sucesión de Fibonacci F_n denota el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci que se estudia en la sección 12.1. Use inducción matemática para demostrar el enunciado.

29. F_{3n} es par para todos los números naturales n.

30. $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

31. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$

32. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

33. Para toda $n \geq 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

34. Fórmula usando números de Fibonacci Sea a_n el n-ésimo término de la sucesión definida en forma recursiva por

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

y sea $a_1 = 1$. Encuentre una fórmula para a_n en términos de los números de Fibonacci F_n. Demuestre que la fórmula que encontró es válida para todos los números naturales n.

35. Descubrir y demostrar una desigualdad Sea F_n el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Encuentre y demuestre una desigualdad que relacione n y F_n para números naturales n.

36. Descubrir y demostrar una desigualdad Encuentre y demuestre una desigualdad que relacione $100n$ y n^3.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

37. DISCUSIÓN: ¿Verdadero o falso? Determine si cada enunciado es verdadero o falso. Si considera que el enunciado es verdadero demuéstrelo; si considera que es falso dé un ejemplo en el que falle.

a) $p(n) = n^2 - n + 11$ es primo para toda n.

b) $n^2 > n$ para toda $n \geq 2$.

c) $2^{2n+1} + 1$ es divisible entre 3 para toda $n \geq 1$.

d) $n^3 \geq (n + 1)^2$ para toda $n \geq 2$.

e) $n^3 - n$ es divisible entre 3 para toda $n \geq 2$.

f) $n^3 - 6n^2 + 11n$ es divisible entre 6 para toda $n \geq 1$.

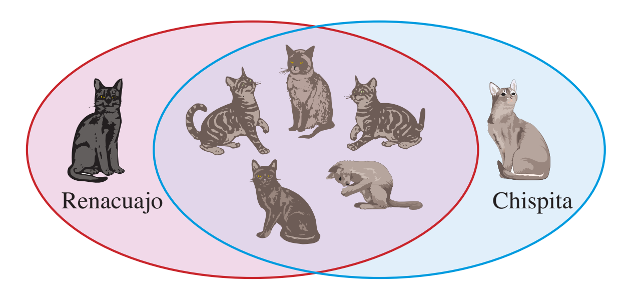
38. DISCUSIÓN: ¿Son negros todos los gatos? ¿Qué está mal con la siguiente "demostración" por inducción matemática de que todos los gatos son negros? Denote con $P(n)$ el enunciado: "En cualquier grupo de n gatos, si un gato es negro, entonces todos son negros".

Paso 1 El enunciado es claramente verdadero para $n = 1$.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadero. Demostramos que $P(k + 1)$ es verdadero.

Suponga que tenemos un grupo de $k + 1$ gatos, uno de los cuales es negro; llame a este gato "Renacuajo". Elimine del grupo algún otro gato (llámelo "Chispita"). Nos quedan k gatos, uno de los cuales (Renacuajo) es negro, de modo que, por hipótesis de inducción, todos estos k gatos son negros. Ahora regrese a Chispita al grupo y saque a Renacuajo. De nuevo tenemos un grupo de k gatos, todos los cuales, excepto quizá Chispita, son negros. Entonces por hipótesis de inducción, Chispita también debería ser negro. Por tanto, todos los $k + 1$ gatos del grupo original son negros.

En consecuencia, por inducción, $P(n)$ es verdadero para toda n. Puesto que todos hemos visto al menos un gato negro se deduce que todos los gatos son negros.



12.6 EL TEOREMA DEL BINOMIO

■ Desarrollo de $(a + b)^n$ ■ Los coeficientes de un binomio ■ El teorema del binomio ■ Demostración del teorema del binomio

Una expresión de la forma $a + b$ se denomina **binomio**. Aun cuando en principio es fácil elevar $a + b$ a cualquier potencia, elevarlo a una potencia muy alta sería tedioso. En esta sección encontramos una fórmula que da el desarrollo de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n y luego la demostramos usando inducción matemática.

■ Desarrollo de $(a + b)^n$

Para encontrar un patrón en el desarrollo de $(a + b)^n$, primero buscamos algunos casos especiales.

$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\vdots$$

Los siguientes patrones sencillos emergen para el desarrollo de $(a + b)^n$.

1. Hay $n + 1$ términos, siendo el primero a^n y el último b^n.
2. Los exponentes de a disminuyen en 1 de término en término, en tanto que los exponentes de b aumentan en 1.
3. La suma de los exponentes de a y b de cada término es n.

Por ejemplo, observe cómo los exponentes de a y b se comportan en el desarrollo de $(a + b)^5$.

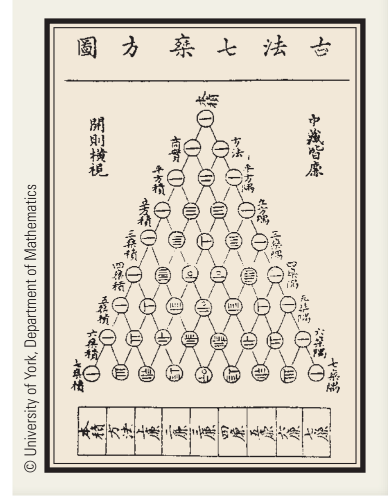
Los exponentes de *a* disminuyen:

$$(a + b)^5 = a^{⑤} + 5a^{④}b^1 + 10a^{③}b^2 + 10a^{②}b^3 + 5a^{①}b^4 + b^5$$

Los exponentes de *b* aumentan:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b^{①} + 10a^3b^{②} + 10a^2b^{③} + 5a^1b^{④} + b^{⑤}$$

Lo que llamamos **triángulo de Pascal** aparece en este documento chino de Chu Shikie, que data de 1303. El título dice: "Tabla del método antiguo de los siete cuadros de multiplicación". El triángulo fue redescubierto por Pascal (vea la página 875).



Con estas observaciones podemos escribir la forma del desarrollo de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n. Por ejemplo, al escribir un signo de interrogación para los coeficientes faltantes tenemos

$$(a + b)^8 = a^8 + \boxed{?}a^7b + \boxed{?}a^6b^2 + \boxed{?}a^5b^3 + \boxed{?}a^4b^4 + \boxed{?}a^3b^5 + \boxed{?}a^2b^6 + \boxed{?}ab^7 + b^8$$

Para completar el desarrollo necesitamos determinar estos coeficientes. Para encontrar un patrón escribamos los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^n$ para los primeros pocos valores de n en un arreglo triangular de números, como se muestra a continuación, que se llama **triángulo de Pascal**.

$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1

El conjunto de números correspondiente a $(a + b)^0$ se denomina renglón cero y se incluye para demostrar la simetría del conjunto de números. La observación clave acerca del triángulo de Pascal es la siguiente propiedad.

PROPIEDAD CLAVE DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Todo elemento (que no sea un 1) es la suma de los dos elementos que están diagonalmente sobre él.

De esta propiedad es fácil encontrar cualquier renglón del triángulo de Pascal a partir del renglón de arriba de él. Por ejemplo, encontramos los renglones sexto y séptimo empezando con el quinto renglón:

$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a + b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

Para ver por qué se cumple esta situación consideremos los siguientes desarrollos:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Llegamos al desarrollo de $(a + b)^6$ si multiplicamos $(a + b)^5$ por $(a + b)$. Observe, por ejemplo, que el término dentro de un círculo en el desarrollo de $(a + b)^6$ se obtiene por la multiplicación de los dos términos circulados que están encima de él. Obtenemos este término cuando los dos términos sobre él se multiplican por b y a, respectivamente. Entonces, su coeficiente es la suma de los coeficientes de estos dos términos. Usaremos esta observación al final de esta sección cuando demostremos el teorema del binomio.

Habiendo encontrado estos patrones fácilmente podremos ahora obtener el desarrollo de cualquier binomio, al menos a potencias relativamente pequeñas.

EJEMPLO 1 ■ Desarrollo de un binomio usando el triángulo de Pascal

Encuentre el desarrollo $(a + b)^7$ usando el triángulo de Pascal.

SOLUCIÓN El primer término del desarrollo es a^7 y el último término es b^7. Usando el hecho de que el exponente de a disminuye en 1 de un término a otro y que b aumenta en 1 de un término a otro, tenemos

$$(a + b)^7 = a^7 + \boxed{?}a^6b + \boxed{?}a^5b^2 + \boxed{?}a^4b^3 + \boxed{?}a^3b^4 + \boxed{?}a^2b^5 + \boxed{?}ab^6 + b^7$$

Los coeficientes apropiados aparecen en el séptimo renglón del triángulo de Pascal. Así,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

EJEMPLO 2 ■ Desarrollo de un binomio usando el triángulo de Pascal

Use el triángulo de Pascal para desarrollar $(2-3x)^5$.

SOLUCIÓN Encontramos el desarrollo de $(a+b)^5$ y luego sustituimos 2 por a y $-3x$ por b. Usando el triángulo de Pascal para los coeficientes, obtenemos

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Sustituyendo $a = 2$ y $b = -3x$ resulta

$$(2-3x)^5 = (2)^5 + 5(2)^4(-3x) + 10(2)^3(-3x)^2 + 10(2)^2(-3x)^3 + 5(2)(-3x)^4 + (-3x)^5$$

$$= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5$$

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

Los coeficientes de un binomio

Aun cuando el triángulo de Pascal es útil para encontrar el desarrollo de binomios para valores razonablemente pequeños de n, no es práctico para encontrar $(a+b)^n$ para grandes valores de n. La razón es que el método que usamos para encontrar los renglones sucesivos del triángulo de Pascal es recursivo. Entonces, para encontrar el 100º renglón de este triángulo primero debemos encontrar los 99 renglones anteriores.

Necesitamos examinar el patrón de los coeficientes con más cuidado para desarrollar una fórmula que nos permita calcular directamente cualquier coeficiente del desarrollo de un binomio. Esa fórmula existe y el resto de esta sección está dedicada a encontrarla y demostrarla, pero para expresar esta fórmula necesitamos algo de notación.

El producto de los primeros n números naturales se denota por $n!$ y se denomina ***n* factorial**.

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
$= 3{,}628{,}800$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

También definimos 0! como sigue:

$$0! = 1$$

Esta definición de 0! hace que muchas fórmulas donde intervienen factoriales sean más cortas y más fáciles de escribir.

EL COEFICIENTE DEL BINOMIO

Sean n y r enteros no negativos con $r \le n$. El **coeficiente binomial** se denota con $\binom{n}{r}$ y está definido por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EJEMPLO 3 ■ Cálculo de coeficientes de binomios

a) $$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cancel{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)}}$$
$$= \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$$

b) $$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3!(100-3)!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 97}\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{(1\cdot 2\cdot 3)\cancel{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 97)}}$$
$$= \frac{98\cdot 99\cdot 100}{1\cdot 2\cdot 3} = 161\,700$$

c) $$\binom{100}{97} = \frac{100!}{97!(100-97)!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 97}\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{\cancel{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 97)}(1\cdot 2\cdot 3)}$$
$$= \frac{98\cdot 99\cdot 100}{1\cdot 2\cdot 3} = 161\,700$$

Ahora intente realizar los ejercicios 17 y 19 ■

Aun cuando el coeficiente del binomio $\binom{n}{r}$ se define en términos de una fracción, todos los resultados del ejemplo 3 son números naturales. En efecto, $\binom{n}{r}$ es siempre un número natural (vea el ejercicio 54). Observe que los coeficientes del binomio en los incisos *b*) y *c*) del ejemplo 3 son iguales. Este es un caso especial de la siguiente razón, la cual debe demostrar en el ejercicio 52.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Para ver la conexión entre los coeficientes del binomio y el desarrollo binomial de $(a + b)^n$ calculemos los siguientes coeficientes del binomio.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

Estos son precisamente los elementos del quinto renglón del triángulo de Pascal. De hecho, podemos escribir el triángulo de Pascal como sigue.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Para demostrar que este patrón se cumple, es necesario demostrar que cualquier elemento de esta versión del triángulo de Pascal es la suma de los dos elementos que están diagonalmente arriba de él. En otras palabras, debemos demostrar que cada uno de los elementos satisface la propiedad clave del triángulo de Pascal. Ahora, expresamos esta propiedad en términos de los coeficientes del binomio.

PROPIEDAD CLAVE DE LOS COEFICIENTES DEL BINOMIO

Para cualesquiera enteros no negativos r y k con $r \leq k$,

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Observe que los dos términos del lado izquierdo de esta ecuación son elementos adyacentes en el k-ésimo renglón del triángulo de Pascal, y el término del lado derecho es el elemento que está diagonalmente debajo de ellos, en el $(k + 1)$-ésimo renglón. Entonces esta ecuación es otra forma de expresar la propiedad clave del triángulo de Pascal en términos de los coeficientes del binomio. En el ejercicio 53 se presenta una demostración de esta fórmula.

■ El teorema del binomio

Ahora estamos listos para expresar el teorema del binomio.

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Al final de esta sección se demuestra este teorema. Primero, veamos algunas de sus aplicaciones.

EJEMPLO 4 ■ Desarrollo de un binomio usando el teorema del binomio

Use el teorema binomial para desarrollar $(x + y)^4$.

SOLUCIÓN Por el teorema del binomio,

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

Verifique que

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

Se deduce que

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■

EJEMPLO 5 ■ Desarrollo de un binomio usando el teorema del binomio

Use el teorema del binomio para desarrollar $\left(\sqrt{x} - 1\right)^8$.

SOLUCIÓN Primero encontramos el desarrollo de $(a+b)^8$ y luego sustituimos $\sqrt{x}$ por a y -1 por b. Usando el teorema del binomio tenemos

$$(a+b)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 + \binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8$$

Verifique que

$$\binom{8}{0}=1 \quad \binom{8}{1}=8 \quad \binom{8}{2}=28 \quad \binom{8}{3}=56 \quad \binom{8}{4}=70$$
$$\binom{8}{5}=56 \quad \binom{8}{6}=28 \quad \binom{8}{7}=8 \quad \binom{8}{8}=1$$

Por tanto

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Realizando las sustituciones $a = x^{1/2}$ y $b = -1$ se obtiene

$$(\sqrt{x}-1)^8 = (x^{1/2})^8 + 8(x^{1/2})^7(-1) + 28(x^{1/2})^6(-1)^2 + 56(x^{1/2})^5(-1)^3 + 70(x^{1/2})^4(-1)^4 + 56(x^{1/2})^3(-1)^5 + 28(x^{1/2})^2(-1)^6 + 8(x^{1/2})(-1)^7 + (-1)^8$$

Esto se simplifica a

$$(\sqrt{x}-1)^8 = x^4 - 8x^{7/2} + 28x^3 - 56x^{5/2} + 70x^2 - 56x^{3/2} + 28x - 8x^{1/2} + 1$$

Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

El teorema del binomio se puede usar para encontrar un término particular de un desarrollo del binomio sin tener que encontrar todo el desarrollo.

Recuerde que

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

(Vea la página 882.)

TÉRMINO GENERAL DEL DESARROLLO DEL BINOMIO

El término que contiene a^r en el desarrollo de $(a+b)^n$ es

$$\binom{n}{r}a^rb^{n-r}$$

EJEMPLO 6 ■ Encontrar un término particular en un desarrollo del binomio

Encuentre el término que tenga x^5 en el desarrollo de $(2x+y)^{20}$.

SOLUCIÓN El término que tiene x^5 está dado por la fórmula para el término general con $a = 2x$, $b = y$, $n = 20$ y $r = 5$. Entonces este término es

$$\binom{20}{5}a^5b^{15} = \frac{20!}{5!(20-5)!}(2x)^5y^{15} = \frac{20!}{5!\,15!}32x^5y^{15} = 496\,128x^5y^{15}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

EJEMPLO 7 ■ Encontrar un término particular en un desarrollo del binomio

Encuentre el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

SOLUCIÓN Tanto x^2 como $1/x$ son potencias de x, de modo que la potencia de x en cada término del desarrollo está determinada por ambos términos del binomio. Para encontrar el coeficiente requerido primero encontramos el término general del desarrollo. Por la fórmula tenemos $a = x^2$, $b = 1/x$ y $n = 10$, de modo que el término general es

$$\binom{10}{r}(x^2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{10-r} = \binom{10}{r}x^{2r}(x^{-1})^{10-r} = \binom{10}{r}x^{3r-10}$$

Entonces el término que contiene x^8 es el término en el que

$$\begin{aligned} 3r - 10 &= 8 \\ r &= 6 \end{aligned}$$

Por tanto, el coeficiente requerido es

$$\binom{10}{6} = 210$$

Ahora intente realizar el ejercicio 41 ■

Demostración del teorema del binomio

Ahora presentamos una demostración del teorema del binomio usando inducción matemática.

Demostración Denotemos con $P(n)$ el enunciado

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Paso 1 Demostramos que $P(1)$ es verdadero. Pero $P(1)$ es precisamente el enunciado

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = 1a + 1b = a + b$$

que es ciertamente verdadero.

Paso 2 Suponemos que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$(a + b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

Usamos esto para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadero.

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)[(a + b)^k]$$

$$= (a + b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right]$$ Hipótesis de inducción

$$= a\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right]$$

$$+ b\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right]$$ Propiedad distributiva

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+ \binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$ Propiedad distributiva

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^kb + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2$$

$$+ \cdots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$ Agrupe términos semejantes

Usando la propiedad clave de los coeficientes del binomio podemos escribir cada una de las expresiones en corchetes como un solo coeficiente del binomio. También, escribiendo los coeficientes primero y último como $\binom{k+1}{0}$ y $\binom{k+1}{k+1}$ (estos son iguales a 1 por el ejercicio 50) se obtiene

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Pero esta última ecuación es precisamente $P(k + 1)$ y esto completa el paso de inducción.

Habiendo demostrado los pasos 1 y 2 concluimos, por el principio de inducción matemática que el teorema es verdadero para todos los números naturales n. ■

12.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una expresión algebraica de la forma $a + b$, que está formada por una suma de dos términos, se denomina ________.

2. Podemos encontrar los coeficientes del desarrollo $(a + b)^n$ usando el n-ésimo renglón del triángulo de ________. Entonces
$$(a + b)^4 = \blacksquare a^4 + \blacksquare a^3b + \blacksquare a^2b^2 + \blacksquare ab^3 + \blacksquare b^4$$

3. Los coeficientes del binomio se pueden calcular directamente usando la fórmula $\binom{n}{k}$ = ________. por tanto $\binom{4}{3}$ = ________.

4. Para desarrollar $(a + b)^n$ podemos usar el teorema del ________. Usando este teorema encontramos que el desarrollo de $(a + b)^4$ =
$$\binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^4 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^3b + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^2b^2 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}ab^3 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}b^4$$

HABILIDADES

5–16 ■ Triángulo de Pascal Use el triángulo de Pascal para desarrollar la expresión.

5. $(x + y)^6$ 6. $(2x + 1)^4$ 7. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$

8. $(x - y)^5$ 9. $(x - 1)^5$ 10. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$

11. $(x^2y - 1)^5$ 12. $(1 + \sqrt{2})^6$ 13. $(2x - 3y)^3$

14. $(1 + x^3)^3$ 15. $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^5$ 16. $\left(2 + \frac{x}{2}\right)^5$

17–24 ■ Cálculo de coeficientes binomiales Evalúe la expresión.

17. $\binom{6}{4}$ 18. $\binom{8}{3}$ 19. $\binom{100}{98}$

20. $\binom{10}{5}$ 21. $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$ 22. $\binom{5}{2}\binom{5}{3}$

23. $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

24. $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5}$

25–28 ■ Use el teorema del binomio Use el teorema binomial para desarrollar la expresión.

25. $(x + 2y)^4$ 26. $(1 - x)^5$

27. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^6$ 28. $(2A + B^2)^4$

29–42 ■ Términos de un desarrollo binomial Encuentre los términos indicados en el desarrollo del binomio dado.

29. Los primeros tres términos de la expresión de $(x + 2y)^{20}$.

30. Los primeros cuatro términos de la expresión de $(x^{1/2} + 1)^{30}$.

31. Los últimos dos términos de la expresión de $(a^{2/3} + a^{1/3})^{25}$.

32. Los primeros tres términos en la expresión de
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$$

33. El término de en medio del desarrollo de $(x^2 + 1)^{18}$.

34. El quinto término del desarrollo de $(ab - 1)^{20}$.

35. El 24º término del desarrollo de $(a + b)^{25}$.

36. El 28º término del desarrollo de $(A - B)^{30}$.

37. El centésimo término del desarrollo de $(1 + y)^{100}$.

38. El segundo término del desarrollo de
$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{25}$$

39. El término que tenga a x^4 en el desarrollo de $(x + 2y)^{10}$.

40. El término que tenga a y^3 en el desarrollo de $(\sqrt{2} + y)^{12}$

41. El término que tenga a b^8 en el desarrollo de $(a + b^2)^{12}$.

42. El término que no tiene a x en el desarrollo de
$$\left(8x + \frac{1}{2x}\right)^8$$

43–46 ■ Factorizar Factorice usando el teorema del binomio.

43. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

44. $(x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$

45. $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

46. $x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

47–48 ■ Simplificar un cociente de diferencias Simplifique usando el teorema del binomio.

47. $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ 48. $\dfrac{(x+h)^4 - x^4}{h}$

HABILIDADES Plus

49–52 ■ Demostrar un enunciado Demuestre que el enunciado dado es verdadero.

49. $(1.01)^{100} > 2$. [*Sugerencia:* Observe que $(1.01)^{100} = (1 + 0.01)^{100}$ y use el teorema del binomio para demostrar que la suma de los primeros dos términos del desarrollo es mayor que 2.]

50. $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$

51. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

52. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para $0 \le r \le n$

53. **Demostrar una identidad** En este ejercicio demostramos la identidad

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

a) Escriba el lado izquierdo de esta ecuación como la suma de dos fracciones.

b) Demuestre que un común denominador de la expresión que encontró en el inciso *a*) es $r!(n - r + 1)!$.

c) Sume las dos fracciones usando el común denominador del inciso *b*), simplifique el numerador y observe que la expresión resultante es igual al lado derecho de la ecuación.

54. **Demostración usando inducción** Demuestre que $\binom{n}{r}$ es un entero para toda n y para $0 \le r \le n$. [*Sugerencia:* Use inducción para demostrar que el enunciado es verdadero para toda n y use el ejercicio 53 para el paso de inducción.]

APLICACIONES

55. **Diferencia en volúmenes de cubos** El volumen de un cubo de x pulgadas por lado está dado por $V(x) = x^3$, de modo que el volumen de un cubo $x + 2$ pulgadas por lado está dado por $V(x + 2) = (x + 2)^3$. Use el teorema del binomio para demostrar que la diferencia en volumen entre los cubos mayor y menor es $6x^2 + 12x + 8$ pulgadas cúbicas.

56. **Probabilidad de acertar en el blanco** La probabilidad de que un arquero acierte en el blanco es $p = 0.9$, de modo que la probabilidad de que falle a dar en el blanco es $q = 0.1$. Se sabe que en esta situación la probabilidad de que el arquero acierte en el blanco exactamente r veces en n intentos está dada por el término que contiene p^r en el desarrollo del binomio de $(p + q)^n$. Encuentre la probabilidad de que el arquero acierte en el blanco exactamente tres veces en cinco intentos.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

57. **DISCUSIÓN: Potencias de factoriales** ¿Cuál es mayor, $(100!)^{101}$ o $(101!)^{100}$? [*Sugerencia:* Intente factorizar las expresiones. ¿Tienen factores en común?]

58. **DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Sumas de coeficientes del binomio** Sume cada uno de los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal como se indica. ¿Se ve un patrón?

$$1 + 1 = ?$$
$$1 + 2 + 1 = ?$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = ?$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = ?$$
$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = ?$$

Con base en el patrón que haya obtenido encuentre la suma del n-ésimo renglón:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Demuestre su resultado al desarrollar $(1 + 1)^n$ usando el teorema binomial.

59. **DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Sumas alternantes de coeficientes del binomio** Obtenga la suma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

encontrando un patrón como en el ejercicio 58. Demuestre su resultado al desarrollar $(1 - 1)^n$ usando el teorema del binomio.

CAPÍTULO 12 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Sucesiones (p. 842)

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales. En lugar de escribir $a(n)$ para el valor de la sucesión en n, generalmente escribimos y nos referimos a este valor como el ***n*-ésimo término** de la sucesión. Las sucesiones a menudo se describen en forma de lista:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Sumas parciales de una sucesión (pp. 847-848)

Para la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ la ***n*-ésima suma parcial** S_n es la suma de los primeros términos n de la sucesión:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

La n-ésima suma parcial de una sucesión también se puede expresar usando la **notación sigma**:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Sucesiones aritméticas (p. 853)

Una **sucesión aritmética** es una sucesión cuyos términos se obtienen agregando la misma constante fija d a cada término para obtener el siguiente término. Así una sucesión aritmética tiene la forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

El número a es el **primer término** de la sucesión y el número d es la **diferencia común**. El n-ésimo término de la sucesión es

$$a_n = a + (n - 1)d$$

Sumas parciales de una sucesión aritmética (p. 855)

Para la sucesión aritmética $a_n = a + (n - 1)d$ la n-ésima suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^{n} [a + (k - 1)d]$ está dada por cualquiera de las siguientes fórmulas equivalentes:

1. $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ **2.** $S_n = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$

Sucesiones geométricas (p. 858)

Una **sucesión geométrica** es una sucesión cuyos términos se obtienen multiplicando cada término por la misma constante fija r para obtener el siguiente término. Así una sucesión geométrica tiene la forma,

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

El número a es el **primer término** de la sucesión y el número r es la **razón común**. El n-ésimo término de la sucesión es

$$a_n = ar^{n-1}$$

Sumas parciales de una sucesión geométrica (p. 861)

Para la sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$ la n-ésima suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ (donde $r \neq 1$) está dada por

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Serie geométrica infinita (p. 863)

Una **serie geométrica infinita** es una serie de la forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Una serie geométrica infinita para la que $|r| < 1$ tiene la suma

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Cantidad de una anualidad (p. 869)

La cantidad de una **anualidad** A_f, que consiste en n pagos iguales regulares de una cantidad R con tasa de interés i por periodo de tiempo, está dada por

$$A_f = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Valor presente de una anualidad (p. 870)

El **valor presente** A_p de una anualidad de n pagos iguales regulares de una cantidad R con tasa de interés i por periodo de tiempo está dado por

$$A_p = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Valor presente de una cantidad futura (p. 869)

Si una cantidad A_f debe ser pagada en una suma global, n periodos de tiempo a partir de ahora y la tasa de interés por periodo de tiempo es i, entonces su **valor presente** A_p está dado por

$$A_p = A_f(1 + i)^{-n}$$

Compra a plazos (p. 870)

Si se otorga un préstamo A_p que debe devolverse en n pagos iguales regulares con tasa de interés i por periodo de tiempo, la cantidad R de cada pago está dada por

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Principio de inducción matemática (p. 875)

Para cada número natural n, sea $P(n)$ un enunciado que depende de n. Supongamos que cada una de las siguientes condiciones se cumple.

1. $P(1)$ es verdadero.

2. Para cada número natural k, si $P(k)$ es verdadero, entonces $P(k + 1)$ es verdadero.

Entonces $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales n.

Sumas de potencias (p. 877)

0. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

Coeficientes binomiales (pp. 881-883)

Si n y r son números enteros positivos $n \geq r$, entonces el **coeficiente binomial** $\binom{n}{r}$ se define por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Los coeficientes binomiales satisfacen las siguientes propiedades:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n - r}$$

$$\binom{k}{r - 1} + \binom{k}{r} = \binom{k + 1}{r}$$

El teorema binomial (pp. 883-884)

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

El término que contiene a^r en la expansión de $(a + b)^n$ es $\binom{n}{r}a^r b^{n-r}$.

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a***) ¿Qué es una sucesión? ¿Qué notación utilizamos para designar los términos de una sucesión?

b) Encuentre una fórmula para la sucesión de números pares y una fórmula para la sucesión de números impares.

c) Encuentre los tres primeros términos y el décimo término de la sucesión dada por $a_n = n/(n + 1)$.

2. ***a***) ¿Qué es la sucesión definida en forma recursiva?

b) Encuentre los cuatro primeros términos de la sucesión definida en forma recursiva por $a_1 = 3$ y $a_n = n + 2a_{n-1}$.

3. ***a***) ¿Qué se entiende por sumas parciales de una sucesión?

b) Encuentre las tres primeras sumas parciales de la sucesión dada por $a_n = 1/n$.

4. ***a***) ¿Qué es una sucesión aritmética? Escriba una fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética.

b) Escriba una fórmula para la sucesión aritmética que empieza como sigue: 3, 8, . . . Escriba los primeros cinco términos de esta sucesión.

c) Escriba dos fórmulas diferentes para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

d) Encuentre la suma de los 20 primeros términos de la sucesión del inciso *b*).

5. ***a***) ¿Qué es una sucesión geométrica? Escriba una expresión para el n-ésimo término de una sucesión geométrica con primer término a y razón común r.

b) Escriba una expresión para la secuencia geométrica con primer término $a = 3$ y razón común $r = \frac{1}{2}$. Dé los primeros cinco términos de esta sucesión.

c) Escriba una expresión para la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica.

d) Encuentre la suma de los cinco primeros términos de la sucesión del inciso *b*).

6. ***a***) ¿Qué es una serie geométrica infinita?

b) ¿Qué significa para la convergencia de una serie infinita? ¿Para qué valores de r converge una serie geométrica infinita? Si una serie geométrica infinita converge, ¿cuál es su suma?

c) Escriba los primeros cuatro términos de la serie geométrica infinita con primer término $a = 5$ y la razón común $r = 0.4$. ¿Converge la serie? Si es así, encuentre su suma.

7. ***a***) Escriba $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ usando notación sigma.

b) Escriba $\sum_{k=3}^{5} 2k^2$ sin usar notación sigma.

8. ***a***) ¿Qué es una anualidad? Escriba una expresión para la cantidad de A_f de una anualidad que consta de n pagos iguales regulares de una cantidad R con tasa de interés i por periodo de tiempo.

b) Un inversionista deposita 200 dólares cada mes en una cuenta que paga 6% capitalizable mensualmente. ¿Cuánto hay en la cuenta luego de 3 años?

c) ¿Cuál es la fórmula para calcular el valor presente de la anualidad en el inciso *b*)?

d) ¿Cuál es el valor presente de la anualidad en el inciso *b*)?

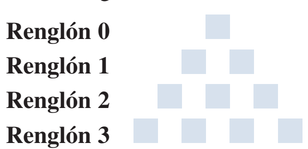
e) Al comprar a plazos, ¿cuál es la fórmula para calcular los pagos periódicos?

f) Si toma un préstamo a 5 años por 10 000 dólares al 3% de interés capitalizable mensualmente, ¿cuál es la cantidad de cada pago mensual?

9. ***a***) Exprese el principio de inducción matemática.

b) Use inducción matemática para demostrar que para todos los números naturales n, $3^n - 1$ es un número par.

10. ***a***) Escriba el triángulo de Pascal. ¿Cómo se relacionan las entradas en el triángulo entre sí?



b) Utilice el triángulo de Pascal para desarrollar $(x + c)^3$.

11. ***a***) ¿Qué significa el símbolo $n!$? Encuentre 5!.

b) Defina $\binom{n}{r}$ y encuentre $\binom{5}{2}$.

12. ***a***) Exprese el teorema del binomio.

b) Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(x + 2)^3$.

c) Use el teorema del binomio para encontrar el término que tiene x^4 en el desarrollo de $(x + 2)^{10}$.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS

1–6 ■ Términos de una sucesión Encuentre los primeros cuatro términos, así como el décimo término de la sucesión con el n-ésimo término dado.

1. $a_n = \dfrac{n^2}{n + 1}$

2. $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{n}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n^3}$

4. $a_n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

5. $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

6. $a_n = \dbinom{n + 1}{2}$

7–10 ■ Sucesiones recursivas Una sucesión está definida en forma recursiva. Encuentre los primeros siete términos de la sucesión.

7. $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, \quad a_1 = 1$

8. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, \quad a_1 = 1$

9. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 3$

10. $a_n = \sqrt{3a_{n-1}}, \quad a_1 = \sqrt{3}$

11–14 ■ ¿Aritmética o geométrica? Se da el n-ésimo de una sucesión. ***a***) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión. ***b***) Trace la gráfica de los términos que encontró en el inciso *a*). ***c***) Encuentre la quinta suma parcial de la sucesión. ***d***) Determine si la serie es aritmética o geométrica. Encuentre la diferencia común o la razón común.

11. $a_n = 2n + 5$ **12.** $a_n = \dfrac{5}{2^n}$

13. $a_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ **14.** $a_n = 4 - \dfrac{n}{2}$

15–22 ■ ¿Aritmética o geométrica? Se dan los primeros cuatro términos de una sucesión. Determine si pueden ser los términos de una sucesión aritmética, de una sucesión geométrica o de ninguna de estas. Si la sucesión es aritmética o geométrica encuentre el quinto término.

15. $5, 5.5, 6, 6.5, \ldots$ **16.** $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$

17. $t - 3, t - 2, t - 1, t, \ldots$ **18.** $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

19. $t^3, t^2, t, 1, \ldots$ **20.** $1, -\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2}, \ldots$

21. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ **22.** $a, 1, \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a^2}, \ldots$

23. Demostración de que una sucesión es geométrica Demuestre que $3, 6i, -12, -24i, \ldots$ es una sucesión geométrica y encuentre la razón común. (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

24. *n*–ésimo término de una sucesión geométrica Encuentre el n-ésimo término de la sucesión aritmética $2, 2 + 2i, 4i, -4 + 4i, -8, \ldots$ (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

25–28 ■ Encontrar términos de sucesiones geométricas y aritméticas Encuentre el término indicado de la sucesión aritmética o geométrica con la descripción dada.

25. El cuarto término de una sucesión aritmética es 11 y el sexto término es 17. Encuentre el segundo término.

26. El 20º término de una sucesión aritmética es 96 y la diferencia común es 5. Encuentre el n-ésimo término.

27. El tercer término de una sucesión aritmética es 9 y la razón común es $\frac{3}{2}$. Encuentre el quinto término.

28. El segundo término de una sucesión geométrica es 10 y el quinto término es $\frac{1250}{27}$. Encuentre el n-ésimo término.

29. Salario Un maestro de escuela gana 32 000 dólares en su primer año en la escuela de Lakeside y obtiene un aumento del 5% al año.

a) Encuentre una fórmula para su salario A_n en su n-ésimo año en esta escuela.

b) Haga una lista de sus salarios para sus primeros 8 años en esta escuela.

30. Salario Una colega del maestro del ejercicio 29, contratada al mismo tiempo, gana 35 000 dólares en su primer año y obtiene un aumento de \$1 200 cada año.

a) ¿Cuál es su salario A_n en su n-ésimo año en esta escuela?

b) Encuentre su salario en su octavo año en esta escuela y compárelo con el salario del profesor del ejercicio 29 en su octavo año.

31. Cultivo de bacterias Cierto tipo de bacteria se divide cada 5 segundos. Si tres de estas bacterias se ponen en una caja de petri, ¿cuántas bacterias hay en la caja luego de 1 minuto?

32. Sucesiones aritméticas Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones aritméticas demuestre que $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ es también una sucesión aritmética.

33. Sucesiones geométricas Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones geométricas, demuestre que $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots$ es también una sucesión geométrica.

34. ¿Aritmética o geométrica?

a) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética, ¿será aritmética la sucesión $a_1 + 2, a_2 + 2, a_3 + 2, \ldots$?

b) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica, ¿será aritmética la sucesión $5a_1, 5a_2, 5a_3, \ldots$?

35. Sucesiones aritméticas o geométricas Encuentre los valores de x para los cuales la sucesión $6, x, 12, \ldots$ es

a) aritmética ***b***) geométrica

36. Sucesiones aritméticas o geométricas Encuentre los valores de x y y para los cuales la sucesión $2, x, y, 17, \ldots$ es

b) aritmética ***b***) geométrica

37–40 ■ Sumas parciales Encuentre la suma.

37. $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} (k + 1)^2$ **38.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{2i}{2i - 1}$

39. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (k + 1)2^{k-1}$ **40.** $\displaystyle\sum_{m=1}^{5} 3^{m-2}$

41–44 ■ Notación sigma Escriba la suma sin usar notación sigma. No evalúe.

41. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (k - 1)^2$ **42.** $\displaystyle\sum_{j=2}^{100} \frac{1}{j - 1}$

43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \frac{3^k}{2^{k+1}}$ **44.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} n^2 2^n$

45–48 ■ Notación sigma Escriba la suma usando notación sigma. No evalúe.

45. $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 99$

46. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$

47. $1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^6 + \cdots + 100 \cdot 2^{102}$

48. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{999 \cdot 1000}$

49–54 ■ Sumas de sucesiones aritméticas y geométricas Determine si la expresión es una suma parcial de una sucesión aritmética o geométrica. Luego encuentre la suma.

49. $1 + 0.9 + (0.9)^2 + \cdots + (0.9)^5$

50. $3 + 3.7 + 4.4 + \cdots + 10$

51. $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \cdots + 100\sqrt{5}$

52. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 33$

53. $\displaystyle\sum_{n=0}^{6} 3(-4)^n$ **54.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} 7(5)^{k/2}$

55–60 ■ Serie geométrica infinita Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

55. $1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \cdots$

56. $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$

57. $5 - 5(1.01) + 5(1.01)^2 - 5(1.01)^3 + \cdots$

58. $1 + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^{3/2}} + \cdots$

59. $-1 + \frac{9}{8} - \left(\frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{8}\right)^3 - \cdots$

60. $a + ab^2 + ab^4 + ab^6 + \cdots, \quad |b| < 1$

61. Términos de una sucesión aritmética El primer término de una sucesión aritmética es $a = 7$ y la diferencia común es $d = 3$. ¿Cuántos términos de esta sucesión deben sumarse para obtener 325?

62. Términos de una sucesión geométrica La suma de los primeros tres términos de una serie geométrica es 52, y la razón común es $r = 3$. Encuentre el primer término.

63. Antepasados Una persona tiene a sus padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, y así sucesivamente. ¿Cuál es el número total de antepasados de la persona en 15 generaciones?

64. Anualidad Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 16 pagos anuales de 1 000 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés al año, capitalizado anualmente.

65. Inversión ¿Cuánto dinero debe ser invertido cada trimestre al 12% anual, capitalizado trimestralmente, para tener 10 000 dólares en un año?

66. Hipoteca ¿Cuáles son los pagos mensuales sobre una hipoteca de 60 000 al 9% de interés si el préstamo ha de pagarse en

a) 30 años? ***b***) 15 años?

67–69 ■ Inducción matemática Use inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todos los números naturales n.

67. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

68. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$

69. $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$

70–72 ■ Demostración por inducción Use inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero.

70. Demuestre que $7^n - 1$ es divisible entre 6 para todos los números naturales n.

71. El número de Fibonacci F_{4n} es divisible entre 3 para todos los números naturales n.

72. Fórmula de recurrencia de una sucesión Una sucesion se define mediante la fórmula de recurrencia $a_{n+1} = 3a_n + 4$ y $a_1 = 4$. Demuestre que $a_n = 2 \cdot 3^n - 2$ para todos los números naturales n.

73–76 ■ Coeficientes binomiales Evalúe la expresión.

73. $\binom{5}{2}\binom{5}{3}$

74. $\binom{10}{2} + \binom{10}{6}$

75. $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}$

76. $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}\binom{8}{8 - k}$

77–80 ■ Desarrollo binomial Desarrolle la expresión.

77. $(A - B)^3$

78. $(x + 2)^5$

79. $(1 - x^2)^6$

80. $(2x + y)^4$

81–83 ■ Términos en un desarrollo binomial Encuentre los términos dados en el desarrollo binomial dado.

81. Encuentre el 20º término del desarrollo de $(a + b)^{22}$.

82. Encuentre los primeros tres términos del desarrollo de $(b^{-2/3} + b^{1/3})^{20}$.

83. Encuentre el término que contenga A^6 en el desarrollo de $(A + 3B)^{10}$.

EXAMEN

1. Encuentre los primeros seis términos y la sexta suma parcial de la sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = 2n^2 - n$.

2. Una sucesión está definida mediante la fórmula de recurrencia $a_{n+1} = 3a_n - n$, $a_1 = 2$. Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.

3. Una sucesión aritmética empieza 2, 5, 8, 11, 14, . . .

a) Encuentre la diferencia común d para esta sucesión.

b) Encuentre una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión.

c) Encuentre el 35º término de la sucesión.

4. Una sucesión geométrica empieza 12, 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{64}$, . . .

a) Encuentre la razón común r para esta sucesión.

b) Encuentre una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión.

c) Encuentre el décimo término de la sucesión.

5. El primer término de una sucesión geométrica es 25, y el cuarto término es $\frac{1}{5}$.

a) Encuentre la razón común r y el quinto término.

b) Encuentre la suma parcial de los primeros ocho términos.

6. El primer término de una sucesión aritmética es 10 y el décimo término es 2.

a) Encuentre la diferencia común y el centésimo término de la sucesión.

b) Encuentre la suma parcial de los primeros 10 términos.

7. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión geométrica con término inicial a y razón común r. Demuestre que $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ es también una sucesión geométrica al encontrar su razón común.

8. Escriba la expresión sin usar notación sigma y luego encuentre la suma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(1 - n^2)$ ***b***) $\displaystyle\sum_{n=3}^{6}(-1)^n 2^{n-2}$

9. Encuentre la suma.

a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2^2}{3^3} + \dfrac{2^3}{3^4} + \cdots + \dfrac{2^9}{3^{10}}$

b) $1 + \dfrac{1}{2^{1/2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{3/2}} + \cdots$

10. Use inducción matemática para demostrar que para todos los números naturales n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11. Desarrolle $(2x + y^2)^5$.

12. Encuentre el término que contenga x^3 en el desarrollo del binomio $(3x - 2)^{10}$.

13. Un perrito pesa 0.85 libras al nacer y cada semana su peso aumenta 24%. Sea a_n su peso en libras al término de su n-ésima semana de vida.

a) Encuentre una fórmula para a_n.

b) ¿Cuánto pesa el perrito a las seis semanas de edad?

c) ¿La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es aritmética, geométrica o ninguna de éstas?

Modelado con sucesiones recursivas

Numerosos procesos reales se presentan en etapas. El crecimiento poblacional puede verse por etapas en las que cada nueva generación representa una nueva etapa en crecimiento poblacional. El interés compuesto se paga en etapas, donde cada pago de intereses crea un nuevo saldo en la cuenta. Muchas cosas que cambian continuamente se miden con más facilidad en etapas discretas. Por ejemplo, podemos medir la temperatura de un objeto que continuamente se está enfriando en intervalos de una hora. En este *Enfoque sobre modelado* aprendemos la forma en que se usan las sucesiones recursivas para modelar estas situaciones. En algunos casos podemos obtener una fórmula explícita para una sucesión a partir de la relación recursiva que la define, al encontrar un patrón en los términos de la sucesión.

■ Sucesiones recursivas como modelos

Suponga que deposita dinero en una cuenta que paga 6% de interés capitalizado mensualmente. El banco tiene una regla definida para pagar intereses: al final de cada mes suma a su cuenta $\frac{1}{2}$% (o 0.005) de la cantidad existente en ese momento en la cuenta. Expresemos esta regla como sigue:

$$\boxed{\text{cantidad al término de este mes}} = \boxed{\text{cantidad al término del mes pasado}} + 0.005 \times \boxed{\text{cantidad al término del mes pasado}}$$

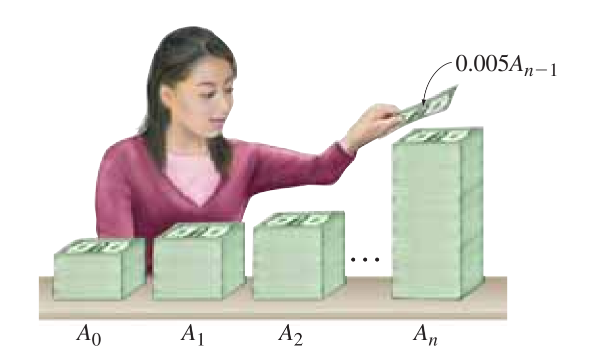
Usando la propiedad distributiva podemos escribir esto como

$$\boxed{\text{al término de este mes}} = 1.005 \times \boxed{\text{cantidad al término del mes pasado}}$$

Para modelar este enunciado usando álgebra sean A_0 la cantidad del depósito original, A_1 la cantidad al término del primer mes, A_2 la cantidad al término del segundo mes, y así sucesivamente. Entonces, A_n es la cantidad al término del n-ésimo mes. Por tanto,

$$A_n = 1.005A_{n-1}$$

Reconocemos esto como una sucesión definida de manera recursiva que nos da la cantidad en cada etapa en términos de la cantidad en la etapa anterior.



Para encontrar una fórmula para A_n debemos encontrar los primeros pocos términos de la sucesión y buscar un patrón.

$$A_1 = 1.005A_0$$
$$A_2 = 1.005A_1 = (1.005)^2A_0$$
$$A_3 = 1.005A_2 = (1.005)^3A_0$$
$$A_4 = 1.005A_3 = (1.005)^4A_0$$

Podemos usar inducción matemática para demostrar que la fórmula que encontramos para A_n es válida para todos los números naturales n.

Vemos que, en general, $A_n = (1.005)^nA_0$.

EJEMPLO 1 ■ Crecimiento poblacional

Cierta población de animales crece al 2% anual. La población inicial es de 5 000.

a) Encuentre una sucesión recursiva que modele la población P_n al final del n-ésimo año.

b) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión P_n.

c) Encuentre una fórmula para P_n.

SOLUCIÓN

a) Podemos modelar la población usando la regla siguiente:

población al final del primer año = 1.02 × población al final del último año

Algebraicamente podemos escribir esto como la relación de recurrencia

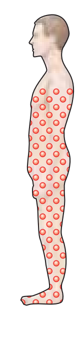
$$P_n = 1.02P_{n-1}$$

b) Dado que la población inicial es de 5 000 tenemos

$$P_0 = 5\,000$$
$$P_1 = 1.02P_0 = (1.02)5\,000$$
$$P_2 = 1.02P_1 = (1.02)^2 5\,000$$
$$P_3 = 1.02P_2 = (1.02)^3 5\,000$$
$$P_4 = 1.02P_3 = (1.02)^4 5\,000$$

c) Del patrón que se muestra en el inciso *b*) vemos que $P_n = (1.02)^n 5\,000$. (Observe que P_n es una sucesión geométrica con razón común $r = 1.02$.) ■

EJEMPLO 2 ■ Dosis diaria de medicamento



Un paciente toma una píldora de 50 mg de cierta medicina todas las mañanas. Se sabe que el cuerpo elimina 40% de la medicina cada 24 horas.

a) Encuentre una sucesión recursiva que modele la cantidad A_n de la medicina en el cuerpo del paciente después de tomar cada pastilla.

b) Encuentre los primeros cuatro términos de la sucesión A_n.

c) Encuentre una fórmula para A_n.

d) ¿Cuánto del medicamento permanece en el cuerpo del paciente después de 5 días? ¿Cuánto acumulará en su sistema después de un uso prolongado?

SOLUCIÓN

a) Cada mañana 60% del medicamento permanece en el sistema del paciente, además de que toma 50 mg adicionales (su dosis diaria).

cantidad de medicina esta mañana = 0.6 × cantidad de medicina la mañana de ayer + 50 mg

Podemos expresar esto como una relación de recurrencia

$$A_n = 0.6A_{n-1} + 50$$

b) Dado que la dosis inicial es 50 mg, tenemos

$$A_0 = 50$$
$$A_1 = 0.6A_0 + 50 = 0.6(50) + 50$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 0.6A_1 + 50 = 0.6[0.6(50) + 50] + 50 \\ &= 0.6^2(50) + 0.6(50) + 50 \\ &= 50(0.6^2 + 0.6 + 1) \\ A_3 &= 0.6A_2 + 50 = 0.6[0.6^2(50) + 0.6(50) + 50] + 50 \\ &= 0.6^3(50) + 0.6^2(50) + 0.6(50) + 50 \\ &= 50(0.6^3 + 0.6^2 + 0.6 + 1) \end{aligned}$$

***c*)** Del patrón del inciso *b*) vemos que

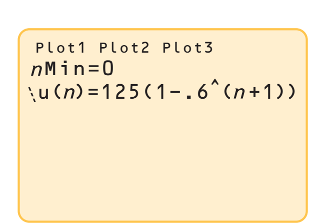
$$\begin{aligned} A_n &= 50(1 + 0.6 + 0.6^2 + \cdots + 0.6^n) \\ &= 50\left(\frac{1 - 0.6^{n+1}}{1 - 0.6}\right) && \text{Suma parcial de una sucesión geométrica (página 861)} \\ &= 125(1 - 0.6^{n+1}) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

***d*)** Para encontrar la cantidad restante después de 5 días sustituimos $n = 5$ y obtenemos $A_5 = 125(1 - 0.6^{5+1}) \approx 119$ mg.

Para encontrar la cantidad restante después de un uso prolongado hacemos que n sea grande. Cuando n es grande, $0.6n$ se aproxima a 0. Esto es, $0.6^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ (vea la sección 4.1, página 332). Por tanto, cuando $n \to \infty$,

$$A_n = 125(1 - 0.6^{n+1}) \to 125(1 - 0) = 125$$

En consecuencia, después de un uso prolongado, la cantidad de medicamento en el sistema del paciente se aproxima a 125 mg (vea la figura 1 donde se ha usado una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la sucesión).



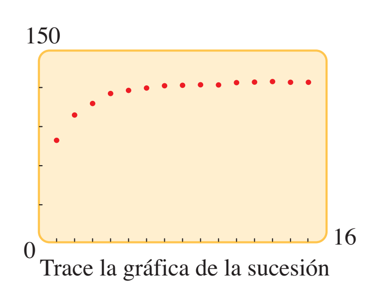


FIGURA 1 Introduzca la sucesión | Trace la gráfica de la sucesión

PROBLEMAS

1. Cuentas de retiro Innumerables maestros de universidad mantienen ahorros de retiro con la TIAA, que es el mayor programa de anualidades del mundo. El interés en estas cuentas se capitaliza y acredita *diariamente*. El profesor Brown tiene 275 000 dólares en depósito con la TIAA al iniciar 2015 y recibe 3.65% por año en su cuenta.

***a*)** Encuentre una sucesión recursiva que modele la cantidad A_n en su cuenta al final del n-ésimo día de 2015.

***b*)** Encuentre los primeros ocho términos de la sucesión A_n, redondeados al centavo más cercano.

***c*)** Encuentre una fórmula para A_n.



2. Programa de entrenamiento Sheila decide embarcarse en un programa de natación como una mejor forma de mantener su salud cardiovascular. Empieza nadando 5 minutos el primer día, luego suma $1\frac{1}{2}$ minutos cada día después de eso.

***a*)** Encuentre una fórmula recursiva para el número de minutos T_n que nada Sheila el n-ésimo día de su programa.

***b*)** Encuentre los primeros 6 términos de la sucesión T_n.

***c*)** Encuentre una fórmula para T_n. ¿Qué clase de sucesión es esta?

***d*)** ¿En qué día alcanza Sheila su objetivo de nadar al menos 65 minutos diarios?

***e*)** ¿Cuál es el tiempo total que habrá nadado después de 30 días?

3. Programa de ahorros mensuales Alicia abre una cuenta de ahorros que paga 3% de interés por año, capitalizado mensualmente. Ella empieza por depositar 100 dólares al inicio del primer mes y suma 100 dólares al final de cada mes, cuando el interés se acredita.

***a*)** Encuentre una fórmula recursiva para la cantidad A_n en su cuenta al término del n-ésimo mes. (Incluya el interés acreditado para ese mes y su depósito mensual.)

***b*)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión A_n.

***c*)** Use el patrón que observó en *b*) para encontrar una fórmula para A_n. [*Sugerencia:* Para encontrar el patrón con más facilidad es mejor *no* simplificar *demasiado* los términos.]

***d*)** ¿Cuánto ha ahorrado Alicia después de 5 años?

4. Contaminación Una planta de productos químicos descarga 2 400 toneladas de contaminantes por año en un lago adyacente. Por escurrimiento natural, 70% de los contaminantes contenidos en el lago al principio del año son expulsados al término de este.

***a*)** Explique por qué la siguiente sucesión modela la cantidad A_n del contaminante en el lago al término del n-ésimo año que la planta está operando.

$$A_n = 0.30A_{n-1} + 2400$$

***b*)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión A_n.

***c*)** Encuentre una fórmula para A_n.

***d*)** ¿Cuánto del contaminante permanece en el lago después de 6 años? ¿Cuánto quedará después de que la planta haya estado operando un largo tiempo?

***e*)** Verifique su respuesta al inciso *d*) al trazar la gráfica A_n con una calculadora graficadora de $n = 1$ a $n = 20$.

5. Programa anual de ahorros Úrsula abre un certificado de depósito (CD) que da 5% de interés anual; empieza con un depósito de 5 000 dólares. Al final de cada año, cuando vende el certificado, ella reinvierte a la misma tasa del 5%, sumando también 10% al valor del certificado de depósito de sus otros ahorros. (Entonces, por ejemplo, después del primer año su certificado ha ganado 5% de 5 000 dólares en interés, con un valor de 5 250 dólares al vencimiento. Ella entonces agrega 10%, es decir, 525 dólares para obtener un valor total de 5 775 dólares de su certificado de depósito renovado.)

***a*)** Encuentre la fórmula recursiva para la cantidad U_n en el certificado de depósito de Úrsula cuando ella reinvierte al final del n-ésimo año.

***b*)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión U_n. ¿Parece ser esto una sucesión geométrica?

***c*)** Use el patrón que observó en *b*) para encontrar una fórmula para U_n.

***d*)** ¿Cuánto ha ahorrado Alicia después de 10 años?

6. Programa anual de ahorros Victoria abre un certificado de depósito de un año con 5% de su rendimiento de interés anual al mismo tiempo que su amiga Úrsula, del problema 5. Victoria también empieza con un depósito inicial de 5 000 dólares, pero cuando reinvierte al final del primer año ella decide agregar 500 dólares a su CD, $1 000 al final del segundo año, $1 500 al final del tercer año, y así sucesivamente.

***a*)** Explique por qué la fórmula de recurrencia que se presenta a continuación da la cantidad V_n del certificado de depósito de Victoria cuando ella reinvierte al final del n-ésimo año.

$$V_n = 1.05V_{n-1} + 500n$$

***b*)** Usando el modo `Seq` ("sucesión") de su calculadora graficadora introduzca las sucesiones U_n y V_n como se muestra en la figura. Luego use la instrucción `TABLE` para comparar ambas sucesiones. Hacia los primeros pocos años Victoria parece estar acumulando más ahorros que Úrsula. Recorra la tabla para verificar que Úrsula finalmente se adelante a Victoria en la carrera por ahorrar. ¿En qué año ocurre esto?

```
Plot1 Plot2 Plot3
\u(n) = 1.05 u(n - 1)
 +0.1(1.05 u(n - 1))
 u(nMin) = {5000}
\v(n) = 1.05 v(n - 1)
 +500 n
 v(nMin) = {5000}
```

Introduzca las sucesiones

n	u(n)	v(n)
0	5000	5000
1	5775	5750
2	6670.1	7037.5
3	7704	8889.4
4	8898.1	11334
5	10277	14401
6	11870	18121
n=0		

Tabla de valores de las sucesiones



13 Límites: una mirada previa al cálculo

En este capítulo estudiaremos la idea central que subyace en el cálculo: el concepto de *límite*. El cálculo se usa para modelar numerosos fenómenos reales en situaciones particulares que implican cambio o movimiento. Se usan límites para encontrar la razón de cambio instantánea de una función, así como el área de una región con fronteras curvadas. Usted aprenderá en cálculo que estos problemas en apariencia diferentes están estrechamente relacionados. En este capítulo veremos la forma en que los límites nos permiten resolver ambos problemas.

En el capítulo 2 aprendimos a encontrar la razón de cambio promedio de una función. Por ejemplo, para encontrar la rapidez promedio dividimos la distancia total recorrida entre el tiempo total. Pero, ¿cómo podemos encontrar la rapidez *instantánea*, es decir, la rapidez en un instante determinado? No podemos dividir la distancia total entre el tiempo total porque en un instante la distancia total es cero y el tiempo total de viaje es cero, pero sí podemos encontrar la razón de cambio promedio en intervalos cada vez menores acercándonos en el instante que deseemos. En otras palabras, la rapidez instantánea es un *límite* de las rapideces promedio.

En este capítulo aprenderemos a encontrar áreas de regiones con lados curvados, usando el proceso de límite.

13.1 HALLAR LÍMITES NUMÉRICA Y GRÁFICAMENTE

■ Definición de límite ■ Cálculo de límites numéricamente y gráficamente ■ Límites que no existen ■ Límites unilaterales

En esta sección usamos tablas de valores y gráficas de funciones para contestar la pregunta, ¿qué les ocurre a los valores $f(x)$ de una función f cuando la variable x se aproxima al número a?

Definición de límite

Empezamos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

para valores de x cercanos a 2. Las tablas siguientes dan valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2 pero no iguales a 2.

x	$f(x)$
1.0	2.000000
1.5	2.750000
1.8	3.440000
1.9	3.710000
1.95	3.852500
1.99	3.970100
1.995	3.985025
1.999	3.997001

x	$f(x)$
3.0	8.000000
2.5	5.750000
2.2	4.640000
2.1	4.310000
2.05	4.152500
2.01	4.030100
2.005	4.015025
2.001	4.003001

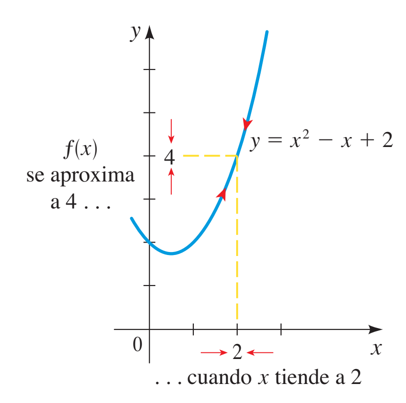


FIGURA 1

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) que se muestran en la figura 1 vemos que cuando x es cercana a 2 (por ambos lados de 2), $f(x)$ es cercana a 4. En realidad, parece que podemos hacer los valores de $f(x)$ tan cercanos a 4 como queramos si tomamos x suficientemente cerca de 2. Expresamos esto diciendo "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para expresar esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general usamos la siguiente notación.

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a L"

si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cerca de L (tan cerca de L como queramos) tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto indica que los valores de $f(x)$ se acercan más y más al número L cuando x se acerca cada vez más al número a (por cualquier lado de a) pero $x \neq a$.

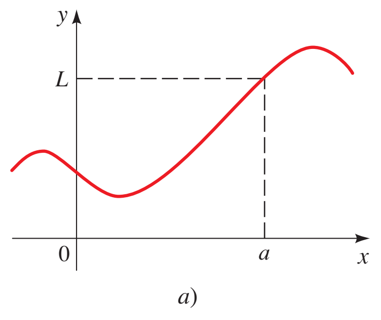
Una notación alternativa para $\lim_{x\to a} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

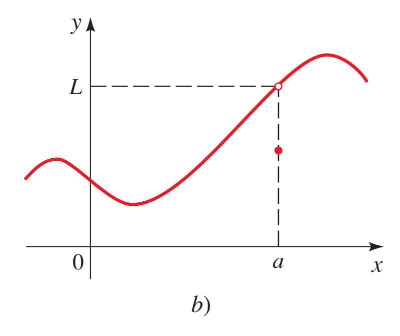
que comúnmente se lee "$f(x)$ tiende a L cuando x se aproxima a a". Esta es la notación que usamos en la sección 3.6 cuando estudiamos asíntotas de funciones racionales.

Observe la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esta significa que para encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, nunca consideramos $x = a$. De hecho, $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo está definida f *cerca de a*.

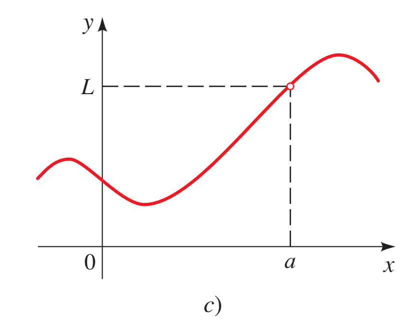
La figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Observe que en el inciso *c*), $f(a)$ no está definida y en el inciso *b*), $f(a) \neq L$. Pero en cada uno de estos casos, sin importar lo que pase en a, $\lim_{x\to a} f(x) = L$.



a)



b)



c)

FIGURA 2 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ en los tres casos

Cálculo de límites numéricamente y gráficamente

En la sección 13.2 desarrollaremos técnicas para encontrar valores exactos de límites. Por ahora usamos tablas y gráficas para calcular límites de funciones.

EJEMPLO 1 ■ Calcular numéricamente y gráficamente un límite

Calcule el valor del siguiente límite haciendo una tabla de valores. Verifique su trabajo con una gráfica.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero esto no tiene importancia porque la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ dice que consideramos valores de x que son cercanos a a pero no iguales a a. Las tablas siguientes dan valores de $f(x)$ (redondeados a seis lugares decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no son iguales a 1).

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

Con base en los valores de las dos tablas hacemos la conjetura de que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

Como verificación gráfica usamos una calculadora para obtener la figura 3. Vemos que cuando x está cerca de 1, y está cerca de 0.5. Si usamos las funciones ZOOM y TRACE para obtener una vista más cercana como se muestra en la figura 4, observamos que cuando x se acerca más y más a 1, y se acerca más y más a 0.5. Esto refuerza nuestra conclusión.

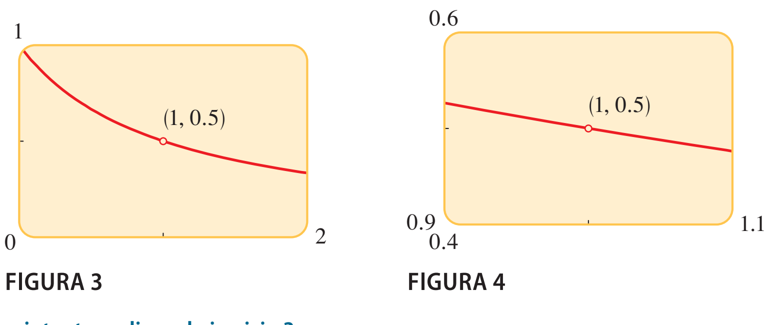


FIGURA 3 **FIGURA 4**

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Encontrar un límite a partir de una tabla

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

Encuentre $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla superior del margen es una lista de valores de la función para varios valores de t cerca de 0. Cuando t se aproxima a 0 los valores de la función parecen aproximarse a 0.1666666 . . . , de modo que calculamos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

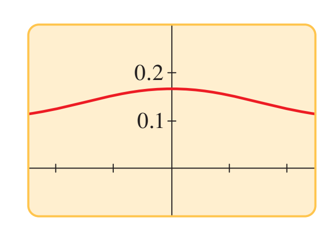
Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

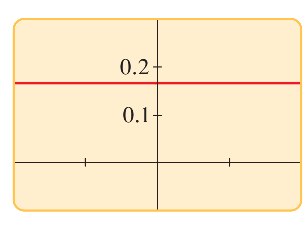
¿Qué habría ocurrido en el ejemplo 2 si hubiéramos tomado valores incluso más pequeños de t? La tabla del margen muestra los resultados de una calculadora; se puede ver que al parecer está ocurriendo algo extraño.

Si intenta hacer estos cálculos en su propia calculadora, puede ser que obtenga valores diferentes, pero finalmente obtendrá el valor 0 si hace que t sea lo suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0 en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como demostraremos en la sección siguiente. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2+9}$ está muy cerca de 3 cuando t es pequeña. (En realidad, cuando t es suficientemente pequeña, el valor de una calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ es 3.000 . . . hasta tantos dígitos como la calculadora sea capaz de llevar.)

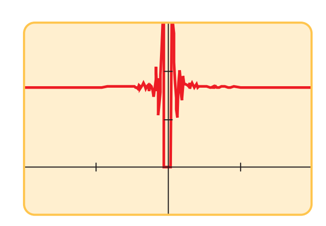
Algo similar ocurre cuando tratamos de trazar la gráfica de la función del ejemplo 2 en una calculadora. Los incisos *a*) y *b*) de la figura 5 muestran gráficas bastante precisas de esta función, y cuando usamos la función TRACE podemos fácilmente calcular que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero si hacemos un acercamiento demasiado grande, como en los incisos *c*) y *d*), entonces obtenemos gráficas imprecisas, de nuevo debido a problemas con la sustracción.



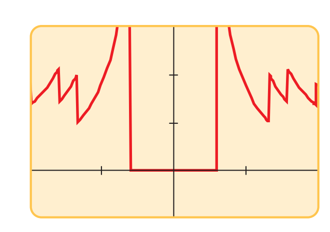
a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$



b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$



c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$



d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

Límites que no existen

No necesariamente las funciones se aproximan a un valor finito en todo punto. En otras palabras, es posible que un límite no exista. Los siguientes tres ejemplos ilustran formas en las que esto puede ocurrir.

EJEMPLO 3 ■ Un límite que no existe (una función con un salto)

La función Heaviside H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

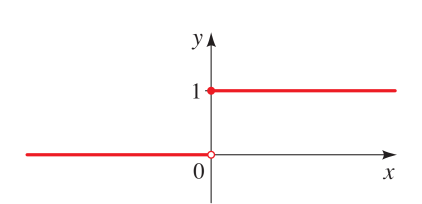


FIGURA 6

[Esta función, llamada así en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925), se puede usar para describir una corriente eléctrica que se conecta en un tiempo $t = 0$.] La gráfica se muestra en la figura 6. Observe el "salto" en la gráfica en $x = 0$.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay número al que $H(t)$ se aproxime cuando t se aproxima a 0. Por tanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.

Ahora intente realizar el ejercicio 27 ■

EJEMPLO 4 ■ Un límite que no existe (una función que oscila)

Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Evaluando la función para algunos pequeños valores de x obtenemos

$$\begin{aligned} f(1) &= \operatorname{sen} \pi = 0 & f\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \operatorname{sen} 2\pi = 0 \\ f\left(\tfrac{1}{3}\right) &= \operatorname{sen} 3\pi = 0 & f\left(\tfrac{1}{4}\right) &= \operatorname{sen} 4\pi = 0 \\ f(0.1) &= \operatorname{sen} 10\pi = 0 & f(0.01) &= \operatorname{sen} 100\pi = 0 \end{aligned}$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información podríamos estar tentados a calcular que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \stackrel{?}{=} 0$$



pero esta vez nuestro cálculo es erróneo. Observe que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para un número infinito de valores de x que se aproximan a 0. (Vea la gráfica de la figura 7.)

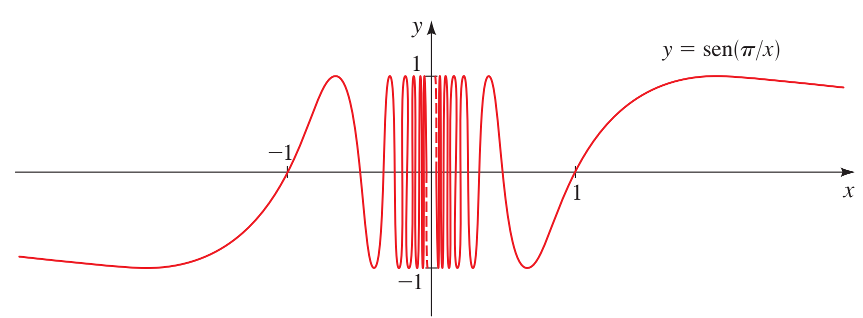


FIGURA 7

Las líneas interrumpidas indican que los valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilan entre 1 y -1 con frecuencia infinita cuando x se aproxima a 0. Dado que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando x se aproxima a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 25 ■



El ejemplo 4 ilustra algunos de los problemas del cálculo del valor de un límite. Es fácil calcular el valor erróneo si usamos valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y como lo demuestra el estudio después del ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores incorrectos. En las siguientes dos secciones, sin embargo, desarrollaremos métodos a prueba de errores para calcular límites.

EJEMPLO 5 ■ Un límite que no existe (una función con asíntota vertical)

Encuentre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

SOLUCIÓN Cuando x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Vea la tabla al margen.) De hecho, al parecer, en la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ de la figura 8 los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar x lo suficientemente cerca de 0. Entonces los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, de modo que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe.

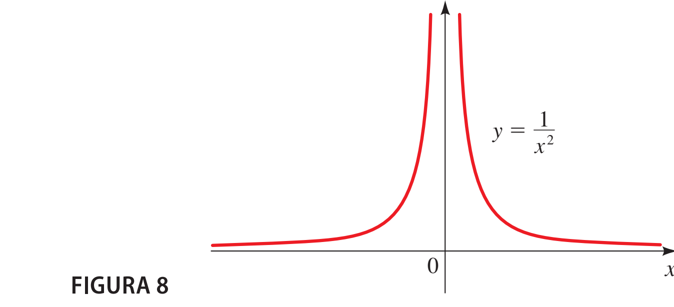


FIGURA 8

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

Para indicar la clase de comportamiento que se muestra en el ejemplo 5 usamos la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Esto no significa que estemos considerando que ∞ es un número ni que el límite exista. Simplemente expresa la particular forma en la que el límite no existe: $1/x^2$ se puede hacer tan grande como queramos al tomar x lo suficientemente cerca de 0. Observe que la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical en el sentido que describimos en la sección 3.6.

■ Límites unilaterales

Observamos en el ejemplo 3 que $H(t)$ se aproxima a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ se aproxima a 1 cuando t se aproxima a 0 por la derecha. Indicamos esta situación simbólicamente al escribir

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que consideramos sólo valores de t que son menores a 0. Del mismo modo, "$t \to 0^+$" indica que consideramos sólo valores de t que son mayores a 0.

DEFINICIÓN DE LÍMITE UNILATERAL

Escribimos

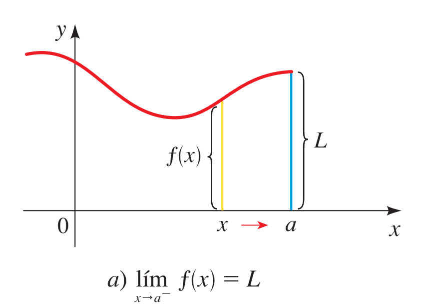
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y decimos que el "límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x se aproxima a a" [o el "límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda"] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cerca de L al tomar x lo suficientemente cerca de a y x menor que a.

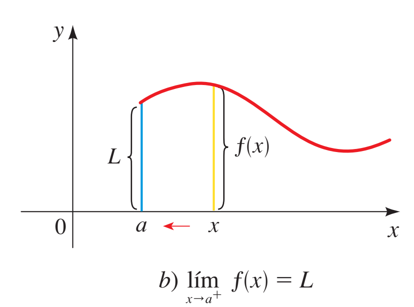
Observe que esta definición es distinta de la definición de un límite bilateral sólo en que requerimos que x sea menor que a. Del mismo modo, si requerimos que x sea mayor que a, obtenemos "el **límite derecho de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** es igual a L", y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces el símbolo "$x \to a^+$" significa que consideramos sólo $x > a$. Estas definiciones se muestran en la figura 9.



a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

FIGURA 9

Al comparar las definiciones de límites bilaterales y unilaterales vemos que lo siguiente es verdadero.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces si los límites izquierdo y derecho son diferentes, el límite (bilateral) no existe. Usamos este hecho en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 6 ■ Límites a partir de una gráfica

La gráfica de una función g se muestra en la figura 10. Úsela para expresar los valores (si existen) de lo siguiente:

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$, $\lim_{x \to 2^+} g(x)$, $\lim_{x \to 2} g(x)$

b) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$, $\lim_{x \to 5^+} g(x)$, $\lim_{x \to 5} g(x)$

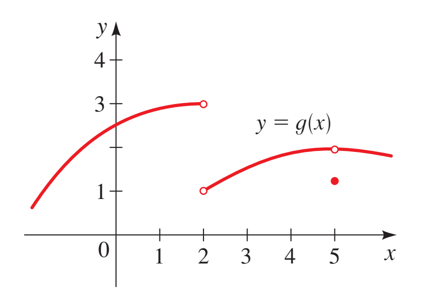


FIGURA 10

SOLUCIÓN

a) De la gráfica vemos que los valores de $g(x)$ se aproximan a 3 cuando x se aproxima a 3 por la izquierda, pero se aproximan a 1 cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Por tanto,

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

Dado que los límites izquierdo y derecho son diferentes, concluimos que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

***b*)** La gráfica también muestra que

$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2$$

Esta vez los límites izquierdo y derecho son iguales, de modo que tenemos

$$\lim_{x\to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$.

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

EJEMPLO 7 ■ Una función definida por tramos

Sea *f* la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Trace la gráfica de *f* y úsela para encontrar lo siguiente:

***a*)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ***b*)** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ***c*)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

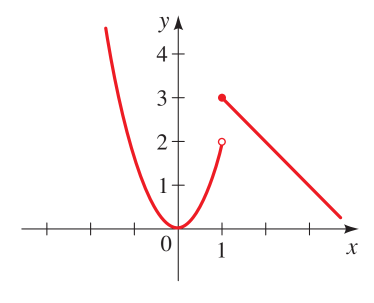


FIGURA 11

SOLUCIÓN La gráfica de *f* se ilustra en la figura 11. De la gráfica vemos que los valores de $f(x)$ se aproximan a 2 cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, pero se aproximan a 3 cuando x se aproxima a 1 por la derecha. Entonces, los límites izquierdo y derecho no son iguales. En consecuencia, tenemos

***a*)** $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ ***b*)** $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ ***c*)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

13.1 EJERCICIOS

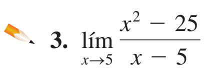
CONCEPTOS

1. Cuando escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, en términos generales, los valores de *f*(*x*) se acercan más y más al número ________ cuando los valores de x se acercan más y más a ________. Para determinar $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x-5}$ intentamos valores para x más y más cercanos a _______ y encontramos que el límite es _______.

2. Escribimos $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y decimos que el ________ de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la ________ (izquierda/derecha) es igual a ________. Para encontrar el límite izquierdo intentamos valores para x que son ____(menores/mayores) que a. Un límite existe si y sólo si los límites ________ y ________ existen y si son ________.

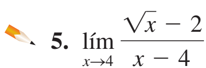
HABILIDADES

3–4 ■ Calcular límites numérica y gráficamente Calcule el valor del límite haciendo una tabla de valores. Compruebe su trabajo con una gráfica.



3. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ **4.** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

5–10 ■ Calcular límites numéricamente Complete la tabla de valores (a cinco lugares decimales) y use la tabla para calcular el valor del límite.



5. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

6. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

7. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1}$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	± 1	± 0.5	± 0.1	± 0.05	± 0.01
$f(x)$					

10. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x)$					



11–16 ■ Calcular límites numérica y gráficamente Use una tabla de valores para calcular el valor del límite. Luego use una calculadora graficadora para confirmar gráficamente sus resultados.

11. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 7x + 12}$

12. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 3^x}{x}$

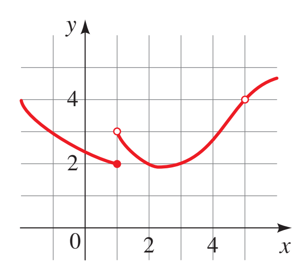
14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$

15. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

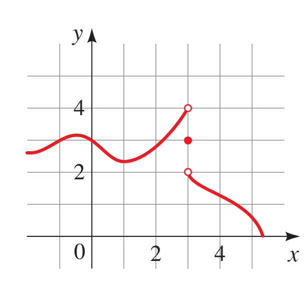
16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}$

17–20 ■ Límites de una gráfica Para la función f cuya gráfica está dada exprese el valor de la cantidad dada, si existe; si no existe explique por qué.

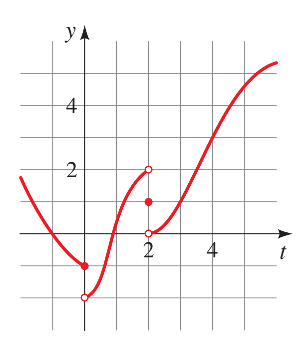
17. **a)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$
d) $\lim_{x\to 5} f(x)$ **e)** $f(5)$



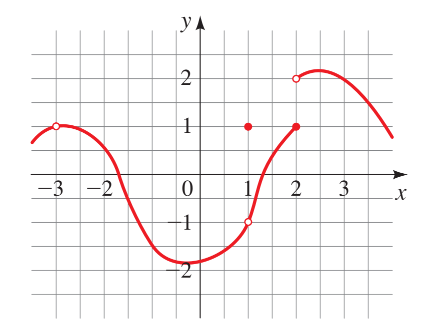
18. **a)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ **e)** $f(3)$



19. **a)** $\lim_{t\to 0^-} f(t)$ **b)** $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ **c)** $\lim_{t\to 0} f(t)$
d) $\lim_{t\to 2^-} f(t)$ **e)** $\lim_{t\to 2^+} f(t)$ **f)** $\lim_{t\to 2} f(t)$
g) $f(2)$ **h)** $\lim_{t\to 4} f(t)$



20. **a)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to -3} f(x)$
d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **e)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim_{x\to 2} f(x)$



21–28 ■ Calcular límites gráficamente Utilice una calculadora graficadora para determinar si el límite existe. Si el límite existe calcule su valor con dos decimales.

21. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{2x^2 - 5x + 3}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos 5x - \cos 4x}$

23. $\lim_{x\to 0} \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

24. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

25. $\lim_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$

26. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{2}{x}$

27. $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

29–32 ■ Límites unilaterales Trace la gráfica de la función definida por tramos y utilice su gráfica para encontrar los valores de los límites, si existen.

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

30. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to 0} f(x)$

31. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ ***b)*** $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ ***c)*** $\lim_{x \to -1} f(x)$

32. $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{si } x \leq -2 \\ -x + 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ ***b)*** $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ ***c)*** $\lim_{x \to -2} f(x)$

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

33. DISCUSIÓN: Una función con límites específicos Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \qquad f(0) = 2 \qquad f(2) = 3$$

¿Cuántas de estas funciones hay?

34. DISCUSIÓN: Trampas de la calculadora graficadora

a) Evalúe

$$h(x) = \frac{\tan x - x}{x^3}$$

para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.

b) Calcule el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

c) Evalúe $h(x)$ para valores sucesivamente más pequeños de x hasta que por último llegue a valores de 0 para $h(x)$. ¿Todavía tiene confianza en que su cálculo del inciso *b)* es correcto? Explique por qué finalmente obtuvo valores de 0 para $h(x)$.



d) Trace la gráfica de la función h en el rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Luego haga un acercamiento en el punto donde la gráfica cruza el eje y para calcular el límite de $h(x)$ cuando x se aproxima a 0. Continúe con el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con sus resultados obtenidos en el inciso *c)*.

13.2 ENCONTRAR LÍMITES ALGEBRAICAMENTE

■ Leyes de límites ■ Aplicación de leyes de límites ■ Encontrar límites usando álgebra y las leyes de límites ■ Uso de límites izquierdo y derecho

En la sección 13.1 usamos calculadoras y gráficas para calcular los valores de límites, pero vimos que tales métodos no siempre llevan a la respuesta correcta. En esta sección usamos métodos algebraicos para encontrar límites exactamente.

■ Leyes de límites

Usamos las siguientes propiedades de límites, llamadas *Leyes de límites*, para calcular límites.

LEYES DE LÍMITES

Suponga que c es una constante y que existen los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de una suma

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de una diferencia

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$ — Límite de un múltiplo constante

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de un producto

5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ — Límite de un cociente

Estas cinco leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

Límite de una suma
1. El límite de la suma de límites es la suma de los límites.

Límite de una diferencia
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

Límite de un múltiplo constante
3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

Límite de un producto
4. El límite de un producto es el producto de los límites.

Límite de un cociente
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0).

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ es cercana a L y $g(x)$ es cercana a M, es razonable concluir que $f(x) = g(x)$ es cercana a $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para pensar que la ley 1 es verdadera.

Si usamos la ley 4 (límite de un producto) repetidamente con $g(x) = f(x)$ obtenemos la ley 6 para el límite de una potencia. Una ley similar se cumple para las raíces.

LEYES DE LÍMITES

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ donde n es un entero positivo — *Límite de una potencia*

7. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo — *Límite de una raíz*

[Si n es par suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

Es decir, estas leyes señalan lo siguiente:

Límite de una potencia
6. El límite de una potencia es la potencia del límite.

Límite de una raíz
7. El límite de una raíz es la raíz del límite.

EJEMPLO 1 ■ Uso de las leyes de límites

Use las leyes de límites y las gráficas de f y g en la figura 1 para evaluar los siguientes límites, si existen.

a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ ***b***) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$

c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***d***) $\lim_{x \to 1} [f(x)]^3$

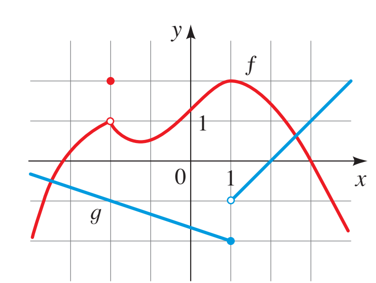


FIGURA 1

SOLUCIÓN

a) De las gráficas de f y g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] &= \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)] && \text{Límite de una suma}\\ &= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) && \text{Límite de un múltiplo constante}\\ &= 1 + 5(-1) = -4\end{aligned}$$

b) Vemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites izquierdo y derecho son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Por tanto, no podemos usar la ley 4 (límite de un producto). El límite dado no existe porque el límite izquierdo no es igual al límite derecho.

c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

Debido a que el límite de un denominador es 0, no podemos usar la ley 5 (límite de un cociente). El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a 0 mientras que el numerador se aproxima a un número diferente de cero.

d) Puesto que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, usamos la ley 6 para obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[f(x)]^3 &= [\lim_{x\to 1} f(x)]^3 && \text{Límite de una potencia}\\ &= 2^3 = 8\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

Aplicación de leyes de límites

Al aplicar las leyes de límites necesitamos usar cuatro límites especiales.

ALGUNOS LÍMITES ESPECIALES

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo $a > 0$

Los límites especiales 1 y 2 son intuitivamente obvios; al ver las gráficas de $y = c$ y $y = x$ se convencerá de su validez. Los límites 3 y 4 son casos especiales de las leyes de los límites 6 y 7 (límites de una potencia y de una raíz).

EJEMPLO 2 ■ Uso de las leyes de límites

Evalúe los límites siguientes y justifique cada paso.

a) $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ ***b***) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

a)
$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4$$ Límites de una diferencia y suma

$$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4$$ Límite de un múltiplo constante

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4$$ Límites especiales 3, 2 y 1

$$= 39$$

b) Empezamos por usar la ley 5, pero su uso está totalmente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que existen los límites del numerador y el denominador, y el límite del denominador no es 0.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3x)}$$ Límite de un cociente

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x}$$ Límites de sumas, diferencias y múltiplos constantes

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$ Límites especiales 3, 2 y 1

$$= -\frac{1}{11}$$

Ahora intente realizar los ejercicios 9 y 11 ■

Si hacemos que $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En el ejemplo 2*a*) encontramos que $\lim_{x\to 5} f(x) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta al sustituir 5 por x. Del mismo modo, una sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso *b*). Las funciones del ejemplo 2 son polinomios y una función racional, respectivamente, y usando del mismo modo las leyes de límites se demuestra que la sustitución directa siempre funciona para estas funciones. Expresamos este hecho como sigue.

LÍMITES POR SUSTITUCIÓN DIRECTA

Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con propiedad de sustitución directa se llaman **continuas** en a. Aprenderemos más acerca de las funciones continuas cuando estudiemos cálculo.

EJEMPLO 3 ■ Encontrar límites por sustitución directa

Evalúe los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 3}(2x^3 - 10x - 8)$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

SOLUCIÓN

a) La función $f(x) = 2x^3 - 10x - 12$ es un polinomio, por lo que podemos encontrar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 12) = 2(3)^3 - 10(3) - 8 = 16$$

b) La función $f(x) = (x^2 + 5x)/(x^4 + 2)$ es una función racional y $x = -1$ está en su dominio (porque el denominador no es cero para $x = -1$). Entonces, podemos encontrar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2} = -\frac{4}{3}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

Encontrar límites usando álgebra y las leyes de límites

Como vimos en el ejemplo 3 la evaluación de límites por sustitución directa es fácil, pero no todos los límites se pueden evaluar de este modo. De hecho, la mayor parte de las situaciones en las que los límites son útiles exigen que trabajemos más para evaluar el límite. Los tres ejemplos siguientes ilustran cómo podemos usar álgebra para encontrar límites.

EJEMPLO 4 ■ Encontrar un límite por cancelación de un factor común

Encuentre $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$. No podemos encontrar el límite si sustituimos $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Tampoco podemos aplicar la ley 5 (límite de un cociente) porque el límite del denominador es 0. En cambio necesitamos hacer un poco de álgebra previa. Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x se aproxima a 1, tenemos $x \neq 1$ y entonces $x - 1 \neq 0$. Por tanto, podemos eliminar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} \qquad \text{Elimine}$$

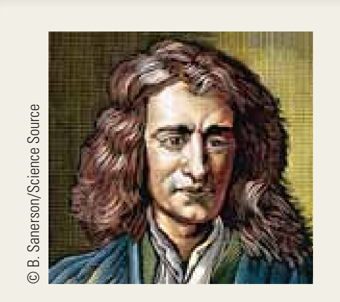
$$= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \qquad \text{Sea } x \to 1$$

Este cálculo confirma algebraicamente la respuesta que obtuvimos numéricamente y gráficamente en el ejemplo 1 de la sección 13.1.

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

EJEMPLO 5 ■ Encontrar un límite por simplificación

Evalúe $\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.


© B. Sanerson/Science Source

SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) es universalmente considerado uno de los gigantes de la física y las matemáticas. Es bien conocido por descubrir las leyes del movimiento y la gravedad, y por investigar el cálculo, pero también demostró el teorema del binomio y las leyes de óptica; también inventó métodos para resolver ecuaciones con polinomios con cualquier grado de precisión deseado. Nació un Día de Navidad, pocos meses después de la muerte de su padre. Luego de una infancia triste ingresó a la Universidad de Cambridge donde aprendió matemáticas estudiando las obras de Euclides y de Descartes.

Durante los años de la peste negra de 1665 y 1666, cuando la universidad fue cerrada, Newton pensó y escribió sus ideas que, una vez publicadas, revolucionaron las ciencias al instante. Inducido por un enfermizo temor a ser criticado, publicó estos escritos sólo después de muchos años de ser motivado por Edmund Halley (quien descubrió el ahora famoso cometa) y otros colegas.

Las obras de Newton le dieron enorme fama y prestigio. Incluso los poetas se vieron incitados a elogiarlo; el papa Alejandro escribió:

La naturaleza y sus leyes
estuvieron ocultas por la noche,
Dios dijo "Hágase Newton"
y la luz se hizo.

Newton era mucho más modesto acerca de sus logros. Él dijo: "Parece que sólo soy un niño que juega a orillas del mar... mientras que el gran océano de la verdad está ante mí esperando ser descubierto".

Newton fue nombrado caballero del Imperio Británico por la reina Ana en 1705 y tras su muerte fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster.

SOLUCIÓN No podemos usar la sustitución directa para evaluar este límite, porque el límite del denominador es 0. Entonces, primero simplificamos el límite algebraicamente.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(9+6h+h^2)-9}{h} && \text{Desarrolle}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} && \text{Simplifique}\\ &= \lim_{h\to 0}(6+h) && \text{Elimine } h\\ &= 6 && \text{Sea } h\to 0\end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 25

EJEMPLO 6 ■ Encontrar un límite por racionalización

Encuentre $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar la ley 5 (límite de un cociente) de inmediato, porque el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} && \text{Racionalice el numerador}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Este cálculo confirma el que hicimos en el ejemplo 2 de la sección 13.1.

Ahora intente realizar el ejercicio 27

■ Uso de límites izquierdo y derecho

Algunos límites se calculan mejor si primero encontramos los límites izquierdo y derecho. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que descubrimos en la sección 13.1. Dice que *un límite bilateral existe si y sólo si existen ambos límites unilaterales y si son iguales.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Cuando calculamos límites unilaterales usamos el hecho de que las leyes de los límites también se cumplen para los límites unilaterales.

EJEMPLO 7 ■ Comparación de los límites derecho e izquierdo

Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

El resultado del ejemplo 7 parece creíble a partir de la figura 2.

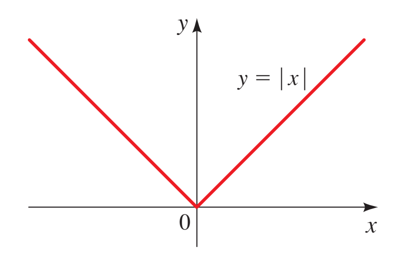


FIGURA 2

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dado que $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, tenemos $|x| = -x$, de modo que

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

EJEMPLO 8 ■ Comparación de límites derecho e izquierdo

Demuestre que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN Dado que $|x| = x$ para $x > 0$ y $|x| = -x$ para $x < 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que los límites derecho e izquierdo existen y son diferentes se deduce que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la figura 3 y apoya los límites que encontramos.

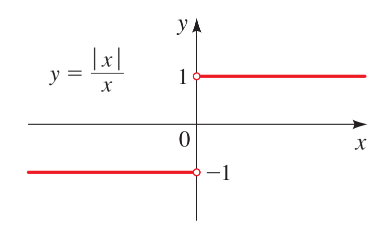


FIGURA 3

Ahora intente realizar el ejercicio 39 ■

EJEMPLO 9 ■ Límite de una función definida por tramos

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Determine si $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

SOLUCIÓN Dado que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Puesto que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites derecho e izquierdo son iguales. Por tanto, el límite existe y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

En la figura 4 se muestra la gráfica de f.

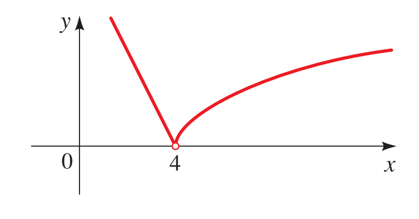


FIGURA 4

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

13.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Suponga que existen los límites siguientes:

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

Entonces $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] =$ ________ + ________ y $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] =$ ________ · ________.

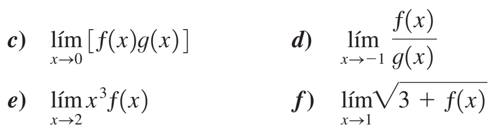
Estas fórmulas se pueden expresar verbalmente como sigue: El límite de una suma es la ________ de los límites, y el límite de un producto es el ________ de los límites.

2. Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, entonces $\lim_{x\to a} f(x) =$ ________.

HABILIDADES

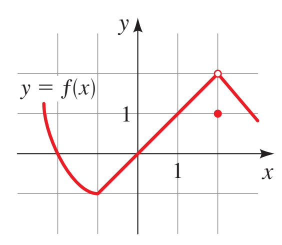
3. Límites de una gráfica Se dan las gráficas de f y g. Utilícelas para evaluar cada límite si este existe. Si no existe explique por qué.

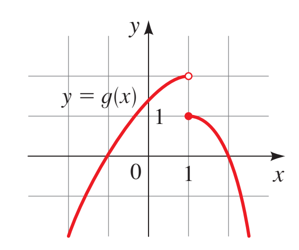
a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$ *b)* $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$



c) $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ *d)* $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2} x^3 f(x)$ *f)* $\lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$





4. Usando leyes de los límites Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 8$$

Encuentre el valor del límite dado. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x\to a}[f(x) + h(x)]$ *b)* $\lim_{x\to a}[f(x)]^2$

c) $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{h(x)}$ *d)* $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}$

e) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{h(x)}$ *f)* $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

g) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *h)* $\lim_{x\to a}\dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

5–18 ■ Utilizar las leyes de los límites Evalúe el límite y justifique cada paso al indicar las leyes de límites apropiadas.

5. $\lim_{x\to 5} x$ **6.** $\lim_{x\to 0} 3$

7. $\lim_{t\to 3} 4t$ **8.** $\lim_{t\to 2}(1 - 3t)$

9. $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$ **10.** $\lim_{x\to 0}(3x^3 - 2x^2 + 5)$

11. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$ **12.** $\lim_{x\to 2}\dfrac{2 - x}{x^2 + 1}$

13. $\lim_{x\to 3}(x^3 + 2)(x^2 - 5x)$ **14.** $\lim_{t\to -2}(t + 1)^9(t^2 - 1)$

15. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}\right)^2$

16. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{-5x^{20} - 2x^2 + 3\,000}{x^2 - 1}\right)^{1/3}$

17. $\lim_{x\to 12}\left(\sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{3x}\right)$ **18.** $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4 + 3u + 6}$

19–32 ■ Encontrar límites Evalúe el límite, si existe.

19. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ **20.** $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

21. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2 - x + 6}{x + 2}$ **22.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

23. $\lim_{t\to -3}\dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$ **24.** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

25. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$ **26.** $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

27. $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$ **28.** $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

29. $\lim_{x\to -4}\dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$ **30.** $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

31. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$ **32.** $\lim_{t\to 4}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{2}}{t - 4}$

33–36 ■ Encontrar límites Encuentre el límite y use una calculadora graficadora para confirmar gráficamente el resultado que haya obtenido.

33. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ **34.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{(4 + x)^3 - 64}{x}$

35. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - x}$ **36.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^8 - 1}{x^5 - 1}$

37–42 ■ ¿Existe el límite? Encuentre el límite, si existe. Si no existe explique por qué.

37. $\lim_{x\to -4}|x + 4|$ **38.** $\lim_{x\to -4^-}\dfrac{|x + 4|}{x + 4}$

39. $\lim_{x\to 2}\dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ **40.** $\lim_{x\to 1.5}\dfrac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

41. $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$ **42.** $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

43. ¿Existe el límite? Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Encuentre $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$?

c) Trace la gráfica de f.

44. ¿Existe el límite? Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Evalúe cada límite, si existe.

i) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$ *iv*) $\lim_{x \to 2^-} h(x)$

ii) $\lim_{x \to 0} h(x)$ *v*) $\lim_{x \to 2^+} h(x)$

iii) $\lim_{x \to 1} h(x)$ *vi*) $\lim_{x \to 2} h(x)$

b) Trace la gráfica de h.

HABILIDADES Plus

45. Encontrar los límites numérica y gráficamente

a) Calcule el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

al trazar la gráfica de la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

b) Cree una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0, y calcule el valor del límite.

c) Use las leyes de límites para demostrar que su cálculo es correcto.



46. Encontrar los límites numérica y gráficamente

a) Use una gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para calcular el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ a dos lugares decimales.

b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite con cuatro decimales.

c) Use las leyes de límites para encontrar el valor exacto del límite.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

47. DISCUSIÓN: Eliminación y límites

a) ¿Qué está mal en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) En vista del inciso *a*), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

48. DISCUSIÓN: La contracción de Lorentz En la teoría de relatividad la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un cuerpo como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del cuerpo en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

49. DISCUSIÓN ■ DEMOSTRACIÓN: Límites de sumas y productos

a) Demuestre, por medio de un ejemplo, que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aun cuando no existan $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

b) Demuestre, por medio de un ejemplo, que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aun cuando no existan $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

13.3 RECTAS TANGENTES Y DERIVADAS

■ El problema de una tangente ■ Derivadas ■ Razón de cambio instantánea

En esta ocasión veremos cómo surgen límites cuando tratamos de encontrar la *recta tangente* a una curva o la razón de cambio instantánea de una función.

■ El problema de una tangente

Una *recta tangente* es una recta que *apenas* toca una curva. Por ejemplo, la figura 1 muestra la parábola $y = x^2$ y la recta tangente t que toca la parábola en el punto $P(1, 1)$. Estaremos en aptitud de encontrar una ecuación de la recta tangente t tan pronto como conozcamos su pendiente m. La dificultad es que conocemos sólo un punto P, en t, mientras que para calcular la pendiente necesitamos dos puntos. Pero observe que

podemos calcular una aproximación a m si elegimos un punto cercano $Q(x, x^2)$ en la parábola (como en la figura 2) y si calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ.

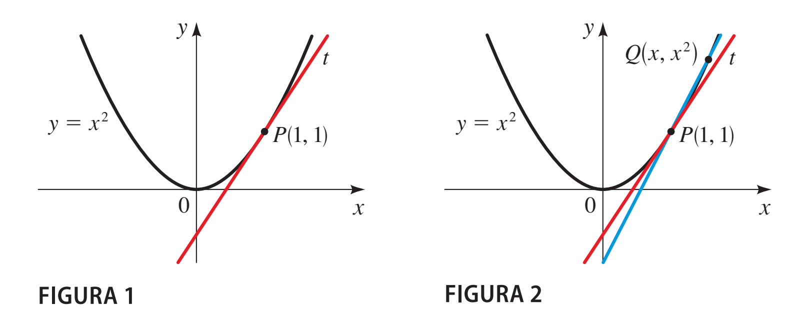


FIGURA 1 **FIGURA 2**

Elegimos $x \neq 1$ de modo que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Ahora hacemos que x se aproxime a 1, de modo que Q se aproxima a P a lo largo de la parábola. La figura 3 muestra la forma en que las rectas secantes correspondientes giran alrededor de P y se aproximan a la recta tangente t.

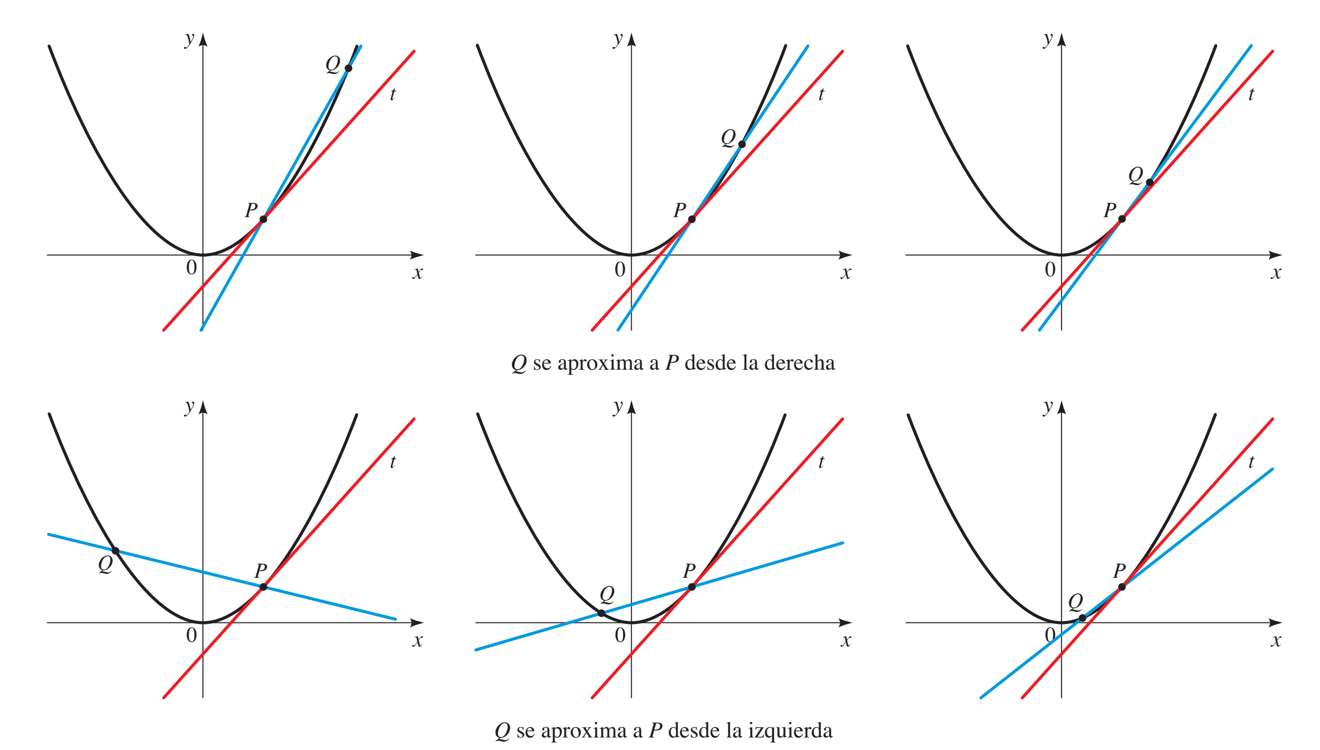


FIGURA 3

La pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes:

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

Entonces, usando el método de la sección 13.2, tenemos

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

La forma punto pendiente para la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

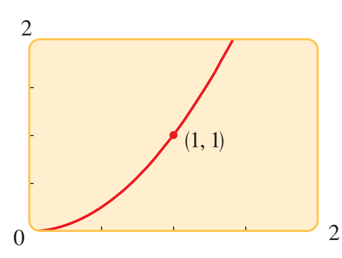
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

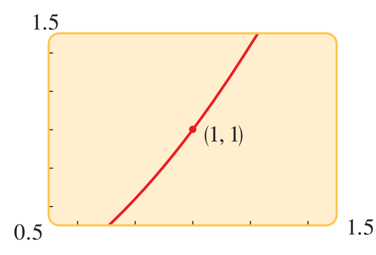
(Vea la sección 1.10.)

Ahora que sabemos que la pendiente de la recta tangente es $m = 2$ podemos usar la forma punto pendiente de la ecuación de una recta para encontrar su ecuación.

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

A veces nos referimos a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que, si hacemos suficiente acercamiento hacia el punto, la curva se ve casi como una recta. La figura 4 ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$. Cuanto más acercamiento hagamos la parábola se ve más como una recta. Es decir, la curva se hace casi imposible de distinguir de su recta tangente.





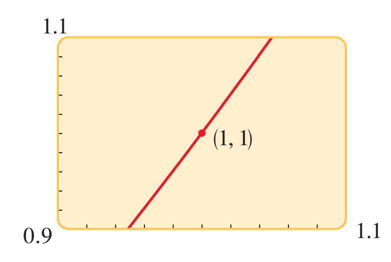
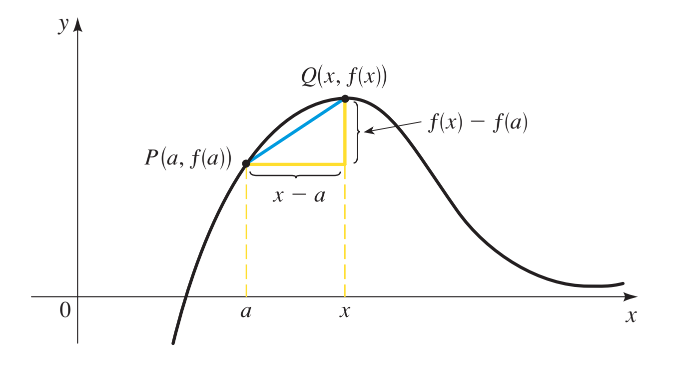


FIGURA 4 Acercamiento hacia el punto (1, 1) en la parábola $y = x^2$

Si tenemos una curva general C con ecuación $y = f(x)$ y deseamos encontrar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces consideramos un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la recta secante PQ.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Entonces hacemos que Q se aproxime a P a lo largo de la curva C haciendo que x se aproxime a a. Si m_{PQ} se aproxima a un número m, entonces definimos la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto quiere decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q se aproxima a P. Vea la figura 5.)



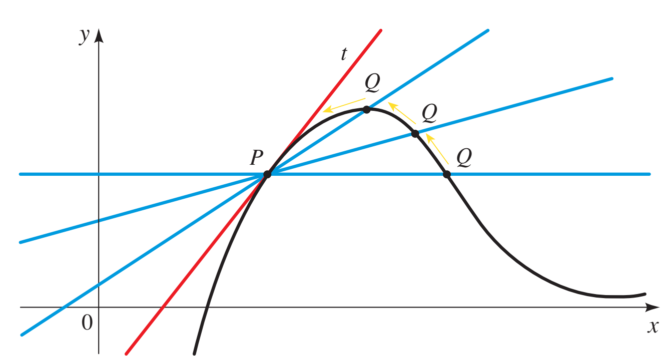


FIGURA 5

DEFINICIÓN DE UNA RECTA TANGENTE

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

EJEMPLO 1 ■ Encontrar una recta tangente a una hipérbola

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$ en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces la pendiente de la recta tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \qquad \text{Definición de } m$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{3}{x} - 1}{x - 3} \qquad f(x) = \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{x(x - 3)} \qquad \text{Multiplique el numerador y el denominador por } x$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(-\frac{1}{x}\right) \qquad \text{Elimine } x - 3$$

$$= -\frac{1}{3} \qquad \text{Sea } x \to 3$$

Por tanto una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica a

$$x + 3y - 6 = 0$$

La hipérbola y su tangente se muestran en la figura 6.

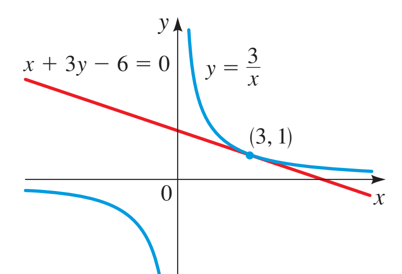


FIGURA 6

Ahora intente realizar los ejercicios 3 y 11

Hay otra expresión para la pendiente de una recta tangente que a veces es más fácil de usar. Sea $h = x - a$. Entonces $x = a + h$, de modo que la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Vea la figura 7, en la que el caso $h > 0$ está ilustrado y Q es la recta de P, pero si ocurre que $h < 0$ entonces Q estaría a la izquierda de P.

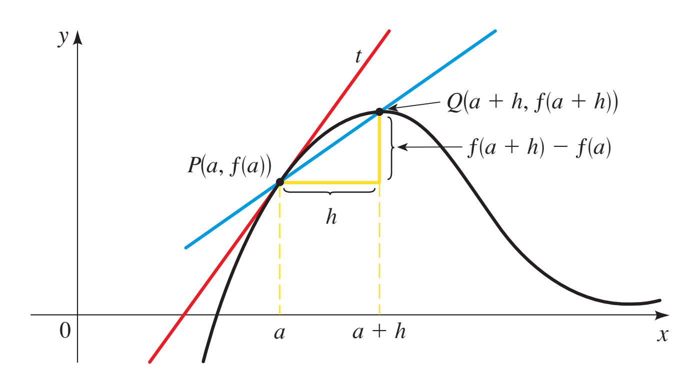


FIGURA 7

Newton y los límites
En 1687 Newton (vea la página 911) publicó su obra maestra *Principia Mathematica*. En este trabajo, el más grande tratado científico jamás escrito, Newton enunció su versión del cálculo y la usó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de los planetas y los cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en los cálculos de áreas y volúmenes que hicieron sabios griegos como Eudoxio y Arquímedes. Aun cuando aspectos de la idea de un límite están implícitos en el "método de agotamiento", Eudoxio y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de un límite. Del mismo modo matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, inmediatos precursores de Newton en el desarrollo del cálculo, nunca usaron realmente límites. Fue Isaac Newton el primero que explícitamente habló de límites, explicó que la idea principal que hay detrás de los límites es que las cantidades "se aproximan más por cualquier diferencia determinada". Newton dijo que el límite era el concepto básico en cálculo, pero dejó a matemáticos posteriores, como Cauchy y Weierstrass, que aclararan estas ideas.

Observe que cuando x se aproxima a a, h se aproxima a 0 (porque $h = x - a$), de modo que la expresión para la pendiente de la recta tangente se convierte en

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO 2 ■ Encontrar una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x + 3$ en el punto (1, 2).

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^3 - 2x + 3$, entonces la pendiente de la recta tangente donde $a = 1$ es

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} && \text{Definición de } m \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(1 + h)^3 - 2(1 + h) + 3] - [1^3 - 2(1) + 3]}{h} && f(x) = x^3 - 2x + 3 \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2 - 2h + 3 - 2}{h} && \text{Desarrolle el numerador} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h + 3h^2 + h^3}{h} && \text{Simplifique} \\ &= \lim_{h \to 0} (1 + 3h + h^2) && \text{Elimine } h \\ &= 1 && \text{Sea } h \to 0 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de la recta tangente en (1, 2) es

$$y - 2 = 1(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = x + 1$$

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

■ Derivadas

Hemos visto que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ se puede escribir como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Resulta que esta expresión también aparece en muchos otros contextos, por ejemplo, tales como para encontrar velocidades y otras razones de cambio. Debido a que este tipo de límite se presenta en forma tan general se le ha dado nombre y notación especiales.

DEFINICIÓN DE UNA DERIVADA

La **derivada de una función *f* en un número *a***, que se denota por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

EJEMPLO 3 ■ Encontrar una derivada en un punto

Encuentre la derivada de la función $f(x) = 5x^2 + 3x + 1$ en el número 2.

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de una derivada, con $a = 2$, tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} && \text{Definición de } f'(2) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[5(2+h)^2 + 3(2+h) - 1] - [5(2)^2 + 3(2) - 1]}{h} && f(x) = 5x^2 + 3x - 1 \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{20 + 20h + 5h^2 + 6 + 3h - 1 - 25}{h} && \text{Desarrolle} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{23h + 5h^2}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h\to 0} (23 + 5h) && \text{Elimine } h \\
&= 23 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}
$$

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

De la definición de una derivada vemos que el número $f'(a)$ es el mismo que el de la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Entonces el resultado del ejemplo 3 muestra que la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 5x^2 + 3x - 1$ en el punto (2, 25) es $f'(2) = 23$.

EJEMPLO 4 ■ Encontrar una derivada

Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre $f'(a)$. ***b)*** Encuentre $f'(1)$, $f'(4)$ y $f'(9)$.

SOLUCIÓN

a) Usamos la definición de la derivada en a:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} && \text{Definición de derivada} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} && f(x) = \sqrt{x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} && \text{Racionalice el numerador} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h) - a}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} && \text{Diferencia de cuadrados} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} && \text{Simplifique el numerador} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} && \text{Elimine } h \\
&= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}
$$

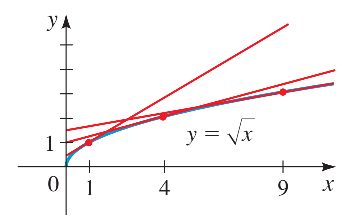


FIGURA 8

b) Sustituyendo $a = 1$, $a = 4$ y $a = 9$ en el resultado del inciso *a*), obtenemos

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \qquad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \qquad f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

Estos valores de la derivada son las pendientes de las rectas tangentes que se muestran en la figura 8.

Ahora intente realizar los ejercicios 25 y 27 ■

Razón de cambio instantánea

En la sección 2.4 definimos la razón de cambio promedio de una función f entre los números a y x como

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Suponga que consideramos la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños al hacer que x se aproxime a a. El límite de esta razón de cambio se llama razón de cambio instantánea.

RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

Si $y = f(x)$, la **razón de cambio instantánea de *y* respecto a *x*** en $x = a$ es el límite de la razón de cambio promedio cuando x se aproxima a a:

$$\text{razón de cambio instantánea} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Observe que ahora tenemos dos formas de interpretar la derivada:

- $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$
- $f'(a)$ es la rapidez de cambio instantánea de y respecto a x en $x = a$

En el caso especial en que $x = t =$ tiempo y $s = f(t) =$ desplazamiento (distancia dirigida) en el tiempo t de un cuerpo que viaja en línea recta, la razón de cambio instantánea recibe el nombre de **velocidad instantánea**.

EJEMPLO 5 ■ Velocidad instantánea de un objeto en caída

Si un objeto se deja caer desde una altura de 3 000 pies su distancia sobre el suelo (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 3000 - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea después de 4 segundos.



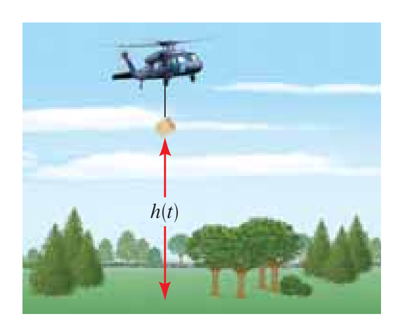
© Racheal Grazias/Shutterstock.com

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Diseñar una montaña rusa

Para asegurar un viaje excitante una montaña rusa debe tener subidas empinadas y bajadas unidas por curvas emocionantes. Para un paseo seguro, estas curvas deben ajustar "sin problemas". En el diseño de una montaña rusa usted puede elegir dónde ubicar las subidas y las bajadas. Exploraremos cómo nos puede ayudar la derivada a unir sin problemas las subidas y las bajadas. Usted puede encontrar el proyecto en **www.stewartmath.com**.*

*Este material se encuentra disponible en inglés.



SOLUCIÓN Después de que hayan transcurrido 4 segundos la altura es $h(4) = 2\,744$ pies. La velocidad instantánea es

$$\begin{aligned} h'(4) &= \lim_{t\to 4} \frac{h(t) - h(4)}{t - 4} && \text{Definición de } h'(4) \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{3\,000 - 16t^2 - 2\,744}{t - 4} && h(t) = 3\,000 - 16t^2 \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{256 - 16t^2}{t - 4} && \text{Simplifique} \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{16(4 - t)(4 + t)}{t - 4} && \text{Factorice el numerador} \\ &= \lim_{t\to 4} -16(4 + t) && \text{Elimine } t - 4 \\ &= -16(4 + 4) = -128 \text{ pies/s} && \text{Sea } t \to 4 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la altura está *decreciendo* con una razón de 128 pies/s.

Ahora intente realizar el ejercicio 37 ■

Población de Estados Unidos

t	$P(t)$
2004	292 805 298
2006	298 379 912
2008	304 093 966
2010	309 349 689
2012	313 914 040

Fuente: U.S. Census Bureau

t	$\dfrac{P(t) - P(2008)}{t - 2008}$
2004	2 822 167
2006	2 857 027
2010	2 627 862
2012	2 455 019

Aquí, hemos estimado la derivada al promediar las pendientes de dos rectas secantes. Otro método es determinar la función de población y calcular la pendiente de la recta tangente cuando $t = 2008$.

EJEMPLO 6 ■ Calcular una razón de cambio instantánea

Sea $P(t)$ la población de Estados Unidos en el tiempo t. La primera tabla del margen da valores aproximados de esta función, al dar cálculos de población de mediados de 2004 a 2012. Interprete y calcule el valor de $P'(2008)$.

SOLUCIÓN La derivada $P'(2008)$ quiere decir la razón de cambio de P respecto a t cuando $t = 2008$, es decir, la razón de crecimiento de la población en 2008.

De acuerdo con la definición de una derivada, tenemos

$$P'(2008) = \lim_{t\to 2008} \frac{P(t) - P(2008)}{t - 2008}$$

Entonces calculamos y tabulamos valores del cociente de diferencias (razón de cambio promedio) como se muestra en la tabla al margen. Vemos que $P'(2008)$ se encuentra entre 2 857 027 y 2 627 862. (Aquí estamos haciendo una suposición razonable de que la población no fluctuó violentamente entre 2004 y 2012.) Calculamos que la razón de crecimiento de población de Estados Unidos en 2008 fue el promedio de estos dos números, es decir,

$$P'(2008) \approx 2.74 \text{ millones de personas/año}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 43 ■

13.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La derivada de una función f en un número a es

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\square - \square}{\square}$$

si el límite existe. La derivada $f'(a)$ es la ________ de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto ($\square$, $\square$).

2. Si $y = f(x)$, la rapidez de cambio promedio de f entre los números x y a es $\dfrac{\square - \square}{\square - \square}$. El límite de la razón de cambio promedio cuando x se aproxima a a es la razón de cambio ________ de y respecto a x en $x = a$; esta es también la derivada $f'(\square)$.

HABILIDADES

3–10 ■ Pendiente de una recta tangente Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado.

3. $f(x) = 3x + 4$, en $(1, 7)$

4. $f(x) = 5 - 2x$, en $(-3, 11)$

5. $f(x) = 4x^2 - 3x$, en $(-1, 7)$

6. $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$, en $(1, 0)$

7. $f(x) = 2x^3$, en $(2, 16)$

8. $f(x) = x^3 + 1$, en $(2, 9)$

9. $f(x) = \dfrac{5}{x + 2}$, en $(3, 1)$

10. $f(x) = \dfrac{6}{x + 1}$, en $(2, 2)$

11–18 ■ Ecuación de una recta tangente Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Trace la gráfica de la curva y la recta tangente.

11. $f(x) = -2x^2 + 1$, en $(2, -7)$

12. $f(x) = 4x^2 - 3$, en $(-1, 1)$

13. $y = x + x^2$, en $(-1, 0)$

14. $y = 2x - x^3$, en $(1, 1)$

15. $y = \dfrac{x}{x - 1}$, en $(2, 2)$

16. $y = \dfrac{1}{x^2}$, en $(-1, 1)$

17. $y = \sqrt{x + 3}$, en $(1, 2)$

18. $y = \sqrt{1 + 2x}$, en $(4, 3)$

19–26 ■ Derivada evaluada en un punto Encuentre la derivada de la función en el número dado.

19. $f(x) = 1 - 3x^2$, en 2

20. $f(x) = 2 - 3x + x^2$, en -1

21. $f(x) = x - 3x^2$, en -1

22. $f(x) = x + x^3$, en 1

23. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$, en 2

24. $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$, en -3

25. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, en 4

26. $G(x) = 1 + 2\sqrt{x}$, en 4

27–30 ■ Evaluación de derivadas Encuentre lo siguiente para la función dada f: ***a)*** $f'(a)$, donde a está en el dominio de f, y ***b)*** $f'(3)$ y $f'(4)$.

27. $f(x) = x^2 + 2x$

28. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

29. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

30. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

HABILIDADES Plus

31. Rectas tangentes

a) Si $f(x) = x^3 - 2x + 4$, encuentre $f'(a)$.

b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos cuyas coordenadas x son 0, 1 y 2.

 ***c)*** Trace la gráfica de f y las tres rectas tangentes.

32. Rectas tangentes

a) Si $g(x) = 1/(2x - 1)$, encuentre $g'(a)$.

b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de g en los puntos cuyas coordenadas x son -1, 0 y 1.

 ***c)*** Trace la gráfica de g y las tres rectas tangentes.

33–36 ■ ¿Cuál límite representa una derivada? El límite dado representa la derivada de una función f en un número a. Encuentre f en a.

33. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

35. $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{t + 1} - \sqrt{2}}{t - 1}$

36. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

APLICACIONES

37. Velocidad de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

38. Velocidad en la Luna Si una flecha es disparada en la Luna hacia arriba con una velocidad de 58 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 58t - 0.83t^2$.

a) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha después de un segundo.

b) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha cuando $t = a$.

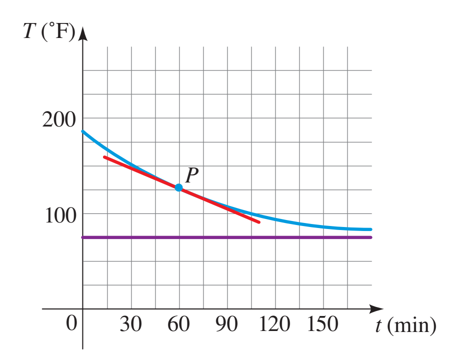
c) ¿En qué tiempo t regresará la flecha a la Luna?

d) ¿Con qué velocidad llegará la flecha a la Luna?

39. Velocidad de una partícula El desplazamiento s (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula s en los tiempos $t = a$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

40. Inflar un globo Un globo esférico está siendo inflado. Encuentre la razón de cambio del área superficial ($S = 4\pi r^2$) respecto al radio r cuando $r = 2$ pies.

41. Cambio de temperatura Se saca del horno un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre una mesa en una habitación donde la temperatura es de 75°F. La gráfica muestra la forma en que la temperatura del pavo disminuye y finalmente se aproxima a la temperatura de la habitación. Midiendo la pendiente de la tangente calcule la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



42. Frecuencia cardiaca Se utiliza un monitor para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. Este recolecta el número de pulsaciones después de t minutos. Cuando los datos de la tabla son graficados la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en pulsaciones por minuto.

t (min)	Pulsaciones
36	2 530
38	2 661
40	2 806
42	2 948
44	3 080

a) Encuentre el promedio de frecuencias cardiacas (pendientes de las rectas secantes) en los intervalos [40, 42] y [42, 44].

b) Calcule la frecuencia cardiaca del paciente después de 42 minutos promediando las pendientes de estas dos rectas secantes.

43. Flujo de agua Un tanque contiene 1 000 galones de agua la cual se drena por el fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla siguiente muestran el volumen V de agua que queda en el tanque (en galones) después de t minutos.

t (min)	*V* (gal)
5	694
10	444
15	250
20	111
25	28
30	0

a) Encuentre la razón promedio a la que sale el agua del tanque (pendientes de rectas secantes) durante los intervalos [10, 15] y [15, 20].

b) La pendiente de la recta tangente en el punto (15, 250) representa la rapidez a la que el agua sale del tanque después de 15 minutos. Calcule esta rapidez promediando las pendientes de las rectas secantes del inciso *a*).

44. Crecimiento de la población mundial La tabla muestra los valores aproximados para la población mundial, proporcionando la población de mediados de año estimada para los años 1900-2010.

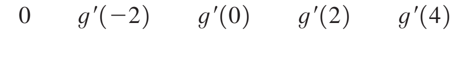
Año	Población (millones)	Año	Población (millones)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 290
1940	2 300	2000	6 090
1950	2 560	2010	6 870

Fuente: U.S. Census Bureau

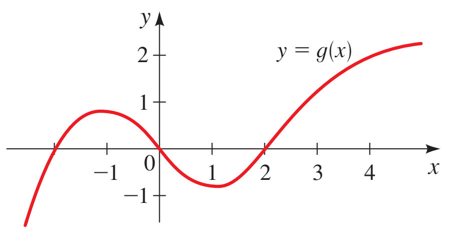
Calcule la razón de crecimiento de población en 1920 y en 2000 promediando las pendientes de dos rectas secantes.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

45. DISCUSIÓN: Cálculo de derivadas a partir de una gráfica Para la función g cuya grafica se da, acomode los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.



$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



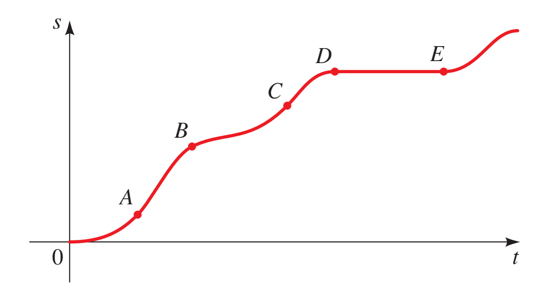
46. DISCUSIÓN: Cálculo de velocidades a partir de una gráfica La grafica muestra la función de la posición de un auto. Use la forma de la gráfica para explicar sus respuestas a las preguntas siguientes.

a) ¿Cuál es la velocidad inicial del auto?

b) ¿El auto corría más rápido en B o en C?

c) ¿El auto reducía su velocidad o aceleraba en A, B y C?

d) ¿Que ocurrió entre D y E?



13.4 LÍMITES EN EL INFINITO; LÍMITES DE SUCESIONES

■ Límites en el infinito ■ Límites de sucesiones

En esta sección estudiaremos una clase especial de límite llamada *límite en el infinito*. Examinaremos el límite de una función $f(x)$ cuando x se hace grande. También examinaremos el límite de una sucesión a_n cuando n se hace grande. Los límites de sucesiones se usarán en la sección 13.5 para ayudarnos a encontrar el área bajo la gráfica de una función.

■ Límites en el infinito

x	$f(x)$
0	−1.000000
±1	0.000000
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1 000	0.999998

Investiguemos el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x se hace grande. La tabla del margen da valores de esta función redondeados a seis decimales, y la gráfica de f ha sido trazada por computadora en la figura 1.

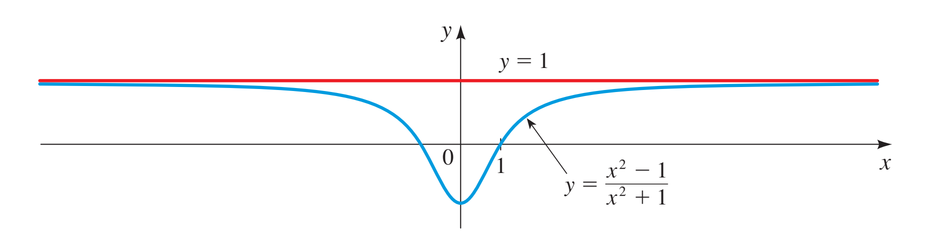


FIGURA 1

Cuando x crece cada vez más se puede ver que los valores de $f(x)$ se acercan más y más a 1. En realidad, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen a 1 cuanto queramos al tomar x suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica si escribimos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general usamos la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más a L cuando x se hace cada vez más grande.

LÍMITE EN EL INFINITO

Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si tomamos x lo suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to \infty$$

Los límites en el infinito también se estudian en la sección 3.6.

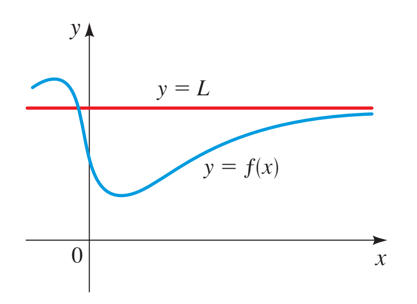
El símbolo ∞ no representa un número. Sin embargo, con frecuencia leemos la expresión $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ como

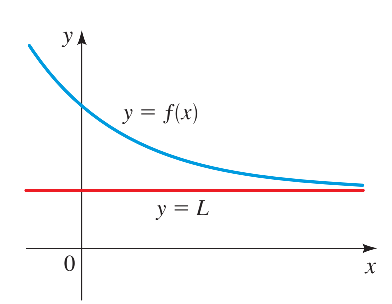
"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se convierte en infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x aumenta sin límite, es L"

Las ilustraciones geométricas se muestran en la figura 2. Observe que hay muchas formas para que la gráfica de f se aproxime a la recta $y = L$ (que se denomina *asíntota horizontal*) como vemos en el extremo derecho.





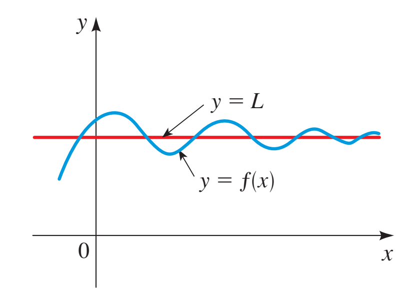


FIGURA 2 Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

Al consultar de nuevo la figura 1 vemos que para valores negativos de x numéricamente grandes, los valores de $f(x)$ son cercanos a 1. Si hacemos que x decrezca sin límite a valores negativos podemos hacer que $f(x)$ sea tan cercana a 1 como queramos. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es la siguiente.

LÍMITE EN EL INFINITO NEGATIVO

Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si tomamos x suficientemente grande negativa.

y
y = f(x)
y = L
0

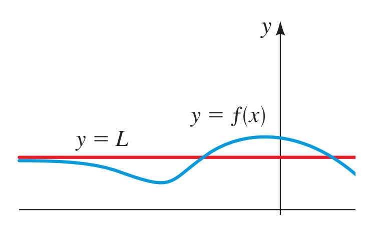


FIGURA 3 Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

De nuevo, el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito negativo, es L"

La definición se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica se aproxima a la recta $y = L$ cuando vemos el extremo izquierdo.

ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ se denomina **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

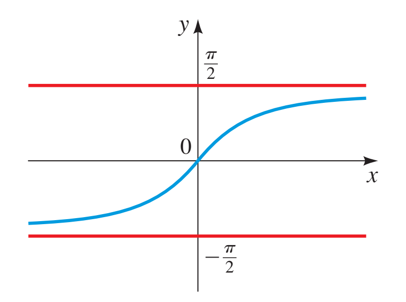


FIGURA 4 $y = \tan^{-1} x$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Tal como descubrimos en la sección 5.5, un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1} x$ (vea la figura 4). De hecho,

$$\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las dos rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se deduce del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

EJEMPLO 1 ■ Límites en el infinito

Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x}$.

Primero, en la sección 3.6, investigamos asíntotas horizontales y límites en el infinito para funciones racionales.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeña. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

En efecto, al tomar x suficientemente grande, podemos hacer $1/x$ tan cercana a 0 como queramos. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar muestra que cuando x es negativa grande, $1/x$ es negativa pequeña, de modo que también tenemos

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

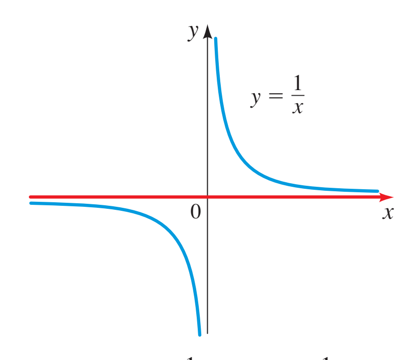


FIGURA 5 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$. (Esta es una hipérbola; vea la figura 5.)

Ahora intente realizar el ejercicio 5 ■

Las leyes de límites que estudiamos en la sección 13.2 se cumplen también para límites en el infinito. En particular, si combinamos la ley 6 (límite de una potencia) con los resultados del ejemplo 1 obtenemos la siguiente e importante regla para calcular límites.

> Si k es un entero positivo, entonces
>
> $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

EJEMPLO 2 ■ Encontrar un límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

SOLUCIÓN Para evaluar el límite en el infinito de una función racional primero dividimos el numerador y el denominador entre la potencia superior de x que se encuentre en el denominador. (Podemos suponer que $x \neq 0$, porque estamos interesados sólo en

valores grandes de x.) En este caso, la potencia superior de x del denominador es x^2, de modo que tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$ Divida el numerador y el denominador entre x^2

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$ Límite de un cociente

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$$ Límites de sumas, diferencias y múltiplos constantes

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0}=\frac{3}{5}$$ Sea $x\to\infty$

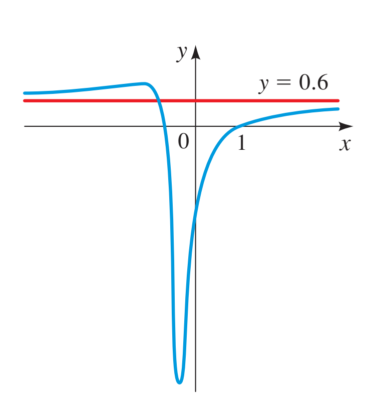


FIGURA 6

Un cálculo similar muestra que cuando $x\to-\infty$ el límite también es $\frac{3}{5}$. La figura 6 muestra los resultados de estos cálculos al demostrar la forma en que la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y=\frac{3}{5}$.



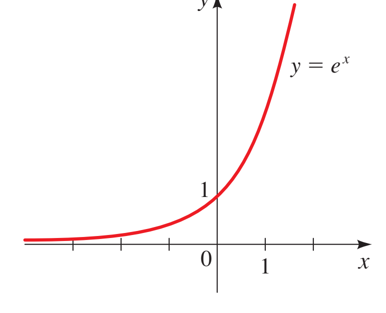
EJEMPLO 3 ■ Un límite en el infinito negativo

Use métodos numéricos y gráficos para encontrar $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$.

SOLUCIÓN De la gráfica de la función exponencial natural $y=e^x$ de la figura 7 y la correspondiente tabla de valores vemos que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

Se deduce que la recta $y=0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

FIGURA 7

Ahora intente realizar el ejercicio 19 ■

EJEMPLO 4 ■ Una función sin límite en el infinito

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sen} x$.

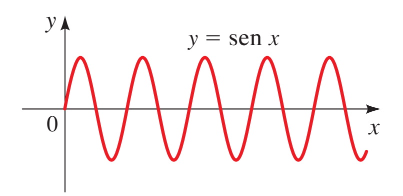


FIGURA 8

SOLUCIÓN De la gráfica de la figura 8 y la naturaleza periódica de la función seno vemos que cuando x aumenta, los valores de sen x oscilan entre 1 y -1 con frecuencia infinita, de modo que no se aproximan a ningún número definido. Por tanto, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

■ Límites de sucesiones

En la sección 12.1 introdujimos la idea de una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Aquí estamos interesados en su comportamiento cuando n se hace grande. Por ejemplo, la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

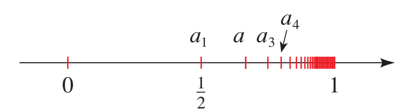


FIGURA 9

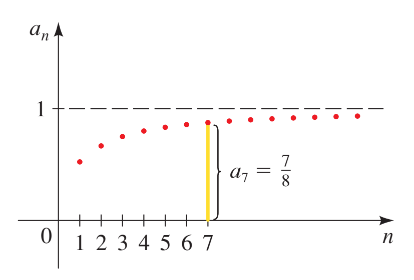


FIGURA 10

está representada en la figura 9 al colocar sus términos sobre una recta numérica y en la figura 10 al determinar su gráfica. De las figuras 9 o 10 parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n se hace grande. Indicamos esto al escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tiene el **límite** L y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si el n-ésimo término a_n de la sucesión se puede hacer arbitrariamente cercano a L tomando n lo suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, decimos que la sucesión **converge** (o es **convergente**). De otro modo, decimos que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

Esta definición se ilustra en la figura 11.

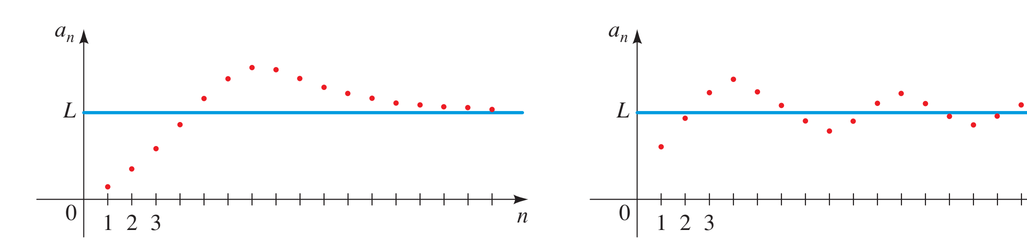


FIGURA 11 Gráficas de dos sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Si comparamos las definiciones de $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, vemos que la única diferencia es que se requiere que n sea un entero. Por tanto, lo siguiente es verdadero.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

En particular, dado que sabemos que $\lim_{x\to\infty} (1/x^k) = 0$ cuando k es un entero positivo, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \text{si } k \text{ es un entero positivo}$$

Observe que las leyes de límites de la sección 13.2 también se cumplen para límites de sucesiones.

EJEMPLO 5 ■ Encontrar el límite de una sucesión

Encuentre $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que usamos en el ejemplo 2: divida el numerador y el denominador entre la potencia superior de n y luego use las leyes de límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \qquad \text{Divida el numerador y el denominador entre } n$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}} \qquad \text{Límites de un cociente y una suma}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1 \qquad \text{Sea } n \to \infty$$

Este resultado muestra que el cálculo que hicimos antes a partir de las figuras 9 y 10 fue correcto.

Por tanto, la sucesión $a_n = n/(n+1)$ es convergente.

Ahora intente realizar el ejercicio 23 ■

EJEMPLO 6 ■ Una sucesión que diverge

Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si escribimos los términos de la sucesión obtenemos

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 12. Puesto que los términos oscilan entre 1 y -1 infinitamente, a_n no se aproxima a ningún número. Entonces $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe; esto es, la sucesión $a_n = (-1)^n$ es divergente.

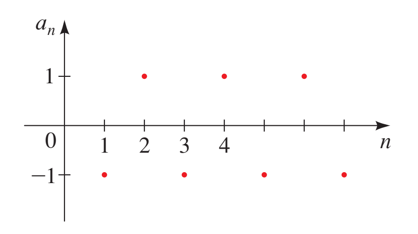


FIGURA 12

Ahora intente realizar el ejercicio 29 ■

EJEMPLO 7 ■ Encontrar el límite de una sucesión

Encuentre el límite de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{15}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

SOLUCIÓN Antes de calcular el límite simplifiquemos primero la expresión para a_n. Dado que $n^3 = n \cdot n \cdot n$, colocamos un factor de n debajo de cada factor en el numerador que contiene una n:

$$a_n = \frac{15}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Ahora podemos calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{Definición de } a_n$$

$$= \frac{5}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{Límite de un producto}$$

$$= \frac{5}{2}(1)(2) = 5 \qquad \text{Sea } n \to \infty$$

Ahora intente realizar el ejercicio 31 ■

13.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a ________ al tomar ________ suficientemente grande. En este caso la recta $y = L$ se denomina ________ ________ de la curva $y = f(x)$. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$ ________ y la recta $y =$ ________ es una asíntota horizontal.

2. Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tiene el límite L si el n-ésimo término a_n de la sucesión se puede hacer arbitrariamente cercano a ________ si se toma n suficientemente ________. Si existe el límite decimos que la sucesión ________________; de otro modo, la sucesión ________________.

HABILIDADES

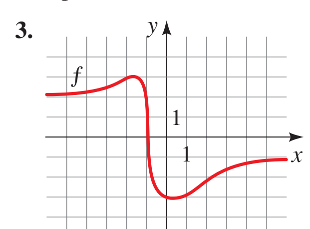
3–4 ■ Límites de una gráfica

a) Use la gráfica de f para encontrar los límites siguientes.

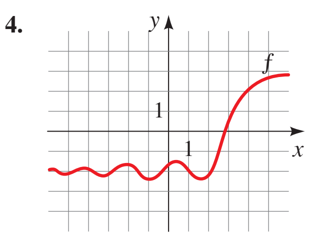
i) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *ii)* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Exprese las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

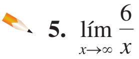
3.



4.



5–18 ■ Límites en infinito Encuentre el límite.



5. $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^4}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{5x - 1}$

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{2 - 3x}{4x + 5}$

9. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 + 1}{2 + 3x^2}$

10. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x + 1}$

11. $\lim_{t\to\infty} \frac{8t^3 + t}{(2t - 1)(2t^2 + 1)}$

12. $\lim_{r\to\infty} \frac{4r^3 - r^2}{(r + 1)^3}$

13. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1 - x^2 + x^3}$

14. $\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t - 1}\right)$

15. $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 1} + 6\right)$

16. $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3 - x}{3 + x} - 2\right)$

17. $\lim_{x\to\infty} \cos x$

18. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}^2 x$

19–22 ■ Calcular los límites numéricamente y gráficamente Use una tabla de valores para calcular el límite. Después use una calculadora graficadora para confirmar gráficamente su resultado.

19. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{4x + 1}$

20. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

21. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$

22. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

23–34 ■ Límites de sucesiones Si la sucesión con el n-ésimo término dado es convergente encuentre su límite. Si es divergente explique por qué.

23. $a_n = \frac{1 + n}{n + n^2}$

24. $a_n = \frac{5n}{n + 5}$

25. $a_n = \frac{n^2}{n + 1}$

26. $a_n = \frac{n - 1}{n^3 + 1}$

27. $a_n = \frac{1}{3^n}$

28. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

29. $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$

30. $a_n = \cos n\pi$

31. $a_n = \frac{3}{n^2}\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]$

32. $a_n = \frac{5}{n}\left(n + \frac{4}{n}\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]\right)$

33. $a_n = \frac{24}{n^3}\left[\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}\right]$

34. $a_n = \frac{12}{n^4}\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

HABILIDADES Plus

35–36 ■ Una función a partir de una descripción Encuentre una fórmula de la función f que satisfaga las condiciones siguientes.

35. Asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

36. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$,
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

37. Comportamiento asintótico Qué tan cerca de -3 debe estar x para que

$$\frac{1}{(x + 3)^2} > 10\,000$$

38. Límites equivalentes Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

si existen estos límites.

APLICACIONES

39. Concentración de sal

a) Un tanque contiene 5 000 L de agua pura. La salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua es bombeada en el tanque a razón de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

b) ¿Qué ocurre a la concentración cuando $t \to \infty$?

40. Velocidad de una gota de lluvia La velocidad descendente de una gota de agua en caída en el tiempo t está modelada por la función

$$v(t) = 1.2(1 - e^{-8.2t})$$

a) Encuentre la velocidad terminal de la gota de agua evaluando $\lim_{t\to\infty} v(t)$. (Use el resultado del ejemplo 3.)


b) Trace la gráfica de $v(t)$ y úsela para calcular cuánto tiempo tarda la velocidad de la gota de lluvia en alcanzar 99% de su velocidad terminal.

DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

41. DISCUSIÓN: Límite de una sucesión recursiva

a) Una sucesión está definida en forma recursiva por $a_1 = 0$ y

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Encuentre los primeros diez términos de esta sucesión redondeados a ocho lugares decimales. ¿Parece ser convergente esta sucesión? Si es así calcule el valor del límite.

b) Suponiendo que la sucesión del inciso *a*) es convergente, sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Explique también por qué $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ y, por tanto,

$$L = \sqrt{2 + L}$$

Resuelva esta ecuación para encontrar el valor exacto de L.

13.5 ÁREAS

■ El problema del área ■ Definición de área

Hemos visto que los límites son necesarios para calcular la pendiente de una recta tangente o una razón de cambio instantánea. Aquí veremos que también son necesarias para encontrar el área de una región con fronteras curvadas. El problema de encontrar estas áreas tiene consecuencias que van mucho más allá de simplemente encontrar el área. (Vea el *Enfoque sobre modelado* de la página 944.)

■ El problema del área

Uno de los problemas centrales en cálculo es el *problema del área*: encuentre el área de la región S que está bajo la curva $y = f(x)$ de a a b. Esto significa que S, que se ilustra en la figura 1, está limitada por la gráfica de una función f (donde $f(x) \geq 0$), las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje x.

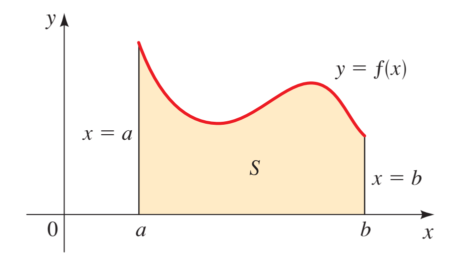


FIGURA 1

Al tratar de resolver el problema del área tenemos que preguntarnos cuál es el significado de la palabra *área*. Esta pregunta es fácil de contestar para regiones con lados rectos. Para un rectángulo el área está definida como el producto de la longitud y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. El área de un polígono

se encuentra al dividirlo en triángulos (como en la figura 2) y sumar las áreas de los triángulos.

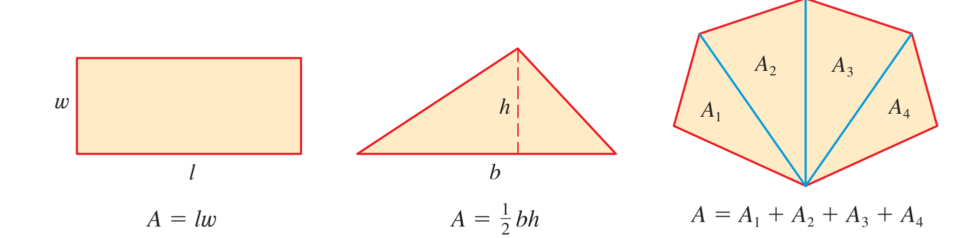


FIGURA 2

Sin embargo, no es tan fácil encontrar el área de una región con lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región, pero parte del problema del área es hacer precisa esta idea intuitiva dando una definición exacta de área.

Recuerde que, al definir una tangente, primero aproximamos la pendiente de la recta tangente mediante pendientes de rectas secantes, y luego tomamos el límite de estas aproximaciones. Buscamos una idea similar para áreas. Primero aproximamos la región S mediante rectángulos y luego tomamos el límite de las áreas de estos rectángulos cuando aumentamos el número de rectángulos. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 1 ■ Calcular un área usando rectángulos

Use rectángulos para calcular el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 a 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura 3).

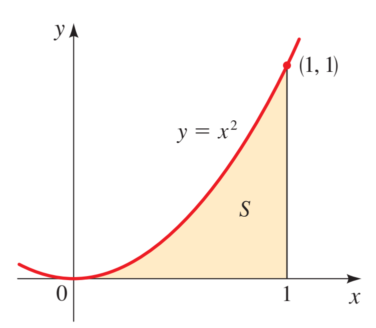


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero observamos que el área de S debe estar entre 0 y 1 porque S está contenida en un cuadrado con longitud 1 de lado, pero ciertamente podemos mejorar esto. Suponga que dividimos S en cuatro franjas S_1, S_2, S_3 y S_4 al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4*a*). Podemos aproximar cada franja por medio de un rectángulo cuya base es la misma que la franja y cuya altura es la misma que el borde derecho de la franja (vea la figura 4*b*)). En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos derechos de los subintervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

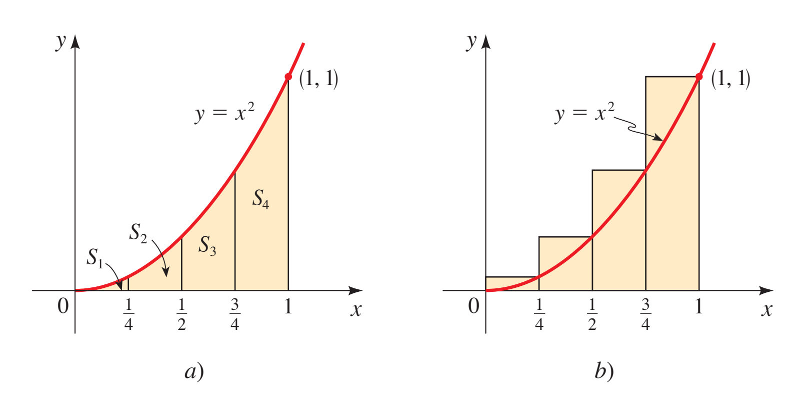


FIGURA 4

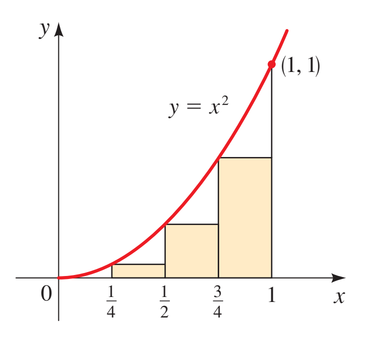


FIGURA 5

Cada uno de estos rectángulos tiene de ancho $\frac{1}{4}$ y las alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ y 1^2. Si hacemos que R_4 sea la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación obtenemos

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

De la figura 4*b*) vemos que el área A de S es menor que R_4, de modo que

$$A < 0.46875$$

En lugar de usar los rectángulos de la figura 4*b*) podríamos usar los rectángulos más pequeños de la figura 5 cuyas alturas son los valores de f en los puntos extremos izquierdos de los subintervalos. (El rectángulo del extremo izquierdo se ha colapsado porque su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

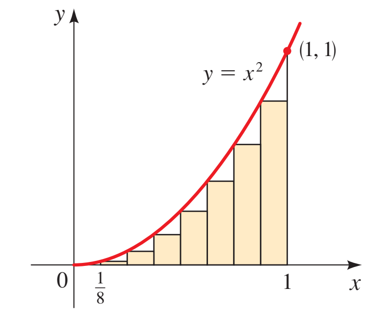
Vemos que el área de S es mayor que L_4, de modo que tenemos cálculos más bajos y más altos para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

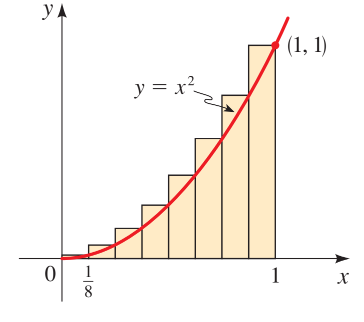
Podemos repetir este procedimiento con un número más grande de franjas. La figura 6 muestra lo que ocurre cuando dividimos la región S en ocho franjas de igual ancho. Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8) obtenemos cálculos más bajos y más altos para A:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Entonces, una posible respuesta para la pregunta es decir que el área verdadera de S está entre 0.2734375 y 0.3984375.



a) Usando puntos extremos izquierdos



b) Usando puntos extremos derechos

FIGURA 6 Aproximación de S con ocho rectángulos

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1 000	0.3328335	0.3338335

Podríamos obtener mejores cálculos si aumentamos el número de franjas. La tabla del margen muestra los resultados de cálculos similares (con una computadora) usando n rectángulos cuyas alturas se encuentran con puntos extremos izquierdos (L_n) o puntos extremos derechos (R_n). En particular, con el uso de 50 franjas vemos que el área está entre 0.3234 y 0.3434. Con 1 000 franjas lo reducimos todavía más: A está entre 0.3328335 y 0.3338335. Se obtiene un buen cálculo al promediar estos números: $A \approx 0.3333335$.

Ahora intente realizar el ejercicio 3 ■

De los valores de la tabla parece como si R_n se aproximara a $\frac{1}{3}$ a medida que n aumenta. Confirmamos esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ El límite de sumas de aproximación

Para la región S del ejemplo 1 demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación superior se aproxima a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

FIGURA 7

Esta fórmula se estudia en la sección 12.5.

SOLUCIÓN Sea R_n la suma de las áreas de los n rectángulos que se muestran en la figura 7. Cada uno de los rectángulos tiene ancho $1/n$ y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$. Esto es, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$, Por tanto,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Aquí necesitamos la fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Poniendo la fórmula anterior en nuestra expresión para R_n, obtenemos

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot 1 \cdot 2 = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 13 ■

Se puede demostrar que las sumas de aproximación inferiores también se aproximan a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

De las figuras 8 y 9 parece que a medida que n aumenta tanto R_n como L_n hacen aproximaciones cada vez mejores al área de S. Por tanto, *definimos* el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, o sea

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

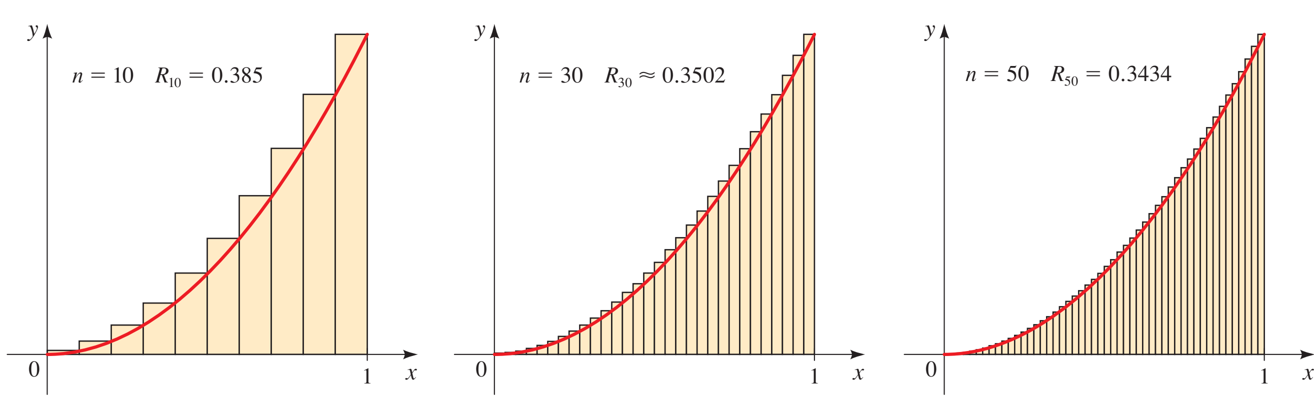


FIGURA 8

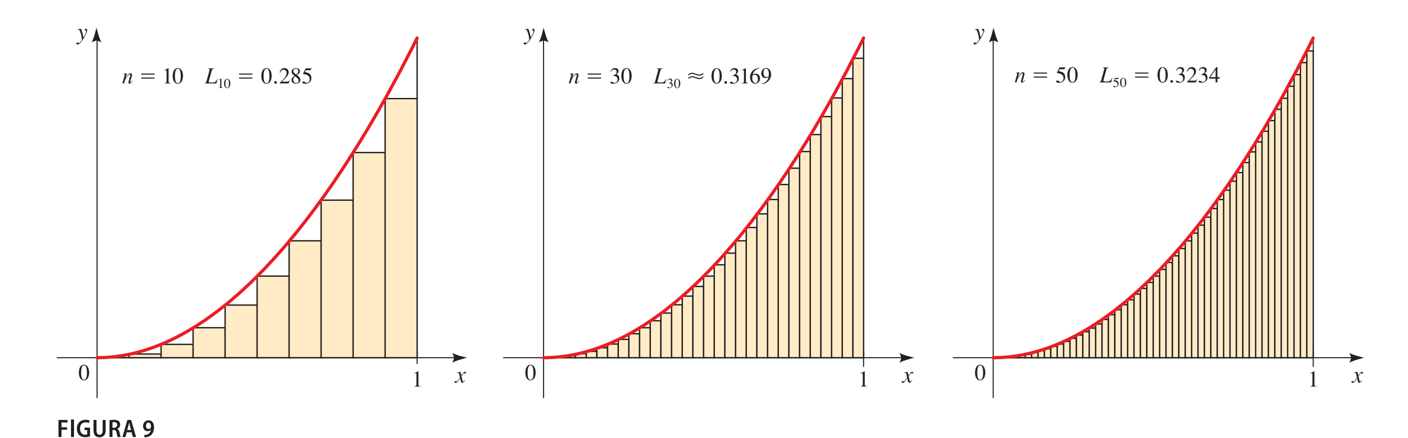


FIGURA 9

Definición de área

Apliquemos la idea de los ejemplos 1 y 2 a la región S más general de la figura 1. Empezamos por subdividir S en n franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual ancho como en la figura 10.

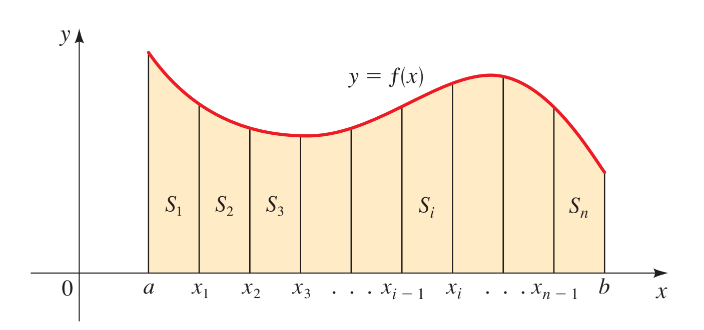


FIGURA 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las n franjas es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos extremos de los intervalos son

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\,\Delta x, \quad x_3 = a + 3\,\Delta x, \quad \ldots, \quad x_k = a + k\,\Delta x, \quad \ldots$$

Aproximemos la k-ésima franja S_k por medio de un rectángulo con ancho Δx y altura $f(x_k)$, que es el valor de f en el punto extremo derecho (vea la figura 11). Entonces el área del k-ésimo rectángulo es $f(x_k)\Delta x$. Lo que consideramos intuitivamente como el área de S es aproximadamente la suma de las áreas de estos rectángulos, que es

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

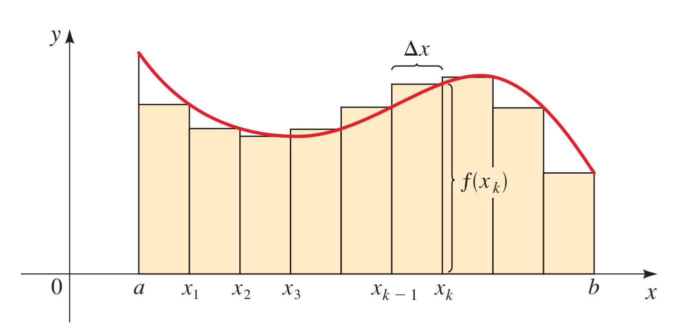


FIGURA 11

La figura 12 muestra esta aproximación para $n = 2, 4, 8$ y 12.

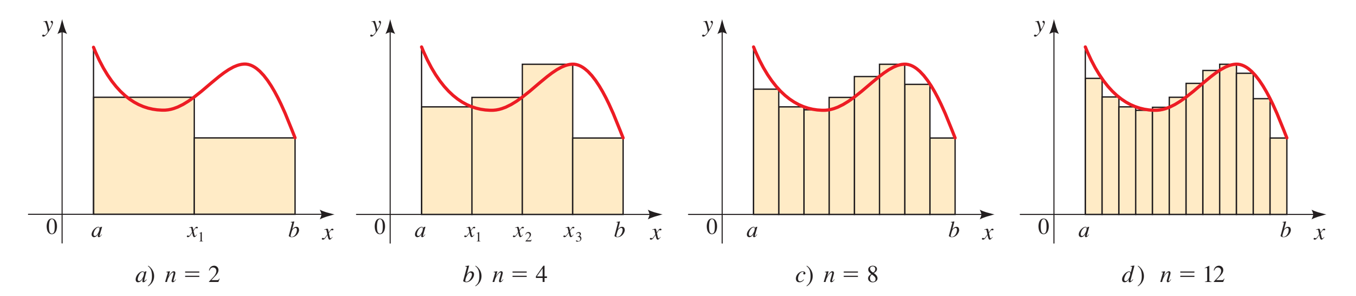


FIGURA 12

Observe que esta aproximación parece hacerse cada vez mejor a medida que el número de franjas aumenta, esto es, cuando $n \to \infty$. Por tanto, definimos el área A de la región S en la forma siguiente.

DEFINICIÓN DE ÁREA

El **área** A de la región S que está bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x\right]$$

Usando notación sigma escribimos esto como sigue:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Al usar esta fórmula para el área recuerde que Δx es el ancho de un rectángulo de aproximación, x_k es el punto extremo derecho del k-ésimo rectángulo y $f(x_k)$ es su altura. Por tanto,

Ancho: $\quad \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

Punto extremo derecho: $\quad x_k = a + k\,\Delta x$

Altura: $\quad f(x_k) = f(a + k\,\Delta x)$

Cuando trabajemos con sumas necesitaremos las siguientes propiedades de la sección 12.1:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

También necesitaremos las siguientes fórmulas para las sumas de las potencias de los primeros n números naturales de la sección 12.5.

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

EJEMPLO 3 ■ Encontrar el área bajo una curva

Encuentre el área de la región que está bajo la parábola $y = x^2$, $0 \le x \le 5$.

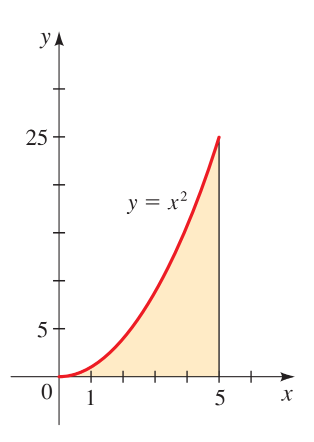


FIGURA 13

SOLUCIÓN La región se muestra graficada en la figura 13. Para encontrar el área primero encontramos las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la n-ésima etapa.

Ancho: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{5-0}{n} = \dfrac{5}{n}$

Punto extremo derecho: $x_k = a + k\,\Delta x = 0 + k\left(\dfrac{5}{n}\right) = \dfrac{5k}{n}$

Altura: $f(x_k) = f\left(\dfrac{5k}{n}\right) = \left(\dfrac{5k}{n}\right)^2 = \dfrac{25k^2}{n^2}$

Ahora sustituimos estos valores en la definición de área:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x && \text{Definición de área}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{25k^2}{n^2}\cdot\frac{5}{n} && f(x_k) = \frac{25k^2}{n^2},\ \Delta x = \frac{5}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{125k^2}{n^3} && \text{Simplifique}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{Factorice } \frac{125}{n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Fórmula de la suma de cuadrados}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125(2n^2+3n+1)}{6n^2} && \text{Elimine } n \text{ y desarrolle el numerador}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) && \text{Divida el numerador y el denominador entre } n^2\\
&= \frac{125}{6}(2+0+0) = \frac{125}{3} && \text{Sea } n \to \infty
\end{aligned}$$

También podemos calcular el límite si escribimos

$$\frac{125}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{125}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

como en el ejemplo 2.

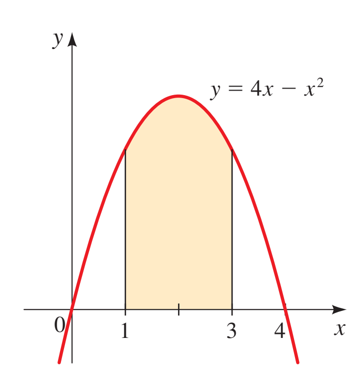
Entonces, el área de la región es $\frac{125}{3} \approx 41.7$.

Ahora intente realizar el ejercicio 15 ■

EJEMPLO 4 ■ Encontrar el área bajo una curva

Encuentre el área de la región que está bajo la parábola $y = 4x - x^2$, donde $1 \le x \le 3$.

La figura 14 muestra la región cuya área está calculada en el ejemplo 4.



SOLUCIÓN Empezamos por encontrar las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la n-ésima etapa.

Ancho: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$

Punto extremo derecho: $x_k = a + k\,\Delta x = 1 + k\left(\dfrac{2}{n}\right) = 1 + \dfrac{2k}{n}$

Altura:
$$\begin{aligned}
f(x_k) &= f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) = 4\left(1 + \frac{2k}{n}\right) - \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2\\
&= 4 + \frac{8k}{n} - 1 - \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}\\
&= 3 + \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo con la definición de área, obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(3 + \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}(3n) + \frac{8}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(6 + 4\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n} - \frac{4}{3}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[6 + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

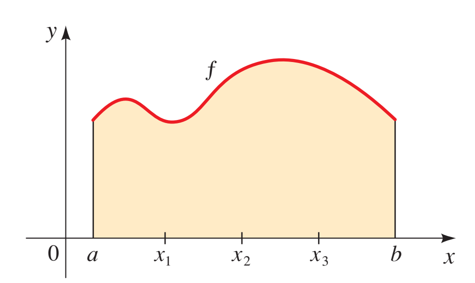
$$= 6 + 4\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 1\cdot 2 = \frac{22}{3}$$

Ahora intente realizar el ejercicio 17 ■

13.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

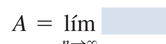
1–2 ■ A continuación se muestra la gráfica de una función *f*.



1. Para encontrar el área bajo la gráfica de *f* primero aproximamos el área por medio de ________. Aproxime el área trazando cuatro rectángulos. El área R_4 de esta aproximación es

$R_4 =$ ____ + ____ + ____ + ____

2. Sea R_n la aproximación obtenida usando n rectángulos de igual ancho. El área exacta bajo la gráfica de *f* es

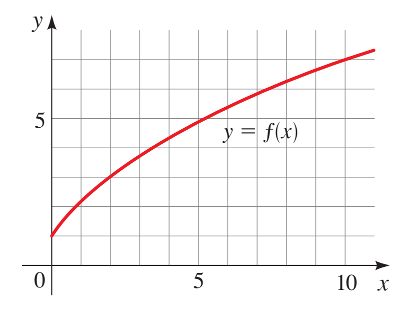
$A = \lim_{n\to\infty}$ 

HABILIDADES

3. Calcular un área usando rectángulos

a) Al leer los valores de la gráfica dada de *f* use cinco rectángulos para encontrar un cálculo inferior y un cálculo superior para el área bajo la gráfica dada de *f* de $x = 0$ a $x = 10$. En cada caso trace el rectángulo que use.

b) Encuentre nuevos cálculos usando diez rectángulos en cada caso.



4. Calcular un área usando rectángulos

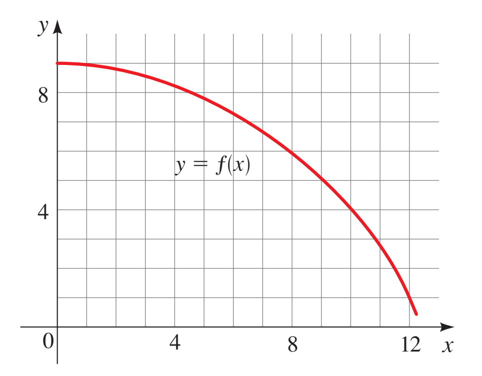
a) Use seis rectángulos para encontrar cálculos de cada tipo para el área bajo la gráfica dada de *f* de $x = 0$ a $x = 12$.

i) L_6 (usando puntos extremos izquierdos)

ii) R_6 (usando puntos extremos derechos)

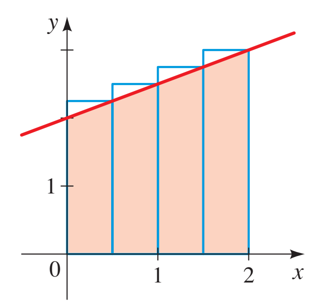
b) ¿Es L_6 una subestimación o una sobreestimación de la verdadera área?

c) ¿Es R_6 una subestimación o una sobreestimación de la verdadera área?

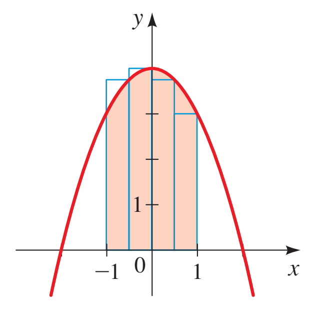


5–8 ■ Calcular un área usando rectángulos Aproxime el área de la región sombreada bajo la gráfica de la función dada usando los rectángulos indicados. (Los rectángulos tienen ancho igual.)

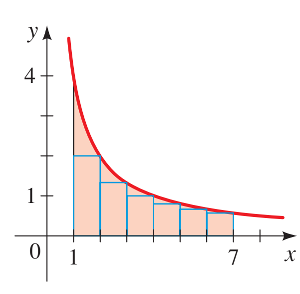
5. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$



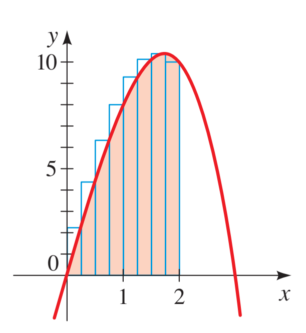
6. $f(x) = 4 - x^2$



7. $f(x) = \dfrac{4}{x}$



8. $f(x) = 9x - x^3$



9–12 ■ Calcular un área usando rectángulos En estos ejercicios calculamos el área bajo la gráfica de una función usando rectángulos.

9. ***a)*** Calcule el área bajo la gráfica de $f(x) = 1/x$ de $x = 1$ a $x = 5$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿La de usted es una subestimación o una sobreestimación?

b) Repita el inciso *a)* usando puntos extremos izquierdos.

10. ***a)*** Calcule el área bajo la gráfica de $f(x) = 25 - x^2$ de $x = 0$ a $x = 5$ usando cinco rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿La de usted es una subestimación o una sobreestimación?

b) Repita el inciso *a)* usando puntos extremos izquierdos.

11. ***a)*** Calcule el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ a $x = 2$ usando tres rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. Luego mejore su cálculo usando para ello seis rectángulos. Trace la gráfica y los rectángulos de aproximación.

b) Repita el inciso *a)* usando puntos extremos izquierdos.

12. ***a)*** Calcule el área bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, $0 \le x \le 4$ usando cuatro rectángulos de aproximación y tomando los puntos muestrales como

i) puntos extremos derechos

ii) puntos extremos izquierdos

En cada caso, dibuje la curva y los rectángulos.

b) Mejore sus cálculos del inciso *a)* usando ocho rectángulos.

13–14 ■ Encuentre el área bajo la curva Use la definición de área como un límite para encontrar el área de la región que está bajo la curva. Compruebe su respuesta trazando la región y usando geometría.

13. $y = 3x$, $0 \le x \le 5$ **14.** $y = 2x + 1$, $1 \le x \le 3$

15–20 ■ Encontrar el área bajo la curva Encuentre el área de la región que está bajo la gráfica de f sobre el intervalo dado.

15. $f(x) = 3x^2$, $0 \le x \le 2$

16. $f(x) = x + x^2$, $0 \le x \le 1$

17. $f(x) = x^3 + 2$, $0 \le x \le 5$

18. $f(x) = 4x^3$, $2 \le x \le 5$

19. $f(x) = x + 6x^2$, $1 \le x \le 4$

20. $f(x) = 20 - 2x^2$, $2 \le x \le 3$



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

21. DISCUSIÓN: Aproximar el área con una calculadora Cuando aproximamos áreas usando rectángulos como en el ejemplo 1 cuantos más rectángulos usemos la respuesta será más precisa. El siguiente programa de una TI-83 encuentra el área aproximada bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ usando n rectángulos. Para usar el programa primero guardamos la función f en `Y₁`. El programa le pide introducir `N`, que es el número de rectángulos, así como `A` y `B`, que son los puntos extremos del intervalo.

a) Aproxime el área bajo la gráfica de $f(x) = x^5 + 2x + 3$ en $[1, 3]$ usando 10, 20 y 100 rectángulos.

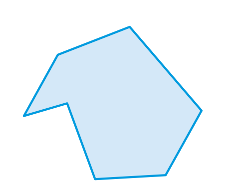
b) Aproxime el área bajo la gráfica de f en el intervalo dado usando 100 rectángulos.

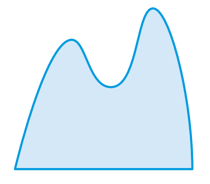
i) $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $[0, \pi]$

ii) $f(x) = e^{-x^2}$, en $[-1, 1]$

```
PROGRAM:AREA
:Prompt N
:Prompt A
:Prompt B
:(B-A)/N→D
:0→S
:A→X
:For (K,1,N)
:X+D→X
:S+Y₁→S
:End
:D*S→S
:Disp "AREA IS"
:Disp S
```

22. REDACCIÓN: Regiones con límites rectos contra curvos Escriba un breve ensayo que explique cómo encontraría el área de un polígono, es decir, una región limitada por segmentos de rectas. Luego explique cómo encontraría el área bajo una región cuya frontera es curva, como hicimos en esta sección. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre estos dos procesos?





CAPÍTULO 13 ■ REPASO

PROPIEDADES Y FÓRMULAS

Límites (pp. 898, 903)

Decimos que el **límite de una función** f, cuando x se aproxima a a, es igual a L y se escribe como

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

siempre que los valores de $f(x)$ se puedan hacer arbitrariamente cercanos a L tomando a x suficientemente cercano a a.

Los límites **izquierdo** y **derecho** de f, cuando x se aproxima a a, se definen en forma similar:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

El límite de f, cuando x se aproxima a a, existe si y sólo si existen ambos límites, el izquierdo y el derecho: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Propiedades algebraicas de los límites (pp. 906-908)

Las siguientes **leyes de límites** son válidas:

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

Los siguientes **límites especiales** son válidos:

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Derivadas (p. 918)

Sea $y = f(x)$ una función. La **derivada de f en a**, que se denota por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En forma equivalente, la derivada $f'(a)$ es

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La derivada de f en a es la **pendiente de la recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.

La derivada de f en a es la **razón de cambio instantánea de y respecto a x** en $x = a$.

Límites en infinito (pp. 924-926)

Decimos que el **límite de una función** f, cuando x **tiende a infinito**, es L y se escribe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

suponiendo que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L tomando x suficientemente grande.

Decimos que **el límite de una función** f, cuando x **se aproxima al infinito negativo**, es L y se escribe

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

siempre que los valores de $f(x)$ puedan hacerse arbitrariamente cercanos a L tomando x suficientemente grande negativo.

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

El siguiente límite especial es válido, donde $k > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Límites de sucesiones (p. 928)

Decimos que una secuencia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tiene límite L y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

suponiendo que el n-ésimo término a_n de la sucesión se puede hacer arbitrariamente cercano a L tomando n suficientemente grande.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y si $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{x\to\infty} a_n = L$.

Área (pp. 935-936)

Sea f una función continua, definida en el intervalo $[a, b]$. El área A de la región que se encuentra debajo de la gráfica de f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos que la aproximan:

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{y} \qquad x_k = a + k\,\Delta x$$

Fórmulas de sumatorias (p. 936)

Las siguientes fórmulas de sumatorias son útiles para el cálculo de áreas:

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ***a*)** Explique qué significa $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

***b*)** Si $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$, ¿es posible que $f(2) = 3$?

***c*)** Encuentre $\lim_{x\to 2} x^2$.

2. Para evaluar el límite de una función, por lo general primero debemos escribir la función usando las reglas del álgebra. ¿Cuál es el primer paso lógico en la evaluación de cada uno de los siguientes límites?

***a*)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ***b*)** $\lim_{h\to 0} \dfrac{(5 + h)^2 - 25}{h}$

***c*)** $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$ ***d*)** $\lim_{x\to 7} \dfrac{\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{x}\right)}{x - 7}$

3. ***a*)** Explique qué significa decir:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 5 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 10$$

***b*)** Si se cumplen las dos ecuaciones del inciso *a*) ¿es posible que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$?

***c*)** Encuentre $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, donde f se define como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

***d*)** Para f dado en *c*), ¿existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

4. ***a*)** Defina la derivada $f'(a)$ de una función f en $x = a$.

***b*)** Exprese una formulación equivalente para $f'(a)$.

***c*)** Encuentre la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.

5. ***a*)** Dé dos diferentes interpretaciones de la derivada de la función $y = f(x)$ en $x = a$.

***b*)** Para la función $f(x) = x^2$ encuentre en la gráfica la pendiente de la tangente a la curva de f en el punto $(3, 9)$.

***c*)** Para la función $y = x^2$ encuentre la razón de cambio instantánea de y respecto a x cuando $x = 3$.

***d*)** Escriba las expresiones para la razón de cambio promedio de y respecto a x entre a y x y para la razón de cambio instantánea de y respecto a x en $x = a$.

6. ***a*)** Explique qué se entiende por $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Trace una figura para ilustrar diferentes maneras en las que esto puede suceder.

***b*)** Encuentre $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + x}{x^2 + 1}$.

***c*)** Explique por qué $\lim_{x\to\infty}$ sen x no existe.

7. ***a*)** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión, ¿qué se entiende por $\lim_{n\to\infty} a_n = L$? ¿Qué es una sucesión convergente?

***b*)** Encuentre $\lim_{n\to\infty} (-1)^n/n$.

8. ***a*)** Supongamos que S es la región bajo la gráfica de la función $y = f(x)$ y sobre el eje x, donde $a \le x \le b$. Explique cómo esta área se aproxima por rectángulos y escriba una expresión para el área de S como límite de sumas.

***b*)** Encuentre el área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ y sobre el eje x, entre $x = 0$ y $x = 3$.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA.
Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

EJERCICIOS



1–6 ■ Calcular límites numérica y gráficamente Use una tabla de valores para calcular el valor del límite. Luego use una calculadora graficadora para confirmar gráficamente su resultado.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ **2.** $\lim_{t\to -1} \dfrac{t + 1}{t^3 - t}$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$ **4.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{x}$

5. $\lim_{x\to 1^+} \ln\sqrt{x - 1}$ **6.** $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\tan x}{|x|}$

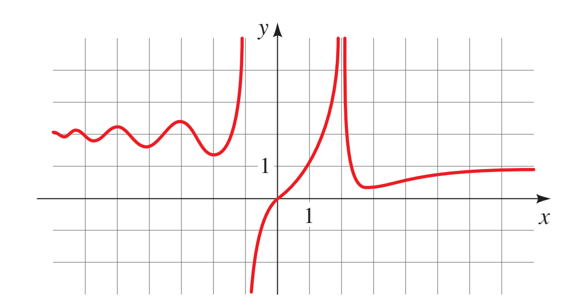
7. Límites de una gráfica La gráfica de f se muestra en la figura. Encuentre cada límite o explique por qué no existe.

***a*)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ***b*)** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

***c*)** $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ ***d*)** $\lim_{x\to -3} f(x)$

***e*)** $\lim_{x\to 4} f(x)$ ***f*)** $\lim_{x\to\infty} f(x)$

***g*)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ ***h*)** $\lim_{x\to 0} f(x)$



8. Límites unilaterales Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre cada límite o explique por qué no existe.

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to -1} f(x)$ *d*) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x\to 2} f(x)$

g) $\lim_{x\to 0} f(x)$ *h*) $\lim_{x\to 3} (f(x))^2$

9–20 ■ Determinar límites Use leyes de límites para evaluar el límite, si existe. Cuando sea posible utilice leyes de límites.

9. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-3}$ **10.** $\lim_{t\to 1} (t^3 - 3t + 6)$

11. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$ **12.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

13. $\lim_{u\to 0} \dfrac{(u+1)^2 - 1}{u}$ **14.** $\lim_{z\to 9} \dfrac{\sqrt{z} - 3}{z - 9}$

15. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x - 3}{|x - 3|}$ **16.** $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2 - 2x}\right)$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x - 4}$ **18.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 3x + 6}$

19. $\lim_{x\to\infty} \cos^2 x$ **20.** $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{t^4}{t^3 - 1}$

21–24 ■ Derivada de una función Encuentre la derivada de la función en el número dado.

21. $f(x) = 3x - 5$, en 4 **22.** $g(x) = 2x^2 - 1$, en -1

23. $f(x) = \sqrt{x}$, en 16 **24.** $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, en 1

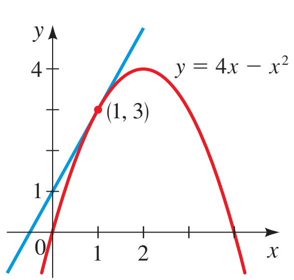
25–28 ■ Evaluar derivadas *a*) Encuentre $f'(a)$. *b*) Encuentre $f'(2)$ y $f'(-2)$.

25. $f(x) = 6 - 2x$ **26.** $f(x) = x^2 - 3x$

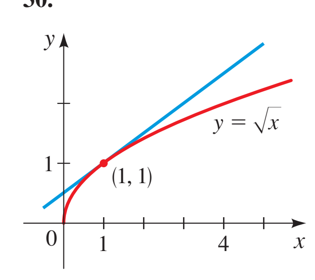
27. $f(x) = \sqrt{x + 6}$ **28.** $f(x) = \dfrac{4}{x}$

29–30 ■ Ecuación de una recta tangente Encuentre la ecuación de la recta tangente que se muestra en la figura.

29.



30.



31–34 ■ Ecuación de una recta tangente Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto dado.

31. $f(x) = 2x$, en $(3, 6)$ **32.** $f(x) = x^2 - 3$, en $(2, 1)$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ **34.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$, en $(3, 2)$

35. Velocidad de una piedra que cae Una piedra se deja caer desde el techo de un edificio a 640 pies sobre el suelo. Su altura (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 640 - 16t^2$.

a) Encuentre la velocidad de la piedra cuando $t = 2$.

b) Encuentre la velocidad de la piedra cuando $t = a$.

c) ¿En qué tiempo t llegará la piedra al suelo?

d) ¿Con qué velocidad caerá la piedra al suelo?

36. Razón de cambio instantánea Si un gas está confinado en un volumen fijo, entonces, de acuerdo con la ley de Boyle, el producto de la presión P y la temperatura T es una constante. Para un cierto gas, $PT = 100$, donde P se mide en lb/pulg² y T se mide en kelvins (K).

a) Exprese P como una función de T.

b) Encuentre la rapidez instantánea de cambio de P respecto a T cuando $T = 300$ K.

37–42 ■ Límite de una sucesión Si la sucesión es convergente encuentre su límite; si es divergente explique por qué.

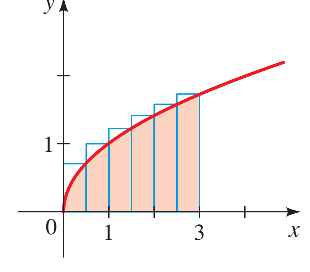
37. $a_n = \dfrac{n}{5n + 1}$ **38.** $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

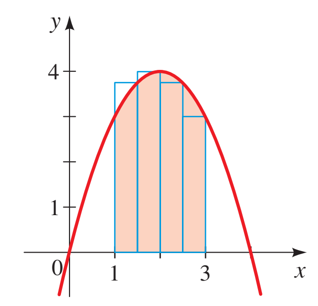
39. $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$ **40.** $a_n = \dfrac{n^3}{2n + 6}$

41. $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **42.** $a_n = \dfrac{10}{3^n}$

43–44 ■ Calcular áreas usando rectángulos Aproxime el área de la región sombreada bajo la gráfica de la función dada usando los rectángulos indicados. (Los rectángulos tienen ancho igual.)

43. $f(x) = \sqrt{x}$ **44.** $f(x) = 4x - x^2$





45–48 ■ Área bajo una curva Use la definición de límite de área para encontrar el área de la región bajo la gráfica de *f* en el intervalo dado.

45. $f(x) = 2x + 3$, $0 \le x \le 2$

46. $f(x) = x^2 + 1$, $0 \le x \le 3$

47. $f(x) = x^2 - x$, $1 \le x \le 2$

48. $f(x) = x^3$, $1 \le x \le 2$

CAPÍTULO 13 EXAMEN

1. ***a***) Use una tabla de valores para calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} 2x}$$

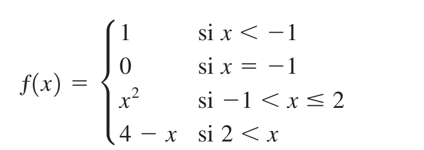
b) Utilice una calculadora graficadora para confirmar gráficamente su respuesta.

2. Para la función *f* definida por tramos cuya gráfica se muestra, encuentre:

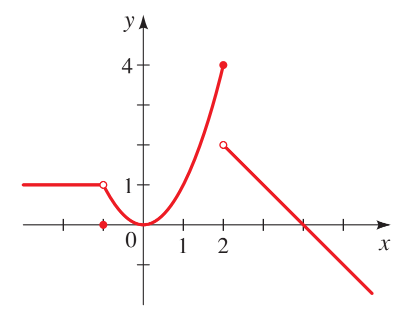
a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ ***b***) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ ***c***) $\lim_{x \to -1} f(x)$

d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ ***e***) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ ***f***) $\lim_{x \to 0} f(x)$

g) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ ***h***) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ ***i***) $\lim_{x \to 2} f(x)$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$



3. Evalúe el límite, si existe.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$ ***b***) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$ ***c***) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{|x - 2|}$ ***e***) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ ***f***) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 + x}$

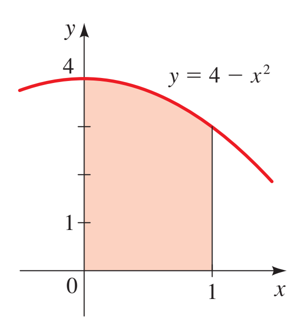
4. Sea $f(x) = x^2 - 2x$. Encuentre:

a) $f'(x)$ ***b***) $f'(-1), f'(1), f'(2)$

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto donde $x = 9$.

6. Encuentre el límite de la sucesión.

a) $a_n = \frac{n}{n^2 + 4}$ ***b***) $a_n = \sec n\pi$



7. La región trazada en la figura al margen está bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, arriba del intervalo $0 \le x \le 1$.

a) Aproxime el área de la región con cinco rectángulos, igualmente espaciados a lo largo del eje *x*, usando puntos extremos derechos para determinar las alturas de los rectángulos.

b) Use la definición de límite de área para encontrar el valor exacto del área de la región.

LAS RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS SE ENCUENTRAN DISPONIBLES EN LÍNEA. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

ENFOQUE SOBRE MODELADO

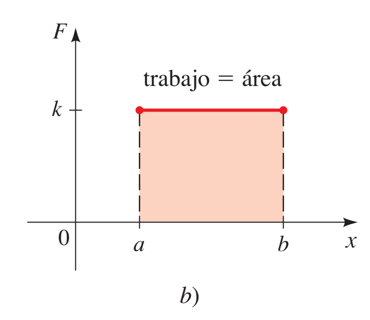
Interpretaciones del área

El área bajo la gráfica de una función se usa para modelar muchas cantidades en física, economía, ingeniería y otros campos. Esta es la razón por la cual el problema del área es tan importante. Ahora mostraremos la forma en que el concepto de trabajo (sección 9.2) se modela mediante el área. En los problemas se exploran otras aplicaciones diferentes.

Recuerde que el trabajo W que se realiza al mover un cuerpo es el producto de la fuerza F aplicada al cuerpo y la distancia d que el cuerpo se mueve:

$$W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Esta fórmula se utiliza si la fuerza es *constante*. Por ejemplo, suponga que usted empuja por el suelo una caja, moviéndola a lo largo del eje x positivo, de $x = a$ a $x = b$, y aplicando una fuerza constante $F = k$. En la figura 1*a*) se muestra la gráfica de F como función de la distancia x. Observe que el trabajo realizado es $W = Fd = k(b - a)$, que es el área bajo la gráfica de F (vea la figura 1*b*)).



a) *b*)

FIGURA 1 Una fuerza constante F

Pero ¿qué pasa si la fuerza *no es* constante? Por ejemplo, suponga que la fuerza que usted aplica a la caja varía con la distancia (empuja con más fuerza en ciertos lugares que en otros). Más precisamente, suponga que usted empuja la caja a lo largo del eje x en la dirección positiva, de $x = a$ a $x = b$, y que en cada punto x entre a y b aplica una fuerza $f(x)$ a la caja. La figura 2 muestra una gráfica de la fuerza f como función de la distancia x.

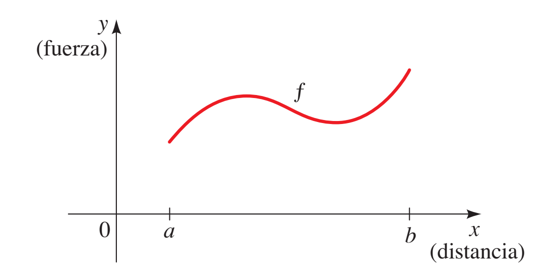


FIGURA 2 Una fuerza variable

¿Cuánto trabajo se realizó? No podemos aplicar la fórmula para trabajar directamente porque la fuerza no es constante. Entonces, dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx, como se muestra en la figura 3*a*) de la página siguiente. La fuerza en el punto extremo derecho del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x_k)$. Si n es grande, entonces Δx es pequeña, de modo que los valores de f no cambian mucho en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. En otras palabras, f es casi constante en el intervalo, y el trabajo W_k que se realiza para mover la caja de x_{k-1} a x_k es aproximadamente

$$W_k \approx f(x_k)\,\Delta x$$

Entonces podemos aproximar el trabajo realizado para mover la caja de $x = a$ a $x = b$ con la ecuación

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Parece que esta aproximación mejora conforme hacemos n más grande (y así hacemos el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ más pequeño). Por tanto, definimos el trabajo realizado para mover un cuerpo de a a b como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Observe que esta es precisamente el área bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$ como se define en la sección 13.5. Vea la figura 3b).

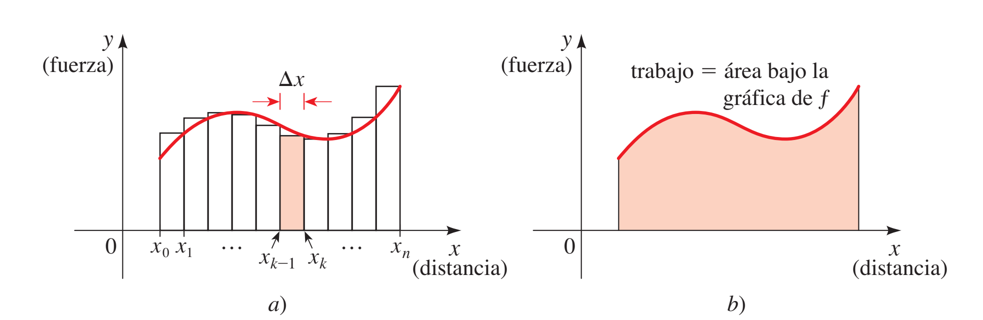


FIGURA 3 Aproximación de trabajo

EJEMPLO ■ Trabajo realizado por una fuerza variable

Un hombre empuja una caja a lo largo de una recta una distancia de 18 pies. A una distancia x de su punto de partida aplica una fuerza dada por $f(x) = 340 - x^2$. Encuentre el trabajo realizado por el hombre.

SOLUCIÓN En la figura 4 se muestra la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = 18$. Observe cómo varía la fuerza que el hombre aplica: empieza empujando con una fuerza de 340 lb pero cada vez aplica menos fuerza.

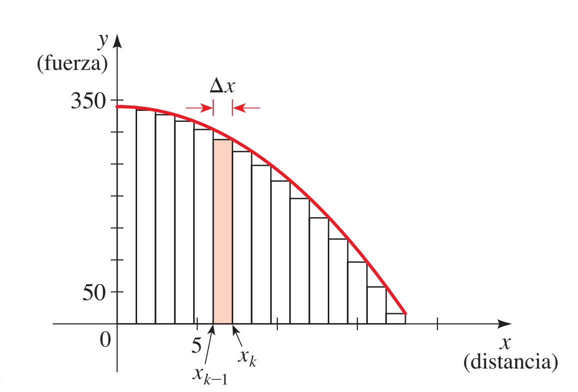


FIGURA 4

El trabajo realizado es el área bajo la gráfica de f en el intervalo [0, 18]. Para encontrar esta área empezamos por encontrar las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la n-ésima etapa.

Ancho: $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{18-0}{n} = \frac{18}{n}$$

Punto extremo derecho: $$x_k = a + k\,\Delta x = 0 + k\left(\frac{18}{n}\right) = \frac{18k}{n}$$

Altura: $$f(x_k) = f\left(\frac{18k}{n}\right) = 340 - \left(\frac{18k}{n}\right)^2$$

$$= 340 - \frac{324k^2}{n^2}$$

Así, de acuerdo con la definición de trabajo, obtenemos

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(340 - \frac{324k^2}{n^2}\right)\left(\frac{18}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n} \sum_{k=1}^{n} 340 - \frac{(18)(324)}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n} 340n - \frac{5\,832}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right)$$

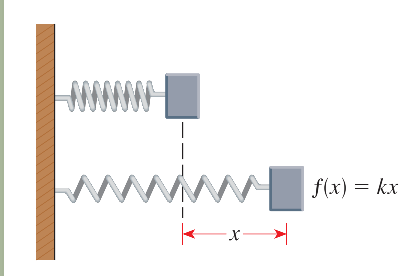
$$= \lim_{n\to\infty} \left(6\,120 - 972 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= 6\,120 - 972 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4\,176$$

Por tanto, el trabajo realizado por el hombre para mover la caja es de 4 176 pies-lb. ■

PROBLEMAS

1. **Trabajo realizado por un malacate** Se utiliza un malacate motorizado para jalar un árbol caído hacia un camión de transporte. El motor ejerce una fuerza de $f(x) = 1\,500 + 10x - \frac{1}{2}x^2$ lb sobre el árbol en el instante en que este se ha movido x pies. El árbol se debe mover una distancia de 40 pies, de $x = 0$ a $x = 40$. ¿Cuánto trabajo realiza el malacate para mover el árbol?

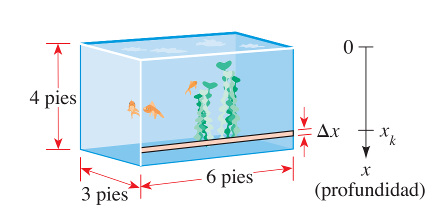


2. **Trabajo realizado por un resorte** La ley de Hooke dice que cuando un resorte se estira jala con una fuerza proporcional a la cantidad que se estiró. La constante de proporcionalidad es una característica del resorte conocida como **constante de resorte**. Entonces, un resorte con una constante de resorte k ejerce una fuerza $f(x) = kx$ cuando se estira una distancia x.

   Cierto resorte tiene una constante de resorte $k = 20$ lb/pie. Encuentre el trabajo realizado cuando el resorte se jala de modo que la cantidad por la que es estirado aumenta de $x = 0$ a $x = 2$ pies.

3. **Fuerza sobre el agua** Como lo sabe cualquier buzo, un cuerpo sumergido en el agua experimenta presión y, cuando aumenta la profundidad, también aumenta la presión del agua. A una profundidad de x pies, la presión del agua es $p(x) = 62.5x$ lb/pie^2. Para encontrar la fuerza ejercida por el agua sobre una superficie multiplicamos la presión por el área de la superficie:

$$\text{fuerza} = \text{presión} \times \text{área}$$



   Suponga que un acuario que mide 3 pies de ancho, 6 de largo y 4 de alto está lleno de agua. El fondo del acuario tiene un área de $3 \times 6 = 18$ pies^2 y experimenta presión hidráulica de $p(4) = 62.5 \times 4 = 250$ lb/pie^2. Entonces la fuerza total ejercida por el agua sobre el fondo es $250 \times 18 = 4\,500$ lb.

   El agua también ejerce una fuerza sobre los costados del acuario, pero esta no es tan fácil de calcular porque la presión aumenta de la superficie hacia abajo. Para calcular la fuerza sobre uno de los costados de 4 por 6 pies, dividimos su área en n delgadas franjas horizontales de ancho Δx, como se muestra en la figura. El área de cada franja es

$$\text{longitud} \times \text{ancho} = 6\,\Delta x$$

   Si el fondo de la k-ésima franja está a una profundidad x_k, entonces experimenta presión hidráulica de aproximadamente $p(x_k) = 62.5x_k$ lb/pie^2; mientras más delgada sea la franja más cercana es la aproximación. Entonces, sobre cada franja el agua ejerce una fuerza de

$$\text{presión} \times \text{área} = 62.5x_k \times 6\,\Delta x = 375x_k\,\Delta x \text{ lb}$$

   a) Explique por qué la fuerza total ejercida por el agua sobre los costados de 4 por 6 pies del acuario es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 375x_k\,\Delta x$$

   donde $\Delta x = 4/n$ y $x_k = 4k/n$.

b) ¿Qué área representa el límite del inciso *a*)?

c) Evalúe el límite del inciso *a*) para encontrar la fuerza ejercida por el agua sobre uno de los costados de 4 por 6 pies del acuario.

d) Use la misma técnica para encontrar la fuerza ejercida por el agua sobre uno de los costados de 4 por 3 pies del acuario.

[*Nota:* los ingenieros usan la técnica que se menciona en este problema para encontrar la fuerza total ejercida sobre una presa por el agua de un estanque que está atrás de la presa.]

4. Distancia recorrida por un auto Dado que la distancia = rapidez × tiempo, es fácil ver que un auto que corre, por ejemplo, a 70 mi/h durante 5 horas recorrerá una distancia de 350 millas. Pero, ¿qué pasa si varía la rapidez, como suele ser en la práctica?

a) Suponga que la rapidez de un cuerpo en movimiento en el tiempo t es $v(t)$. Explique por qué la distancia recorrida por el cuerpo entre los tiempos $t = a$ y $t = b$ es el área bajo la gráfica de v entre $t = a$ y $t = b$.

b) La rapidez de un auto t segundos después de que empieza a moverse está dada por la función $v(t) = 6t + 0.1t^3$ pies/s. Encuentre la distancia recorrida por el auto de $t = 0$ a $t = 5$ segundos.

5. Capacidad calorífica Si la temperatura a la intemperie llega a un máximo de 90°F un día y sólo a 80°F al siguiente, probablemente digamos que el primer día fue más caluroso que el segundo. Supongamos, sin embargo, que el primer día la temperatura estuvo debajo de 60°F durante la mayor parte del día, alcanzando la temperatura alta sólo brevemente, mientras que en el segundo día la temperatura permaneció arriba de 75°F todo el tiempo. Ahora, ¿cuál día es el más caluroso? Para medir mejor qué tan caluroso es un día en particular, los científicos usan el concepto de **grado de calentamiento-hora**. Si la temperatura es una constante D grados durante t horas entonces la "capacidad calorífica" generada en este periodo es Dt grados de calentamiento-hora.

$$\text{grado de calentamiento-hora} = \text{temperatura} \times \text{tiempo}$$

Si la temperatura no es constante, entonces el número de grado de calentamiento-hora es igual al área bajo la gráfica de la función de temperatura durante el periodo en cuestión.

a) En un día en particular, la temperatura (en °F) estuvo modelada por la función $D(t) = 61 + \frac{6}{5}t - \frac{1}{25}t^2$, donde t se midió en horas desde la medianoche. ¿Cuántos grados de calentamiento-hora se sintieron ese día, de $t = 0$ a $t = 24$?

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima en el día descrito en el inciso *a*)?

c) Otro día la temperatura (en °F) estuvo modelada por la función $E(t) = 50 + 5t - \frac{1}{4}t^2$. ¿Cuántos grados de calentamiento-hora se sintieron ese día?

d) ¿Cuál fue la máxima temperatura en el día descrito en el inciso *c*)?

e) ¿Cuál fue el día más "caluroso"?

Precálculo. Matemáticas para el cálculo, séptima edición proporciona a los estudiantes las herramientas necesarias para prepararlos en esta materia. El estudiante de cálculo requiere no sólo conocimientos técnicos, sino también una clara comprensión de los conceptos y es por ello que esta obra promueve que la *comprensión conceptual* y los *conocimientos técnicos* vayan de la mano y se refuercen entre sí.

Sus alumnos aprenderán a valorar el poder y la utilidad de las matemáticas para *modelar* el mundo real, ya que todos los temas que conforman este texto están encaminados a alcanzar dicho objetivo, además de estar organizados de tal forma que abarcan diferentes estilos de enseñanza. En particular, cada tema se presenta algebraicamente, gráficamente, numéricamente y verbalmente enfatizando las relaciones entre cada tipo de representación.

El propósito de esta séptima edición de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* es reafirmar la utilidad del libro como herramienta de enseñanza para los profesores y, para los estudiantes, como herramienta de aprendizaje.



ISBN-13: 978-607-526-279-6
ISBN-10: 607-526-279-2
9 786075 262796



Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com